

Índex

1.- Introducció.....	- 2 -
2.- Gestió de les carteres	- 3 -
3.- Estudi de la cartera	- 4 -
3.1.- Horitzó temporal.....	- 4 -
3.2.- Títols estudiats	- 4 -
3.3.- Dades estudiades.....	- 6 -
3.4.- Rendibilitat	- 6 -
3.5.- Volatilitat	- 7 -
3.6.- Matriu de covariàncies per al model de Markowitz	- 7 -
3.7.- Correlacions en el model de Markowitz i Sharpe.....	- 8 -
4.- Model de Markowitz	- 10 -
4.1.- Breu nota de bibliografia de Harry Markowitz.	- 10 -
4.2.- Hipòtesis del model de Markowitz.....	- 10 -
4.3.- Construcció de la frontera eficient i de la cartera optima.....	- 12 -
4.4.- Aplicació practica	- 23 -
5.- Perquè ampliem amb el model de Sharpe?.....	- 28 -
6.- Model de Sharpe.....	- 29 -
6.1.- Breu nota bibliogràfica de William Sharpe	- 29 -
6.2.- Hipòtesis del model de Sharpe	- 30 -
6.3.- Construcció de la frontera eficient i cartera optima	- 34 -
6.4.- Aplicació pràctica	- 42 -
7.- Teorema de la separació de Tobin	- 47 -
8.- Conclusions	- 49 -
9.- Bibliografia.....	- 51 -
10.- Annexos	- 52 -



1.- Introducció

Un dels motius per el qual ens hem endinsat en el tema dels valors continus a sigut la **motivació** que això comporta a poder comprendre com funcionen els mercats, com poden ser afectats i que podríem fer per poder aconseguir la millor cartera. També sabem que el mercat que mou tot aquest tema es molt competitiu no para mai, la cotització es viva i això ens motiva.

També podem parlar de la **motivació** que ens dona poder fer una simulació per poder aplicar-la després a la realitat.

El que es vol arribar aconseguir és poder veure'ns amb la decisió de saber quina es la selecció més adequada per tal de formar una cartera. I, és per això, que utilitzarem dos models per fer aquest estudi, els quals són, el model de **Markowitz** i el de **Sharpe**.

No obstant, hi ha un tercer escenari que no hem farem ús d'ell en aquest treball, que es el model de **Tobin**. Que integra actius financers de renda fixa sense risc per tal de fer una composició de cartera més complexa, també sabem que el teorema de separació de **Tobin** a sigut d'utilitat per establir estratègies de conversió de pagaments únics a fluxos de pagaments en depòsits definits.

En aquest treball, el principal objectiu és aconseguir la màxima rendibilitat a través d'actius purament de renda variable. I la intenció de reduir el risc sense tenir que fer ús de la renda fixa.



2.- Gestió de les carteres

En primer pas, comencem per la gestió de cartera ja es comú per els dos models que estudiarem.

La gestió de les carteres és un procés de **combinació** de diferents actius en una mateixa cartera dissenyada segons les preferències de l'inversor i el seguiment de l'evolució d'aquesta cartera.

Tot criteri utilitzat per a la gestió de cada una de les carteres es processat com únic ja que ha de ser un sistema compatible amb els objectius del client, juntament amb el risc que vol assumir i el capital que vol aportar. Per a tot això, les etapes que s'han de cobrir de forma específica en tota gestió de carteres.

Determinar el tipus de client amb el que estem treballant. S'ha de tenir present que tot inversors esta disposat a aconseguir la maximització del seu patrimoni, però que no tots els inversors estan disposats a assumir el mateix nivell de risc. Per això categoritzem el tipus de client en base a les seves característiques subjectives i també atenen a les seves restriccions fiscals, de mida de cartera, rotació, temps de permanència en el mercat, etc.

Quan l'usuari ja el tenim determinat es comença a concretar els **objectius** de la inversió, que podem resumir en els següents:

- 1- Nivell de risc.
- 2- Liquiditat.
- 3- Fiscalitat.

Aquests objectius han de ser quantificats numèricament per prevenir problemes en un futur.

Per últim s'aplicaran les estratègies a seguir en funció del que haguem obtingut dels dos passos previs a l'estudi, tot establin un pla d'actuació per la presa de decisions de la inversió.

Podem distingir bàsicament dos estratègies de cartera:

La gestió de cartera activa, que és aquella que pretén aconseguir un rendiment superior al dels índex borsaris, amb base ha una cuidada selecció d'actius, cobrant a canvi una comissió superior al cas de la gestió passiva de carteres. Dintre d'aquesta gestió podem trobar gestors que intenten anticipar-se als moviments dels mercats (modificant la beta de



la cartera gestionada), a buscadors de sectors econòmics (rotant la inversió en funció de les perspectives econòmiques) i a buscadors de títols (sobrepoderant els títols infravalorats e infraponderant aquells sobrevalorats).

L'altra gestió es la passiva, que és aquella que tracta d'aconseguir replicar la rendibilitat de l'índex de referència, simplement amb mesures d'indexació, sense utilitzar tècniques d'anàlisi de valor com l'anàlisi tècnic o fonamental.

3.- Estudi de la cartera

En el següent apartat realitzarem una observació sobre el protfolio que construïrem, a partir de les dades següents.

3.1.- Horitzó temporal

Per la realització de la nostra cartera hem agafat com a punt de partida el dia 1 de Desembre de 2011 fins a 1 de Desembre de 2016, que en total són **5 anys** de recorregut de les accions.

En un inici vam voler agafar l'horitzó temporal **d'un any** però calculant les rendibilitats anuals de tots els actius ens sortia que teníem rendibilitats negatives, com podem observar en el quadre.

	Santander	Inditex	BMW	Bayer	BASF
Rendibilitat	-0,028%	-0,014%	-0,081%	-0,128%	0,033%

Taula 1: Rendibilitat, elaboració pròpia per mitja d'Excel.

Així que vam decidir comprovar com seria si allarguéssim el nostre període, vam concloure que per a treure una rendibilitat mes o menys acceptable tindrien que passar cinc anys.

Per això s'han volgut agafa aquests cinc anys en comptes d'un any per les oscil·lacions tan notòries que hi hagut anteriorment.

3.2.- Títols estudiats

Els títols empleats per aquest estudi, han estat extrets del **EUROSTOXX 50**, del mercat europeu. Hem pensat en el mercat Europeu perquè agafant l'IBEX 35 ens condicionava



només a l'àmbit espanyol, i com volíem tindre més mostra i dades, hem pensat agafar-ho de l'Eurostoxx-50.

Les accions agafades han sigut les següents:

- Santander (SAN)
- Inditex (ITX)
- Bayerische Motoren Werke (BMW)
- Bayer (BAY)
- BASF (BAS)

El major pes que hem seguit a l'hora de la selecció de les accions utilitzades per valorar-les ha sigut la **diferenciació** de sector entre totes elles, cada una forma part de una activitat principal no igual a la resta d'accions escollides.

Ja que podem trobar accions d'un banc, accions d'una empresa de manufactura de tèxtil, accions d'una empresa de fabricació d'automòbils com també l'empresa de fàrmacs y químics.

Cada una d'elles te un públic i li afecten una mena de riscos, agafant aquests actius el que es vol aconseguir es la diversificació y també que els riscos directes que tingui puguin assemblar-se el mínim possible. Per posar una casuística, la pobresa del país pot afectar directament a tots els actius mencionats amb anterioritat però el valor de l'acció no només depèn d'això, ja que el canvi de normativa restrictiva en el país també es un altre risc de país. Rarament trauran una llei que afecti a la nostra cartera amb la mateixa afectació per a totes elles i que faci variar el preu.

Tots els actius estan ubicats amb sectors de **venta a públics diferenciats** i regulats de manera totalment diferents. El empitjorament de ventes o de la empresa de l'actiu no deuria empènyer a cap de les altres a la pujada o baixada a l'EUROSTOXX50, no estan correlacionades unes amb altres amb el **risc de sector**.

No ens hem volgut centrar en volum de cotització com tampoc en rendibilitats obtingudes ja que això hagués condicionat agafar les millors i en cap moment ho hem volgut així, el que em procurat a la tria dels actius son les diferents **branques de treball** a la que es dediquen. Per que, el que realment buscàvem era que la seva correlació sense tenir que calcular-la fos un resultat pròxim a 0 o de valor negatiu i en tot cas si apareix un valor

elevat, seria a priori per la relació de que son empreses del mateix país, en aquest cas d'Alemanya o Espanya.

3.3.- Dades estudiades

Per pogué fer la selecció de la nostra cartera hem utilitzat els preus de tancament diaris de cada un dels actius. D'aquesta manera obtenim dades de **1.264 dies de cotització** de cada una de les empreses.

A partir de les rendibilitat diàries, es podrà calcular la rendibilitat esperada diària com també la rendibilitat esperada quinquennal i la volatilitat quinquennal.

Aquestes dades diàries les hem consultat a la pagina de l'economista. (www.eleconomista.es).

(Veure Annex I, cotitzacions diàries)

3.4.- Rendibilitat

Alhora de construir la nostra cartera d'actius, hem calculat la rendibilitat simple per tal d'obtenir la rendibilitat diària. Mitjançant la següent formula:

$$Rend. Simp. = \frac{Preu(t) - Preu(t - 1)}{Preu(t - 1)}$$

A partir de la formula anterior obtindrem 1.264 rendibilitats, entre els períodes de desembre de 2011 fins a desembre de 2016.

Exemple d'una rendibilitat diària d'Inditex:

Data: 02/12/2011

$$Rend. Diària = \frac{12,71 - 12,73}{12,73} = -0,00157$$

Aquest -0,00157 es equivalent al -0,157% de variació en un dia i l'altre de l'acció.

Ja obtingudes les rendibilitats diàries, em calculat la mitjana de la rendibilitat diària de cada una de les accions emprades, el resultat del període 2011 a 2016 es el següent:

	Inditex	Bayer	BASF	BMW	Santander
Mitjana	0,085%	0,061%	0,045%	0,044%	0,004%

Taula 2: Mitjana, elaboració pròpia per mitja d'Excel.

L'acció amb més rendibilitat mitja és Inditex seguidament de Bayer, en contra partida Santander es la menys rendible de totes.

(Veure Annex 2, rendibilitats diàries)

3.5.- Volatilitat

Per tal de trobar la volatilitat de cada un dels nostres actius utilitzarem la següent fórmula, l'arrel quadrada de la seva variància, per aquest motiu ens caldrà resoldre la variància de les nostres empreses, pas previ a trobar la volatilitat.

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n (X_j - \bar{X})^2 \text{ on } j= 1$$

Un cop trobada aquesta variància, realitzarem l'arrel quadrada, per tal d'obtenir la volatilitat (desviació estàndard), $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

Com que en el nostre estudi de la cartera hem fet ús de l'eina Excel. Per aquets motiu utilitzem la fórmula =DESVETP(Nombre), on els valors introduïts són les 1.264 rendibilitats obtingudes (rendibilitats diàries).

	Santander	Inditex	BMW	Bayer	BASF
Variància	0,046%	0,025%	0,030%	0,026%	0,023%
Dev Estandar	2,156%	1,579%	1,733%	1,615%	1,501%

Taula 3: Volatilitat, elaboració pròpia per mitja d'Excel.

3.6.- Matriu de covariàncies per al model de Markowitz

En aquest apartat hem construït una matriu de covariàncies, ja que el seu ús serà exclusiu per al model de Markowitz.

La matriu de covariància a es una matriu quadrada que conte les variàncies i covariàncies associades amb diferents variables. Els elements de la diagonal de la matriu contenen les variàncies de les variables, mentre que els elements que es troben fora de la diagonal contenen les covariàncies entre totes les combinacions parells possibles de les variables.

Matriu de covariàncies					
	Santander	Inditex	BMW	Bayer	BASF
Santander	0,000464646	0,00019002	0,00021914	0,00018305	0,00019644
Inditex	0,000190021	0,00024933	0,0001495	0,00014361	0,00013608
BMW	0,000219137	0,0001495	0,00030029	0,00017765	0,00018145
Bayer	0,000183049	0,00014361	0,00017765	0,00026077	0,00018127
BASF	0,000196443	0,00013608	0,00018145	0,00018127	0,00022545

Taula 4: Matriu d'elaboració pròpia, per mitja d'Excel.

3.7.- Correlacions en el model de Markowitz i Sharpe.

A l'igual que la covariància, el coeficient de correlació mesura la relació lineal entre amb dues variables. Però a l'hora de dividir entre el producte de les desviacions típiques de les variables la unitat de mida es cancel·la i no es veuen afectades per canvis d'escala.

Per eliminar les unitat de mesura podríem dividir entre el producte de mitges, però no obtindríem determinades propietats que veurem a continuació.

La correlació entre els cinc actius ens indicarà el grau d'associació que existeix entre cada un d'ells. Aquests valors de correlació entén compresos entre:

$-1 \leq R_{X,Y} \leq 1$, acotat:

- $R_{X,Y} = 0$, no hi ha relació lineal entre les variables.
- $R_{X,Y} > 0$, relació lineal positiva, quan mes proper a 1, major es la relació lineal.
- Si $R_{X,Y} = 1$ relació lineal perfecta: $Y = a + bX$, amb $b > 0$.
- $R_{X,Y} < 0$, relació lineal negativa, quan mes proper a -1, major es la relació lineal (negativa).
- Si $R_{X,Y} = -1$ relació lineal perfecta: $Y = a + bX$, amb $b < 0$.

En el supòsit que la correlació fos de 0, significaria únicament que la relació entre els dos actius es nul·la, volen dir que indiferentment de com vagi una acció no afectaria a l'altra correlacionada en el seu mercat.

El càlcul de la correlació de cada actiu:

$$\rho_{x,y} = \sigma_{xy} / (\sigma_x \cdot \sigma_y)$$

Obtenint cada correlació podem muntar la següent matriu simètrica, ja que la relació que te X amb Y es la mateixa que la que te Y amb X:

	<i>Santander</i>	<i>Inditex</i>	<i>BMW</i>	<i>Bayer</i>	<i>BASF</i>
<i>Santander</i>	1	0,5583	0,5867	0,5259	0,6069
<i>Inditex</i>	0,5583	1	0,5464	0,5632	0,5740
<i>BMW</i>	0,5867	0,5464	1	0,6348	0,6974
<i>Bayer</i>	0,5259	0,5632	0,6348	1	0,7476
<i>BASF</i>	0,6069	0,5740	0,6974	0,7476	1

Taula 5: Coeficient de correlació entre actius, elaboració pròpia per mitja d'Excel.

