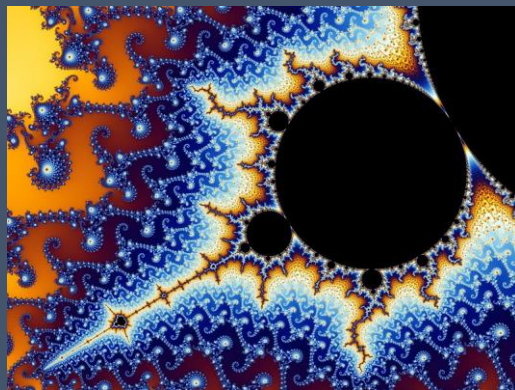




El Cosmos del Caos

Introducció a la Teoria del
Caos

Autora: Núria Aparicio Castilla

Matèria: Física

Centre: Institut Comte de Rius

Tutor: Josep M. Aliaga Tomàs

***“Per un clau es va perdre la ferradura
per una ferradura es va perdre el cavall
per un cavall es va perdre el genet
per un genet es va perdre la batalla
per una batalla es va perdre el regne”***

Poema folklòric britànic

AGRAÏMENTS

Donar les gràcies al meu tutor, Josep Maria Aliaga per l'ajuda prestada al llarg del curs. Per aportar una guia a la recerca que ha donat forma al treball. També, per transmetre'm el coneixement i la informació bàsica pels fonaments d'aquest projecte que tant positivament valoro.

Agrair a la meva professora d'anglès, Montse Fontanals, per la seva aportació i el seu temps en l'entrevista realitzada al Dr. David Pincus.

Mostrar el meu agraïment a la professora Isabel Berenguer per l'ajuda en la correcció lingüística del treball.

Al Dr. Francesc Díaz González de la Universitat Rovira i Virgili, professor del programa "Talent Jove", pel seu interès en la meva tasca experimental.

Finalment, agraïments a la meva mare, al meu germà i a la Roser pel suport, la dedicació i la paciència.

ÍNDEX

1. INTRODUCCIÓ.....	1
2. OBJECTIUS I HIPÒTESI DE PARTIDA.....	2
2.1 Objectius.....	2
2.2 Hipòtesi de partida.....	2
3. TEORIA DEL CAOS.....	3
3.1 Sistemes dinàmics.....	3
3.1.1 Classificació dels sistemes dinàmics.....	3
3.1.1.1 Discrets o continus.....	3
3.1.1.2 Autònoms o no autònoms.....	3
3.1.1.3 Invariables o variables respecte el temps.....	3
3.1.1.4 Lineals o no lineals.....	3
3.1.2 Sistemes dinàmics no lineals.....	4
3.1.3 Geometria dels sistemes dinàmics.....	4
3.1.3.1 Punts fixos.....	5
3.1.3.2 Atractors estranys.....	5
3.1.4 Altres conceptes.....	6
3.2 Antecedents històrics.....	7
3.2.1 El determinisme laplacià.....	8
3.2.2 El plantejament de Poincaré.....	8
3.2.3 L'aportació de Lorenz.....	8
3.2.3.1 Equacions de Lorenz.....	10
4. APLICACIONS.....	12
4.1 Meteorologia.....	12
4.2 Medicina.....	13
4.2.1 Visió de la malaltia des de la Teoria dels Fractals.....	14
4.3 Economia.....	16
5. OSCIL·LADORS.....	18

5.1 Ones harmòniques.....	18
5.2 Funció ona.....	19
6. El caos i la cultura.....	21
7. Estudi experimental de sistemes caòtics.....	26
7.1 Estudi experimental d'un pèndol doble.....	26
7.1.1 Forces i equacions del moviment.....	26
7.1.2 Càlcul d'energies.....	27
7.1.3 Experimentació amb el pèndol doble.....	28
7.1.4 Anàlisi dels resultats de l'experimentació amb el pèndol doble.....	32
7.2 Estudi experimental de sons compostos indeterminats.....	33
7.2.1 Tipus de sons.....	33
7.2.2 Anàlisi dels sons compostos: Anàlisi de Fourier.....	33
7.2.3 Transformada de Fourier.....	35
7.2.4 Experimentació amb sons caòtics.....	35
7.2.5 Anàlisi dels resultats de l'experimentació amb sons caòtics.....	38
7.3 Estudi experimental de la funció i l'aplicació logística.....	39
7.3.1 Sistemes amb iteració.....	39
7.3.2 Definició de l'aplicació logística.....	39
7.3.3 Experimentació amb l'aplicació logística: relació amb el Caos.....	39
7.3.4 Anàlisi dels resultats de l'experimentació amb la funció logística.....	40
8. CONCLUSIONS.....	41
9. BIBLIOGRAFIA.....	43
ANNEXOS.....	47

1. INTRODUCCIÓ

Aquest treball de recerca tracta sobre la Teoria del Caos i els oscil·ladors. El motiu pel qual vaig escollir aquest tema és el fet de l'existència d'una teoria que descriu el Caos (comportament que a simple ullada sembla imprevisible i indefinit). Els factors que m'inciten a realitzar una recerca sobre aquest tema són que és una teoria poc desenvolupada, tot i que és relativament actual. A més a més, la part filosòfica que presenta aquesta teoria és una motivació personal.

El títol ha estat un intent de resumir el que engloba aquest treball. El terme Cosmos té dos significats: referint-se a l'Univers, a tot allò que existeix, i com a harmonia, ordre. Com a contraposició a aquest concepte, Caos significa tot allò no lineal, imprevisible i complex que es troba, sense cap dubte, en el Cosmos.

En el treball es fa una introducció a la Teoria del Caos, les seves aplicacions i repercussions culturals, és a dir, es mostra tot el ventall d'implicacions del Caos en el Cosmos. Però alhora, el treball també pretén explicar que tot sistema caòtic presenta un cert ordre, una certa regularitat. El Caos té la seva harmonia, el seu Cosmos.

En aquesta recerca es tractaran els antecedents històrics de la Teoria del Caos, els autors, l'aportació de Lorenz a aquesta teoria i també les aplicacions. En el cas dels oscil·ladors es farà referència a les equacions que regeixen els moviments harmònics que realitzen i als diferents tipus de sistemes que existeixen.

El procediment per dur a terme aquest treball serà, en primer lloc la part teòrica que inclou l'obtenció d'informació i la seva respectiva comprensió, l'anàlisi i organització. I en segon lloc, la part experimental que constarà d'un estudi sobre la Teoria del Caos. La intenció és demostrar que les lleis que la formen concorden amb la realitat.

Per desenvolupar aquest treball, utilitzaré com a recursos per obtenir informació: Internet i el dipòsit de la biblioteca de la Universitat Rovira i Virgili. A més a més, per facilitar la comprensió de nous conceptes utilitzaré el llibre de text de Física de 2n de batxillerat.

Espero que d'aquest treball pugui extreure l'aprenentatge de nous conceptes matemàtics i físics, i la comprensió d'una nova manera d'entendre la realitat basant-se en les lleis que s'han definit per a aquesta teoria.

2. OBJECTIUS I HIPÒTESI DE PARTIDA

2.1 Objectius

Els objectius del treball són, principalment:

- Conèixer la Teoria del Caos des dels seus orígens fins als últims avenços realitzats.
- Les lleis que regeixen la teoria.
- Les aplicacions del Caos.
- La funcionalitat en els diversos camps educatius i laborals.
- Recerca dels diferents mètodes de representació per a sistemes dinàmics caòtics.

Pel que es refereix als oscil·ladors, les finalitats són:

- Conèixer els diferents sistemes oscil·latoris que podem trobar, tant artificials, com els existents en la naturalesa.
- Estudi dels comportaments que realitzen els oscil·ladors.

2.2 Hipòtesi de partida

La hipòtesi inicial que em plantejo en aquest treball de recerca és:

“El Caos està regit per una sèrie de moviments, aquests, intrínsecament poden mostrar un període repetitiu i, alhora, predictable (encara que desconexem els límits d’aquesta predictibilitat). Per tant, podem afirmar que el caos, d’alguna manera, mostra comportaments regulars.”

Aquesta hipòtesi s’analitzarà a l’apartat de conclusions a partir de les experimentacions realitzades.

3. TEORIA DEL CAOS

3.1 Sistemes dinàmics

Els sistemes dinàmics són sistemes amb variables d'estat¹ que segueixen un ordre temporal. El caràcter de sistema els l'atribueix el conjunt d'equacions que els formen. Aquests paràmetres varien respecte alguna variable que normalment és el temps.

3.1.1 Classificació dels sistemes dinàmics

3.1.1.1 *Discrets o continus*

Els sistemes dinàmics continus són aquells on els temps varia de manera progressiva. Aquests tipus de sistemes dinàmics s'expressen amb equacions diferencials.

Els sistemes dinàmics discrets es caracteritzen perquè la variable del temps ve donada per valors enters, això és perquè el temps no és mesurat de manera contínua i el sistema s'estudia en petits apartats. Els sistemes discrets es descriuen per equacions de diferències o mapes iterats, un tipus d'equació logística.

3.1.1.2 *Autònoms o no autònoms*

Els sistemes dinàmics autònoms desenvolupen comportaments naturals del sistema que no estan sota la influència d'un estímul extern i dependent al sistema. Els sistemes dinàmics no autònoms estan forçats sota la funció que fa variar el comportament del sistema.

3.1.1.3 *Invariables o variables respecte el temps*

Un sistema invariable respecte el temps és aquell que no depèn de la variable directament. Aquells sistemes que siguin autònoms, també compliran un caràcter invariable en el temps.

Els sistemes variables respecte el temps són aquells en que dues trajectòries passen pel mateix punt en diferents valors de t i no tenen la mateixa evolució.

¹ **Variables d'estat:** conjunt de variables més petit possible per a determinar completament el comportament d'un sistema dinàmic.

3.1.1.4 Lineals o no lineals

En un sistema lineal es compleix la igualtat:

$$\dot{x} = f(ax + by) = af(x) + bf(y) \quad (3.1)$$

de manera que es compleix el principi de superposició, és a dir, la capacitat de descompondre un sistema lineal en dos o més sistemes.

La igualtat (3.1) no és eficaç en els sistemes no lineals. Aquest fet dificulta el seu anàlisi, ja que, no es permet la simplificació del sistema. Majoritàriament no es troben solucions analítiques, i per tant, la representació d'aquests sistemes adquireix més importància.

3.1.2 Sistemes dinàmics no lineals

Una reduïda definició del que és un sistema no lineal es pot trobar en el llibre *Chaos and Nonlinear Dynamics* on Robert C. Hilborn dóna l'explicació per aquest concepte:

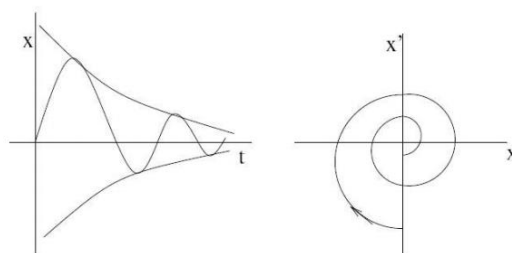
“Un sistema no lineal és un sistema en què l'evolució del temps de les seves equacions no és lineal; és a dir, les variables dinàmiques que descriuen les propietats del sistema (com per exemple, posició, velocitat, acceleració, pressió, etc.) apareixen en equacions que tenen una forma no lineal”²

La no linealitat que caracteritza aquest tipus de sistemes és un caràcter propi dels fenòmens naturals, com ho és la precipitació en meteorologia: hi ha una confluència entre llargs períodes d'estabilitat i d'oscil·lacions aparentment aleatòries en èpoques d'instabilitat.

3.1.3 Geometria dels sistemes dinàmics

La visualització del comportament de les variables en un sistema dinàmic es pot fer mitjançant una gràfica d'una variable respecte el temps, o bé, en espai de fases. L'espai de fases d'un sistema amb n dimensions, és l'espai on es mostra la representació de tots els paràmetres que influeixen en el sistema. En l'últim mètode, el temps canvia a variable implícita.

² C. HILBORN, Robert. *Chaos and Nonlinear Dynamics*, p. 5



Gràfica respecte el temps (Esquerra) i espai de fase (dreta). Font: <Universidad de las Américas Puebla >

3.1.3.1 Punts fixos

En aquests punts, el camp vectorial que determina la direcció de les trajectòries en l'espai de fases és nul.

A continuació s'exposen algunes de les classificacions segons el comportament que desenvolupen aquestes trajectòries quan s'apropen als punts fixos:

- **Node**

És un punt on les trajectòries pròximes entren en ell. Si les òrbites tenen direcció cap al punt fix, és estable. En canvi, si les òrbites s'allunyen, és inestable.

- **Focus**

Aquest punt és estable quan totes les òrbites properes tendeixen a ell però no entren.

- **Centre**

El seu punt fix produeix que en les seves proximitats totes les òrbites siguin tancades. Cap òrbita entra ni surt. És neutralment estable.

3.1.3.2 Atractors estranys

Els atractors són corbes de l'espai de fases que descriuen una trajectòria el·líptica d'un sistema en moviment caòtic. És impredecible perquè conèixer les seves variables en un instant t no permet predir-les en l'instant $t+1$. Malgrat això, no és absolutament aleatori.

Un exemple és la trajectòria que descriu un satèl·lit al voltant de la Terra. En certa manera es pot predir la seva posició, el que és

indeterminat són els moviments que presenta el cos per a dur a terme aquest trajecte.

Un atractor estrany es caracteritza per desenvolupar un moviment no periòdic i per la seva sensibilitat a les condicions inicials. Un model d'atractor estrany relacionat amb la Teoria del Caos és l'atractor de Lorenz que és el d'un sistema climàtic en tres dimensions. El moviment d'un atractor és abstracte, però transmet l'essència del moviment d'un sistema real.

3.1.4 Altres conceptes

El físic i matemàtic nord-americà M.J.Feigenbaum³ va investigar les transicions de fase, basant-se en estudis anteriors. Aquests van estudiar el comportament de la matèria en l'instant en què es produeix el canvi d'un estat a un altre. Es considera el principal estimulador de la teoria del caos perquè les transicions de fase tendeixen a ser potencialment no lineals des d'un punt de vista matemàtic. En aquests estudis va arribar a la conclusió que el comportament lineal no tenia sentit si s'aplicava en les transicions.

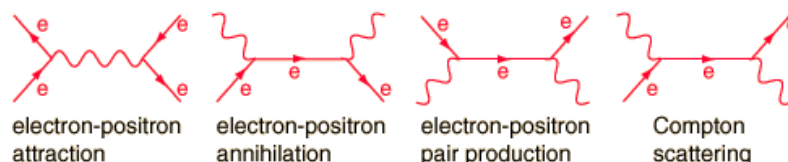
Un exemple de transició de fase és la magnetització d'un metall. A mesura que arriba a l'estat caòtic ha d'anar orientant-se cap a una direcció o cap a una altra. Malgrat que és lliure d'escollir, tots els fragments diminuts de metall han de posar-se d'acord quant a la direcció. Posteriorment, es va deduir que la comunicació entre els àtoms de metall era un assumpte d'escalas, imaginant la peça dividida en caixes de diferents dimensions. El concepte matemàtic que s'ajusta a aquesta idea és el model del fractals.

Un altre concepte aplicable a la teoria és el grup de renormalització. És una tècnica utilitzada per realitzar càlculs sobre sistemes amb un gran nombre d'elements simples en interacció. Aquest concepte va néixer per donar llum al càlcul de les interaccions entre electrons i fotons. El problema que presentava aquest model era que alguns elements necessitaven un tractament infinit, i això és el que dificultava, encara més, el procediment. Però el físic nord-americà K.G.Wilson (1936-2013), va pensar en principis escalars, ja que, algunes quantitats com la massa d'un cos es consideren fixes.

El diagrama de Feynman³ és una eina utilitzada per representar la interacció entre partícules elementals. Aquesta interacció està produïda per les forces d'intercanvi.

