

El trazado del icosakaidígono en el *Clypeus* Jupiter-Ammon de Tarragona (s. I) y la faz de Cristo del rosetón de la catedral de Orvieto (s. XIV)

The layout of icosakaidígono in the Jupiter-Ammon Clypeus of Tarragona (Ist century) and the face of Christ of the Rosette in the Cathedral of Orvieto (14th century)

J. Lluís i Ginovart (*), A. Samper (*), S. Coll-Pla (*), A. Costa-Jover (*)

RESUMEN

Las técnicas de captura masiva de datos, como el escáner láser terrestre y la fotogrametría, permiten analizar con precisión objetos próximos y otros no accesibles, mediante métodos estadísticos. Su aplicación ha permitido analizar desde el punto de vista geométrico las esculturas de la figura *Clypeus* de Tarragona, Jupiter-Ammon (s. I) y la del rosetón de la catedral de Orvieto con la faz de Cristo (s. XIV). El *Clypeus* de Tarragona y el rosetón de la catedral de Orvieto está dividido en 22 partes, formando un icosakaidígono, polígono que no aparece en los *Elementa* de Euclides, ni en el *Almagesto* de Tolomeo, ni en las escasas *Practica Geometriae* de la época. Estos polígonos pueden ser construidos mediante la división angular heredada de los constructores de astrolabios y cuadrantes; así como también mediante una escuadra de dos brazos, con el apoyo reiterado de los catetos sobre la hipotenusa, creando así una rotación del instrumento u otros métodos directos. La conclusión del análisis de estas figuras es que, estadísticamente, ambas esculturas tienen una construcción geométrica igual al del *Reliquiario del Corporale del Miracolo di Bolsena* (1337-1338) de la catedral de Orvieto.

Palabras clave: Tarraco; catedral de Orvieto; *Clypeus*; geometría medieval; polígonos regulares; icosakaidígono.

ABSTRACT

The techniques of massive data capture, as the Terrestrial Laser Scanner and the digital photogrammetry, allow to accurately analyze close objects and others that are not accessible, by statistical methods. Its application has allowed assessing, from the geometric point of view, the sculptures of the figure Clypeus of Tarragona, Jupiter-Ammon (1st century) and the one of the Orvieto's Cathedral rosette, with the face of Christ (14th century). The Clypeus of Tarragona and Orvieto's rosette are divided in 22 parts, forming a polygonal shape known as icosakaidígono. This polygon does not appear in the Elementa of Euclides, neither in the Almagesto of Ptolomeo, nor in the rare Practica Geometriae of the time. These polygons can be built by means of angular division inherited from astrolabe and quadrant builders. This polygon can be defined also through the rotation of the square, since the repeated support of the catheti on the hypotenuse allows the rotation of the tool, or other indirect methods. The conclusion of the analysis of these figures is that, statistically, both sculptures have a geometric construction equal to the Reliquiario del Corporale del Miracolo di Bolsena (1337-1338) of Orvieto's Cathedral.

Keywords: Tarraco; Orvieto Cathedral; clypeus; Medieval Geometry; regular polygon; icosakaidigon.

(*) Universidad Rovira y Virgili (Tarragona, España).

Persona de contacto/Corresponding author: recercapatrimoni@urv.cat (J. Lluís i Ginovart)

ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5957-762X> (J. Lluís i Ginovart); <http://orcid.org/0000-0002-6194-3243> (A. Costa-Jover); <http://orcid.org/0000-0002-4718-5810> (S. Coll-Pla); <http://orcid.org/0000-0002-4795-2127> (A. Samper)

Cómo citar este artículo/Citation: Lluís i Ginovart, J., Samper, A., Coll-Pla, S., Costa-Jover, A. (2016). El trazado del icosakaidígono en el *Clypeus* Jupiter-Ammon de Tarragona (s. I) y la faz de Cristo del rosetón de la catedral de Orvieto (s. XIV). *Informes de la Construcción*, 69(545): e173, doi: <http://dx.doi.org/10.3989/ic.16.048>.

Copyright: © 2017 CSIC. **Licencia / License:** Salvo indicación contraria, todos los contenidos de la edición electrónica de *Informes de la Construcción* se distribuyen bajo una licencia de uso y distribución Creative Commons Attribution License (CC BY) Spain 3.0.