Es pot observar en la matriu que no tenim cap acció amb **relació negativa**, un altre punt a observar es que tots tenen una relació positiva superior al 0,50 amb mínims del 0,5259 que seria la correlació entre les accions de Bayer i Santander. Per altra banda tenim las mes correlacionades amb una correlació de 0,7476 sen respectivament les accions de BASF i Bayer.

Amb un anàlisis en profunditat podem observar que BASF te una influencia notòria respecte a les altres amb una mitja de 0,7252 de correlació. Molt elevat per tenir una cartera amb accions de sectors tan diversos, com els mencionats anteriorment.

	<i>EUROSTOXX50</i>	<i>Santander</i>	<i>Inditex</i>	<i>BMW</i>	<i>BAYER</i>	<i>BASF</i>
<i>EUROSTOXX50</i>	1	-0,1567	-0,0809	-0,1250	-0,1392	-0,1320
<i>Santander</i>	-0,1567	1	0,5583	0,5867	0,5259	0,6069
<i>Inditex</i>	-0,0809	0,5583	1	0,5464	0,5632	0,5740
<i>BMW</i>	-0,1250	0,5867	0,5464	1	0,6348	0,6974
<i>BAYER</i>	-0,1392	0,5259	0,5632	0,6348	1	0,7476
<i>BASF</i>	-0,1320	0,6069	0,5740	0,6974	0,7476	1

Taula 6: Coeficient de correlació entre actius i el mercat, elaboració pròpia per mitja d'Excel.

Podem observar com la relació entre tots els actius que agafem amb comparació al mercat de l'Eurostoxx50 obtenim **nivells negatius** fins arribar a -0.1567 en el cas de Santander i amb mínims negatius de -0.0808 en el cas d'Inditex .

Això ens dona entendre la relació negativa que tenen, volent dir que si l'Eurostoxx50 tingues una tendència a l'alça els títols que hem seleccionat tindrien una tendència inversa (baixista).



4.- Model de Markowitz

Farem una estudi del Model de Markowitz, des de un breu resum de la seva vida, el model que estudiem i la seva aplicació practica d'aquest estudi.

4.1.- Breu nota de bibliografia de Harry Markowitz.

Harry Markowitz va néixer va néixer d'una família jueva fill de Morris i Mildred Markowitz el 24 d'agost del 1927 a Chicago Illinois (Estats Units d'Amèrica).

Harry va desenvolupar un gran interès durant la secundaria per la física i la filosofia, un interès que va continuar a durant els següent anys a d'universitat. Un cop acabats aquest estudis de filosofia i física va decidir continuar estudiant especialitzant-se en **economia**, cosa que durant aquest temps va tenir l'oportunitat de conèixer a grans economistes del moment entre ells Milton Friedman , Tjalling Koopmans , Jacob Marschak i Leonard Savage.

Mentre era estudiant va ser invitat a convertir-se en membre de la **Comissió Cowles** per a la investigació en Economia. Dintre de la comissió Markowitz va optar per aplicar les matemàtiques per el **anàlisis de mercats de valors** com a tema de dissertació, durant la investigació de la comprensió de l'actual model que consistia en el valor actual model de John Burr William, Markowitz es va adonar de que la teoria mancava d'un anàlisis de l'impacte del risc- aquesta teoria va conduir al desenvolupament de la cartera amb assignacions de condicions d'incertesa.

Al 1952 Harry Markowitz va treballa per a la corporació RAND, on va coneixes a George Dantzig cosa que amb l'ajuda de George va poder continuar la investigació desenvolupant encara mes l'algoritme de línia critica per a la identificació dels portafolis optima que més endavant van denominar com **frontera de Markowitz**. L'any 1955 va rebre el doctorat de la Universitat de Chicago amb una tesis sobre la teoria de carteres. El tema va ser tan revolucionari que Milton Firedman va argumentar que no era de caràcter econòmic.

4.2.- Hipòtesis del model de Markowitz

Markowitz desenvolupa el seu model sobre la base del comportament racional del inversor. És a dir, l'inversor **desitja** la rendibilitat i rebutja el risc. Per tant, per a ell una cartera serà eficient si proporciona la màxima rendibilitat possible per a un risc donat, o



de forma equivalent, si presenta el menor risc possible per a un nivell determinat de rendibilitat.

El model de Markowitz part de les següents **hipòtesis**:

- a) El rendiment de qualsevol cartera, és considerat una variable aleatòria, per a la qual el inversor estima una distribució de probabilitat per al període d'estudi. El valor esperat de la variable aleatòria és utilitzat per quantificar la rendibilitat de la inversió. Aquest període d'estudi ha de ser igual per tots els actius que aniran a compondre la cartera.
- b) La variància o la desviació estàndard són utilitzades per mesurar la dispersió, com a mesura del risc de la variable aleatòria rendibilitat; aquesta mesura s'ha de fer en forma individual, a cada actiu i a tota la cartera.
- c) La conducta racional de l'inversor el porta a preferir la composició d'una cartera que el representi la major rendibilitat, per a determinat nivell de risc ha poder assumir.

Però en el nostre anàlisi no tindrem en compte el **comportament** de l'inversor sobre la seva aversió al risc, ja que, només en centrarem en com construir una cartera òptima.

Plantejarem de forma matemàtica el model de la següent manera, buscarem el màxim rendiment de la cartera i la sotmetriem a restriccions (per el risc i proporció dels actius que conformen la cartera):

$$\text{Máx } R(E)_p = \sum_{i=1}^n w_i R(E_i)$$

Subjecta a:

$$\sigma^2(R_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \leq \sigma_0^2$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1; 1 \leq w_i \geq 0$$

On n és el nombre d'actius en la cartera; R_i és la variable aleatòria rendiment de l'actiu i ; $R(E_i)$ és el rendiment esperat l'actiu i ; R_p és la variable aleatòria rendiment de la cartera; $E(R_p)$ és el rendiment esperat de la cartera; w_i és la proporció del pressupost del inversor

destinat a l'actiu i ; $\sigma^2(R_p)$ és la variància del rendiment de la cartera;

σ_{ij} és la covariància entre els rendiments dels actius i i j ; σ_0^2 és la variància màxima admesa per l'inversor. La proporció invertida en cada títol de la cartera ha de ser positiva, no podem invertir un 150% en un actiu i un -50% en un altre; ja que estaríem endeutant-nos o fen que la posició sigui de venda. Hem de recorda que busquem la possessió del actiu en la nostre cartera.

4.3.- Construcció de la frontera eficient i de la cartera optima.

Amb anterioritat hem pogut veure la rendibilitat i la volatilitat dels nostres actius elegits per separat. Ara es hora de posar en conjunt tots els cinc actius que em triar i veure com obtenim la rendibilitat i la volatilitat del conjunt, en aquest cas podem denominar-ho cartera.

En la taula que es presenta a continuació es pot observar la ponderació que han seguit els actius, es un breu resum del que hem anat calculant prèviament.

El 100% de la cartera seria els cinc actius elegits així que la ponderació de ella queda com podem observar amb un 20% de ponderació individual. Ara que tenim la proporció podem calcular la rendibilitat diària esperada de la cartera.

$$R = \sum^n \bar{X} \cdot X$$

Observant la formula que hem posat podem descriure-la de la següent manera, fen el sumatori de la mitjana multiplicat per la proporció de cada un dels actius obtenim la rendibilitat.

	Ponderació	Rent. Diària	Rent. Anual	Rent. Als 5 anys
Santander	20,00%	0,001%	0,205%	1,017%
Inditex	20,00%	0,017%	4,328%	21,452%
BMW	20,00%	0,009%	2,268%	11,244%
Bayer	20,00%	0,012%	3,111%	15,418%
BASF	20,00%	0,009%	2,286%	11,334%
	100,00%	0,048%	12,198%	60,466%

Taula 7: Elaboració pròpia per mitja d'Excel.

Per calcular la rendibilitat anual hem seguit el criteri d'agafar com a número multiplicador el 255 que serien els dies hàbils que hi van haver durant l'any 2011 i com es pot observar també hem fet un pronòstic de com aniria la rendibilitat en un futur pròxim de **cinc anys**, que en aquest cas em agafat de multiplicador 1.264.

Tot això condicionat sempre a les ponderacions que elegim, en aquest cas triem 20% per el fet de que encara no hem calculat la frontera eficient.

Tenint ja calculada la rendibilitat de la cartera des d'un any fins al cinquè any podem passar a calcular la volatilitat, com passos previs, hem fet el càlcul de la matriu de coeficient de correlació des de Microsoft Excel hem utilitzat l'eina anàlisis de dades fent servir la funció coeficient de correlació. Ens ha permès crear-nos la matriu anteriorment mostrada la taula 5 de coeficient de correlació entre els actius que hem escollit.

Per tal de construir el risc total de la nostra cartera necessitarem una sèrie de dades que exposarem a continuació:

En primer lloc agafarem les proporcions utilitzades de cada acció:

	Santander	Inditex	BMW	Bayer	BASF	Total
Proporcions	20%	20%	20%	20%	20%	100%

Taula 8: Elaboració pròpia per mitja d'Excel.

Seguidament recuperarem les dades de la matriu de correlacions:

	<i>Santander</i>	<i>Inditex</i>	<i>BMW</i>	<i>Bayer</i>	<i>BASF</i>
Santander	1	0,5583	0,5867	0,5259	0,6069
Inditex	0,5583	1	0,5464	0,5632	0,5740
BMW	0,5867	0,5464	1	0,6348	0,6974
Bayer	0,5259	0,5632	0,6348	1	0,7476
BASF	0,6069	0,5740	0,6974	0,7476	1

Taula 9: Elaboració pròpia per mitja d'Excel.

I per últim agafem la matriu de risc de cada actiu.

Actiu	Risc (σ)
Santander	76,636%
Inditex	56,139%
BMW	61,609%
Bayer	57,412%
BASF	53,382%

Taula 10: Matriu de risc, elaboració pròpia per mitja d'Excel.

Una vegada obtenim les ponderacions, la matriu de coeficient de correlació i la matriu del risc. Utilitzarem la formula per calcula el **risc total de la cartera** en funció de la ponderació que nosaltres anirem assignant. La formula es la següent:

$$\sigma_{Cartera} = \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j r_{ij}}$$

En el següent quadre trobem la **rendibilitat diària** esperada de la cartera, la **anual** i la rendibilitat al cap de **5 anys**.

Les operacions que hem realitzat per poder trobar aquests valors han sigut molt senzills, a l'hora de calcular la rendibilitat diària esperada de la cartera prèviament hem calculat la rendibilitat diària de cada acció per separat i finalment fent el sumatori de els valors obtinguts en els cinc actius obtenim el valor.

Una vegada hem obtingut aquestes rendibilitats diàries de cada acció a sigut multiplicar la proporció que se li aplicat a cada acció (20% a cada una en el nostre cas) per així obtenir la rendibilitat diària esperada. En el càlcul de les següents rendibilitats (anual i als cinc anys) només hem hagut de multiplicar la rendibilitat diària obtinguda (en el cas de la anual *255 i per el cas dels cinc anys *1264) per cada una de les accions (Santander, Inditex, BMW, Bayer i BASF).

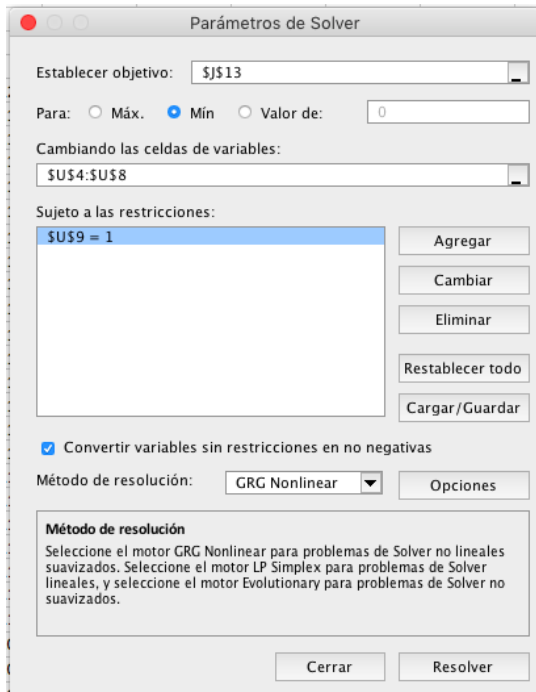
Obtenim el quadre següent:

Cartera	Diària	Anual	Cinc anys
Rend. Esperada	0,048%	12,198%	60,466%
Variança	0,020%	0,320%	0,713%
Desv. Típica	1,417%	22,621%	50,364%

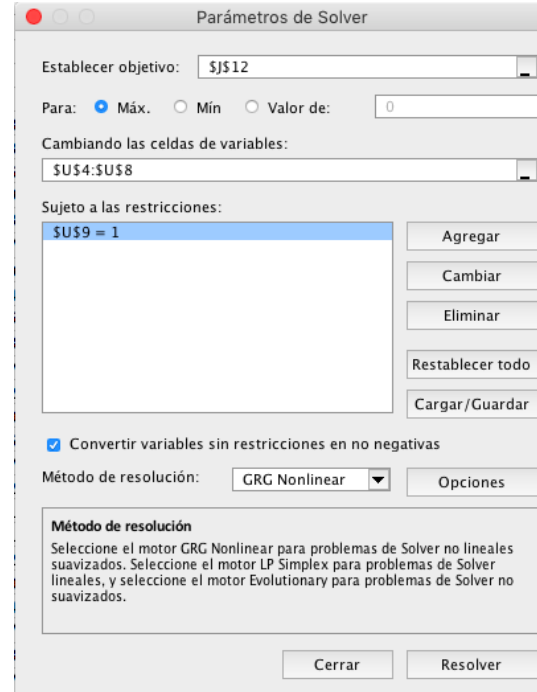
Taula 11: Elaboració pròpia per mitja d'Excel.