³Vegeu l'annex 2

Cada zona en què les línies formen un punt s'anomena vèrtex. Aquest diagrames estan construïts respecte al temps i l'espai. Les fletxes amb sentit invertit representen les antipartícules, al contrari que les partícules. Les partícules virtuals es representen amb una línia ondulada o semi-continua.



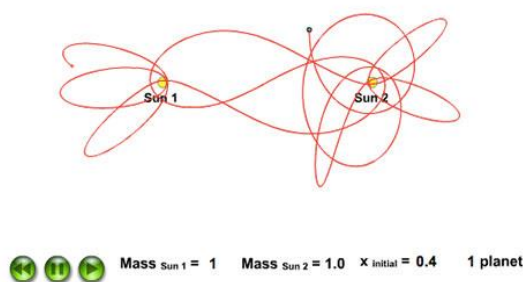
Exemples de diagrames de Feynman. Font: <Georgia State University>

3.2 Antecedents històrics

La Teoria del Caos està fomentada per sistemes no lineals i les seves representacions gràfiques, així com llur geometria, formen part d'una branca més extensa de la Física denominada Dinàmica. El primer pas efectuat per Isaac Newton, a mitjans 1600, va ser el descobriment de les equacions diferencials. A partir d'aquí, el seu estudi es va estendre cap a les lleis dels moviments i la gravitació general. Amb aquests avenços, Newton va poder resoldre problemes de dos cossos que interactuen mitjançant la gravetat. Ara bé, el que realment interessava a Isaac Newton era el moviment de la Lluna. Actualment també és conegut com el problema dels tres cossos, problema que s'ha arribat a considerar com a impossible de resoldre.

El moviment de la Lluna o problema dels tres cossos pretén definir les posicions i velocitats en qualsevol instant t de tres cossos amb massa m sotmesos a la gravetat mútua generada. La solució a aquest problema no es troba sempre a partir del càlcul integral sinó que, en alguns casos, pot ser una solució caòtica.

The 3-Body Gravitational Problem: 2 Fixed Suns and 1 Planet



Problema dels tres cossos. Font: <Fernando Jiménez Alburquerque>

3.2.1 El determinisme laplacà

L'any 1776, Pierre Simon de Laplace⁴, matemàtic francès va ser el propulsor d'una teoria en la qual s'afirmava que en el cas hipotètic que es tingués certesa de la velocitat i la posició de totes les partícules que formen part de l'Univers en un instant t , es podria predir el futur i el passat del sistema. Laplace creia que cadascun dels moviments i comportaments es podien explicar i predir per les lleis de Newton. La seva visió dels sistemes era totalment determinista.

3.2.2 El plantejament de Poincaré

Henri Poincaré⁴, matemàtic francès (1854-1912), va ser el primer a plantejar una possibilitat de Caos en el significat de comportament dependent de les condicions inicials. Poincaré afirmava que existien innombrables fenòmens que no eren completament aleatoris sinó que simplement no estaven sotmesos a una dinàmica lineal. Una de les sentències més famoses de Poincaré va ser:

"L'atzar no és més que la mesura de la ignorància de l'home"

3.2.3 L'aportació de Lorenz

Amb la invenció dels ordenadors, es va impulsar l'estudi del Caos. Cap al 1950 es van desenvolupar algunes hipòtesis del comportament dels sistemes no lineals o caòtics. A principis de l'any 1960, Edward Lorenz⁴, meteoròleg i matemàtic estatunidenc (1917-2008), va començar a estudiar unes equacions conegudes com les equacions de Lorenz. L'objectiu d'aquest estudi era predir la meteorologia de l'atmosfera terrestre.

Lorenz va comptar amb l'ajuda dels primers ordinadors per reproduir el comportament d'aquestes equacions mitjançant gràfiques. L'ordinador va generar el que actualment coneixem com l'atractor de Lorenz.

Lorenz va estudiar la influència de tres variables en una atmosfera terrestre: la temperatura, la pressió i el vent. En un primer intent, el resultat va respondre a les seves intuïcions sobre el temps. Va descobrir que quan una línia anava de dalt a baix sense cap salt, després hi hauria un salt doble. Malgrat aquest fet, les repeticions mai eren idèntiques. Hi havia una repetició, però amb perturbacions.

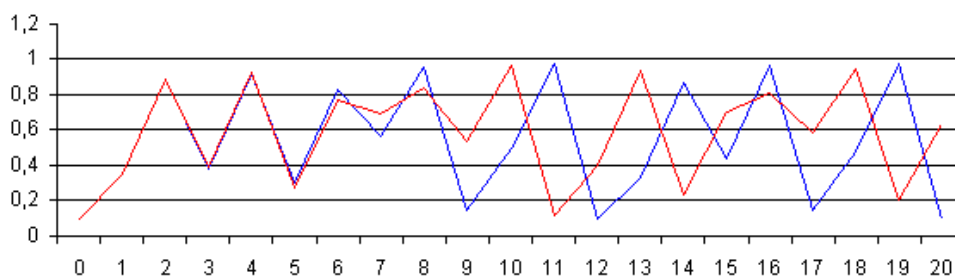
⁴ Vegeu l'annex 2

Posteriorment, Lorenz va inventar un generador de gràfiques amb la finalitat que les variables apareguessin sense dificultat. Va fer que l'ordinador en comptes de línies de dígit, assenyalés certs nombres d'espais en blanc seguits d'una a. La trajectòria que apareixia era sinusoidal. La regularitat era fascinant, tenint en compte que els cicles sempre apareixien i desapareixien de forma diferent.

L'any 1961, Lorenz va decidir simplificar el procediment per examinar la successió amb detall. Per no reiniciar tot l'estudi va partir de la meitat. Va copiar els nombres directament de la impressió anterior, perquè suposava que la màquina treballaria segons les condicions inicials. Quan va veure els resultats, es va assabentar que en la nova impressió el temps divergia de manera exponencial respecte l'anterior impressió.

Després de diverses hipòtesis, Lorenz va comprendre que el problema estava en els nombres que havia introduït a l'ordinador. La memòria emmagatzemava sis decimals, però en la fotocòpia només n'apareixien tres, per estalviar espai. La suposició de Lorenz, abans de descobrir aquest fet, era que donat un punt de partida molt pròxim però no igual, el temps es desenvoluparia lleugerament diferent. Una petita errada, significaria un petit corrent d'aire que diferiria o simplement s'anul·laria amb un altre. Però el sistema d'equacions de Lorenz no es podia permetre aquest marge d'error perquè desemboca en moviments caòtics.

Més tard, va decidir veure gràficament de quina manera diferien els dos casos. Va agafar la impressió realitzada amb sis decimals i la va posar a contrallum amb la impressió feta amb tres decimals. El que va obtenir va ser una representació com la figura següent :



Divergència entre dues pautes. Font <Space Telescope Science Institute>

3.2.3.1 Equacions de Lorenz

L'atractor de Lorenz és producte d'un sistema dinàmic tridimensional no lineal. A continuació es mostren les equacions diferencials utilitzades per Lorenz:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(b - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - cz\end{aligned}\quad (3.2)$$

On les a , b i c es corresponen amb:

1. El nombre de Prandtl(a)

Indica la viscositat i la conductivitat tèrmica.

2. El nombre de Rayleigh (b)

Associat amb la transferència de calor en l'interior del fluid.

3. La raó entre la longitud i l'altura del sistema (c)

Gràcies a les equacions, Lorenz va poder arribar a la conclusió que qualsevol diferència en les condicions inicials abans dels càlculs, canviava de manera abismal els resultats. Només es podien predir els resultats finals del sistema amb curts períodes. Aquest fet es coneix com la hipersensibilitat a les condicions inicials.

Encara que això demostrí que el sistema és impredecible, dins del Caos segueix un patró regular que dóna certa coherència en una zona molt concreta de l'espai de fases.

Les equacions de Lorenz van ser proposades com un model simplificat de la convecció en forma d'anells que, amb freqüència, ocorre en l'atmosfera terrestre. Per aquesta raó, les tres magnituds a les quals es refereixen el sistema són:

- **x**

Raó de rotació de l'anell

- **y**

Gradient de la temperatura (Δt /distància)

- **z**

Desviació de la temperatura respecte al seu valor d'equilibri (estat d'equilibri termodinàmic).

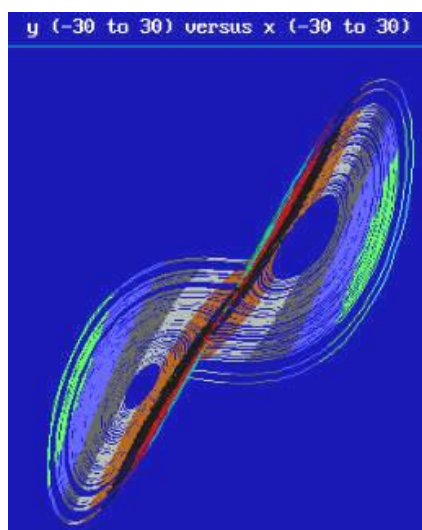
Les solucions del sistema oscil·laven irregularment i només es repetien en una regió molt restringida de l'espai de fases. Lorenz va poder observar que les trajectòries oscil·laven sempre al voltant del que actualment anomenem un *atractor estrany*. El sistema de Lorenz és dissipatiu, té una estructura en què sorgeix una coordinació en el sistema que inicialment estava desordenat i molt lluny de l'equilibri.

4. APLICACIONS

4.1 En meteorologia

Encara que, actualment es disposa de grans avenços tecnològics, l'ésser humà encara és incapaç de realitzar una predicció meteorològica exacta en una regió de la Terra. Aquest fet mostra que la dificultat no es troba en l'obtenció de les extenses dades, sinó en el comportament del sistema atmosfèric en si. El temps atmosfèric és molt sensible als canvis en les variables. Malgrat no tenir la capacitat de realitzar pronòstic climàtics exactes per a sistemes particulars, la Teoria del Caos permet predir amb gran precisió els canvis climàtics globals.

Això és perquè no es busca extreure una trajectòria específica en l'espai de fases, sinó que es busca la forma i la posició de l'atractor del sistema. Les dades experimentals demostren que l'atmosfera terrestre és inestable i no lineal, característiques que fan de l'atmosfera un sistema exemple per estudiar-lo des de la Teoria del Caos.



Atractor de Lorenz. Font: <PWG Meteorología>

Aproximadament l'any 1960, Lorenz va demostrar amb els seus estudis sobre el temps atmosfèric que mai serà possible trobar una solució exacta per a la dinàmica de l'atmosfera. Malgrat aquesta incapacitat de trobar valors exactes sobre el sistema atmosfèric, el fet de treballar amb fonaments matemàtics propis dels sistemes dinàmics, fa que les prediccions meteorològiques siguin relativament precises. Ara bé, perquè els resultats adquireixin credibilitat es necessita la màxima precisió possible en la mesura de les variables. En l'actualitat els meteoròlegs poden predir el temps amb un 85% de seguretat quan l'anticipació és de 10 hores, Si es vol major anticipació, menor és la fiabilitat en el pronòstic.

Segons el científic xilè, doctorat en física, Mario Markus (1944-):

“Per predir el temps d'aquí a tres dies necessitaríem deu mil estacions meteorològiques(...)per predir-lo d'aquí a catorze dies, seria possible, però necessitaríem cent milions d'estacions(...)i si volem un mes d'anticipació hauríem de tenir deu elevat a vint estacions, és a dir, una cada cinc mil·límetres quadrats”⁵

Abans d'aplicar el Caos en la meteorologia es pensava que per predir el temps amb exactitud només era qüestió d'introduir una gran quantitat de variables en un ordinador amb un rendiment prou gran com per processar-les. Tanmateix, s'ha passat d'unes poques variables de fa tan sols unes dècades, a considerar milers de variables sense aconseguir l'exactitud esperada.

El clima és el conjunt de valors estadístics sobre els elements del temps atmosfèric en una regió durant períodes que es consideren representatius. Ara bé, el clima, com a sistema caòtic, s'entén com un sistema impredecible dins d'un atractor que li confereix un cert ordre a través de les estacions.

4.2 En medicina

El cos humà és un sistema complex. Un exemple d'això és que és impossible predir el recorregut d'una partícula dins el nostre organisme. Tampoc la medicina ha estat capaç de predir l'evolució del cos d'una persona des del seu inici fins al final. Ara bé, el cos humà encara que està exposat a diverses influències, com la genètica individual, l'alimentació o el clima, que poden distorsionar la seva evolució, sempre tendeix a adaptar-se i a mantenir una forma general saludable.

La malaltia és un fenomen extern que afecta el cos com a sistema dinàmic, com a resposta, aquest produeix fenòmens d'adaptació, sempre conservant la seva estructura general. El cor té uns nivells estàndards de ritme i freqüència cardíaca però ell mateix pot tenir variacions. Aquestes alteracions són una prova que és flexible als canvis. Alguns autors han plantejat que la salut té un punt d'atractor, que es relaciona amb un punt fixe: la mort.

Al voltant de l'any 1980, Bernardo Huberman, físic i expert en ciències de la computació, va realitzar un model de l'estrany comportament ocular en els esquizofrènics.

⁵ PWG- METEOROLOGÍA Geofísica de la Atmósfera <<http://www.geofisica.cl/Meteorol.htm>>

Aquesta malaltia que afecta generalment el cervell, ha estat molt difícil de definir i conèixer, així com implantar un tractament eficaç. Aquest comportament consisteix en què l'òrgan visual d'una persona que pateix esquizofrènia no s'adapta al moviment d'un pèndol com ho fa una persona sana. El malalt segueix el pèndol de manera desorganitzada en petits increments: o no arriba a seguir totalment el moviment oscil·latori o bé segueix més enllà de la trajectòria del pèndol.

La solució que va oferir Huberman va ser realitzar el model més senzill mitjançant el plantejament d'una equació. Aquesta contenia termes d'amplitud, freqüència, inèrcia de l'ull i de fregament. Huberman va arribar a la conclusió que l'equació descrivia un sistema mecànic anàleg. És a dir, va descobrir que en instants t , l'ull seguia el blanc sense dificultat; després, quan augmentava el grau de no linealitat, el sistema passava per un ràpida seqüència de duplicació del període i desenvolupava un desordre, que era similar al que s'exposa en l'historial mèdic d'un pacient esquizofrènic.



Bernardo Huberman. Font: <Hewlett Packard Enterprise >

4.2.1 Visió de la malaltia des de la Teoria dels Fractals

Una definició simplificada de fractal la podem trobar al llibre *Caos* de James Gleick, que introdueix aquest concepte d'aquesta manera:

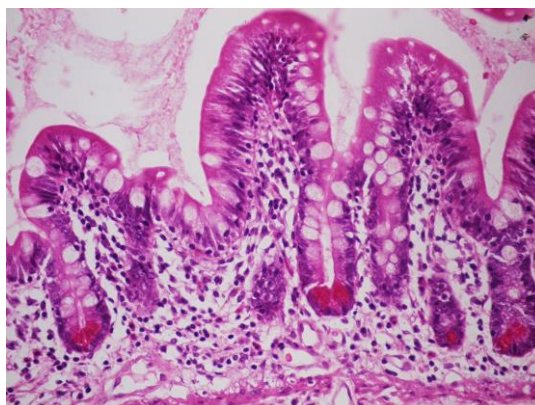
“Un fractal és una manera de veure l'infinit amb el ull de la ment”⁶

Un fractal és una estructura constituïda per fragments d'orientació i mida variable però d'aspecte similar. Les característiques dels fractals els aporta propietats geomètriques especials, com per exemple: la longitud, la relació entre l'àrea de la seva superfície i el seu volum.

⁶ GLEICK, James. *Caos, la creación de una ciencia*. p. 106

Això obliga a utilitzar eines matemàtiques diferents a les convencionals per tal de quantificar-los.