1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVO

El ámbito de la investigación pretende analizar desde el conocimiento epistemológico el trazado geométrico de polígonos regulares en el mundo clásico y medieval, el cual no aparece en los dos textos de referencia de geometría culta, como son los *Elementa* de Euclides y el *Almagesto* de Tolomeo y tampoco en aquellos de aplicación práctica del *Corpus agrimensorum* del mundo romano o de las *Practica Geometriae* en el período gótico. El objetivo de la investigación es determinar el procedimiento de trazado geométrico de dos elementos escultóricos como el *Clypeus* de Tarragona (s. I) (Figura 1) y la de la faz de Cristo (s. XIV) (Figura 2) del rosetón de la catedral de Orvieto, ambos generados con la figura del icosaicaidígono, o polígono de 22 lados.

Ambas figuras tienen la peculiaridad de estar divididas en 22 partes, formando un icosaicaidígono, siendo una de las escasas figuras utilizadas en la tradición romana, como el mausoleo de *Le Carceri Vecchie* (s. I) de Capua. También es poco utilizada en el gótico, a excepción del rosetón de la catedral de Troia (s. XII), o la rotonda de Neuvy-Saint-Sépluche de Indre (s. XII).

El *Clypeus* de Tarragona es una pieza en parte reconstruida, depositada en el Museo Nacional Arqueológico de Tarragona (MNAT-117). La pieza fue esculpida en el siglo primero en mármol de Luni-Carrara y formaba parte de la decoración del ático del recinto de culto de Tarraco. El medallón tiene en su centro la representación de las deidades de Jupiter-Ammon (1), (2).

La construcción del rosetón de la catedral de Orvieto se realiza tras la modificación del proyecto original de la fachada principal de Lorenzo Maitini (c. 1275-1330), efectuada el año 1310 (3) por el escultor Andrea di Cione (c. 1308-1368), conocido como Andrea di Orcagna, modificando el diseño del rosetón de base octogonal (4), (5), (6). En el centro aparece representada la faz de Cristo sobre una *crux immissa quadrata*, rodeada de una corona con veintidós columnas. Tiene la misma estructura que un *clypeus*, pero a diferencia de éstos, que disponen de una ornamentación en forma vegetal, su corona se construye con 21 arcos trebolados.

Existen antecedentes de trazas geométricas de rosetones como los de Villard de Honnecourt (ca. 1220-1250) (BnF. ms. fr. 190093), quien dibuja el de la catedral de Nôtre-Dame de



Figura 1. *Clypeus* de Tarragona, Jupiter-Ammon (s. I).



Figura 2. Rosetón Orvieto con la faz de Cristo (s. XIV).

Chartres (fol. 15 v.), dividido en 12 partes, como también el de Lausanne (fol. 16 v.) (7), el del baptisterio de San Juan de Siena (S4) (8), y el del Plan B de la fachada de Estrasburgo (1255-1260) (9). En la misma catedral, en el Proyecto de 1365, la circunferencia está dividida en 36 partes (10). En el catálogo del Maestro WG (1560-1572), de Frankfurt, los diseños (WG 8. WG 22) están divididos en 8 partes, el (WG 15) en diez y el (WG 87) en 24 lados (11).

La división de la circunferencia en 22 partes es uno de los problemas que ha de abordar tanto el escultor romano como Andrea di Orcagna. Las construcciones geométricas que tienen como base las figuras del cuadrado, el pentágono, el hexágono y el octógono, se identifican en los *Elementa* de Euclides (326-265 a.C.) (12) y en el *Almagesto* de Ptolomeo (c. 85-165) (13), sin embargo, el polígono de 22 lados no aparece en estas referencias cultas.

2. METODOLOGÍA

A partir de una toma de datos, como elemento instrumental determinado en función de la accesibilidad de las esculturas, se propone un tratamiento estadístico de estos datos objetivos. Así los resultados obtenidos se comparan en función del error relativo de los 22 puntos que determinan la figura del icosaicaidígono. Estos resultados se cotejan geoméricamente con aquellos métodos operativos que se conocían en el período tardoclásico hasta el mundo gótico.