Tenint totes les dades pertinents, podem construir la frontera eficient, per a cada nivell de risc que estem disposats assolir i la seva rendibilitat pertinent. Es per això, que per realitzar aquest càlcul farem ús de Microsoft Excel, ja que disposa d'una eina anomenada **Solver** que permetrà fer aquest càlcul, que estem buscant.

Com a pas previ a la nostre construcció del quadre hem de determina el nivell mínim i màxim de risc; que faran referencia a la **mínima variància (MV)** i el de **màxim rendiment (X)**.



Imatge 1: Captura d'eina Solver, d'Excel.



Imatge 2: Captura d'eina Solver, d'Excel.

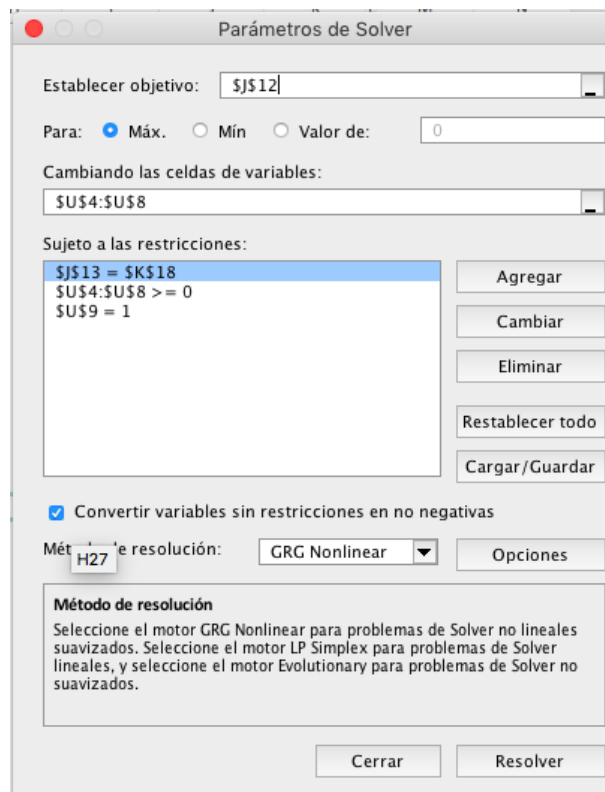
Per tal de poder obtenir la mínima variància hem de establir com **objectiu** de resolució la **casella del risc** de la cartera, buscant el mínim, les cel·les que són variables les que formen el valor de cada actiu i de restricció únicament posarem que la suma de la composició de la cartera com a màxim ha de ser 1 (el 100% de la cartera). En el cas de la màxim rendiment l'objectiu serà la **cel·la del rendiment** de la cartera i la combinació de cel·les variables i la restricció seran les mateixes.

Un cop obtenim aquests valors en permetran construir el quadra que ens permetrà compondre la cartera.

Per tal de poder **resoldre** amb l'eina Solver l'hi hem d'indicar una sèrie de paràmetres per tal de que és compleixi el objectiu que estem buscant, el de màxima rendibilitat.

1. Primer ens demana establir l'objectiu, que serà la casella del rendiment de la cartera, que volem que sigui el màxim.
2. La combinació de les caselles per les variables es la formada per les ponderacions de cada actiu que havíem seleccionat anteriorment.

3. Les restriccions que afegirem principalment són dues.
- Que el risc de la nostra cartera serà igual al que nosaltres anirem assignant.
 - Que la suma de les ponderacions de la nostra cartera mai poden ser major de 1 (o sigui el 100% de la cartera).
 - Com a restricció principal posarem que les ponderacions de les accions no poden ser mai inferiors a 0, ja que estaríem en posició de venda i no estaríem complint el model de Markowitz.



Imatge 3: Captura d'eina Solver, d'Excel

Com que hem obtingut un nivell mínim i màxim de risc hem creat un **interval** per tal de poder construir el quadre. Aquest ha sorgit de la resta del màxim i mínim, dividit per 9 que forma des de MV a X per tal de poder anomenar cada fila del quadra.

Un cop aplicats els **paràmetres** que hem designat ens donarà una resposta per cada **variable de risc** que hem obtingut anteriorment. Com a resultat obtindrem el següent.

Frontera 1			Actiu				
Port	Rend. (μ)	Risc (σ)	Santander	Inditex	BMW	Bayer	BASF
MV	78,824%	47,774%		36,99%	9,75%	17,07%	36,19%
1	89,170%	48,703%		54,73%	1,69%	23,61%	19,97%
2	93,502%	49,632%		62,24%		26,16%	11,59%
3	96,793%	50,562%		68,04%		27,91%	4,04%
4	99,521%	51,491%		74,35%		25,65%	
5	101,574%	52,421%		81,15%		18,85%	
6	103,253%	53,350%		86,72%		13,28%	
7	104,717%	54,280%		91,57%		8,43%	
8	106,039%	55,209%		95,95%		4,05%	
X	107,260%	56,139%		100,00%			

Taula 12: punts per frontera eficient de Markowitz, elaboració pròpia per mitja d'Excel.

El resultat del quadre ens mostra les **possibilitats** que tenim en la nostra frontera eficient. Combinant amb la funció d'utilitat del inversor (l'aversion al risc) ens donaria un punt exacte, per tal de saber quina es la combinació de cartera més adequada. Com podem observar Solver descarta totalment el actiu Santander, degut a que si comparem les rendibilitats i els riscos amb les altres 4 accions, es la que està amb pitjor posicionament. A diferència d'Inditex o BASF que son les dues millors per tal d'aconseguir un major rendiment i un risc menor comparant l'acció del Santander.

Per tal de observa diferents **reaccions** en la resolució de l'eina Solver i en la recerca de una frontera més **eficient**, hem decidit afegir més restriccions, per tal de veure si obtenim més rendibilitat o menor risc en la composició de la nostra cartera.

En la primera variació que hem decidit que afegirem una restricció més, la de que la **ponderació** màxima de cada actiu només pot arribar a ser el **50%** de la nostra cartera, amb el afany de voler força a Solver que ens cerqui una resposta més a complir la norma

de la **diversificació.**

Frontera 2			Actiu				
Port	Rend. (μ)	Risc (σ)	Santander	Inditex	BMW	Bayer	BASF
MV	78,824%	47,774%		36,99%	9,75%	17,07%	36,19%
1	84,373%	48,043%		46,50%	5,42%	20,58%	27,50%
2	86,668%	48,312%		50,00%	3,53%	23,11%	23,36%
3	88,033%	48,581%		50,00%	1,72%	29,75%	18,52%
4	89,003%	48,850%		50,00%	0,46%	34,47%	15,06%
5	89,798%	49,119%		50,00%		38,36%	11,64%
6	90,485%	49,388%		50,00%		41,72%	8,28%
7	91,097%	49,657%		50,00%		44,72%	5,28%
8	91,657%	49,926%		50,00%		47,46%	2,54%
X	92,176%	50,195%		50,00%		50,00%	

Taula 13: Frontera de Markowitz amb restricció de 50%, elaboració pròpia per mitja d'Excel.

Una vegada aplicat la primera restricció ens trobarem que Solver continua buscant la combinació de l'empresa Espanyola i Alemanya per tal de poder obtenir la major rendibilitat possible; però en el port 3 veurem com **Inditex** ja ha assolit el màxim de la restricció, en aquest punt Solver començar a buscar noves combinacions que aporten un rendibilitat en augment tant petita que es fa difícil assumir més risc en relació al benefici que podria aporta la cartera, si que obtenim major diversificació però no l'estem realment optimitzant.

Per últim, hem canviat la **restricció** anterior per la de que el màxim que pot pondera un actiu dins de la nostra cartera sigui del **30%**. Com ha resultat ens apareix el següent.

Frontera 3			Actiu				
Port	Rend. (μ)	Risc (σ)	Santander	Inditex	BMW	Bayer	BASF
MV	76,827%	47,979%		30,00%	15,28%	24,72%	30,00%
1	77,193%	47,987%		30,00%	13,51%	26,49%	30,00%
2	77,346%	47,996%		30,00%	12,79%	27,21%	30,00%
3	77,463%	48,004%		30,00%	12,23%	27,77%	30,00%
4	77,561%	48,013%		30,00%	11,76%	28,24%	30,00%
5	77,648%	48,021%		30,00%	11,34%	28,66%	30,00%
6	77,726%	48,029%		30,00%	10,97%	29,03%	30,00%
7	77,798%	48,038%		30,00%	10,62%	29,38%	30,00%
8	77,866%	48,046%		30,00%	10,30%	29,70%	30,00%
X	77,928%	48,054%		30,00%	10,00%	30,00%	30,00%

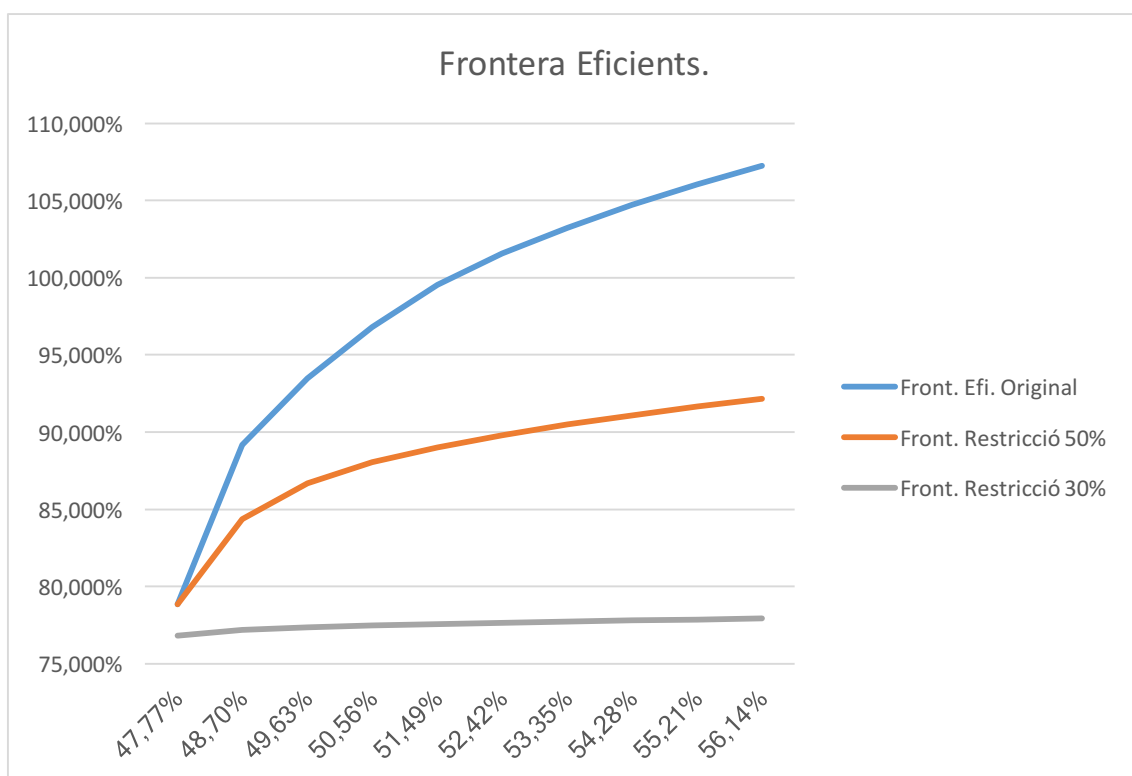
Taula 14: Frontera eficient amb restricció del 30%, elaboració pròpia per mitja d'Excel.

En aquesta ultima restricció ens trobem que des de el primer moment que fa una combinació de la cartera, els actius d'**Inditex** i **BASF** ja tenen el 30% del nostre portafolis, i **Bayer** es posa en tercera posició amb un 25% del volum. Si comparem les rendibilitats que podem obtenir són encara més baixes que en les fronteres anteriorment calculades. El risc també es veu disminuït.

Després d'obtenir els resultats de les tres fronteres eficients, dos d'aquestes amb restricció, podem dir que el fet de anar afegint **restricció** provoquem un pèrdua de rendiment i de risc. Però ha diferencia de la frontera original de Markowitz respecte les altres dues, es que **obtenim** un rendiment més elevat amb proporció del risc que s'obté.

Observant la gràfica de fronteres eficients podem apreciar com la que ens acaba donant una rendibilitat més elevada és la frontera sense **cap restricció**, ens dona una frontera més rica en els dos sentits, tan del risc que podem anar assumint, com la combinació que ens donarà serà la més adequada per obtenir el rendiment més alt possible.

Podem observar com augmentat un 1% el risc base suportable, ja tenim un gran creixement de la rendibilitat en concret respecte a la frontera amb restricció de 50% tindríem un guany d'un **6%** i si observem la frontera amb restricció del 30% es pot observar que assolim el mínim risc la diferència es d'un **12%** mes o menys.



Gràfic 1: Comparació de fronteres, elaboració pròpia per mitja d'Excel.

En el apartat de la **probabilitat**, una de les hipòtesis del model Markowitz és que les variables aleatòries de la rendibilitat de tots els actius es distribueixen segons llei normals.