En el cos humà existeixen moltes estructures amb geometria fractal. Alguns exemples són: la xarxa vascular, l'arbre bronquial, la xarxa neuronal, la mucosa intestinal etc. Aquesta geometria permet a l'organisme optimitzar la funció dels sistemes, ja que tenen una gran superfície amb un volum molt inferior.

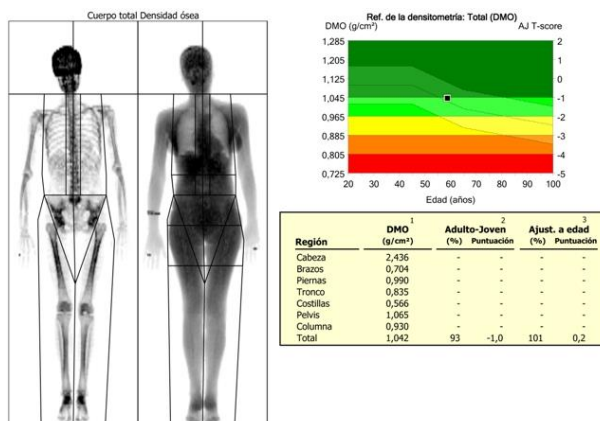


Mucosa intestinal. Font: <Eduardo Salazar-Lindo >

Ahora que existeix geometria fractal, també existeixen comportaments amb característiques fractals, ja que, posseeixen patrons de comportament que es repeteixen en diferents escales de temps.

La Teoria Fractal és una eina útil per a l'estudi de fenòmens dinàmics del cos humà, i permet una exactitud més d'acord amb la dinàmica complexa dels processos biològics. D'aquesta manera, els fenòmens amb comportament fractal poden representar-se mitjançant gràfics; i aquests gràfics permeten mesurar la dimensió fractal, comprenent com a dimensió fractal la representació o quantificació dels paràmetres d'aquests sistemes.

El Dr. Juan José Aranda, conjuntament amb el seu equip de treball, va utilitzar tècniques dels fractals per predir l'osteoporosi, mitjançant un programa informàtic que comparava entre les textures dels ossos de pacients a estudiar amb les dels ossos de pacients amb osteoporosi i feia una aproximació amb les tècniques dels fractals. Observant que quan més un os a estudiar s'apropava a la textura òssia d'un os amb osteoporosi, indicava el grau d'osteoporosi que patia el pacient. Actualment, aquesta tècnica rep el nom de densitometria òssia.



Densitometria òssia. Font: <Bureau De Salud>

4.3 Economia

L'economia i les seves branques com a ciència social s'adapta a certes característiques generals del Caos. Un exemple és la macroeconomia, que estudia les fluctuacions de l'economia al llarg del temps. Aquestes fluctuacions constants ens diuen que l'economia no és un sistema que tendeix a un estat estacionari, ni tampoc un sistema amb comportament periòdic, ja que, els cicles econòmics s'assemblen els uns als altres, però amb caràcter heterogeni entre ells.

L'economia s'ha basat en un model estadístic per organitzar els resultats empírics com un mecanisme d'avaluació i predicció, però l'ús d'aquest procediment per entendre les fluctuacions és limitat perquè, per exemple, es considera que, fins i tot una estructura estadística que s'ajusta bé a les dades observades, és invariable als possibles canvis de política econòmica.

En l'àmbit econòmic el concepte de punt fix o estacionari d'un sistema dinàmic es tradueix com una condició en què els agents es comporten d'acord amb les regles que el model especifica per a ells. Per exemple, el nombre de cotxes venuts és igual al nombre de cotxes comprats.

Un dels principals fonaments dels sistemes no lineals és la seva sensibilitat a les condicions inicials o a les petites influències. Aquesta idea també es pot introduir a l'economia, ja que, si es dóna importància a les confluències entre les empreses i els seus efectes en l'ocupació, la tecnologia i la localització geogràfica, la importància que inicialment no adquiren les PYMES, ara tenen implicacions majors en l'economia.

El caràcter caòtic dels sistemes econòmics pot ser beneficiós en determinats moments, si prèviament s'han creat situacions favorables per augmentar la possibilitat que es produeixi la no linealitat en zones econòmiques desitjables. Per tant, podríem estar parlant d'un "Caos planejat". Aquest fet

permet que petites companyies entrin en el sistema i que, conseqüentment a les seves actuacions, creixin exponencialment, com el cas de Google o Facebook.

⁷ En la recerca bibliogràfica per Internet sobre la Teoria del Caos, es va trobar la “*Societat per la Teoria del Caos en psicologia i ciències de la vida*” (Society for Chaos Theory in Psychology & Life Sciences). Per tal de tenir una visió més global de la Teoria del Caos, es va contactar per correu electrònic amb el Dr. David Pincus del Departament de Psicologia de la Universitat Chapman. Es va plantejar una sèrie de qüestions, a manera d’entrevista. La conversa íntegra que es va duu a terme s’inclou en l’annex 5.

5. OSCIL·LADORS

Un oscil·lador és un sistema capaç de crear pertorbacions o canvis tan periòdics com quasiperiòdics en un medi. Ja sigui en un medi material (acústica...) o en un camp electromagnètic (ones de ràdio, rajos X, infraroig...).

L'oscil·lador harmònic és un dels sistemes més estudiats en la física, ja que, tot sistema que oscil·li al voltant d'un punt d'equilibri estable es pot estudiar com si fos un oscil·lador. La característica principal d'un oscil·lador harmònic és que està sotmès a una força recuperadora, que tendeix a retornar-lo al punt d'equilibri estable, amb una intensitat proporcional a la separació respecte el punt. La força recuperadora és conservativa, i té associat una energia potencial (E_p).

Els diferents tipus d'oscil·ladors a estudiar s'expliquen de manera detallada en l'Annex 1.

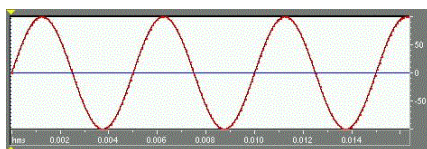
5.1 Ones harmòniques

Un oscil·lador harmònic és aquell que quan no s'exerceix cap força exterior sinó que es posiciona fora del seu punt d'equilibri, aquest torna cap a la posició d'equilibri descrivint oscil·lacions sinusoidals o sinusoidals esmorteïdes entorn de la posició estable del sistema.

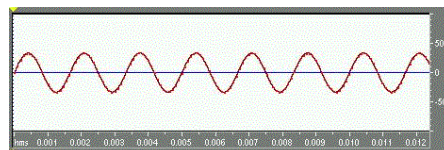
Les ones harmòniques són aquelles que tenen el seu origen en les pertorbacions periòdiques produïdes en un medi elàstic per un moviment harmònic simple.

Quan es tracta d'un moviment oscil·latori periòdic no harmònic es pot considerar, segons el Teorema de Fourier, el resultat de la superposició de diversos moviments oscil·latoris harmònics.

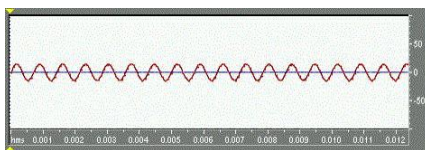
El teorema de Fourier diu que tota ona complexa periòdica pot ser representada com la suma d'ones simples. Un exemple pràctic podria ser la construcció d'una ona quadrada, com a ona complexa, la qual es construïda mitjançant la suma d'ones més senzilles.



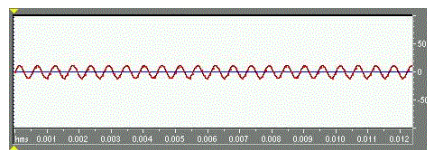
Ona 1



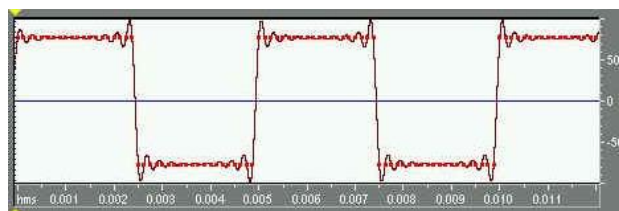
Ona 2



Ona 3



Ona 4



Ona resultant

Font: <Universidad de los Andes>

Les característiques més importants de les ones harmòniques i que, a la vegada, permeten transmetre informació de la mateixa són:

- **Amplitud de l'ona (A):** valor màxim de l'elongació, de les partícules del medi en la seva oscil·lació.
- **Longitud d'ona (λ):** és la distància mínima entre dos punts consecutius que es troben en el mateix estat de vibració.
- **Període (T):** és el temps que necessita el moviment ondulatori a avançar una longitud d'ona, o també el temps que empraria un punt qualsevol afectat per la pertorbació a efectuar una oscil·lació completa.
- **Freqüència(f):** és la quantitat de ones que passen per un punt del medi en una determinada unitat de temps.

5.2 Funció ona

Expressió matemàtica que descriu l'estat de vibració de cada partícula en funció del temps:

$$y = A \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \quad \text{on} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (5.1)$$

Si es considera un altre punt P situat a l'eix X, la partícula vibrarà amb un cert retard. Aquest temps t' s'expressa amb la següent equació:

$$t' = \frac{x}{v} \quad (5.2)$$

On v és la velocitat de la ona.

Amb aquest preàmbul arribem a la conclusió que el valor d'elongació de l'ona en el punt P per un temps t' és el mateix que el valor d'elongació de l'ona en el punt O en un temps $t-t'$ (causat pel retard).

$$y(t, x) = A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \phi_0 \right) \right] \quad (5.3)$$

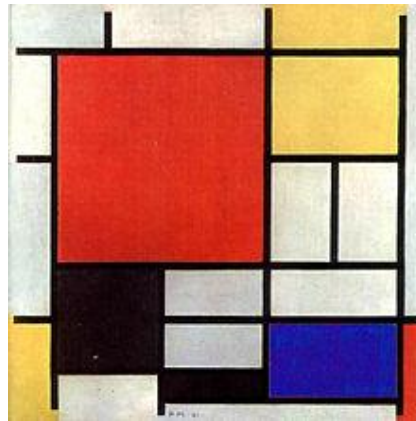
6. EL CAOS I LA CULTURA

Per als antics grecs el terme Caos era antònim d'Ordre. Segons la seva concepció, el Caos era l'estat en que es trobava la matèria abans de l'existència del món tal i com el coneixem. A partir d'aquest estat, apareixien les forces organitzadores de l'Univers, concepte denominat "Cosmos" en grec. Històricament, els grans filòsofs han tendit a pensar en una naturalesa ideal i arquetípica. Un famós exemple és el pensament platònic. Aquesta idea de món alineat ha influït, al llarg dels anys, en la nostra percepció dels diversos camps de la cultura.

L'art s'ha vist influït per aquesta tendència a la perfecció de l'obra. En el Renaixement, l'objectiu principal era buscar la bellesa mitjançant l'equilibri i l'harmonia. Més endavant, amb les estètiques cubistes de Kandinsky o Piet Mondrian, també s'aprecia la concepció idealitzada de la realitat.



La Gioconda de Leonardo da Vinci, 1503 – 1519. Font: <Ana Vazquez Hoys>



Composició amb vermell, blau i groc, de Piet Mondrian, 1926. Font: <Wikispaces by TES Global Limited>

El Caos analitzat des de l'epistemologia, parteix de la tendència a associar aquest terme amb la incapacitat de conèixer tots els factors d'un espai concret amb un temps determinat. Aquest fet ha produït la definició de termes com atzar, indeterminat, aleatori o imprevisible... Jacques L. Monod (1910-1976), famós biòleg francès, observa Caos i Ordre com a dos aspectes complementaris en l'evolució de la realitat. Diferents Ordres són petites parts que formen un immens Caos.



Jacques L. Monod. Font: <Dr. Nelson Campos Villalobos>

Tot el conjunt de teories que s'expressen mitjançant sistemes no lineals adquireixen molta importància perquè tenen un enorme valor epistemològic, ja que, obren vies d'accés a una realitat conceptual més ampla i permeten aprendre'n sense prescindir de la seva complexitat. A més a més, ens donen l'oportunitat de posar en manifest propietats desconegudes de la realitat i, conseqüentment, una nova idea de complexitat.

Pablo Cazau, llicenciat en Psicologia a la UBA, esmenta que si un fenomen descrit no es pot predir és per, com a mínim, tres raons:

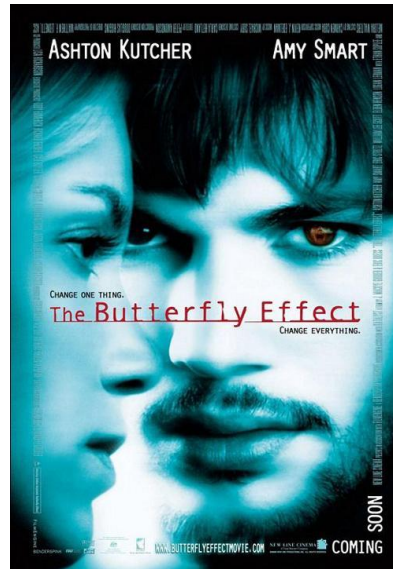
1. La realitat és atzar i, per tant, no hi ha lleis que permetin ordenar els comportaments.
2. La realitat està totalment governada per lleis causals, i si no podem predir comportaments, és perquè encara no coneixem aquestes lleis.
3. En la realitat hi ha inestabilitats i desordre momentani, però tot retorna, després, al seu determinisme.

La tercera raó ha estat la més rendibilitzada per aquells que han estudiat la Teoria del Caos en diversos camps científics.

L'existència d'atractors és crucial per a totes les teories no lineals, ja que, en ells es pot representar el comportament d'aquests sistemes complexos. La teoria dels atractors estranys ofereix àmplies possibilitats d'aplicació en la Ciència Social. L'any 1994, Eiser, especialista en Ciències Socials i Comportaments, va intentar veure les actituds com a atractors, dins d'un context basat en connexions del cervell. També ho va fer Roger Brown (1925-1997), psicòleg americà interessat per la Psicologia Social, i la seva teoria dels models socials, que originen les modes, en el lideratge de grup o opinió.

La millor manera per comprendre com o en quin sentit s'ha d'entendre l'aplicació del Caos en les Ciències Socials és adonar-se que els conceptes de fractal, conjunts no lineals, bifurcacions, atractor, ... no tenen la necessitat de ser aplicats de manera explícita. Per exemple, el concepte de feedback pot ser aplicat tant a un motor com al cos d'un humà. Però això no significa que un humà sigui i actuï de la mateixa manera que ho fa un motor. El Caos és un comportament que s'esdevé tant en una galàxia com en les societats.

El Caos també ha estat tractat des d'un punt de vista cinematogràfic i literari al llarg del temps. L'exemple més popular és "**The butterfly effect**"



Font: <Wikimedia>

Es tracta el tema del canvi del temps, particularment del passat. El protagonista intenta canviar el seu present viatjant al passat per intentar modificar certs actes en la seva vida, malgrat això sempre surt algú perdent.

El terme Caos també apareix en un capítol de la popular sèrie de dibuixos animats *Los Simpsons*. El capítol pertany a la sisena temporada i es titula "Temps i càstig".

Homer, el protagonista, arreglant una torradora acaba convertint-la en una màquina del temps. La idea d'un present que canvia per la mort d'un insecte prehistòric és satiritzada, podent arribar a ocasionar conseqüències imprevisibles degut a l'efecte papallona. El consell que rep Homer per part del seu pare és:

"Si mai alguna vegada viatges a través del temps, procura no tocar res. Fins el més mínim canvi pot alterar el futur, però d'una forma inimaginable."⁸

⁸ MARTÍN SIERRA, Marta; MARTÍN, Abel. *Matemàtiques y Cine: LA TEORÍA DEL CAOS*. <http://www.aulamatematica.com/AMD/PDF/AMD_02/02_AMD_40_43_Cine.pdf>



Font: <Marta Martín Sierra i Abel Martín>

En la primera pel·lícula de la saga *Jurassic Park*, un dels protagonistes és un matemàtic, que utilitza el concepte de la Teoria del Caos i les seves implicacions filosòfiques per explicar el col·lapse que es viu en el parc d'atraccions.

“El Tiranosaure no obeeix a un sistema fix i d'horari del parc, aquesta és la essència del Caos(...)Doni'm aquell got d'aigua. Ja veurà. El cotxe no para de saltar, però no importa, només és un exemple. Posi la mà plana com en un jeroglífic. Diguem que cau en la seva mà una gota d'aigua. Cap a quin costat anirà? Cap al dit polze? Cap a l'altra costat?(...)Bé, no es mogui, faré el mateix, en el mateix lloc. En quina direcció creu que anirà?(...) Ha canviat! Per què? Per petites variacions: la quantitat de sang que dilata els vasos a les imperfeccions de la pell...microscòpiques, i mai es repeteixen i afecten molt el resultat, això és, imprevisibilitat”⁹



Font: <Marta Martín Sierra i Abel Martín>

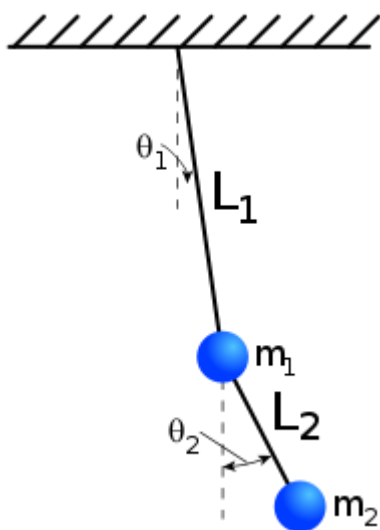
⁹ Text transcrit d'una escena de la pel·lícula *Jurassic Park*, Steven Spielberg, 1993.

7. ESTUDI EXPERIMENTAL DE SISTEMES CAÒTICS

7.1 Estudi experimental d'un pèndol doble

7.1.1 Forces i equacions del moviment

Tal i com s'ha esmentat en la introducció aquest treball consta d'una part experimental que comença pel pèndol doble. Abans de realitzar la pràctica s'han d'estudiar les forces que generen el moviment caòtic propi d'aquest tipus de pèndol.



Font: <Wikimedia>

A partir de les raons trigonomètriques bàsiques podem extreure les trajectòries que segueixen cada massa, respectivament:

$$x_1 = l_1 \cdot \sin \theta_1$$

$$y_1 = l_1 \cdot \cos \theta_1$$

$$x_2 = l_2 \cdot \sin \theta_2 + x_1 \quad (7.1)$$

$$y_2 = l_2 \cdot \cos \theta_2 + y_1$$

Derivant aquestes expressions podrem extreure les expressions de la velocitat: $\dot{x}_1$, $\dot{y}_1$ i $\dot{x}_2$, $\dot{y}_2$, així com les de l'acceleració: $\ddot{x}_1$, $\ddot{y}_1$ i $\ddot{x}_2$, $\ddot{y}_2$.

Per tant, es dedueix que l'angle d'ambdós pèndols varia amb el temps:

$$\theta_1 = \theta_1(t) \quad \theta_2 = \theta_2(t) \quad (7.2)$$

Quant a les forces, s'ha de partir de la segona llei de Newton:

$$\vec{F} = m \cdot \ddot{x} \quad (7.3)$$

Massa 1	Massa 2
$-T_1 \cdot \sin \theta_1 + T_2 \cdot \sin \theta_2 = m_1 \cdot \ddot{x}_1$	$-T_2 \cdot \sin \theta_2 = m_2 \cdot \ddot{x}_2$
$T_1 \cdot \cos \theta_1 - T_2 \cdot \cos \theta_2 - m_1 \cdot g = m_1 \cdot \ddot{y}_1$	$T_2 \cdot \cos \theta_2 - m_2 \cdot g = m_2 \cdot \ddot{x}_2$

7.1.2 Càlcul d'energies

Per poder parlar d'energies en aquest sistema, abans hem de fer un estudi sobre les equacions de Euler-Lagrange, ja que són les que s'utilitzen per descriure la variació d'energia en aquest sistema.

Un lagrangiana és una funció escalar considerada l'operador fonamental per descriure un sistema dinàmic. D'ell s'obté l'evolució temporal, així com les lleis de conservació i d'altres propietats importants d'un sistema dinàmic. Aquest concepte va néixer de la reformulació de la mecànica clàssica. Aquest reestabliment de la teoria de Newton va donar-se per arribar a explorar l'acció de la mecànica en sistemes alternatius a les coordenades cartesianes, com poden ser les coordenades polars o esfèriques, les quals aporten informació que és impossible apreciar en la mecànica de Newton. Aquest nou plantejament va ser nomenat mecànica lagrangiana.

A més a més, aquesta teoria desenvolupada pel matemàtic francès Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813) permet assolir tant les lleis de Newton com les equacions de Maxwell. El lagrangiana determina les propietats bàsiques d'un sistema en teoria quàntica de camps.

L'equació que s'aplica a la situació del pèndol pel que fa a la teoria de Lagrange és la següent:

$$L = T - V \quad (7.4)$$

On T és l'energia cinètica i V l'energia potencial

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (7.5)$$

Per tant, en el cas del pèndol doble haurem de suposar que les equacions de moviment vénen regides per Lagrange, respectivament:

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \quad (7.6)$$

7.1.3 Experimentació amb el pèndol doble

El primer pèndol (Fig.21) que vaig construir era metàl·lic i l'experimentació que s'hi va dur a terme presentava molts problemes. El principal era que el cos tenia una massa molt elevada i, conseqüentment, tenia una inèrcia elevada.



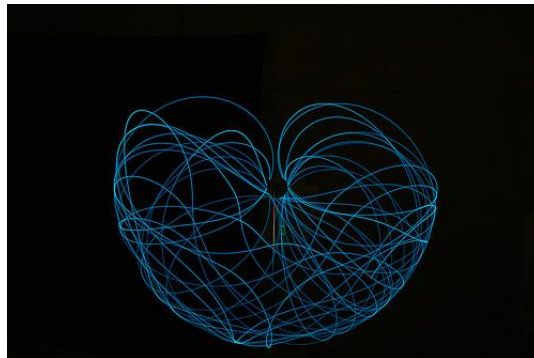
Pèndol doble metàl·lic. Font: <Autora>

Per tant, es va decidir construir un segon pèndol d'un material més lleuger. En aquest cas s'han utilitzat làmines de fusta per construir-lo (Fig. 22). Malgrat que es va solucionar el problema de la inèrcia, el cos presentava molt fregament amb la superfície (la vareta) i es va haver de llisar amb paper de vidre, i lubricar-la amb oli per aproximar-se tant com fos possible al comportament d'un pèndol doble ideal.



Pèndol doble de fusta. Font: <Autora>

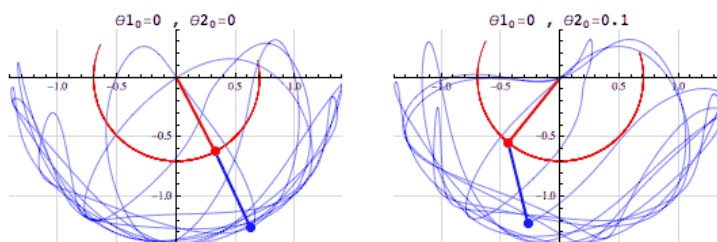
Les proves realitzades amb el meu pèndol són diverses, perquè el fregament que presenta el pèndol doble no permet realitzar una gràfica completa del moviment com podem visualitzar en aquesta imatge:



Atractor en un medi ideal. Font: <Flickr>

Majoritàriament aquests atractors es formen en una situació ideal sense cap tipus de forces no conservatives. A diferència de la meua experimentació, que són moltes les forces externes que intervenen en el moviment.

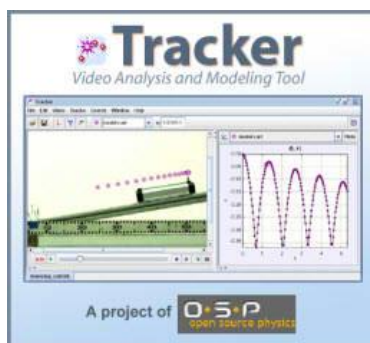
A més a més, és impossible realitzar una superposició de diferents situacions per la seva sensibilitat a les condicions inicials. És a dir, hauria de superposar dues situacions idèntiques, una cosa molt difícil en un medi no conservatiu. Tal com es compara en la següent imatge podem veure la diferència que progressivament creix entre dues situacions gairebé idèntiques.



Sensibilitat a les condicions inicials. Font: <Tumblr>

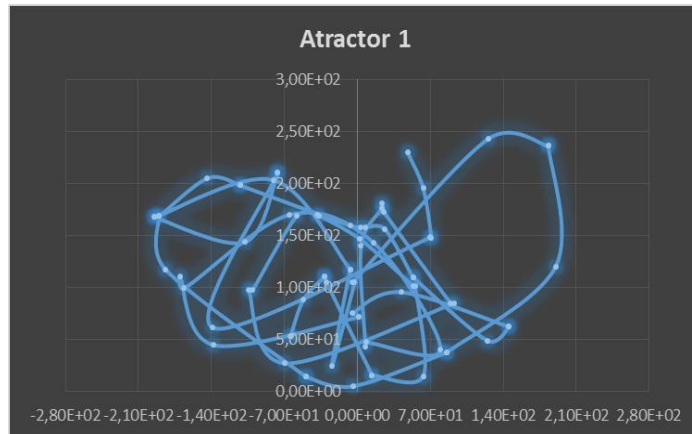
A continuació vaig haver de buscar la forma més adient d'extreure la posició del pèndol en una freqüència alta per tenir la màxima precisió possible. La primera idea va ser posar paper mil·limetrat darrere el pèndol i inscriure un punt en la segona peça amb un forat. Posteriorment, amb un programa d'edició, separar els fotogrames per obtenir la trajectòria. Ara bé, amb aquest procediment es perdia molta precisió, ja que el diàmetre del forat havia de ser prou gran com per visualitzar-ho però, alhora, el prou petit per no perdre precisió.

La segona opció i, la definitiva, va ser la utilització d'un programa especialitzat en la captura de la posició i la velocitat d'un cos. El més laboriós va ser trobar un programa que s'ajustés a les meves necessitats i que, a més a més, fos gratuït. Tot i que la major part d'aquests programes tenen un ús restringit a estudiants universitaris o bé s'ha de pagar per obtenir-los. Vaig trobar el programa anomenat *Tracker* (Fig.25).

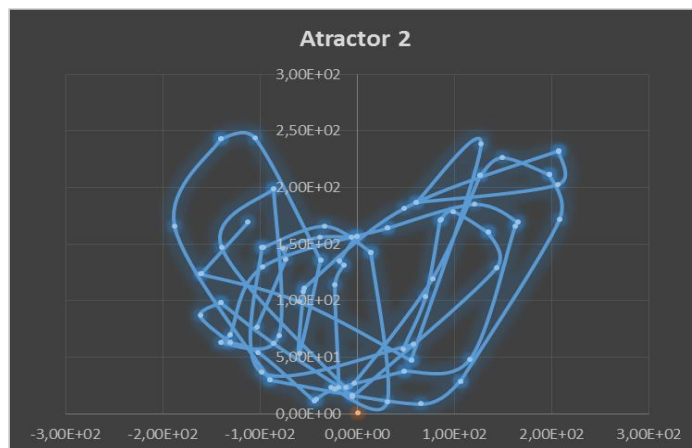
*Tracker (Video Analysis and Modeling Tool).* Font: <Douglas Brown>

Aquest programa és gratuït, et permet analitzar un vídeo i és una eina de disseny gràfic. Després de provar a fer una experimentació amb aquest software vaig veure viable aquesta opció. Mitjançant l'opció de *Massa puntual* que ens ofereix el programa vaig poder precisar cada fps (fotograma per segon) la posició del segon cos. Amb origen de coordenades en l'estat d'equilibri del pèndol.

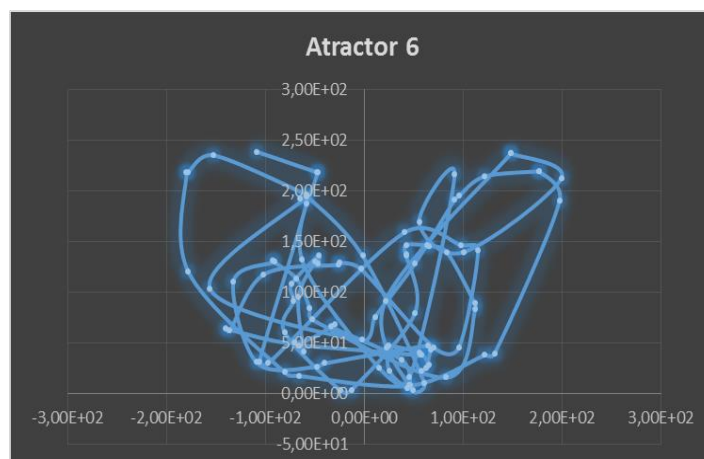
A continuació es mostren les gràfiques més significatives de les deu proves que es van dur a terme. En aquestes figures és on es mostra millor l'efecte de l'atractor respecte el comportament ideal.



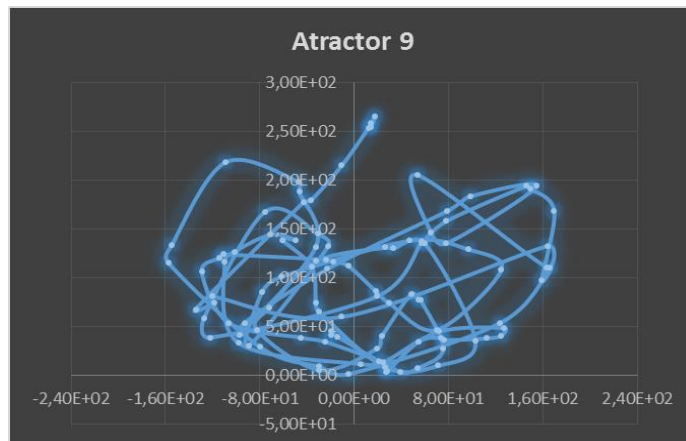
Experimentació 1. Font: <Autora>



Experimentació 2. Font: <Autora>



Experimentació 6. Font: <Autora>



Experimentació 9. Font: <Autora>

La resta d'experimentacions fetes amb el pèndol doble es troben en l'annex 3.

7.1.4 Anàlisi dels resultats de l'experimentació amb el pèndol doble

Malgrat el comportament caòtic que es mostra en el pèndol doble, s'ha trobat experimentalment que existeix un punt fix que actua d'atractor. En cada cas, aquest punt fix varia. És vàlida la hipòtesis de partida, és a dir, aquest conjunt d'atractors representen un sistema dinàmic caòtic però intrínscament satisfà regles predictibles.

7.2 Estudi experimental de sons compostos indeterminats

7.2.1 Tipus de sons

La física classifica els sons en dos grups: els sons purs i els sons compostos.

Un so pur es defineix com aquell so en què la variable del temps de la seva equació d'ona es pot expressar a través d'una funció sinusoidal.