Es per això, que seguint una distribució normal, el 68% dels valors es troben en una distancia menor que la desviació típica. Representa que una probabilitat del 68%, la nostra

rendibilitat obtinguda estarà a \pm la volatilitat respecte la rendibilitat. I

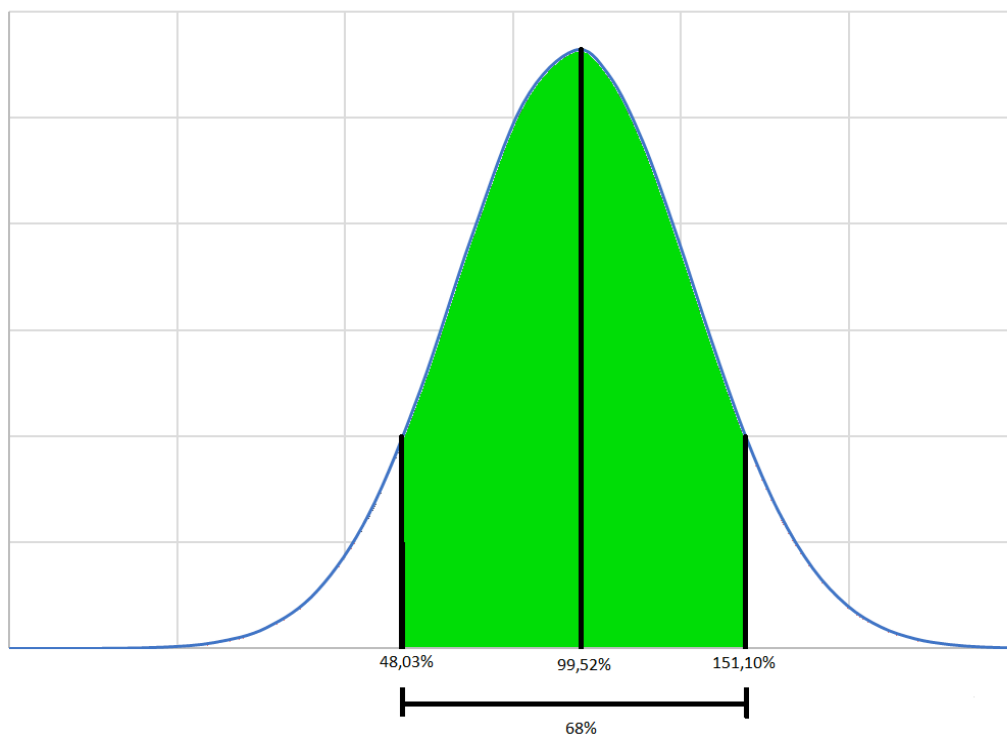
en tot cas un 95% dels casos es a \pm a 2 vegades el risc de la cartera.

Al analitzar la probabilitat dins d'una distribució normal, utilitzarem la campana de Gauss.

Per una rendibilitat esperada segons la probabilitat del 68%.

- Rendibilitat esperada: 99,52%
- Probabilitat superior: $99,52\% + 51,49\% = 151,01\%$
- Probabilitat inferior: $99,52\% - 51,49\% = 48,03\%$

Campana de Gauss segons frontera eficient de Markowitz



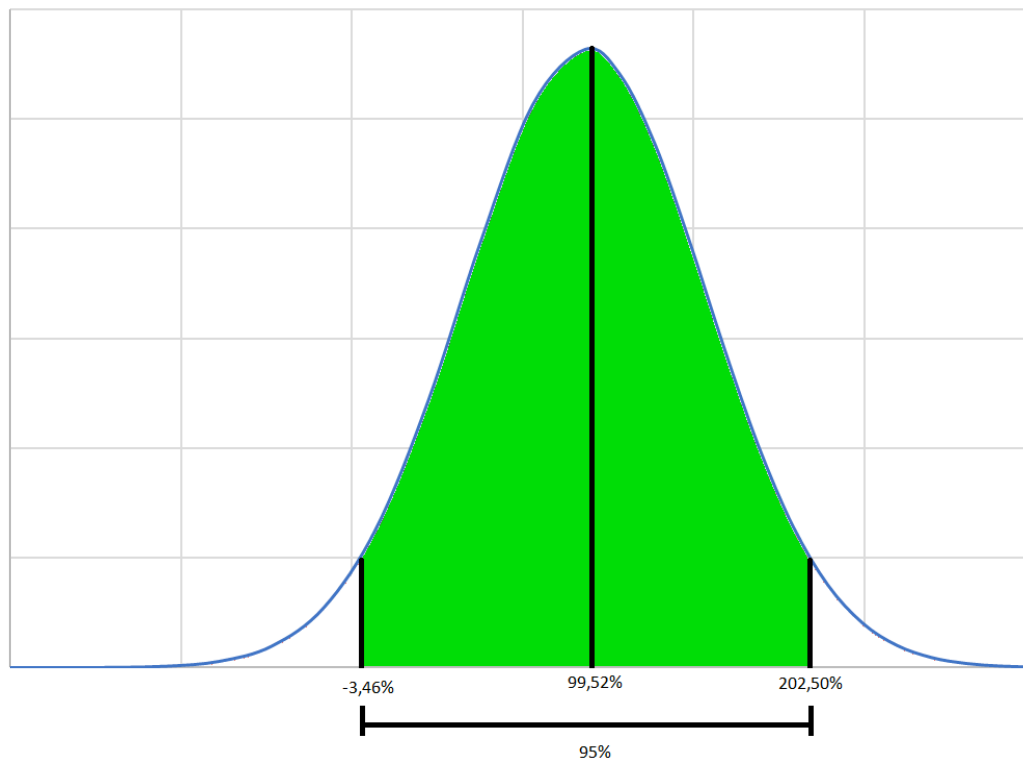
Gràfic 2: Campana de Gauss, probabilitat del 68%, elaboració pròpia.

Podem dir que dintre de la probabilitat del 68% ens trobarem en una rendibilitat esperada del 48,03% fins a 151,01%.

Per una rendibilitat esperada segons la probabilitat del 95%.

- Rendibilitat esperada: 99,52%
- Probabilitat superior: $99,52\% + (2*51,49\%) = 202,5\%$
- Probabilitat inferior: $99,52\% - (2*51,49\%) = -3,46$

Campana de Gauss segons frontera eficient de Markowitz



Gràfic 3: Campana de Gauss, probabilitat del 95%, elaboració pròpia.



Segons la probabilitat del 95% en trobaríem en una rendibilitat esperada entre els intervals de -3,46% fins a 202,5%.

4.4.- Aplicació practica

Fent un supòsit d'aplicar la cartera més **beneficiosa** segons els punts que hem trobat de la frontera eficient, realitzarem el càlcul en tres punts diferents d'aquesta.

En el supòsit que es plantejarà tindrem un inversor amb un perfil arriscat però que només vol comprar uns actius en concret 5, els que hem estat estudiant amb anterioritat (Santander, Inditex, BMW, Bayer, BASF).

Aquests cinc actius es **mantindran** a la nostra cartera durant un període de **5 anys**, fent una gestió passiva de la mateixa, comprant-los a dia 01/12/2011 i venent-los a dia 01/12/2016.

Suposant que l'inversor volgués **invertir** 500.000 euros i els volem invertir en una cartera eficient amb el mínim risc.

Supòsit 1: punt de menys risc en la frontera eficient.

Analitzant la millor frontera eficient de les tres ens trobem amb que tenim que invertir un 36,99% en Inditex, un 9,75% a BMW un 17,07% a Bayer i un 36,19% a BASF per aconseguir una rendibilitat esperada del 78,824% associat a un risc del 47,774%.

Tenint les dades següents:

	Inditex	BMW	Bayer	BASF
01/12/2011	12,606	55,63	48,305	53,88
01/12/2016	32,15	80,16	88,09	81,11

Taula 15: Còtització dels actius, amb 5 anys de diferència. Informació extreta de www.expansion.com.

Dividends Inditex	
Data	Import
02/11/2016	0,16 €
02/11/2016	0,14 €
28/04/2016	0,30 €
03/11/2015	0,14 €
03/11/2015	0,12 €
04/05/2015	0,26 €
03/11/2014	0,14 €
03/11/2014	0,10 €
02/05/2014	0,24 €
04/11/2013	0,16 €
04/11/2013	0,06 €
02/05/2013	0,22 €
02/11/2012	0,04 €
02/11/2012	0,14 €
02/05/2012	0,18 €
Suma	2,40 €

Dividends BMW	
Data	Import
13/05/2016	3,20 €
14/05/2015	2,90 €
Suma	6,10 €

Dividends BASF	
Data	Import
02/05/2016	2,90 €
04/05/2015	2,80 €
Suma	5,70 €

Dividend Bayer	
Data	Import
05/05/2016	1,84 €
28/05/2015	1,66 €
30/04/2014	1,55 €
29/04/2013	1,40 €
Suma	6,44 €

Taula 16: Grup de taules dels dividends de cada acció. Informació extreta de www.expansion.com

Llavors si disposem de 500.000 euros, el capital quedaria repartir de la

	Preu 01/12/2011	Ponderació	Cap. Invertit	Títols comprats
Inditex	12,606	36,99%	184.950,00 €	14.671
BMW	55,63	9,75%	48.750,00 €	876
Bayer	48,305	17,07%	85.350,00 €	1.766
BASF	53,88	36,19%	180.950,00 €	3.358
		100,00%	500.000,00 €	20.671

següent manera:

Taula 17: Inversió per la cartera, supòsit 1. Elaboració pròpia per mitja d'Excel.

Suposant que estem a 1 de desembre de 2016 i volem liquidar la cartera per tal de veure quin rendiment ens han donat, ens trobem amb que el preu de l'acció a pujat en tots els títols, però també tenim que veure que tots els títols han obtingut una sèrie de dividendes que tindrem que sumar.

Liquidació:

❖ Tenint els següents dividendes:

- Inditex: 2,40€/Acció
- BMW: 6,10€/Acció
- Bayer: 6,44€/Acció
- BASF: 5,70€/Acció

	Dividendes	Accions	Import
Inditex	2,40 €	14.671	35.210,40 €
BMW	6,10 €	876	5.343,60 €
Bayer	6,44 €	1.766	11.373,04 €
BASF	5,70 €	3.358	19.140,60 €
		TOTAL	71.067,64 €

Taula 18: Elaboració pròpia per mitja d'Excel.

❖ Venda de les accions:

- Inditex 14.672 * 32,15€
- BMW 876 * 80,16€
- Bayer 1.767 * 88,09€
- BASF 3.358 * 81,11€

	Accions	Preu venda	Import
Inditex	14.671	32,15 €	471.672,65 €
BMW	876	80,16 €	70.220,16 €
Bayer	1.766	88,09 €	155.566,94 €
BASF	3.358	81,11 €	272.367,38 €
		TOTAL	969.827,13 €

Taula 19: Elaboració pròpia per mitja d'Excel.

❖ Rendibilitat de la operació:

$$R = \frac{(71.067,64 + 969.987,13) - 500.000,00}{500.000,00} * 100 = 108,18\%$$

Teníem una rendibilitat esperada d'un 78,82% amb un risc del 47,77% però hem extret d'aquesta cartera un 108,21% per un **29,39% per damunt** de l'esperat.

Supòsit 2: punt mig de la frontera eficient.

En aquest cas utilitzarem la combinació de Inditex amb 81,15% i Bayer 18,85% per invertir en la nostra cartera. Això ens produiria una rendibilitat esperada del 101,57% i un risc del 52,41%.

Amb la mateixa cotització que en el supòsit 1 (taula 15) i el mateix repartiment de dividends (taula 16) i els 500.000€ per la inversió, els títols comprats serien els següents:

	Preu 01/12/2011	Ponderació	Cap. Invertit	Titols comprats
Inditex	12,606	81,15%	405.768,51 €	32.188
BMW	55,63		- €	-
Bayer	48,305	18,85%	94.231,49 €	1.950
BASF	53,88		- €	-
		100,00%	500.000,00 €	34.138

Taula 20: Inversió per la cartera, supòsit 2. Elaboració pròpia per mitja d'Excel.

Arribat el dia 1 de desembre de 2016, realitzarem la liquidació de la cartera. Per tal de poder veure el rendiment esperat i si aquest difereix molt del rendiment de la operació. La cotització d'aquest dia respecte del dia de la compra observarem que ha augmentat i que també ha produït uns dividends que hem calcular.

Liquidació:

- ❖ Tenim els següents **dividends**, repetim la mateixa operació de multiplica els dividends per les accions que tenim, igual que en supòsit 1.

	Dividends	Accions	Import
Inditex	2,40 €	32.188	77.251,20 €
BMW	6,10 €	-	- €
Bayer	6,44 €	1.950	12.558,00 €
BASF	5,70 €	-	- €
		TOTAL	89.809,20 €

Taula 21: Elaboració pròpia per mitja d'Excel.

- ❖ La **venta** de les accions, per la venda d'accions també realitzem la mateixa operació, de multiplicació, igual que el supòsit 1.

	Accions	Preu venda	Import
Inditex	32.188	32,15 €	1.034.844,20 €
BMW	-	80,16 €	- €
Bayer	1.950	88,09 €	171.775,50 €
BASF	-	81,11 €	- €
		TOTAL	1.206.619,70 €

Taula 22: Elaboració pròpia per mitja d'Excel.

- ❖ **Rendibilitat** de la operació:

$$R = \frac{(1206619,7 + 89809,2) - 500.000,00}{500.000,00} * 100 = 159,29\%$$

Obtenim una rendibilitat de 159,29%, suposa un **57,72% més** que la rendibilitat esperada que la frontera eficient marcava, la de 101,57% i amb un risc de 52,41%.

Observem que estem perdent **diversificació** de la cartera, ja que només invertim en 2 accions diferents. En comparació amb el supòsit 1, estem obtenint un 27,72% més, per un 4,64% més de risc que tindria que assumir el inversor. Suposa una proporció aproximada de 1/7 de risc/rendiment que el inversor hauria de suportar.

Supòsit 3: punt de màxim rendiment esperat i màxim risc.

La combinació per aquest cas es la de fer una cartera de 100% Inditex. Que repercutirà una rendibilitat esperada de 107,26% i un risc de 56,14%.

Amb la mateixa cotització que en el supòsit 1 (taula 15) i el mateix repartiment de dividends (taula 16) i els 500.000€ per la inversió, els títols comprats serien els següents:

	Preu 01/12/2011	Ponderació	Cap. Invertit	Títols comprats
Inditex	12,606	100,00%	500.000,00 €	39.663
BMW	55,63	0,00%	- €	-
Bayer	48,305	0,00%	- €	-
BASF	53,88	0,00%	- €	-
		100,00%	500.000,00 €	39.663

Taula 23: Inversió per la cartera, supòsit 2. Elaboració pròpia per mitja d'Excel.

Arribat el dia 1 de desembre de 2016, realitzarem la liquidació de la cartera. Per tal de poder veure el rendiment esperat i si aquest difereix molt del rendiment de la operació. La cotització d'aquest dia respecte del dia de la compra observarem que ha augmentat i que també ha produït uns dividends que hem calcular.