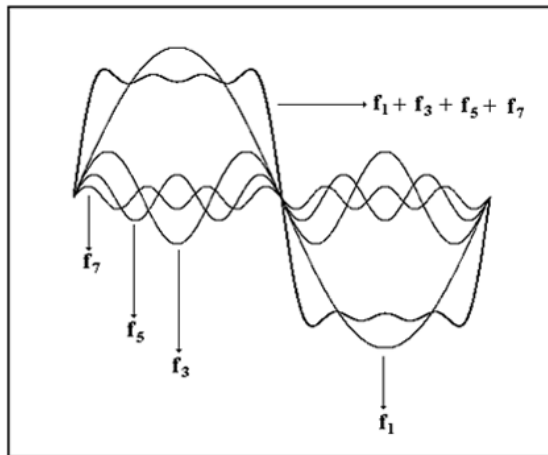
Els sons compostos es poden subdividir en determinats o indeterminats. Els sons compostos determinats tenen una funció sinusoidal principal, a la qual s'associa la freqüència principal. La resta de funcions que formen el so tenen una freqüència múltiple del primer harmònic (freqüència principal).

Els sons compostos indeterminats són un conjunt caòtic de funcions sinusoidals disposades sense cap regla.

7.2.2 Anàlisi dels sons compostos: Anàlisi de Fourier

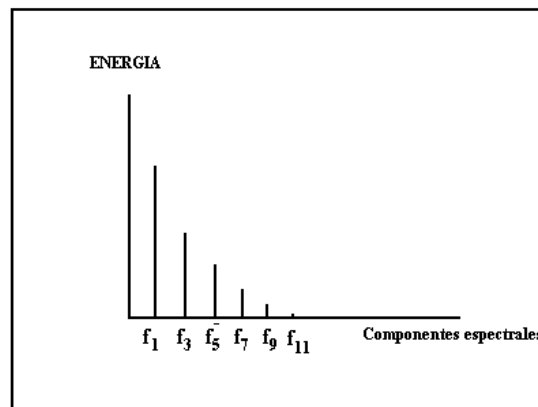
Tal i com s'ha esmentat en la teoria, si la forma de l'ona és periòdica, es pot representar mitjançant la superposició d'un nombre prou gran d'ones sinusoidals que formen una sèrie harmònica. És a dir, tota funció $f(t)$ periòdica amb un període P es pot representar com una suma infinita de funcions harmòniques. A partir d'aquest concepte l'anàlisi de Fourier desenvolupa una sèrie d'equacions, que permeten realitzar aquesta superposició matemàticament. L'esmentat desenvolupament es troba en l'annex 4.

L'objectiu de l'anàlisi de Fourier en una funció és determinar la freqüència, amplitud i fase que ha de tenir cadascuna de les funcions harmòniques que componen l'ona complexa. Qualsevol ona es pot expressar com una combinació lineal d'infinites funcions harmòniques. Per visualitzar millor aquest procés suposem que tenim una ona quadrada senzilla que poden suposar formada per la superposició de moltes funcions harmòniques.



Formació d'una ona quadrada. Font: <J. Antonio Aznar Casanova>

Quan realitzem l'anàlisi de Fourier obtenim la següent gràfica:



Espectre de freqüències. Font: <J. Antonio Aznar Casanova>

En aquest cas en particular, podem extreure diverses conclusions que coincideixen en les propietats que tenen aquestes funcions sinusoidals.

- La freqüència 1 (la més baixa de totes) és la freqüència fonamental o primer harmònic. La seva freqüència i amplitud és la mateixa que l'ona quadrada.
- La freqüència 3 és el tercer harmònic, la seva freqüència és el triple que la fonamental i la seva amplitud és $1/3$ de l'amplitud fonamental.
- La freqüència 5 és el cinquè harmònic, la seva freqüència és cinc vegades més gran que la freqüència fonamental i la seva amplitud és $1/5$ de l'amplitud fonamental.

- La freqüència 7 és el setè harmònic, la seva freqüència és set vegades més gran que la freqüència fonamental i la seva amplitud és $1/7$ respecte l'amplitud fonamental.

7.2.3 Transformada de Fourier

Depenent del tipus de senyal que s'estigui analitzant s'han d'aplicar unes tècniques matemàtiques concretes.

La Transformada Discreta de Fourier requereix que la funció sigui una seqüència discreta i d'infinita duració. Únicament avalua prou components freqüencials per reconstruir el segment finit que s'analitza. La DFT és una transformada de Fourier per l'anàlisi de senyals de temps discret i domini finit.

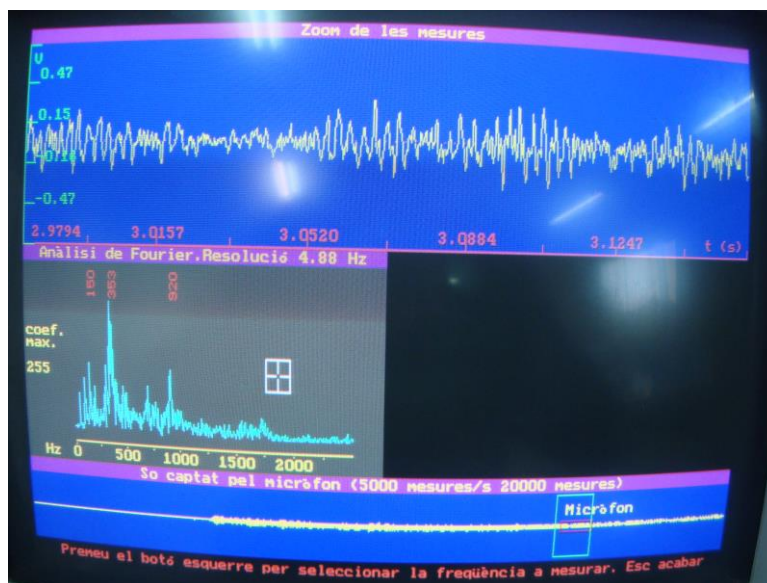
Una de les propietats més importants de la transformada de Fourier és que té caràcter lineal. Si l'ona que estem estudiant és periòdica podem trobar l'ona a la qual correspon la freqüència fonamental. En canvi, en ones aperiòdiques s'ha d'utilitzar la transformada de Fourier per extreure l'ona corresponent al primer harmònic. En la meua pràctica s'estan tractant ones aperiòdiques pel que s'hauria de realitzar la transformada per extreure aquesta ona predominant.

7.2.4 Experimentació amb sons caòtics

La meua experimentació consisteix a realitzar l'anàlisi de Fourier amb diversos sons. El recull de les dades i les operacions necessàries per fer aquesta anàlisi han estat possible gràcies a un ordinador equipat amb el programa EXAO (Experimentació Assistida per Ordinador) que permet connectar diferents sensors (en el nostre cas, un micròfon) i que té un software que permet tractar el senyal analògic convertint-lo en digital per poder-lo estudiar.

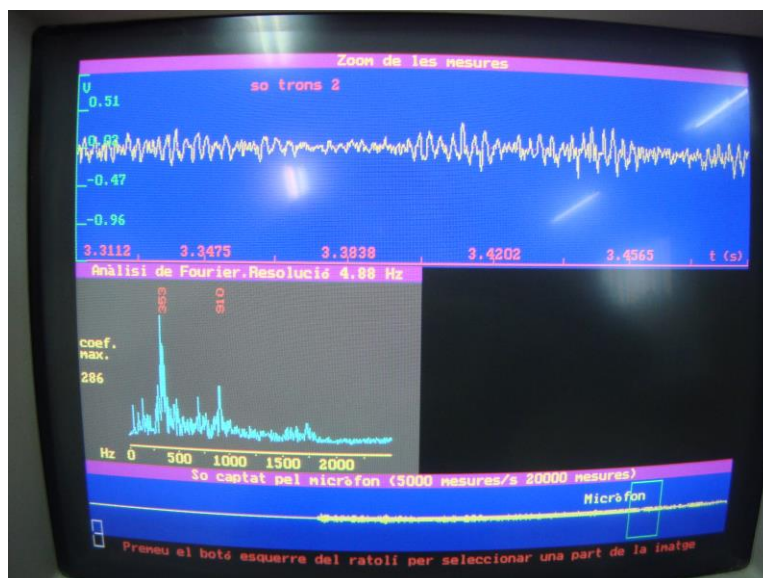
A continuació adjunto les fotografies de l'anàlisi dels sons corresponents:

1) Trons



Resultats de l'anàlisi de Fourier del so d'un tro. Font: <Autora>

En una primer experiència podem observar que hi ha tres freqüències predominants, encara que es distingeix el primer harmònic de 353 Hz. Les dues freqüències que també destaquen són de 150 Hz i 920 Hz.

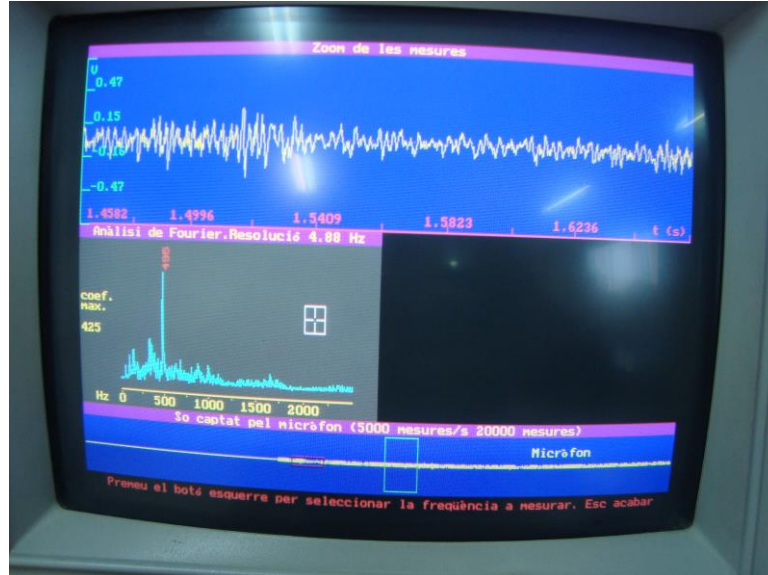


Resultats de l'anàlisi de Fourier del so d'un tro. Font: <Autora>

A causa de l'aparició de tres freqüències relativament importants es va repetir aquest cas una altra vegada i va aparèixer el primer harmònic amb el mateix valor que abans (353

Hz) i tan sols una segona freqüència considerable de 910 Hz $\approx$ 920 Hz.

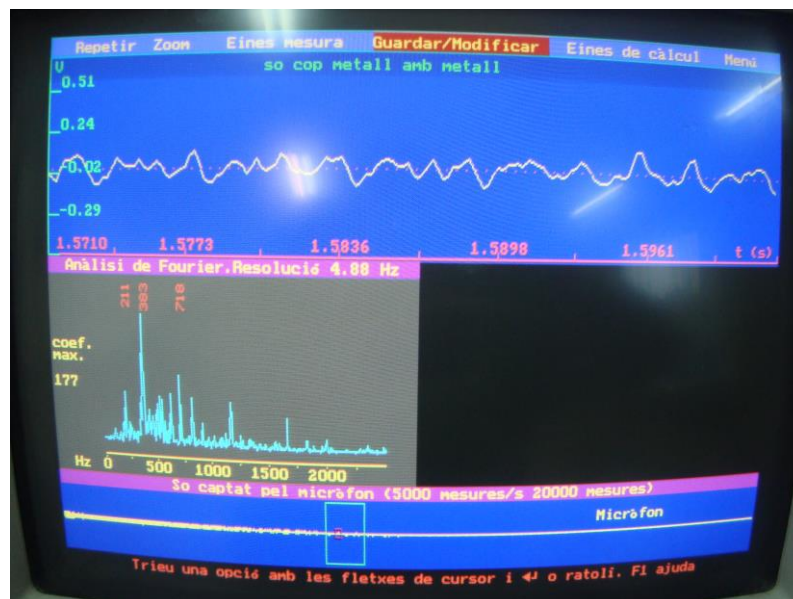
2) Trànsit



Resultats de l'anàlisi de Fourier del so del trànsit. Font: <Autora>

En aquest cas es tracta d'una gravació feta al carrer on se senten tot tipus de sons superposats. D'aquesta anàlisi s'extreu una freqüència fonamental de 495 Hz.

3) Cop entre dos metalls



Resultats de l'anàlisi de Fourier del so d'un cop de dos metalls. Font: <Autora>

L'ona correspon a l'impacte entre dos objectes metàl·lics i la freqüència fonamental que correspon a l'ona caòtica és de 383 Hz.

4) So produït per un tambor

Els instruments musicals també presenten ones caòtiques. Malgrat això, aquestes ones estan constituïdes per harmònics lineals. En aquest cas el primer harmònic de l'ona correspon a un valor de freqüència igual a 262 Hz.



Resultats de l'anàlisi de Fourier del so d'un tambor. Font: <Autora>

7.2.5 Anàlisi dels resultats de l'experimentació amb sons caòtics

Els resultats tabulats dels estudis realitzats són:

So analitzat	Freqüència fonamental mesurada(Hz)
Trons	353-920
Trànsit	495
Cop entre dos metalls	383
So d'un tambor	262

Resum dels resultats dels diferents sons analitzats. Font: <Autora>

Tot i l'existència d'un evident comportament caòtic en els sons compostos indeterminats, s'ha trobat experimentalment que

existeix una freqüència predominant en cada cas. Per tant, hem validat per aquest sistema de senyals caòtiques que la hipòtesi de partida del treball es compleix.

7.3 Estudi experimental de la funció i aplicació logística

7.3.1 Sistemes amb iteració

Aquests tipus de sistemes dinàmics discrets també es coneixen com equacions de diferències infinites, relacions de recurrència o aplicacions iterades. El procés d'iteració consisteix en què el següent estat del sistema ve determinat pel seu estat actual. L'expressió general és de l'ordre:

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (7.7)$$

El procediment per dur a terme l'estudi d'un sistema amb iteració és molt senzill encara que la dinàmica que desenvolupa pot ser molt més complicada. En primer lloc, s'ha d'escollir un valor inicial x_0 de la variable d'iteració. Després, es calcula el valor de la funció en aquell punt $f(x_0)$ el qual determina un nou punt $x_1 = f(x_0)$. Finalment s'utilitza el valor obtingut com input per tornar a començar segons l'algoritme. Si repetim l'algoritme n vegades es genera una trajectòria.

7.3.2 Definició d'aplicació logística

L'aplicació logística ve donada per la funció unidimensional dependent d'un sol paràmetre r , i l'expressió general és:

$$f(x) = rx(1-x) \quad (7.8)$$

On $x \in [0,1]$ i $r \in [0,4]$ de manera que en passar pel procés d'iteració a partir d'un valor inicial x_0 va desenvolupant una òrbita o trajectòria.

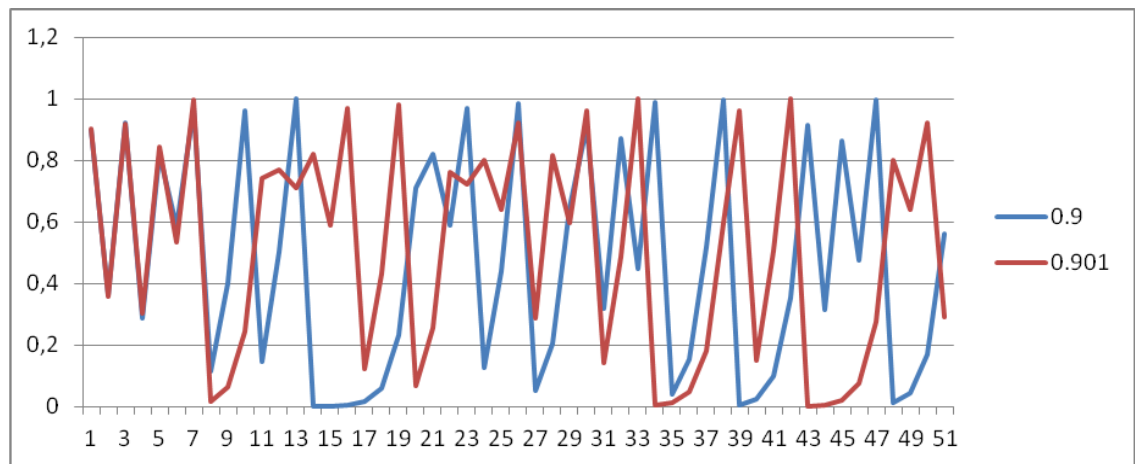
7.3.3 Experimentació amb aplicació logística: relació amb el Caos

Per tal de visualitzar la contribució de l'aplicació logística a la Teoria del Caos, s'ha realitzat un conjunt d'iteracions en equacions que compleixen les característiques necessàries per desenvolupar una òrbita. El caràcter més important que posseeix la iteració és la sensibilitat a les condicions inicials. Aquest fet ha

estat comprovat mitjançant la representació de dues variables molt pròximes en la funció següent:

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n) \quad (7.9)$$

On $x_1 = 0.9$ i $x_2 = 0.901$



Representació gràfica per a un model d'iteració. Font: <Autora>

Mitjançant aquesta iteració senzilla es pot concloure que l'error ínfim comès influeix en el sistema de manera exponencial, i causa un error molt més gran a mesura que la iteració es desenvolupa.

7.3.4 Anàlisi dels resultats de l'experimentació amb la funció logística

En aquest cas, l'aplicació logística en la funció (7.9) ens ajuda a visualitzar un dels caràcters més importants en què es basa la Teoria del Caos: la sensibilitat del sistema a les condicions inicials. Aquest fenomen va estar descobert per Lorenz, el qual va simplificar aquesta influència dels valors inicials en un concepte anomenat *efecte papallona*.

8. CONCLUSIONS

Gràcies a aquest treball, he pogut comprendre millor una teoria extensa com és la Teoria del Caos. Aquesta comprensió ha estat possible gràcies a l'estudi d'algunes de les lleis que regeixen els moviments caòtics. Les representacions gràfiques que un sistema no lineal pot desenvolupar, com pot ser un fractal, les bifurcacions o els atractors m'han permès visualitzar aquestes lleis.

Paral·lelament he realitzat una investigació bibliogràfica per saber més de l'origen de la Teoria del Caos i els antecedents que van fer possible la motivació dels posteriors científics que l'han estudiat.

Les diverses i variades aplicacions d'aquesta teoria, que a primer cop d'ull presenta un caràcter totalment teòric, han fet que es vegi la practicabilitat de tot el que envolta la teoria. També, l'estudi de sistemes tan usuals com els oscil·ladors, en els quals es presenten característiques pròpies de sistemes caòtics.

L'experimentació amb el pèndol doble m'ha aportat molta seguretat a l'hora d'afirmar que el Caos realment hi és. Un objecte de, relativament, fàcil construcció ha esdevingut una descripció gràfica del Caos en el medi físic no idealitzat. A més a més, el posterior estudi de les lleis físiques que expliquen el comportament d'un pèndol doble demostren la linealitat que en cert ordre està present.

Amb l'experimentació dels sons caòtics he après part del treball que Fourier va aportar a la Teoria del Caos amb l'estudi de senyals caòtics. En aquest cas, ha estat evident que dintre de diversos senyals no lineals sempre hi havia una freqüència que tenia més influència en el senyal en qüestió.

L'últim estudi ha estat l'aplicació logística. Malgrat ser l'experimentació que m'ha demanat menys dedicació temporal, ha resultat una peça clau per poder visualitzar matemàticament el denominat *efecte papallona*. La influència en els valors inicials de dos nombres extremadament pròxims en el sistema resulta ser molt elevada.

S'ha demostrat que qualsevol comportament dins un sistema dinàmic no lineal mostra un caràcter predictable que esdevé un paradigma físic. Així doncs, es pot dir que dins del Caos podem trobar Ordre. Per tant, els objectius plantejats a l'inici d'aquesta recerca han estat assolits de manera satisfactòria.

Respecte a la hipòtesi de partida plantejada, l'experimentació realitzada en els sistemes caòtics estudiats en el treball ha aportat certesa per poder afirmar que els sistemes dinàmics caòtics tenen comportaments regulars, periòdics o

predictibles. Aquests comportaments són la conseqüència d'influències lineals en el sistema.

Tot i que, en alguns moments s'han presentat nombroses dificultats a l'hora de realitzar el treball, la recerca ha estat una experiència satisfactòria. A part dels coneixements de la Teoria del Caos, l'estudi ha implicat l'ús d'eines matemàtiques addicionals, les quals he assimilat al llarg del curs i que en un futur m'agradaria aprofundir. Un dels aspectes més dificultosos ha estat el fet de trobar alguna experimentació per poder demostrar la hipòtesi de partida. A més, la comprensió de les forces que regeixen el pèndol doble ha estat un procés laboriós. En general, estic molt contenta amb el resultat obtingut.

9.- BIBLIOGRAFIA

- ALMIRA, J.M. *Transformada de Fourier*. [En línea]
<http://www4.ujaen.es/~jalmira/transformada_fourier_almira.pdf> [Consulta: 16/12/15]
- ALVARADO PLANAS, Jorge. *La estética del caos*. [En línea] <<http://filosofia.nueva-acropolis.es/2012/la-estetica-del-caos/>> [Consulta: 13/11/15]
- AMERICAN CHEMICAL SOCIETY. *Química: un proyecto de la American Chemical Society*. [En línea] Ed. Reverte, 2005. [Consulta: 25/08/15]
- ARMESTO, Adalberto; TRUJILLO, Cristhian. *Definición*. [En línea]
<<http://circuitososciladores.blogspot.com.es/2007/08/definicion.html>> [Consulta: 27/01/16]
- ASENSIO MENÉNDEZ-BARZANALLANA, Rafael. *Edward Lorenz, padre de la Teoría del Caos y el Efecto Mariposa*. [En línea]
<<http://www.um.es/docencia/barzana/BIOGRAFIAS/Biografia-Edward-Lorenz.php>> [Consulta: 08/01/16]
- AZNAR CASANOVA, J. Antonio. *Análisis frecuencial de imágenes*. [En línea]
<<http://www.ub.edu/pa1/node/fourier>> [Consulta: 15/12/15]
- BIOGRAFIAS Y VIDAS. *Pierre-Simon Laplace*. [En línea]
<<http://www.biografiasyvidas.com/biografia/l/laplace.htm>> [Consulta: 08/01/16]
- CARA, F. Javier. *Análisis de Fourier*. [En línea]
<http://www.etsii.upm.es/ingor/estadistica/fjcara/mme_construccion/03_fourier.pdf> [Consulta: 15/12/15]
- CASTELO ARES, José María. *La aplicación logística: un laboratorio del caos*. [En línea]
<<https://www.uv.es/oteo/LM/Tesis%20de%20Master.pdf>> [Consulta: 23/01/16]
- CATALÀ POCH, M. Asunción [et al.]. *Astronomía esférica y mecánica celeste*. [En línea] Ed. Universitat Barcelona, 2007. [Consulta: 30/07/15]
- CATARINA UDLAP. *Sistemas dinámicos*. [En línea]
<http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/lem/loaiza_r_m/capitulo3.pdf> [Consulta: 14/01/16]
- C. HILBORN, Robert. *Chaos and Nonlinear Dynamics (an introduction for scientist and engineers)* Ed. Oxford University Press, 1994. [Consulta: 08/10/15]
- CLARAMUNT Q., Grabiell; ARAYA, Miguel; ROA, Ruben. *Dinámica de poblaciones explotadas*. [En línea]. Ed. Universidad Arturo Prat, 2003. [Consulta: 30/07/15]
- COSTA, J.M. *Diccionario de Química Física*. [En línea] Ed. Ediciones Díaz de Santos, 2005. [Consulta: 09/01/16]

CUENTOS CUÁNTICOS. *Diagramas de Feynman para todos 1*. [En línea]
<<http://cuentos-cuanticos.com/2011/11/07/diagramas-de-feynman-para-todos-1/>>
[Consulta: 16/01/16]

DAGNINO, Bruno. *Meteorología y teoría del caos: ¿Por qué es tan difícil pronosticar el clima?* [En línea] <<http://blogonprod.nearwen.com/meteorologia-y-teoria-del-caos-por-que-es-tan-dificil-pronosticar-el-clima/#>> [Consulta: 18/01/16]

DÍAZ MARTÍN, José Fernando; ARSUAGA URIARTE, Eider; RIAÑO SIERRA, Jesús M. *Introducción al álgebra*. [En línea] Ed. Netbiblo, 2005. [Consulta: 22/08/15]

ESPINOZA, José. *Sistemas lineales dinámicos*. [En línea]
<http://www2.udec.cl/jose.espinoza/SLD/543214_SLD_Apuntes.pdf> [Consulta: 27/01/16]

FARGUETA RUIZ, Salvador. *Richard Feynman, sus diagramas y sus bongos*. [En línea] <<http://labellateoria.blogspot.com.es/2008/10/richard-feynman-sus-diagramas-y-sus.html>> [Consulta: 09/01/16]

FRANCO GARCÍA, Ángel. *El péndulo doble*. [En línea]
<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/pendulo_doble/pendulo_doble.htm#Ecuaciones del movimiento> [Consulta: 14/12/15]

FRANCO GARCÍA, Ángel. *Análisis de Fourier*. [En línea]
<<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/ondas/fourier/Fourier.html>> [Consulta: 15/12/15]

FRANTZ, Terrill. *Society for Chaos Theory in Psychology & Life Sciences* [En línea]
<<http://www.societyforchaostheory.org/resources/#1a>> [Consulta: 07/10/15]

GARCÍA, Ricardo M. *El concepto de libre albedrío en San Agustín*. [En línea] Ed. EdiUNS, 2003. [Consulta: 30/07/15]

GEOFÍSICA. *Teoría del Caos/Chaos Theory*. [En línea]
<<http://www.geofisica.cl/English/pics5/FUM3.htm>> [Consulta: 19/09/15]

GONZÁLEZ ÁLVAREZ, Joaquín. *La invarianza de escala, una propiedad poco manejada de los sistemas complejos*. [En línea]
<<http://casanchi.com/mat/invaescala01.pdf>> [Consulta: 16/01/16]

H. WOMPNER G., Fredy. *La teoría del caos en la economía* [En línea]
<<http://www.eumed.net/ce/2008b/fhwg.htm>> [Consulta: 31/08/15]

JEAN BRIZARD, Alain. *An introduction to Lagrangian Mechanics*. [En línea] Ed. World Scientific, 2008. [Consulta: 14/12/15]

LA WEB DE LA FÍSICA. *Oscilador armónico*. [En línea]
<<http://www.lawebdefisica.com/dicc/oscil/>> [Consulta: 02/09/15]

LÓPEZ MOURONTE, Mary Luz. *Caracterización y análisis de sistemas dinámicos no lineales mediante el estudio del mapa de frecuencias y espacio de fases*. [En línea]
<<http://oa.upm.es/6111/1/02200457.pdf>> [Consulta: 21/12/15]

MARÍA FOUCE, José. *Caos – Glosario de filosofía*. [En línea]
<<http://www.webdianoia.com/glosario/display.php?action=view&id=48&from=action=search%7Cby=C>> [Consulta: 28/10/15]

M. CHÁVEZ GRIMALDI, Olivia; J. CHÁVEZ GRIMALD, Rafael. *La Enfermedad: “Una Visión desde la Teoría del Caos y de los Fractales”* [en línea]
<<http://www.medicrit.com/rev/v3n3/3378.pdf>> [Consulta: 25/08/15]

MEDINA, Julio. *Análisis de Fourier para el tratamiento de señales*. [En línea]
<<http://es.slideshare.net/docdigitus/analisis-de-fourier-para-seales>> [Consulta: 15/12/15]

MÉNDEZ MATOS, Natanael. *Los Contraejemplos de la Hipótesis de Riemann y su Topología de Conjunto*. [En línea] Ed. Lulu, 2012. [Consulta: 25/08/15]

MÍREZ, Jorge. *Estado, variables de estado, vector de estado, espacio de estados*. [En línea] <<https://jmirezcontrol.wordpress.com/2012/06/02/c042-estado-variables-de-estado-vector-espacio/>> [Consulta: 14/01/16]

MONOGRAFÍAS. *Ensayo sobre la Teoría del Caos*. [En línea]
<<http://www.monografias.com/trabajos13/caos/caos.shtml>> [Consulta: 27/01/16]

MOSQUERA, Genaro; PIEDRA DÍAZ, Margarita; ARMAS CARDONA, Raúl. *Las vibraciones mecánicas y su aplicación al mantenimiento predictivo*. [En línea] Ed. CDCH UCV. [Consulta: 02/09/15]

MUNNÉ, Frederic. *Las Teorías de la Complejidad y sus Implicaciones en las Ciencias del Comportamiento*. Revista Interamericana de Psicología, 1995. [En línea]
<<http://smcomplejidad.com/las-teorias-de-la-complejidad-y-sus-implicaciones-en-las-ciencias-del-comportamiento/>> [Consulta: 26/10/15]

ORTÍZ RITTER, Walter; E. PEREZ ESPINO, Tahimi. *¿Qué son los sistemas dinámicos no-lineales?* [En línea] <<http://rcci.net/globalizacion/2012/fg1312.htm>> [Consulta: 15/01/16]

PASTOR GONZÁLEZ, José Antonio; HERNÁNDEZ CIFRE, María de los Ángeles. *Un curso de Geometría diferencial: Teoría, problemas, soluciones y prácticas*. [En línea] Ed. CSIC Press, 2010. [Consulta: 22/08/15]

PEREZ Y LOPEZ, Antonio Xavier. *Principios del orden esencial de la naturaleza, establecidos por fundamento de la moral y política, y por prueba de la religión: Nuevo sistema filosófico*. [En línea] Ed. Imp. Real, 1785. [Consulta: 28/10/15]

PRACTICA CIENCIA. *Análisis de Fourier*. [En línea]
<<http://practicaciencia.blogspot.com.es/2013/10/analisis-de-fourier.html>> [Consulta: 16/12/15]

RESTREPO SAAVEDRA, Carlos Julio. *Teoría del Caos*. [En línea] Ed. Académica Española, 2011. [Consulta: 30/07/15]

El cosmos del caos

RUANO GÓMEZ, Juan de Dios. *Auto-organización: entre el orden y el caos*. [En línea] Ed. Universidade da Coruña, Servicio de Publicacións, 1996. [Consulta: 03/08/15]

S. MASSEY, William, *Introducción a la topología algebraica*. [En línea] Ed. Reverte, 1982. [Consulta: 25/08/15]

SMITH, Peter. *El caos*. [En línea] Ed. AKAL, 2006. [Consulta: 16/01/16]

T. ALLIGOOD, Kathleen [et al.]. *Chaos. An introduction to dynamical systems*. Estats Units: Ed. Textbooks in Mathematical Sciences, 1996. [Consulta: 01/09/15]

THALES. *Poincaré, su vida*. [En línea]
<<http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Biografias/54-2-b-Vida.html>> [Consulta: 08/01/16]

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES. *El Teorema de Fourier*. [En línea]
<http://ceidis.ula.ve/cursos/humanidades/fonetica/tutorial_de_linguistica/fourier3.html> [Consulta: 29/09/15]

VÁZQUEZ, Domingo de Agustín [et al.]. *Diccionario de ciències*. [En línea] Ed. Complutense, 2000. [Consulta: 07/01/16]

ANNEXOS

Annex 1: Tipus d'oscil·ladors

Annex 2: Personatges rellevants

Annex 3: Experimentacions amb el pèndol doble

Annex 4: Equacions utilitzades en l'anàlisi de Fourier

Annex 5: Entrevista a *Society for Chaos Theory in Psychology & Life Sciences*

ANNEX 1 Tipus d'oscil·ladors

❖ Oscil·lador harmònic simple

L'oscil·lador harmònic simple és el cas més senzill, ja que, només es té en compte la força recuperadora. Tenint en compte la fórmula $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ essent $\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}$ podem extreure una equació diferencial que defineix el moviment d'aquest oscil·lador:

$$a + (\omega_0)^2 x = 0 \quad (\text{A1.1})$$

La freqüència natural de la vibració està definida com:

$$(\omega_0)^2 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{A1.2})$$

La solució general a aquesta equació es podria escriure de la següent manera:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (\text{A1.3})$$