Liquidació:

- ❖ Tenim els següents **dividends**, repetim la mateixa operació de multiplica els dividends per les accions que tenim, igual que en supòsit 1.

	Dividends	Accions	Import
Inditex	2,40 €	39.663	95.191,20 €
BMW	6,10 €	-	- €
Bayer	6,44 €	-	- €
BASF	5,70 €	-	- €
		TOTAL	95.191,20 €

Taula 24: Elaboració pròpia per mitja d'Excel.

- ❖ La **venta** de les accions, per la venta d'accions també realitzem la mateixa operació, de multiplicació, igual que el supòsit 1.

	Accions	Preu venta	Import
Inditex	39.663	32,15 €	1.275.165,45 €
BMW	-	80,16 €	- €
Bayer	-	88,09 €	- €
BASF	-	81,11 €	- €
		TOTAL	1.275.165,45 €

Taula 25: Elaboració pròpia per mitja d'Excel.

- ❖ **Rendibilitat** de la operació:

$$R = \frac{(1275165,45 + 95191,2) - 500.000,00}{500.000,00} * 100 = 174,07\%$$

En aquest cas la diferencia de rendibilitat es de **66,81% més** que la rendibilitat esperada que ens marcava la frontera eficient era de 107,26% i un risc de 56,14%.

A primera vista tindrem que la diversificació ha quedat anul·lada, ja que només construïm una cartera comprant solament Inditex. En comparació amb el supòsit 2, observem que la rendibilitat es un 9,09% més de rendiment per 3,73% més de risc. La proporció aproximada es de 1/3 de risc/rendiment. Podem extreure que la fracció a assumir respecte el supòsit 2 es més perjudicial. L'inversor ha d'assumir més risc per molt poc rendiment.



5.- Perquè ampliem amb el model de Sharpe?

El model desenvolupat per Markowitz presenta grans problemes a l'hora d'establir-ne la seva aplicació practica.

- 1- L'estimació d'un elevat nombre de **paràmetres** :
 - a. Les estimacions relatives als rendiments esperats dels diferents actius que componen el nostre àmbit d'inversió.
 - b. Les estimacions relatives a les variàncies dels rendiments esperats dels diferents actius que hem contemplat en el punt anterior.
 - c. Totes les covariàncies entre cada parell d'actius que hem contemplar en els punts a i b.

La **formació** de la cartera a partir d'un conjunt d'actius mes o menys nombrosos pot comportar una certa complicació donat que estem requerint l'estimació d'un gran nombre de paràmetres com son esperances, variàncies y covariàncies (totes per cada actiu agafat en la nostra cartera).

Com hem vist, l'eficiència es manifesta amb el procés de **diversificació**, per tant quant més valors introduïm a la cartera, més risc diversificat tenim. Per tant, si volem fer eficient aquest procés, serà necessari contemplar un elevat nombre de valors i treballar amb un volum prou considerable d'estimacions de les diferents variables rellevants: esperances, variàncies i covariàncies. Com a exemple perquè ens féssim una idea, si agaféssim com a cartera tot el mercat continu espanyol (IBEX35) el volum d'estimacions pujaria a mes de 6.200, una barbaritat si contemplem que nomes tindriem a la cartera 35 accions.

- 2- És el procés **d'optimització** d'un programa quadràtic paramètric. Aquest problema en els seus inicis un gran problema per a l'aplicació per part dels diferents agents interessats en l'optimització del procés de selecció de carteres, ja que buscaven l'eficiència aplicant el model de Markowitz. No obstant el desenvolupament informàtic i tecnològic ha fet que avui en dia això no sigui un greu problema perquè qualsevol persona té un ordinador prou capacitat per al processament d'operacions varies.



I el motiu més **diferencial** pel que hem volgut ampliar amb el model ha sigut perquè Sharpe considera que no només hi ha un risc específic en l'acció sinó que també es pot observar un risc sistemàtic.

6.- Model de Sharpe.

Farem una estudi del Model de Sharpe, des de un breu resum de la seva vida, el model que estudiem, fins a la seva aplicació practica d'aquest estudi.

6.1.- Breu nota bibliogràfica de William Sharpe

William Forsythe Sharpe va nàixer a Boston el 16 de juny de 1934, economista nord-americà que va destacar en l'anàlisi financer de carteres d'inversions.

Va realitzar part dels seus estudis primaris i de secundària a Califòrnia, on es va establir la seva família i, en finalitzar el batxiller, va iniciar la seva carrera universitària al Campus de Berkeley de la Universitat californiana, des del qual es va traslladar al de Los Angeles per realitzar estudis en **economia d'empreses**. En aquesta institució va rebre dues llicenciatures, que va complementar el 1956 amb un mestratge. Va continuar estudis de doctorat a la Universitat de Califòrnia, sota la direcció de Fred Weston, qui el va introduir en l'anàlisi financer, i de Armin Alchian, qui li va formar en la metodologia de la investigació. Amb ells, va començar a investigar els treballs que havia desenvolupat Markowitz sobre anàlisi de carteres.

Al 1956 va obtenir una ocupació com a economista a la Corporació RAND, on va realitzar treballs d'investigació i es va familiaritzar amb eines de programació informàtica aplicades a l'anàlisi econòmica, que va emprar també en els treballs de la seva tesi. En la seva obra doctoral va plantejar alguns aspectes relatius als preus de transferència i per al seu desenvolupament es va posar en contacte amb Markowitz, amb qui va treballar en els diferents models d'anàlisi de carteres. El 1961 va obtenir el grau de doctor en UCLA i va aconseguir un lloc com a professor de finances a la Universitat de Washington, en el qual va impartir diverses matèries.

En aquells temps, Sharpe va ampliar el seu model d'anàlisi de teoria de l'equilibri a un nombre major de factors i va contrastar la similitud de resultats entre tots dos models. Amb aquestes investigacions, es va construir el primer model del Capital Assets Pricing Model (CAPM). Va deixar la Universitat de Washington el 1968 per involucrar-se en la



creació d'una Escola de Ciències Socials, sota un perspectiva quantitativa. A aquest projecte va estar vinculat dos anys, fins que el 1970 es va traslladar a la Universitat de Stanford com a professor. En aquesta institució va continuar amb les seves responsabilitats en la docència i en la investigació i el 1973 va veure reconeguda la seva tasca acadèmica amb l'assignació de la Càtedra Timken en Finances de la Universitat de Stanford.

Durant els anys setanta, va ampliar els seus coneixements relatius a l'elecció de carteres d'inversions sota l'anàlisi d'equilibri en els mercats de capitals i fruit d'aquesta investigació va ser la publicació el 1978 de *Investments* al costat de Gordon Alexander. Al mateix temps que mantenia el seu compromís amb l'ensenyament, va realitzar algunes tasques d'assessoria d'inversions per a empreses en què va ampliar les seves investigacions sobre el mesurament de riscos diversificable i de mercat, que van resultar de gran interès a l'hora d'establir carteres òptimes.

A la dècada dels anys vuitanta del segle XX, Sharpe va divulgar els seus models d'anàlisi de carteres d'inversions en escoles de negocis i va fundar l'Institut de Recerca Sharpe-Russell per a les Finances. Des de 1989, any en què va passar a ser professor emèrit de la Càtedra Timken de Finances, es va dedicar a l'activitat privada i a la investigació. Sharpe ha estat assessor de diverses organitzacions i de gran nombre de signatures.

6.2.- Hipòtesis del model de Sharpe

Amb Sharpe el concepte de risc que es planteja canvia i passa a ser a dos nivells:

Risc Específic

Propi o individual dels valors en què acabarà invertint. Aquest és un risc aleatori no observable, és una incertesa que es pot **eliminar** introduint més valors a la cartera. Així, quants més valors tinguem en possessió (més diversificada) menys afectarà el fet que un dels valors es comporti de forma adversa respecte a l'evolució del mercat. Sempre dependent de les característiques específiques de l'entitat o l'empresa emissora: naturalesa de la seva activitat productiva, competència de la gerència, plans d'expansió, I + D, solvència financera, dimensió, grau de diversificació sectorial i territorial, etc.

Risc Sistemàtic

El propi **mercat** on els valors estan cotitzant. Es un risc que s'ha d'assumir pel fet de tenir inversions materialitzades en renda variable. No depèn de les característiques individuals del títol, sinó que també d'altres factors com poden ser la conjuntura econòmica general, que incideixen sobre el comportament dels preus en el mercat de valors. També se l'anomena risc no diversificable ja que es un risc que es te que assumir si estem invertint en el mercat de valors.

Es planteja un model que estableix una relació de dependència dels rendiments de tot actiu o cartera vers l'evolució del rendiment del mercat:

$$R_i = a_i + b_i \cdot I + \varepsilon_i$$

Essent:

R_i: Rendiment del títol durant el període de referència.

I: Índex borsari representatiu de l'evolució del mercat.

ε_i: Risc propi o específic, es una variable aleatòria no observable a priori que inclou tots aquells factors que influeixen en el rendiment dels títols i que son independents del mercat. Aquest factor només depenen de les característiques pròpies del títol, aquesta factor inclou dins aquesta variable de vegades tindran efectes positius i d'altres vegades en tindran de negatius, però que a grans mostres globals l'efecte esperat serà negatiu.

b_i: Risc de mercat o sistemàtic, la beta dels valors, es el valor que indica el grau d'influència que té el moviment del mercat sobre l'evolució dels rendiments de l'acció. Anomenada també coeficient de volatilitat.

a_i: Rendiment específic expressa la part de rendiment que es pròpia del títol i independent del mercat.

N: Nombre de valors o títols contemplats que cotitzen al mercat.

Ens caldrà veure com es el comportament de la variable aleatòria "error" o "pertorbació", i en aquest sentit hem de fer una sèrie de suposicions sobre el seu comportament:

Hipòtesis de la regressió lineal simple:

- 1- **Esperança nul·la**, es suposa que la pertorbació ε_{it} inclou tots aquella innombrables factors considerats irrellevants de forma individual i que per ser estadísticament independents, uns positius i altres negatius, actuaran de forma que e sumar-ne els diferents efectes la seva influencia serà nul·la, errors negatius es compensarà amb $E[\varepsilon_{it}] = 0$; $i=1,2, \dots, T$
- 2- **Homoscedasticitat**: la pertorbació aleatòria segueix una distribució independent de l'escala temporal o moment de l'observació "t" així com també del valor de I_t o valor del índex.
Per tant, la seva variància serà concretament el risc específic del títol "i"
$$E[\varepsilon_{it}^2] = \sigma_{2i} \quad \text{per a } t=1, \dots, T.$$
- 3- **No autocorrelació**, les pertorbacions aleatòries son independents entre si, es a dir, l'error observat en el moment "t" no dependran de l'error observat e el moment t-1. Per a poder parlar d'aleatorietat els errors no poden estar relacionats ni influir uns en els altres, per tant: $COV(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{it'}) = 0$ $t \neq t'$ $t, t'=1,2,\dots,T$
- 4- **Normalitat**. Com ε_{it} es la suma de moltes variables aleatòries independents, tot i que irrellevants si les considerem de forma conjunta, a partir de la teoria central del límit podem considerar la hipòtesis que es distribueix segons una distribució Normal o de Laplace-Gauss.

Per mesurar el **rendiment i risc** d'un valor aplicarem una sèrie de càlcul de l'Esperança matemàtica del rendiment del títol, a partir de les variables aleatòries del model I_t i ε_{it} i assumint els supòsits sobre la variable de pertorbació aleatòria, obtindrem que l'esperança matemàtica del rendiment del títol i-èssim serà:

$$E[R_i] = a_i + b_i E[I_t]$$

I també obtindrem el càlcul del risc dels valors:

$$\sigma^2(R_i) = b_i^2 \sigma_1^2 + \sigma_i^2 \quad (\text{donat que la } COV(\varepsilon_{it}, I_t) = 0)$$

On $b_i^2 \sigma_1^2$ es el risc sistemàtic, risc que ve determinat pel mercat on esta cotitzant el valor considerat. Aquesta mesura de risc ve ponderada pel factor o paràmetre "beta", significant que no tots els valors tindran la mateixa magnitud de risc sistemàtic. Aquest paràmetre en determina el grau o poder d'influència en el risc total del valor a causa de la volatilitat pròpia del mercat.



σ^2_i : es el risc específic o part del valor que no es explicat pel mercat i que per tant només afecta aquest. Representa la variància del terme “error”. Serà un conjunt d’efectes aleatoris no observables, que tendiran a compensar-se els uns amb els altres.

Aquest risc es pot reduir mitjançant la diversificació. Al o ser propi del mercat, el fet d’invertir i assumir aquest risc sense optar a una diversificació de l’elimini estarem comportant-nos d’una forma ineficient.

En el nostre cas, al contemplar una cartera de valors la fórmula d’emprar a l’hora de calcular el rendiment de la cartera es la següent :

$$R_p = \sum w_i \cdot (a_i + b_i I_t + \varepsilon_{it}) = (w_1 a_1 + \dots + w_n a_n) + (w_1 b_1 + \dots + w_n b_n) I + (w_1 \varepsilon_1 + \dots + w_n \varepsilon_n) = \\ = \sum w_i a_i + b_p I + \sum w_i \varepsilon_i$$

On b_p seria el coeficient de volatilitat de la cartera que indicaria el grau d’influència de les variacions del mercat sobre el rediment de la nostra cartera.

Aquesta fórmula determina el rendiment de la cartera com a variable aleatòria explicada a partir de la variable aleatòria “Índex de mercat”.