*A i φ_0 s'obtenen de les condicions inicials

❖ Oscil·lador harmònic esmorteït

Consisteix a tenir en compte el fregament del medi on es produeix l'oscil·lació, que tendeix a esmorteir-la. El model més utilitzat freqüentment reconeix un fregament proporcional a la velocitat.

$$F_f = -b \frac{dx}{dt} \quad (\text{A1.4})$$

Posteriorment, l'equació diferencial (obtinguda a partir de la segona llei de Newton):

$$a + 2\lambda \frac{dx}{dt} + (\omega_0)^2 \cdot x = 0 \quad (\text{A1.5})$$

Quan:

$$\lambda = \frac{b}{2m} \quad (\text{A1.6})$$

La solució general a aquesta equació depèn de la relació entre λ i ω_0

Aquest oscil·lador pot presentar-se en tres casos diferents:

1. Oscil·lador infra-esmorteït

On $\lambda < \omega_0$, amb l'equació final:

$$x(t) = A \cdot e^{-\lambda t} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_0) \quad (\text{A1.7})$$

On:

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda^2 - (\omega_0)^2} \quad (\text{A1.8})$$

2. Oscil·lador crític

En aquest cas $\lambda = \omega_0$, la solució del qual és la següent:

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\lambda t} \quad (\text{A1.9})$$

3. Oscil·lador sobre-esmorteït

On $\lambda > \omega_0$, quan això succeeix la solució final és de l'estil:

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} \sinh(\omega_1 t + \varphi_0) \quad (\text{A1.10})$$

On l'omega:

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda^2 - (\omega_0)^2} \quad (\text{A1.11})$$

❖ Oscil·lador simple forçat

Un oscil·lador és considerat forçat si sobre d'ell s'aplica una força externa. El cas més interessant és quan la força externa és també periòdica, per exemple, sinusoidal.

$$F_{ex} = f_0 \cdot \cos \omega t \quad (\text{A1.12})$$

Aquesta força es converteix en un terme heterogeni en l'equació diferencial del moviment:

$$a + (\omega_0)^2 \cdot x = \frac{f_0}{m} \cos \omega t \quad (\text{A1.13})$$

Per tant, la solució general d'aquest sistema seria:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{f_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cdot \cos \omega t \quad (\text{A1.14})$$

❖ Oscil·lador simple ressonant

La solució anterior és singular en el cas en què la força externa tingui la mateixa freqüència que la freqüència natural de l'oscil·lador. En aquest cas, tenim un oscil·lador simple ressonant. La solució que

obtenim és secular (l'amplitud augmenta en el temps fins a fer-se molt gran). Físicament, aquesta solució no té sentit, ja que, tard o d'hora el fregament (que actua en tots els sistemes però que en aquest cas no el tenim en compte) entrarà en joc evitant així que l'amplitud de l'oscil·lador creixi de manera il·limitada.

Per tant, la solució pràctica a aquest sistema d'oscil·ladors és la següent:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) - \frac{f_0}{2m(\omega_0)^2} \cdot t \cdot \sin \omega t \quad (\text{A1.15})$$

❖ Oscil·lador esmorteït i forçat

En aquest cas més general s'inclou una força externa del tipus $F_{ex} = f_0 \cdot \cos \omega \cdot t$ a un oscil·lador esmorteït. La solució particular, que és proporcional a A_p , és l'única que funciona per a temps amplis, ja que totes les solucions de l'equació homogènia decreixen exponencialment. Ens trobem en un estat estacionari, corresponent a les oscil·lacions d'amplitud A_p .

L'equació diferencial completa d'aquest sistema és:

$$a + 2\lambda \frac{dx}{dt} + (\omega_0)^2 \cdot x = \frac{f_0}{m} \cdot \cos \omega t \quad (\text{A1.16})$$

Ara bé, la solució general que es presenta en aquest cas és de la raó:

$$x(t) = x_{\text{hom}}(t) + A_p \cos(\omega t + \alpha) \quad (\text{A1.17})$$

En la solució general els termes A_p i α corresponen a les següents igualtats:

$$A_p = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2}} \quad (\text{A1.18})$$

$$\alpha = \arctg \frac{2\lambda\omega}{\omega^2 - (\omega_0)^2} \quad (\text{A1.19})$$

On $x_{\text{hom}}(t)$ és la solució general de l'oscil·lador sense forçar, donada per les equacions d'un oscil·lador infra-esmorteït ($\lambda < \omega_0$) o d'un oscil·lador sobre-esmorteït ($\lambda > \omega_0$)

En aquest cas, la solució és vàlida per a totes les freqüències de la força externa, encara que, veiem que l'amplitud de resposta és màxima per a la freqüència de ressonància.

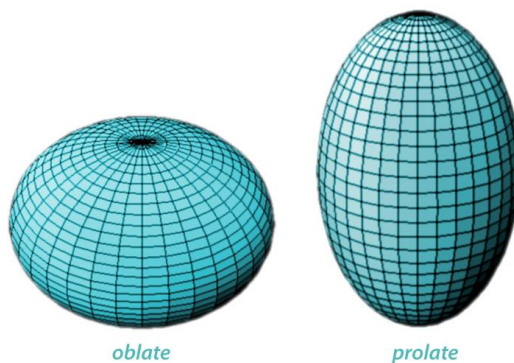
$$\omega_r = \sqrt{(\omega_0)^2 - 2\gamma^2} \quad (\text{A1.20})$$

ANNEX 2 Personatges rellevants

a) Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

Laplace va ser un famós matemàtic nascut a França. Va iniciar els seus estudis a l'École Militaire i els seus primers escrits tenien com a tema els principis de la mecànica.

Entre els anys 1771 i 1789 va desenvolupar-se en astronomia i va centrar el seu interès en les desigualtats planetàries. Alhora, va aprofundir en càlcul integral i equacions diferencials en derivades parcials. Un dels estudis més destacats de Laplace va ser la determinació de l'atracció d'un esferoide sobre una partícula situada en el seu exterior. Com a conseqüència d'aquesta determinació va introduir l'anàlisi d'harmònics, els coeficients de Laplace i el concepte de potencial.



Dos tipus d'esferoides. Font: <Cosnautas >

L'any 1796 va publicar *Exposición del sistema del mundo* en què realitza una visió alternativa a la mecànica de Newton i mostra una explicació del sistema solar. Els seus resultats analítics resideixen en cinc volums del *Tratado de mecánica celeste*. En els dos primers exposa mètodes de càlcul del moviment planetari i dels satèl·lits. El tercer conté l'aplicació d'aquest mètodes i diverses taules astronòmiques.

L'any 1812 va publicar *Teoría analítica de las probabilidades* on inclou una explicació del mètode dels mínims quadrats, que és la base de la teoria dels errors.

b) Jules Henri Poincaré (1854-1912)

Va ser un dels matemàtics més importants del segle XIX i principis del XX. Es va plantejar problemes referits a les conseqüències que comporten la "nova mecànica" que iniciaria el

desenvolupament de la teoria electromagnètica. Després d'accedir a l'Escola d'Enginyers de Montes, va guanyar el primer premi de matemàtiques. Més tard, l'any 1873 va entrar a l'*École Polytechnique* un dels centres més prestigiosos, i on va adquirir reputació com una promesa matemàtica. La seva etapa de recerca i d'investigació coincideix amb la de Gauss (1777-1855) que també va fer grans aportacions.



Jules Henri Poincaré. Font: <Muhmo>

Poincaré és la figura més important pel que fa les teories d'equacions diferencials. Es considerat el matemàtic que, després de Newton, va fer el treball més destacat en la mecànica celeste. Les seves aportacions estan repartides en diversos camps: equacions diferencials, teoria general de funcions, qüestions d'àlgebra, aritmètica, teoria de grups, filosofia de les ciències, topologia etc.

Va establir idees matemàtiques fonamentals quan decideix deixar enrere el determinisme i entrar en qüestions de generalitat i abstracció.

c) Edward Norton Lorenz (1917-2008)

Edward Lorenz va ser un matemàtic i meteoròleg estatunidenc. Va ser el principal propulsor de la Teoria del Caos. Entre les més brillant aportacions en la teoria, es destaquen la seva introducció del concepte dels atractors estranys i del terme *efecte papallona*.

Va estudiar a la Universitat de Harvard i al Col·legi Dartmouth (1938) per graduar-se en meteorologia. L'any 1943 va estar treballant en el MIT (Institut Tecnològic de Massachussets). Lorenz va passar de membre de personal en el Departament de Meteorologia al MIT a professor, i posteriorment, a director del departament fins l'any 1981.

Durant la Segona Guerra Mundial va exercir de pronosticador del temps per a la Força Aèrea Estadounidenca.



Edward Lorenz. Font: <El Financiero>

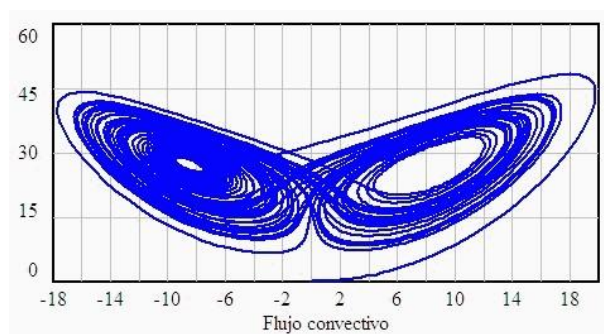
L'any 1963 va utilitzar el sistema d'equacions diferencial de "Navier-Stokes" per modelar l'evolució de l'estat de l'atmosfera i, casualment va descobrir que aquesta eina matemàtica era errònia: canvis petits com la precisió de 3 o 6 decimals produïen resultats amb diferències impredecibles.

A partir d'aquest moment, un dels seus objectius com a meteoròleg va ser intentar explicar per què el clima és tan difícil de predir. Conseqüentment va sorgir la Teoria del Caos. Va ser el pare del que ara s'anomena comportament caòtic en el modelatge matemàtic de sistemes meteorològics. L'any 1960, Lorenz es va assabentar que les petites diferències en un sistema dinàmic poden desenvolupar gegants i impredecibles resultats.

El concepte *efecte papallona* prové de l'explicació que utilitzava Lorenz per transmetre el concepte del Caos. Aquesta explicació es basava en què s'havia d'imaginar una predicció molt exacta del comportament de l'atmosfera, i el que Edward Lorenz plantejava era que aquesta predicció es tornava totalment errònia pel simple fet de no haver tingut en compte el moviment d'una

papallona a l'altre punt de la Terra. Aquest simple moviment podria produir unes pertorbacions que portessin a la predicció d'una tempesta.

Aquestes observacions van ser presentades en el seu article *Previsibilidad: debe el aleteo de una mariposa en Brasil originar un tornado en Texas?*



Efecte papallona. Font: <Dr Francesc Darder>

Posteriorment, en l'àmbit de la meteorologia, es va afirmar rotundament que era impossible predir l'estat del temps en un màxim de dues o tres setmanes. En demostrar que certs sistemes tenen límits de predicció es va acabar l'univers cartesià i es va desenvolupar una revolució científica.

Durant la seva carrera professional ha rebut molts premis com a reconeixement a les seves labors en el camp científic. Entre ells, l'any 1983 el Premi Crafoord de la Acadèmia Real de Ciències de Suècia. L'any 1991, el Premi Kyoto per les ciències planetàries.

Pel que fa la seva obra, destaca *Flujo determinista no Periódico* aquest treball està constituït per les seves conclusions i la descripció d'un sistema relativament senzill d'equacions que van donar lloc a un patró de infinita dificultat anomenat, atractor de Lorenz.

d) Mitchell Jay Feigenbaum (1944-Actualitat)

Feigenbaum és un matemàtic i físic estatunidenc i els seus estudis han estat un peça clau per a la Teoria del Caos, tot i que la seva aportació per excel·lència ha estat els Nombres de Feigenbaum.

És pioner en la ciència del Caos i en les matemàtiques aplicades a sistemes dinàmics no lineals, és a dir, cossos amb un comportament imprevisible i una tendència de geometria fractal.

Malgrat no haver destacat en els seus estudis anteriorment, Feigenbaum va accedir a l'Institut Tecnològic de Massachusetts (MIT) l'any 1964. Va iniciar el seu aprenentatge en enginyeria elèctrica però posteriorment va canviar a física. L'any 1970 va completar el seu doctorat amb una tesi sobre les relacions de dispersió.

Va començar la seva carrera com a doctorat al Laboratori Nacional Los Álamos a Nou Mèxic on va fer un estudi de la turbulència en els fluids. En aquest estudi va anar especialitzant-se fins arribar a estudiar els mapes caòtics o diagrames de bifurcacions.



Mitchell Jay Feigenbaum. Font: <The Rockefeller University>

L'any 1975 va descobrir que la proporció de la diferència entre els valors en els períodes succesius de duplicació de les bifurcacions tendeixen a un valor constant que s'aproxima a 4.6692016...

Aquest treball el va realitzar utilitzant els petits ordinadors HP-65. Més tard, va obtenir una demostració matemàtica del fet. A més a més, va descobrir que amb la mateixa constant matemàtica es produeix el comportament anterior abans de l'inici del Caos per una àmplia selecció de funcions matemàtiques. Aquesta "proporció de convergència" és coneguda com la primera constant de Feigenbaum.

L'any 1983 va obtenir el premi de la Fundació MacArthur. Tres anys més tard, va rebre el Premi Wolf en l'àmbit de la física.

Actualment exerceix de professor a la Universitat Rockfeller des de 1986.

e) Richard Phillips Feynman (1918-1988)

Feynman va ser un físic teòric nord-americà amb gran renom en la comunitat científica. És conegut per el seu treball en la formulació integral de la trajectòria en la mecànica quàntica. També per la teoria de la electrodinàmica quàntica i la física de la superfluïdesa de l'heli líquid, així com, la física de partícules el model Parton. Va ser una de les figures més importants en iniciar estudis en el camp de la computació quàntica i va introduir el concepte de nanotecnologia.

Va desenvolupar un esquema de representació àmpliament utilitzat en les expressions matemàtiques que regeixen el comportament de les partícules subatòmiques, que més tard va ser conegut com els diagrames de Feynman.

Després de ser rebutjat a la Universitat de Columbia, va entrar a l'Institut de Tecnologia de Massachussets on va llicenciar-se l'any 1939. Va passar satisfactòriament les proves d'accés a la Universitat de Princeton. L'any 1942 va doctorar-se a Princeton amb una tesis on Feynman aplica el principi d'acció estacionària als problemes de la mecànica quàntica.



Richard Phillips Feynman. Font: <Sr Mahfuz>

En la seva carrera laboral va ajudar a desenvolupar la bomba atòmica durant la Segona Guerra Mundial i, a més a més, va ser membre de la Comissió Rogers, el panell que va investigar el accident del transbordador espacial Challenger. Posteriorment

va exercir de catedràtic en física teòrica en a l'Institut de Tecnologia de California.

L'any 1965 va rebre el Premi Nobel de la Física per les seves contribucions en el concepte de la renormalització i en l'electrodinàmica quàntica.

f) Benoît Mandelbrot (1924-2010)

Mandelbrot va ser un famós matemàtic polonès i els seus treballs més importants estudien els fractals. Va seguir els passos de Gaston Julia, qui va inventar les matemàtiques dels fractals. Mandelbrot va ser l'encarregat de desenvolupar-les amb l'eina més revolucionària de l'època, l'ordinador.

Va estar educat pel seu oncle, que era professor de matemàtiques al Collège de France. Posteriorment va fer els seus estudis superiors a la Universitat de Lyon. L'any 1944 va ingressar a la École Polytechnique. Va doctorar-se a matemàtiques en la Universitat de París l'any 1952.