A l’hora d’obtenir la mesura del seu rendiment i la mesura del seu risc, igual que fem amb el model de Markowitz, haurem d’utilitzar l’esperança del rendiment de la cartera i la seva variança respectivament, d’aquesta forma:

$$E[R_p] = \sum w_i a_i + b_p E[I] = a_p + b_p E[I]$$

I la mesura del risc total de la cartera com:

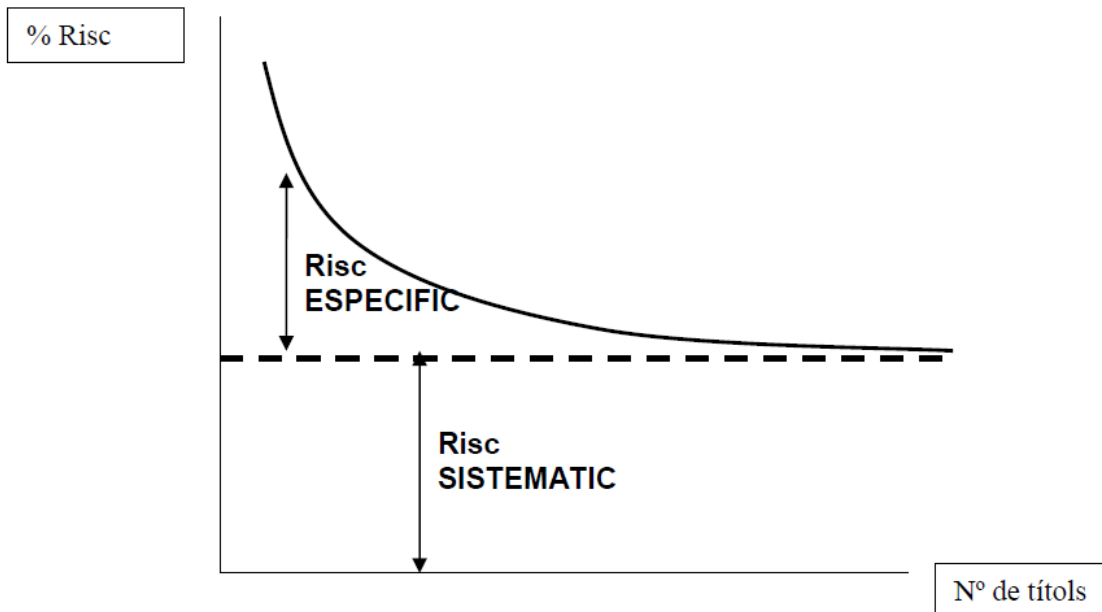
$$\sigma^2(R_p) = b_p^2 \sigma^2_I + \sum w_i^2 \sigma^2_{\varepsilon_i}$$

On podem veure els dos components del risc: risc sistemàtic de la cartera i risc específic de la cartera.

Aquest darrer terme podem veure que pot ser convenientment reduït no tan sols per la acurada selecció dels valors que han de ser seleccionats per part de l’inversor, sinó que també amb la incorporació d’un nombre suficientment elevat de valors per aconseguir que aquest risc desaparegui o sigui mínim.

La diversificació com a simple addició o incorporació de valors a la nostra cartera veiem que amb Sharpe ens aporta eficiència.

A la següent imatge podem observar el que s'ha mencionat:



Imatge 4: Extret dels apunts de fonaments dels mercats financers, tema 7.

Tendint el risc específic a disminuir però mai desaparèixer.

6.3.- Construcció de la frontera eficient i cartera òptima

Per poder calcular la frontera eficient de Sharpe **primer** de tot hem tingut que obtenir les cotitzacions diàries de l'Eurostoxx50 cinc anys enrere, el temps coincideix amb el dels valors estudiats dels actius que hem escollit. El motiu per el qual s'agafa el mateix interval de valor es simple, em de calcula el risc específic i el sistemàtic de la nostra cartera.

Com em Markowitz hem agafat els preus diaris de cada actiu i hem extret la variació del preu d'un dia amb el dia anterior, seguidament podem observar la imatge.

Eurostoxx 50		Santander		Inditex		BMW		Bayer		BASF		
Data	Preus	Ri	Preus	Preus	Preus	Preus	Preus	Preus	Preus	Preus	Preus	
1/12/16	3.030,98		4,342	0,672%	31,795	-1,487%	80,07	-0,423%	86,78	-2,043%	81,06	0,086%
30/11/16	3.051,61	0,68064%	4,313	1,197%	32,275	-0,555%	80,41	-0,973%	88,59	-0,203%	80,99	2,936%
29/11/16	3.038,42	-0,43223%	4,262	1,235%	32,455	0,667%	81,2	-1,048%	88,77	0,760%	78,68	-0,165%
28/11/16	3.016,80	-0,71155%	4,21	-1,590%	32,24	-0,478%	82,06	-0,882%	88,1	-0,788%	78,81	-2,099%
25/11/16	3.048,38	1,04680%	4,278	-0,627%	32,395	1,076%	82,79	0,339%	88,8	0,056%	80,5	-0,136%
24/11/16	3.040,60	-0,25522%	4,305	-0,646%	32,05	2,675%	82,51	0,328%	88,75	0,464%	80,61	0,574%
.
.
.

Taula 26: Informació extreta de www.expansion.com. Variació de preu, elaboració pròpia per mitja d'Excel.

Una vegada s'han obtingut les **variacions** del preu d'un dia amb un altre, tant del mercat com dels nostres actius hem calculat l'**esperança matemàtica** de l'Eurostoxx50 i la seva **desviació estàndard**.



De cada un dels actius amb la informació donada anteriorment de les variàncies de preu hem obtingut:

- 1- **L'esperança matemàtica** es calcula amb la suma de variació de preus dividida per el numero d'observacions que hem utilitzat (amb la formula contar).
- 2- La **covariància**, que es calcula multiplicant la desviació estàndard de mercat i de l'actiu i el coeficient de correlació d'aquests dos.
- 3- Per calcular la **desviació estàndard** em fet servir la formula de Excel denominada DESVEST agafant com a valors la variació del preu de l'actiu.
- 4- La **mitjana** l'hem calculat utilitzant la formula PROMEDIO, els valors son els mateixos que en la desviació estàndard
- 5- Per trobar els valors del **coeficient de correlació** dels actius amb el mercat hem fet us de la formula COEF.DE.CORREL agafant com a valors la variació de preus.

Eurostoxx 50		Santander	Inditex	BMW	Bayer	BASF
Desviació estàndard	1,28467%	Covar. -0,00434%	Covar. -0,00164%	Covar. #####	Covar. #####	Covar. -0,00255%
esperança matemàtica	-0,01314%	Desv.Est 2,15642%	Desv.Est 1,57965%	Desv.Est 1,73357%	Desv.Est 1,61548%	Desv.Est 1,50209%
Conta	1264	Mitjana 0,00402%	Mitjana 0,08486%	Mitjana 0,04448%	Mitjana 0,06099%	Mitjana 0,04483%
		Coef.Corr. -0,156687	Coef.Corr. -0,080883	Coef.Corr. -0,125003	Coef.Corr. -0,139201	Coef.Corr. -0,132003

Taula 27: Elaboració pròpia per mitja d'Excel.

El següent pas que realitzarem serà el càlcul de alfa i beta:

De les variables mencionades, hem calculat a primera instància la **beta** (β), fent us de la covariància dels actius dividit per la desviació estàndard elevada al quadrat (la variància de la mateixa); aquest resultat es negatiu ja que la covariància dels actius es negativa. Un cop obtingut aquest valor podrem calcular la **alfa** (α) de cada actiu es la mitjana de l'actiu per l'esperança matemàtica del marcat per la beta de l'actiu.

Estimació dels paràmetres ALPHA y BETA									
Santander		Inditex		BMW		Bayer		BASF	
α	0,00000013908%	α	0,00000110898%	α	0,00000098593%	α	0,00000140289%	α	0,00000090927%
β	-0,263010873	β	-0,09945443	β	-0,168682921	β	-0,175044811	β	-0,154343329

Taula 28: Elaboració pròpia per mitja d'Excel.

Per calcular el risc específic de cada actiu es fa servir:

- 1- Els **valors estimats**, que es calculen multiplicant la variació del mercat per la beta mes l'alfa de l'actiu corresponent.
- 2- **L'error aleatori** es la diferència entre el valor estimat i la variació de preu de l'actiu.
- 3- **La variància** es l'error aleatori elevat al quadrat.

Santander

Valors estimats	Error aleatori	Variància del error
-0,1790%	-0,8514%	0,0072%
0,1137%	-1,0829%	0,0117%
0,1871%	-1,0480%	0,0110%

Inditex

Valors estimats	Error aleatori	Variància del error
-0,0677%	1,4195%	0,0202%
0,0430%	0,5976%	0,0036%
0,0708%	-0,5961%	0,0036%

BMW

Valors estimats	Error aleatori	Variància del error
-0,1148%	0,3080%	0,0009%
0,0729%	1,0458%	0,0109%
0,1200%	1,1680%	0,0136%

Bayer

Valors estimats	Error aleatori	Variància del error
-0,1191%	1,9240%	0,0370%
0,0757%	0,2784%	0,0008%
0,1246%	-0,6359%	0,0040%

BASF

Valors estimats	Error aleatori	Variància del error
-0,1051%	-0,1915%	0,0004%
0,0667%	-2,8692%	0,0823%
0,1098%	0,2748%	0,0008%

Imatge 5: Grup de taules dels títols amb mostra dels valors estimats, errors aleatoris i variància del error.

Finalment per poder calcular el **risc específic** dels actius, farem la suma dels quadrats dels errors (la suma total de la variància de l'error de l'actiu) i seguidament la dividirem per el numero d'observacions menys 1.

I així es com obtenim el risc específic de cada actiu.

<u>Calcul de risc específic.</u>	Santander	Inditex	BMW	Bayer	BASF
Suma dels quadrats dels errors:	57,29%	31,40%	37,39%	32,37%	28,02%
σ^2 (error específic)	0,05%	0,02%	0,03%	0,03%	0,02%

Taula 29: Elaboració pròpia, per mitja d'Excel.

Per calcular el risc total de cada actiu farem la suma de el risc sistemàtic mes el risc específic.

- 1- El **risc sistemàtic** l'hem calculat a partir de la beta al quadrat multiplicada per el quadrat de la suma de la variació del mercat menys l'esperança matemàtica, dividit per el numero d'observacions menys 1.

$$\beta^2 * \frac{\sum(\text{variació del mercat} - \text{esperança matemàtica})^2}{(\text{observacions del mercat} - 1)}$$

2- El **risc específic** es el que hem obtingut com a pas previ.

Per tal de **comprovar** que les dades son correctes farem el càlcul de l'arrel quadrada de la suma dels dos riscos, això a de ser igual a la desviació estàndard calculada amb anterioritat de la rendibilitat de cada actiu que posseïm.

<i>Mida de risc específic i sistemàtic de cada valor</i>					
	<i>Santander</i>	<i>Inditex</i>	<i>BMW</i>	<i>Bayer</i>	<i>BASF</i>
<i>Mitjana del risc sistemàtic</i>	0,001141647%	0,000163242%	0,000469598%	0,000505688%	0,000393152%
<i>Risc específic</i>	0,04536%	0,02486%	0,02960%	0,02563%	0,02219%
<i>Risc TOTAL</i>	0,04650%	0,02502%	0,03007%	0,02613%	0,02258%
<i>Comprobació</i>	2,15642%	1,58186%	1,73409%	1,61654%	1,50270%

Taula 30: Càlcul del risc de les accions. Elaboració pròpia per mitja d'Excel.

A l'hora de la construcció de la cartera tenim una sèrie de variables com son risc de la cartera, mida de risc del risc sistemàtic de la cartera y l'específic que comentarem a continuació, començarem:

- 1- **Alfa de la cartera**, es calculada amb la suma de la ponderació de cada actiu per la seva alfa.
- 2- **Beta de la cartera**, es calcula amb la suma de la ponderació de cada actiu per la seva beta.
- 3- El **risc sistemàtic** es calculat per la beta de la cartera al quadrat per la desviació estàndard del mercat al quadrat.
- 4- **Risc específic** l'obtenim a partir de cada ponderació al quadrat per el seu risc específic.
- 5- El **risc total** de la cartera es compon de la suma dels dos riscos que tenim, el risc sistemàtic i específic, aquest resultat es una variància.
- 6- Per la **comprovació**, el risc de la nostra cartera es obtingut de l'arrel quadrada de la variància del risc total.

Construcció d'una cartera:

Santander	20,00%
Inditex	20,00%
BMW	20,00%
Bayer	20,00%
BASF	20,00%

TOTAL	100%
--------------	-------------

Esperança Cartera
Rp

60,46590%

Risc de la cartera
 $\sigma_2(Rp)$

61,59538%

 αp

0,000000909231%

 βp

-0,172107273

MESURA DEL RIESC SISTEMATIC DE LA CARTERA	0,00049%
MESURA DEL RIESC ESPECIFIC DE LA CARTERA	0,02953%

RIESC TOTAL DE LA CARTERA	0,03002%
----------------------------------	-----------------

Taula 31: Construcció d'una cartera de Sharpe, elaboració pròpia.

Per crear les taules següents hem utilitzat el mateix procediment que en l'apartat de creació de frontera eficient de Markowitz, utilitzant l'eina **Solver** de Microsoft Excel.

La primera frontera eficient creada a sigut amb cap restricció afegida. Com a conseqüència ens ha donat la màxima rendibilitat per un determinat risc. Observem que només es mou entre els actius d'Inditex i BASF, ignorant els altres tres actius seleccionats de la nostra cartera.

			Frontera eficient sense restriccions				
			Actiu				
	Rend. (μ)	Risc (σ)	Santander	Inditex	BMW	Bayer	BASF
MV	56,67%	53,43%					100,00%
1	62,26%	53,74%		11,06%			88,94%
2	67,86%	54,05%		22,13%			77,87%
3	73,47%	54,36%		33,21%			66,79%
4	79,09%	54,68%		44,31%			55,69%
5	84,71%	54,99%		55,42%			44,58%
6	90,34%	55,30%		66,55%			33,45%
7	95,97%	55,61%		77,69%			22,31%
8	101,61%	55,93%		88,84%			11,16%
X	107,26%	56,24%		100,00%			

Taula 32: Frontera eficient de Sharpe, elaboració pròpia.

Per la següent taula ens hem proposat afegir una restricció, obliguem a Solver agafar amb un **mínim de 10%** en tots els actius, ja que busquem una diversificació per a la nostra cartera. Obtenint uns resultats de menor rendibilitat i major risc comparada amb la taula sense restriccions.