Després de passar pel MIT (Institut Tecnològic de Massachussets) i, més tard, per l'Institut d'Estudis Avançats de Princeton, va acabar treballant al IBM Research.

L'any 1967 va publicar-se a *Science* un article de Mandelbrot on exposa les idees del matemàtic sobre els fractals. Va ser professor en diversos camps de l'ensenyança, així com: d'economia a la Universitat Harvard, d'enginyeria en la Universitat Yale, de fisiologia al Colegi Albert Einstein de Medicina i de matemàtiques a París i Ginebra.



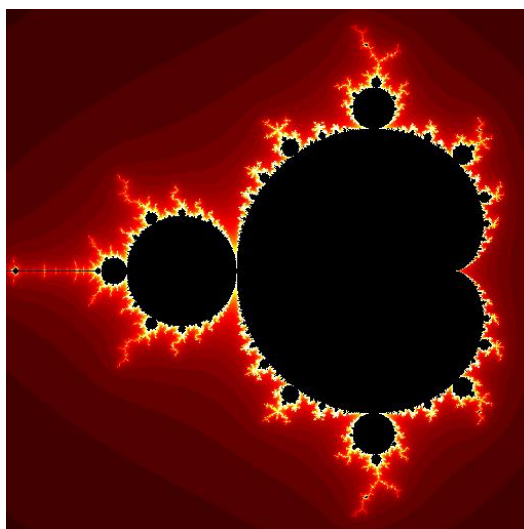
Benoît Mandelbrot. Font: <Like Success>

Va ser el creador de la Geometria Fractal, i els seus estudis van ser un impacte en la interpretació i concepció dels objectes

que es troben a la naturalesa. L'any 1982 va publicar el seu llibre *Fractal Geometry of Nature* on exposa les seves investigacions en el camp.

Mandelbrot va voler aprofundir en qüestions que la majoria de científics passaven de llarg, com eren els patrons que regeixen la rugositat en els cossos naturals.

La seva aportació més important va ser l'anomenat Conjunt de Mandelbrot: és un conjunt matemàtic de punts en un pla complex, els seus extrems formen un fractal.



Conjunt de Mandelbrot. Font: <Fractales, OpenMP>

g) Ilya Prigogine (1917-2003)

Prigogine va ser un famós científic belga que es va especialitzar en els camps de la física i la química. L'any 1977 va rebre el Premi Nobel de Química per les seves investigacions en les estructures dissipatives.

Va iniciar els seus estudis en química a la Universitat Lliure de Brussel·les a Bèlgica, on va exercir de professor de fisicoquímica l'any 1947.

Posteriorment, l'any 1959, va ser nomenat director de l'Institut Internacional de Solvay. I catedràtic de química a la Universitat de Chicago i de física i enginyeria química a la Universitat de Texas, on va fundar l'Institut de Mecànica Estadística i Termodinàmica l'any 1967.

Prigogine era especialista en termodinàmica i va fer estudis teòrics sobre l'expansió de la termodinàmica clàssica en els

processos irreversibles amb la teoria de les estructures dissipatives. Les seves investigacions es basen en la Teoria del Caos.

Prigogine va desenvolupar uns experiments numèrics en què demostra que, a partir de reaccions caòtiques de no-equilibri, es poden formar cadenes de simetria amb una nova estructura ordenada.

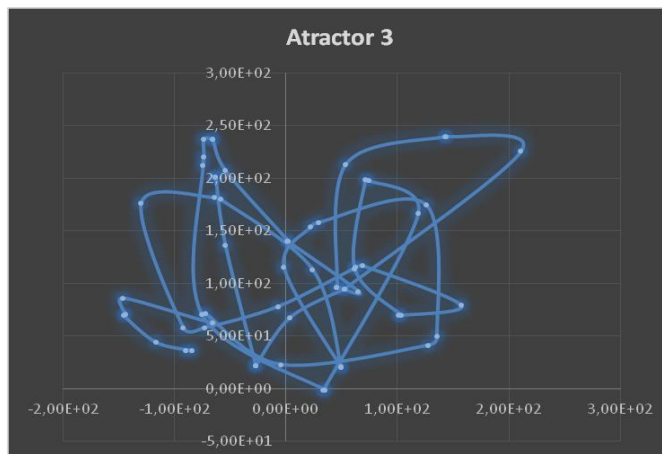
El terme *estructura dissipativa* busca representar l'associació de les idees d'ordre i dissipació. El fet fonamental és que la dissipació d'energia i matèria, que tendeix a associar-se a evolució de Caos, contràriament, es transforma en un iniciador d'ordre. Aquest concepte trenca el concepte de simetria de l'espai i del temps i genera un nou concepte de historicitat.



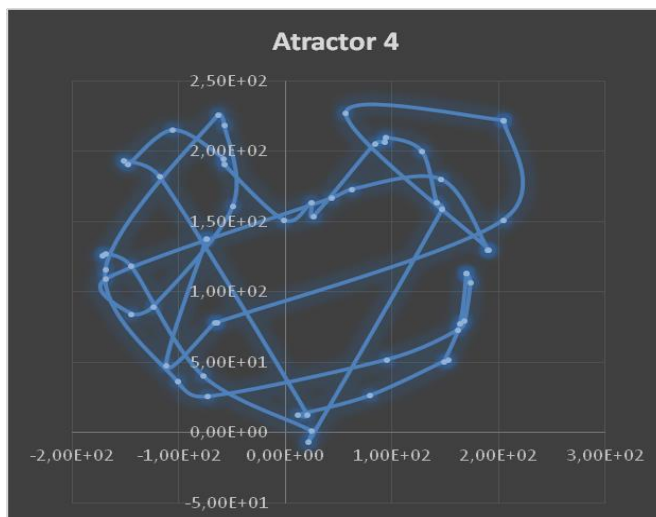
Ilya Prigogine. Font: <Universidad de Oriente Venezuela>

ANNEX 3 Experimentacions amb el pèndol doble

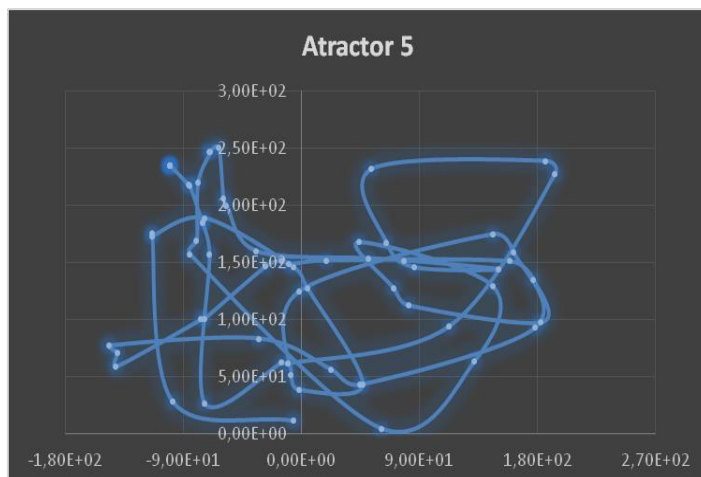
En el treball principal tan sols he introduït els atractors que m'han semblat similars al model idíl·lic. A continuació adjunto les altres proves realitzades per extreure un atractor corresponent al moviment del pèndol en diversos valors inicials.



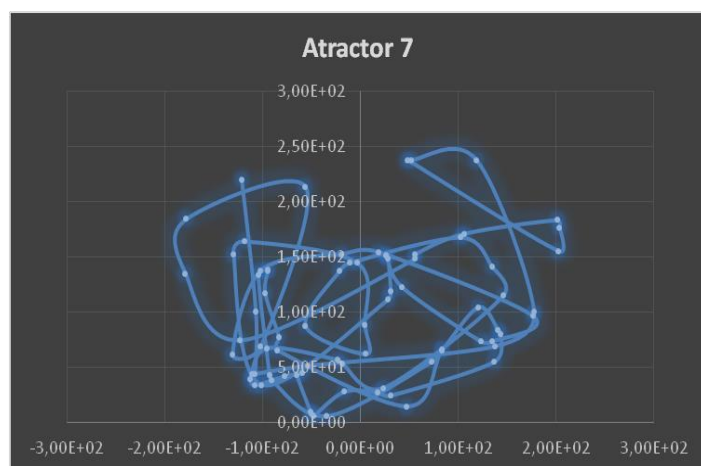
Experimentació 3. Font: <Autora>



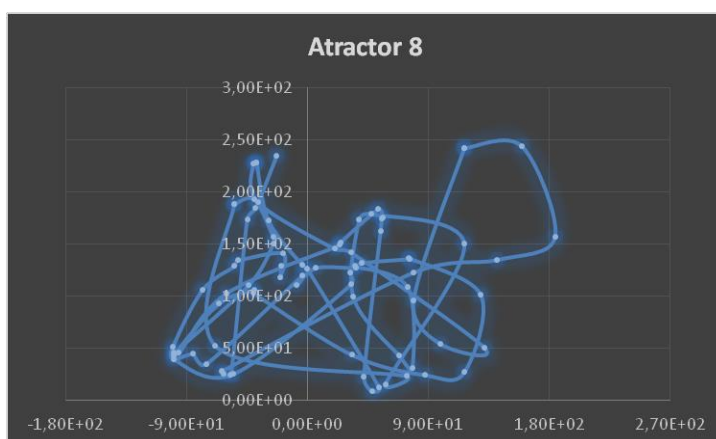
Experimentació 4. Font: <Autora>



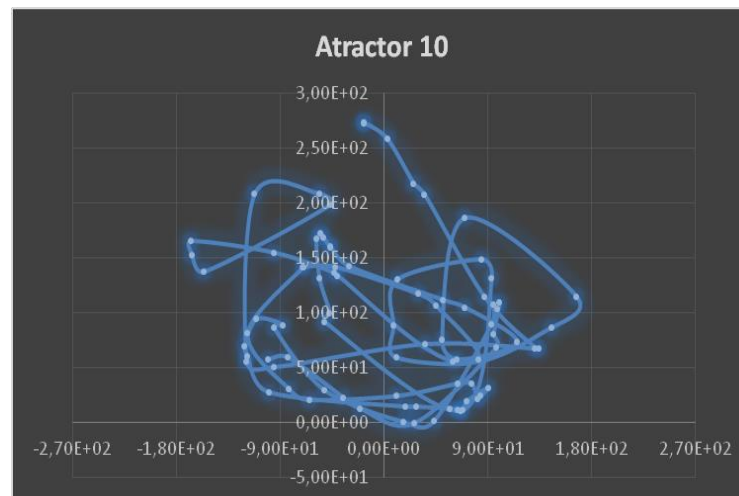
Experimentació 5. Font: <Autora>



Experimetnació 7. Font: <Autora>



Experimentació 8. Font: <Autora>



Experimentació 10. Font: <Autora>

ANNEX 4 Equacions utilitzades en l'anàlisi de Fourier.

L'anàlisi de Fourier es basa en l'afirmació: tota funció $f(t)$ periòdica amb un període P es pot representar com una suma infinita de funcions harmòniques.

Mitjançant un raonament matemàtic s'ha arribat a establir, que per aquesta raó es compleix la igualtat següent:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos(i\omega t) + b_i \sin(i\omega t) \quad (\text{A4.1})$$

Essent $P = \frac{2\pi}{\omega}$ el període i tant a_i com b_i el coeficients de Fourier

A continuació passem al càlcul dels coeficients de Fourier respectivament:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{2}{P} \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} f(t) dt \quad (\text{A4.2})$$

$$a_i = \frac{2}{P} \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} f(t) \cos(i\omega t) dt \quad (\text{A4.3})$$

$$b_i = \frac{2}{P} \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} f(t) \sin(i\omega t) dt \quad (\text{A4.4})$$

Tenint en compte que $i = 1, 2, 3, \dots$

Si transformem la funció periòdica amb període P per un període 2π haurem de canviar la variable t per la x , complint que $x = \omega t$

A més a més, els límits de la integral definida passaran a ser π (límit superior) i $-\pi$ límit inferior.

Ara podem construir unes igualtats similars a les anteriors però modificant certs paràmetres de l'ordre de:

$$g(x) = f\left(\frac{Px}{2\pi}\right) \quad (\text{A4.5})$$

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos(ix) + b_i \sin(ix) \quad (\text{A4.6})$$

Per el que respecte als càlculs dels coeficients de Fourier s'alteren les anterior equacions i passen a ser les següents:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx \quad (\text{A4.7})$$

$$a_i = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(ix) dx \quad (\text{A4.8})$$

$$b_i = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(ix) dx \quad (\text{A4.9})$$

Complint-se que $i = 1, 2, 3, \dots$

Si la funció $g(x)$ té simetria alguns dels coeficients resulten nuls. Pot succeir que la funció $g(x)$ sigui parell i per tant $g(x) = g(-x)$; en aquest cas els coeficients b_i són nuls. Per una altre banda poden tenir una funció $g(x)$ imparell, complint-se que $g(x) = -g(-x)$; en aquest cas els coeficients a_i són nuls.

ANNEX 5 Entrevista a *Society for Chaos Theory in Psychology & Life Sciences*

1. How does the behavior of a nonlinear system change if the parameters describing the system change?

It may not change at all, or there could be a sudden change across some threshold (catastrophe), or the complexity (e.g., entropy) of the order parameter (outcome measure) may change.

2. How do we decide if a system is truly chaotic and how do we describe chaos quantitatively?

One way is to measure the Lyapunov dimensionality (via a Lyapunov exponent), which is a measure of how chaotic a system is. This is essentially a measure that captures the ratio between expanding values (e.g., sensitive-dependence on initial conditions) and contraction (what keeps values within the bounds of an attractor). If the ratio (exponent) is positive, then the system is likely in a chaotic region. If negative then values are converging to one or more fixed point attractors.

3. Which are the universal features found in many nonlinear systems? Are these features truly universal or are there different kinds of chaos?

I believe there are different types of chaos in real systems – but I could be wrong. For example, deterministic chaos, or chaos meaning different levels of disorder or disintegration (like when a network-type system falls apart). In deterministic chaos (one type), one has expanding values (i.e., non-overlapping trajectories, sensitive dependence on initial values), with complementary ‘boundedness’ (i.e., values stay within the bounds of the strange attractor) and a fractal basin of attraction (again – non-overlapping trajectories that are fractal in density). For the broader class of nonlinear systems, all that is required is disproportional relations between order and control parameters.

4. What are the philosophical and methodological implications of chaos?

There are many. I usually think of the paradox of determinism underlying chaos, the impossibility of perfect measurement, and the illusory nature of infinity (e.g., nature is inherently unpredictable over time, unless one was some type of supernatural being that could measure with infinite precision).

5. What does the study of chaos achieve scientifically and technically?

Many things potentially. One big advantage is not mistaking signal-noise relationships in systems where signal and noise are inseparable. It also helps us to appreciate the functional and applied role that variance can play (apart from simple mean differences). Inverse-power law distributions can tell us something about how systems emerge and evolve over time, network analysis can answer more questions than I can list, and so on....

6. What are the most important applications of the nonlinear dynamical systems?

Not entirely sure, but I would guess the use of fractals to design many pieces of technology (e.g., cell phone antennas) and methods of measurement (e.g., rain forest density).

7. What relationship do fractals and chaos have?

Basins of chaotic attractors are fractal (see above). Also, period-doubling route to chaos has fractal bifurcations at the 'edge of chaos'.

8. Why can oscillators be considered chaotic systems?

Three coupled oscillators is sufficient to produce chaos.

9. A part from the double pendulum, can we make an easy experiment to view chaos?

When I was in high-school, I lit a cigarette in class to show period-doubling route through chaos and on to random-white noise in smoke patterns (also to rebel because I didn't care for my physics teacher very much 😊).

10. Describe chaos in only one word? Why?

"Unpredictable." Because it is essentially more or less predictable.