			Frontera eficient, restricció mínim 10% del actiu				
			Actiu				
	Rend. (μ)	Risc (σ)	Santander	Inditex	BMW	Bayer	BASF
MV	58,57%	57,65%	10,00%	10,00%	10,00%	10,00%	60,00%
1	61,38%	57,80%	10,00%	15,55%	10,00%	10,00%	54,45%
2	64,18%	57,94%	10,00%	21,10%	10,00%	10,00%	48,90%
3	66,99%	58,09%	10,00%	26,66%	10,00%	10,00%	43,34%
4	69,80%	58,23%	10,00%	32,21%	10,00%	10,00%	37,79%
5	72,61%	58,38%	10,00%	37,77%	10,00%	10,00%	32,23%
6	75,43%	58,52%	10,00%	43,32%	10,00%	10,00%	26,68%
7	78,24%	58,67%	10,00%	48,88%	10,00%	10,00%	21,12%
8	81,05%	58,81%	10,00%	54,44%	10,00%	10,00%	15,56%
X	83,86%	58,95%	10,00%	60,00%	10,00%	10,00%	10,00%

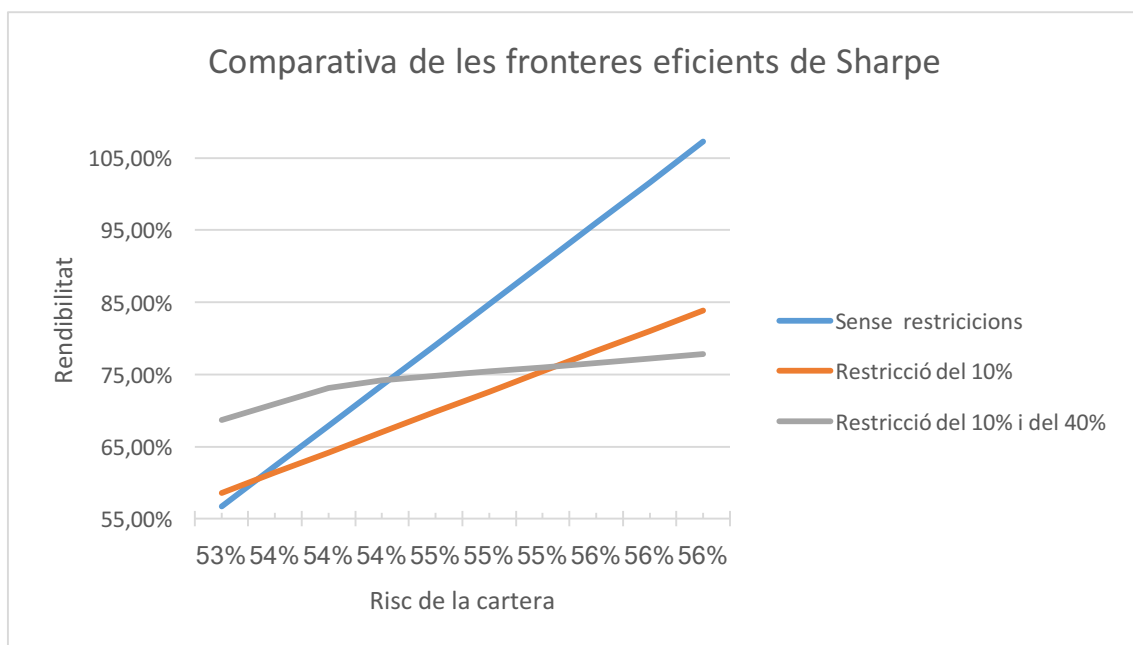
Taula 33 Frontera eficient de Sharpe, elaboració pròpia.

Per últim hem volgut restringir encara mes Solver obligant-lo agafar com tenim a la taula anterior un **mínim de 10%** i un **màxim de 40%** per cada actiu ja que buscàvem reduir el risc de la cartera comparant la taula anterior.

Aconsegum que Solver **reparteixi** més el nostre portafolis però no obtenim el resultat esperat, sinó que es veu mes agreujat amb una rendibilitat més baixa i un risc més elevat amb la taula anterior.

			Frontera eficient, restricció mínim 10% del actiu i màxim 40 %				
			Actiu				
	Rend. (μ)	Risc (σ)	Santander	Inditex	BMW	Bayer	BASF
MV	68,69%	58,17%	10,00%	30,00%	10,00%	10,00%	40,00%
1	70,89%	58,29%	10,00%	34,36%	10,00%	10,00%	35,64%
2	73,10%	58,40%	10,00%	38,72%	10,00%	10,00%	31,28%
3	74,17%	58,51%	10,00%	40,00%	10,00%	12,10%	27,90%
4	74,78%	58,63%	10,00%	40,00%	10,00%	15,07%	24,93%
5	75,39%	58,74%	10,00%	40,00%	10,00%	18,04%	21,96%
6	76,00%	58,86%	10,00%	40,00%	10,00%	21,02%	18,98%
7	76,61%	58,97%	10,00%	40,00%	10,00%	24,01%	15,99%
8	77,22%	59,08%	10,00%	40,00%	10,00%	27,00%	13,00%
X	77,83%	59,20%	10,00%	40,00%	10,00%	30,00%	10,00%

Taula 34 Frontera eficient de Sharpe, elaboració pròpia.



Gràfic 4: comparació de fronteres de Sharpe, elaboració pròpia.

En referència a la **probabilitat**, seguirem el mateix cas, com hem realitzat amb el Model de Markowitz, es per això que també utilitzarem els percentatges del 68% i 95%, per referir-nos a les rendibilitats esperades que podem obtenir de la cartera.

Hem de valora que la **volatilitat** ha canviat, ja que, amb Sharpe tenim coneixement del **risc sistemàtic**, el del mercat.

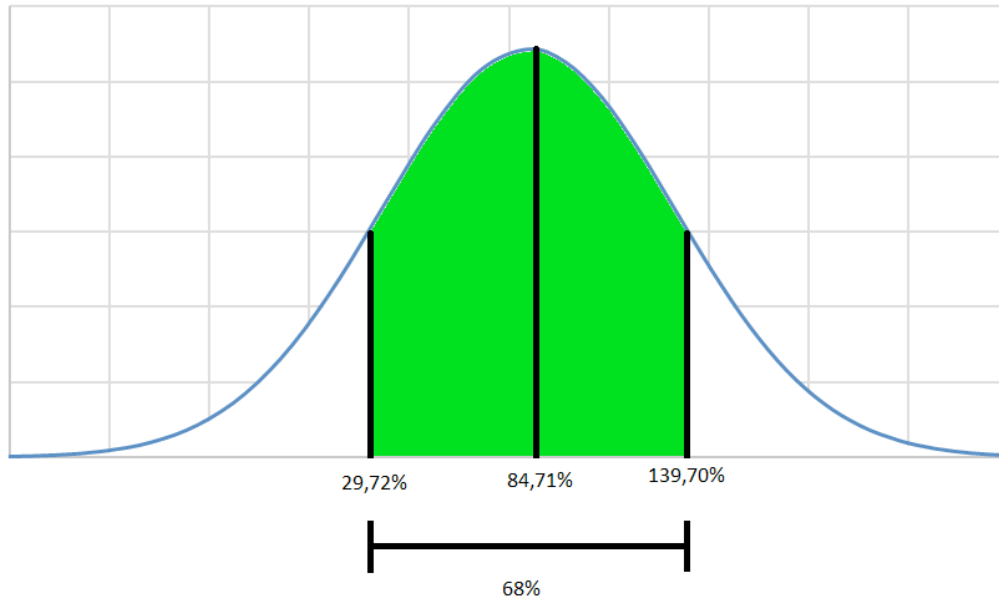
Per una rendibilitat esperada amb una probabilitat del **68%**.

- Rendibilitat: 84,71%
- Probabilitat superior: $84,71\% + 54,99\% = 139,7\%$

- Probabilitat inferior: $84,71\% - 54,99\% = 29,72\%$

Podem dir que dintre de la probabilitat del 68% ens trobarem en una rendibilitat esperada del 29,72% fins a 139,7%.

Campana de Gauss segons frontera eficient de Sharpe



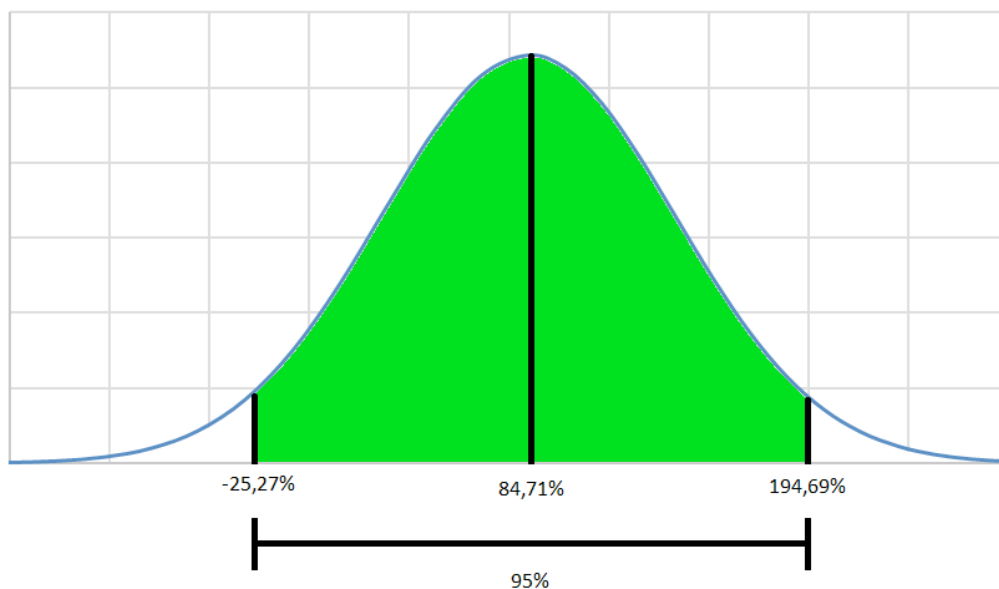
Gràfic 5: Campana de Gauss, probabilitat del 68%.

Per una rendibilitat esperada amb una probabilitat del **95%**.

- Rendibilitat: 84,71%
- Probabilitat superior: $84,71 + (2 * 54,99\%) = 194,69\%$
- Probabilitat inferior: $84,71 - (2 * 54,99\%) = -25,27\%$

Amb una probabilitat del 95%, la rendibilitat esperada es trobaria entre el -25,27% i el 194,69%.

Campana de Gauss segons frontera eficient de Sharpe



Gràfic 6: Campana de Gauss, probabilitat del 95%. Elaboració pròpia.

6.4.- Aplicació pràctica

Tornant a fer un supòsit d'aplicar la cartera més beneficiosa segons els punts que hem trobat de la frontera eficient, realitzarem el **càlcul** en tres punts diferents d'aquesta.

Aplicació empírica d'una estratègia asset allocation mitjançant el model de Markowitz i el model de Sharpe

En el supòsit que es plantejarà tindrem un inversor amb un **perfil arriscat** però que només vol comprar uns actius en concret 5, els que hem estat estudiant amb anterioritat (Santander, Inditex, BMW, Bayer, BASF).

Aquests cinc actius es mantindran a la nostra cartera durant un període de 5 anys, fent una gestió passiva de la mateixa, comprant-los a dia 01/12/2011 i venent-los a dia 01/12/2016.

Suposant, també, que l'inversor volgués invertir 500.000 euros i els volem invertir en una cartera eficient amb el mínim risc.

Supòsit 1: punt de menys risc en la frontera eficient.

Analitzant de nou les tres fronteres eficients, ens trobem amb que tenir que invertir el 100% a BASF per aconseguir una **rendibilitat esperada del 56,67%** amb un **risc associat del 53,43%**.

Tenint les dades següents:

	Inditex	BMW	Bayer	BASF
01/12/2011	12,606	55,63	48,305	53,88
01/12/2016	32,15	80,16	88,09	81,11

Taula 35: cotització dels actius amb 5 anys de diferència. Informació extreta de www.expansion.com.

Dividends Inditex	
Data	Import
02/11/2016	0,16 €
02/11/2016	0,14 €
28/04/2016	0,30 €
03/11/2015	0,14 €
03/11/2015	0,12 €
04/05/2015	0,26 €
03/11/2014	0,14 €
03/11/2014	0,10 €
02/05/2014	0,24 €
04/11/2013	0,16 €
04/11/2013	0,06 €
02/05/2013	0,22 €
02/11/2012	0,04 €
02/11/2012	0,14 €
02/05/2012	0,18 €
Suma	2,40 €

Dividends BMW	
Data	Import
13/05/2016	3,20 €
14/05/2015	2,90 €
Suma	6,10 €

Dividends BASF	
Data	Import
02/05/2016	2,90 €
04/05/2015	2,80 €
Suma	5,70 €

Dividend Bayer	
Data	Import
05/05/2016	1,84 €
28/05/2015	1,66 €
30/04/2014	1,55 €
29/04/2013	1,40 €
Suma	6,44 €

Taula 36: Grup de taules dels dividendes de cada acció. Informació extreta de www.expansion.com

Llavor si disposem de 500.000 euros, el capital quedaria repartit de la següent manera:

	Preu 01/12/2011	Ponderació	Cap. Invertit	Títols comprats
Inditex	12,606		- €	-
BMW	55,63		- €	-
Bayer	48,305		- €	-
BASF	53,88	100,00%	500.000,00 €	9.279
		100,00%	500.000,00 €	9.279

Taula 37 Inversió per la cartera, supòsit 1, Elaboració pròpia per mitja d'Excel.

Suposant que estem a 1 de desembre de 2016 i volem liquidar la cartera per tal de veure quin rendiment ens han donat, ens trobem amb que el **preu de l'acció a pujat** en tots els títols, però també tenim que veure que tots els títols han obtingut una sèrie de dividends que tindrem que sumar.

Liquidació:

❖ Tenint els següents dividends:

- Inditex: 2,40€/Acció
- BMW: 6,10€/Acció
- Bayer: 6,44€/Acció
- BASF: 5,70€/Acció

	Dividends	Accions	Import
Inditex	2,40 €	-	- €
BMW	6,10 €	-	- €
Bayer	6,44 €	-	- €
BASF	5,70 €	9.279	52.890,30 €
		TOTAL	52.890,30 €

❖ Venda de les accions:

- Inditex 0 * 32,15€
- BMW 0 * 80,16€
- Bayer 0 * 88,09€
- BASF 3.358 * 81,11€

Taula 38: Elaboració pròpia per mitja d'Excel.

	Accions	Preu venda	Import
Inditex	-	32,15 €	- €
BMW	-	80,16 €	- €
Bayer	-	88,09 €	- €
BASF	9.279	81,11 €	752.619,69 €
		TOTAL	752.619,69 €

Taula 39: Elaboració pròpia per mitja d'Excel.

❖ Rendibilitat de la operació:

$$R = \frac{(52.890,30 + 752.619,69) - 500.000,00}{500.000,00} * 100 = 61,10\%$$

Teníem una rendibilitat esperada d'un 56,67% amb un risc del 53,43% però hem extret d'aquesta cartera un 61,10% per sobre d'un **4,43% per damunt de l'esperat**.

Supòsit 2: punt mig de la frontera eficient.

En aquest cas utilitzarem la combinació de Inditex amb 55,42% i BASF 44,58% per invertir en la nostra cartera. Això ens produiria una rendibilitat esperada del 84,71% i un risc del 54,99%.

Amb la mateixa cotització que en el supòsit 1 (taula 37) i el mateix repartiment de dividends (taula 38) i els 500.000€ per la inversió, els títols comprats serien els següents:

	Preu 01/12/2011	Ponderació	Cap. Invertit	Títols comprats
Inditex	12,606	55,42%	277.121,09 €	21.983
BMW	55,63		- €	-
Bayer	48,305		- €	-
BASF	53,88	44,58%	222.878,91 €	4.136
		100,00%	500.000,00 €	26.119

Taula 40: Elaboració pròpia per mitja d'Excel.

Arribant el dia 1 de desembre de 2016 realitzarem la liquidació de la cartera. Per tal de poder veure el rendiment i veure també si aquest difereix molt del rendiment de la operació. La cotització d'aquest dia respecte el dia de la compra observarem que augmentat i que també ha produït uns dividends que hem calculat.

Liquidació:

- ❖ Tenim els següents dividends, repetim la mateixa operació de multiplica els dividends per les accions que tenim, igual que en supòsit 1.

	Dividends	Accions	Import
Inditex	2,40 €	21.983	52.759,20 €
BMW	6,10 €	-	- €
Bayer	6,44 €	-	- €
BASF	5,70 €	4.136	23.575,20 €
		TOTAL	76.334,40 €

Taula 41: Elaboració pròpia per mitja d'Excel.

- ❖ La venda de les accions, per la venda d'accions també realitzem la mateixa operació, de multiplicació, igual que el supòsit 1.

	Accions	Preu venta	Import
Inditex	21.983	32,15 €	706.753,45 €
BMW	-	80,16 €	- €
Bayer	-	88,09 €	- €
BASF	4.136	81,11 €	335.470,96 €
		TOTAL	1.042.224,41 €

Taula 42: Elaboració pròpia per mitja d'Excel.

❖ Rendibilitat de la operació:

$$R = \frac{(1.042.224,41 + 76.334,40) - 500.000,00}{500.000,00} * 100 = 123,71\%$$

Obtenim una rendibilitat de 123,71%, suposa un 39,00% més que la rendibilitat esperada que la frontera eficient marcava, la de 84,71% i amb un risc de 54,99%.

Observem que estem guanyant diversificació de la cartera, ja que **invertim en 2 accions** diferents, cas que en el primer supòsit només invertíem a una acció. En comparació amb el supòsit 1, estem **obtenint un 39% més, per un 1,56 % més de risc** que tindria que assumir el inversor.

Supòsit 3: punt de màxim rendiment esperat i màxim risc.

La combinació per aquest cas es la de fer una cartera de **100% Inditex**. Que repercutirà una rendibilitat esperada de 107,26% i un risc de 56,24%.

Amb la mateixa cotització que en el supòsit 1 (taula 37) i el mateix repartiment de dividends (taula 38) i els 500.000€ per la inversió, els títols comprats serien els següents:

	Preu 01/12/2011	Ponderació	Cap. Invertit	Títols comprats
Inditex	12,606	100,00%	500.000,00 €	39.663
BMW	55,63	0,00%	- €	-
Bayer	48,305	0,00%	- €	-
BASF	53,88	0,00%	- €	-
		100,00%	500.000,00 €	39.663

Taula 43: Elaboració pròpia per mitja d'Excel.

Arribat el dia 1 de desembre de 2016, realitzarem la liquidació de la cartera. Per tal de poder veure el rendiment esperat i si aquest difereix molt del rendiment de la operació. La cotització d'aquest dia respecte del dia de la compra observarem que ha augmentat i que també ha produït uns dividends que hem calcular.

Liquidació:

- ❖ Tenim els següents dividends, repetim la mateixa operació de multiplica els dividends per les accions que tenim, igual que en supòsit 1.

	Dividends	Accions	Import
Inditex	2,40 €	39.663	95.191,20 €
BMW	6,10 €	-	- €
Bayer	6,44 €	-	- €
BASF	5,70 €	-	- €
		TOTAL	95.191,20 €

Taula 44: Elaboració pròpia per mitja d'Excel.

- ❖ La venda de les accions, per la venda d'accions també realitzem la mateixa operació, de multiplicació, igual que el supòsit 1.

	Accions	Preu venda	Import
Inditex	39.663	32,15 €	1.275.165,45 €
BMW	-	80,16 €	- €
Bayer	-	88,09 €	- €
BASF	-	81,11 €	- €
		TOTAL	1.275.165,45 €

Taula 45: Elaboració pròpia per mitja d'Excel.

- ❖ Rendibilitat de la operació:

$$R = \frac{(1275165,45 + 95191,2) - 500.000,00}{500.000,00} * 100 = 174,07\%$$

En aquest cas la **diferència** de rendibilitat es de **66,81%** més que la rendibilitat esperada que ens marcava la frontera eficient era de 107,26% i un risc de 56,24%.

A primera vista tindrem que la **diversificació** ha quedat **anul·lada**, ja que només construïm una cartera comprant solament amb Inditex. En comparació amb el supòsit 2, observem que la rendibilitat es un 22,55% més de rendiment per 1,25% més de risc. Podem extreure que la fracció a assumir respecte el **supòsit 2 es més beneficiosa** per a l'inversor, però tenim que assumir que a una inversió de gestió de cartera amb un sol actiu es inviable, ja que el risc esta tot concentrat.

7.- Teorema de la separació de Tobin

James Tobin nascut a Champaign el 5 de març de 1918 va ser un economista keynesià nord-americà, Premi Nobel d'Economia, membre del Consell d'Assessors Econòmics de la Presidència dels Estats Units i de la Junta de govern del Sistema de Reserva Federal, professor a les universitats de Harvard i Yale.



Va compondre el Teorema de la separació Tobin, amb el fi de què en el **pensament de l'inversor no té per que formar una cartera solament amb títols de renda variable** (amb risc), sinó que també podria construir-la amb actius de renda fixa o considerats sense risc.

Considerarem actius sense risc, les emissions de deute públic sense discriminar el venciment del mateix (Lletra del Tresor, Bons o Obligacions), impositcions fetes per entitats bancaries (l'anomenat dipòsit de termini fix), les emissions de deute de les grans empreses (pagarés, bons, obligacions, etc.)

Aquest teorema formulat per James Tobin va agafar gran força per la casuística de diversificació del risc, no només podríem diversificar el risc amb l'adquisició de número d'actius sinó que també es podria aplacar amb l'adquisició de renda fixa procedent d'empreses i de l'Estat.

Aquest teorema no s'aplicarà al nostre treball per que volem gestionar una cartera de risc purament borsari sense entrar en risc d'estat, el qual considerem actius sense risc. Com hem exposat amb anterioritat, el nostre objectiu es de obtenir la màxima rendibilitat amb cert risc, només apostant per actius de renda variable.



8.- Conclusions

En el model de Markowitz hem de concloure que els títols seleccionats per la nostra cartera, que estaven **diferenciats per activitat econòmica**, només actuen quatre (Inditex, BMW, Bayer, BASF) dels cinc títols en el punt més baix de la frontera fins arribar a formar una cartera d'un sol títol (Inditex).

Buscant que la nostra frontera eficient sigui més diversificada, hem aplicat restriccions. **El resultat d'aquestes restriccions ens han reportat uns resultats menys beneficiosos que la frontera eficient original.** En aquest cas estem parlant de rendibilitat i risc; assumim la mateixa volatilitat però obtenim beneficis més baixos.

Ha l'aplicació pràctica del model de Markowitz, podem extreure que aquest resultat no és igual al que reflecteix la frontera eficient calculada. Obtenim unes rendibilitats més elevades en els tres supòsits en comparació al model que havíem construït. En trobem que dels resultat del supòsit 1 al 2 el rendiment de la cartera és 57,72% més elevat, en canvi del supòsit 2 al 3 és de 9,09%. En el apartat del risc en trobem que augmenta 4,64% i 3,73%, respectivament. Trobem que la proporció risc/rendiment és molt diferenciat entre els supòsits. On podem extreure que no és beneficiós el pas de supòsit 2 al 3. Respecte a la diversificació, el supòsit 1 és el que millor reflecteix la norma, ja que utilitza 4 de les 5 accions diferents (Inditex, BMW, Bayer i BASF), ja que en el supòsit 2, només fa ús de 2 actius (Inditex i Bayer). Concloem que el **supòsit 1** seria la **millor opció** per formar la cartera, per que compleix la **diversificació** i obtenim rendibilitat a una volatilitat assumible.

Respecte a la campanya de Gauss, sobre els supòsits de l'aplicació pràctica del model de Markowitz, podem observar que 2 dels 3 resultats (supòsit 2 i 3) de la rendibilitat es troben en el 95 percentil i que el supòsit 1 està dintre del 68 percentil. Amb la pèrdua de diversificació el risc augmenta, ja que el supòsit 2 i 3 només utilitza 2 actius i 1 actiu respectivament, podent provocar que una volatilitat més elevada.

En el model de **Sharpe** hem de extreure que per la nostra cartera només utilitza 2 dels 5 actius (Inditex i BASF), sent en el punt més baix BASF fins arribar al punt de màxima rendibilitat formada per Inditex.

Per la recerca de la nostra frontera eficient per tal de que sigui més diversificada, hem realitzat restriccions a Solver, El resultat d'aquestes ens ha **aportat resultat de menor rendiment per una mateixa volatilitat.** És per això que concloem que la frontera eficient



de **Sharpe sense afegir restriccions es la més òptima**, tant per rendiment com per risc, però que la **frontera amb un 10% de restricció** aporta més solidesa a la norma de la diversificació.

Ha l'aplicació practica del model de Sharpe, extrèiem que aquest resultat no es igual al que reflecteix la frontera eficient calculada. Obtenim unes rendibilitats més elevades en els tres supòsits en comparació al model que havíem construït. Ens trobem que dels resultat del supòsit 1 al 2 el rendiment de la cartera es 39% més elevat, en canvi del supòsit 2 al 3 es de 22,55%. En el apartat del risc en trobem que augmenta 1,56% i 1,25%, respectivament. On podem extreure que no es beneficiós el pas de supòsit 2 al 3. Respecte a la diversificació, el supòsit 1 tampoc es beneficiós ja que només utilitzar un sol actiu. Concloem que el **supòsit 2 seria la millor opció per forma la cartera**, per que compleix la **diversificació** i obtenim rendibilitat a una volatilitat assumible.

En el apartat de la campana de Gauss per al model de Sharpe, podem observar que 2 dels 3 resultats (supòsit 1 i 2) de la rendibilitat es troben al 68 percentil i que el supòsit 3 està dintre del 95 percentil.

Si comparem els dos models, podem dir que **Sharpe s'aproxima més a la realitat**, ja que les diferències de rendiment de la seva frontera i les calculades en els supòsits, son menors que en el cas del model de Markowitz. Això es degut a que Sharpe contempla el risc sistemàtic (EUROSTOXX 50). El risc que tenen en comú els dos models, es que hem d'agafar dades històriques.



9.- Bibliografia

Web:

Recerca dels títols amb les seves cotitzacions i els seus dividendes:

- El Economista “Editorial Ecoprensa, S.A.” [pàgina web]. Disponible a: <http://www.eleconomista.es/>
- Expansión “Unidad Editorial Información Económica S.L” 2017 [pagina web]. Disponible a: <http://www.expansion.com/>
- Invertia 2017 [pagina web]. Disponible a: <http://www.invertia.com/>
- Biografías y Vidas, 2004-2017 [pagina web]. Disponible a: <https://www.biografiasyvidas.com/>
- Biografia William Sharpe Fundación Wikimedia, Inc. [página web]. Disponible a: https://es.wikipedia.org/wiki/William_Sharpe
- William F.Sharpe – Biographical Nobel Media AB 2017 [pagina web]. Disponible a: http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/1990/sharpe-bio.html
- El modelo de Markowitz en la gestión de carteras – Cuadernos de Gestión Vol. 2 año 2002 [pagina web]. Disponible a: <https://core.ac.uk/download/pdf/6565186.pdf>
- Modelo de Markowitz y modelo de Black-Litterman en la optimización de Potafolios de inversión – Revista Tecno Lógicas [pagina web]. Disponible a: <http://www.scielo.org.co/pdf/teclo/n26/n26a05.pdf>
- ¿Existen activos con $\beta=0$? ¿y con β negativa? 12/01/2013 – [pagina web]. Disponible a: <http://queaprendemoshoy.com/existen-activos-con-s0-y-con-s-negativa/>

Documentació:

- Apunts de 2n de carrera de Fonaments de mercats financers amb el professor Santiago Bartolome - Tema 6 i 7.
- MARKOWITZ, H.M; Portfolio selection: efficient diversification of investments; New York: John Wiley & Sons, 1959
- Investors and Markets: Portfolio Choices, Asset Prices, and Investment Advice