Existen antecedentes para el trazado del polígono de 22 lados heredados del mundo clásico, teniendo como base las aproximaciones del número Pi (π), conocidas en el mundo medieval a través de Arquímedes (c. 287 a.C.-c. 212 a.C.) (14). Los métodos están basados en la división del diámetro en n partes, para luego abatirlos sobre la cuerda de la circunferencia. Sir Thomas Little Heath (1861-1940) determina en Grecia la relación (14/25) que fijaremos como M_1 , y la construcción del endecágono con la relación (2/7), método M_2 (15). La *Métrica* (Ll. XXIV), de Herón de Alejandría (c. 20-62), utiliza la relación de (7/25) (16). En el *Clypeus* de Tarragona (s. I) de Jupiter-Ammon se especula con la aproximación de (14/25) (17), ambos ejemplos según M_1 . El mausoleo de *Le Carceri Vecchie* (s. I) de Capua, de base circular con 22 módulos, tiene una relación (1/7), método M_3 (18).

En el contexto medieval, en el álbum de Villard de Honnecourt (ca. 1220-1250) (BnF. ms. fr. 190093, fol. 20 v.), se construye una torre pentagonal, utilizando el movimiento de una escuadra (19). También lo es la referencia de la tumba de Saint-Ouen (ca. 1300), donde el ábaco en la mano del arquitecto ha sido asimilado a la construcción de polígonos regulares inscritos en una circunferencia (20). Otra alusión es la de Diego López Arenas (+c. 1640) en la *Primera y segunda parte de la carpintería hecho por Diego López de Arenas* (1619), donde define el *cartabón* para la traza de polígonos regulares (21). Se requiere así el método de las escuadras utilizando las proporciones entre los brazos del (16/25), método M_4 y la de (1/7) como M_5 . Estos métodos son reiterativos y permiten ajustes.

Otra tesis para la construcción de estos polígonos sería la división angular de las *Practica Geometriae*, utilizados para la construcción del trazado de astrolabios o cuadrantes astronómicos, método M_6 . Caso de Hernán de Contracto (1013-1050) en la *De mensura astrolabii* (c. 1050) (22), la *Practica Geo-*

metriae (1125-1130) de Hugo de San Víctor (ca. 1100-1141) (23), el *Artis cuiuslibet consummatio* (c. 1193-c. 1220) atribuido a Gérard de Bruxelles (f. 1220) (24), el *Quadrans Vetus* de Robert Anglès (c. 1240-c. 1271) (25) o la *Practica Geometriae* (1346) de Dominicus de Clavasio (+c. 1362) (26).

Otra posibilidad es el conocimiento de las geometrías cultas esencialmente concentradas en los *Elementa* y el *Almagesto* donde, aunque no aparezca el undecágono, sí se podría construir mediante la intercalación de dicha figura entre los polígonos de 20 y de 24 lados, trazados a partir del pentágono y hexágono. También como consecuencia de éstos, como las figuras *pes Arenis*, *cauda Pavonis*, *Medriatix*, *Pax et Concordia* o la *Demonis* y trazadas con compás (27). Figuras próximas a la hipótesis geométrica del *Reliquiario del Corporale del Miracolo di Bolsena* (1337-1338) de Orvieto, de Ugnolino di Vieri, método M_7 (28).

La toma y captura de los datos geométricos se realiza por métodos diferentes en función de la accesibilidad de las esculturas. En el caso de la faz de Cristo (s. XIV) del rosetón de la catedral de Orvieto éstos son captados mediante técnicas de escáner láser, puesto que el objeto es inaccesible (29), (30). La fiabilidad de estos datos ha sido ampliamente testada (31), (32) permitiendo el estudio detallado de objetos lejanos.

Otras técnicas de aproximación a objetos cercanos, de pequeña y mediana escala, permiten el análisis preciso de su geometría a partir de la fotografía. Será el caso de las técnicas fotogramétricas (33) como la de *Close Range Photogrammetry* (CRP) (34) y, sobre todo, la de *Structure From Motion* (SFM), desarrollada más recientemente, y que permite una operativa sencilla para reproducir la geometría y textura de objetos de diversas escalas (35), (36). La digitalización de la figura *Clypeus* de Tarragona (s. I) se ha realizado mediante fotogrametría con el programa 123Catch de Autodesk. Se trata de un software gratuito basado en el sistema SFM. La precisión de este software presenta algunas limitaciones respecto a otros programas comerciales, especialmente en el caso de levantamientos de escala arquitectónica (37), (38), donde la definición de la escala métrica afecta a la precisión final del modelo. El objeto analizado en este caso tiene una medida relativamente pequeña, y el fotografiado pudo realizarse a una distancia adecuada, por lo que las distorsiones métricas son muy reducidas. Además, el tamaño del *Clypeus* también provoca que las desviaciones causadas por el escalado del objeto tengan una incidencia mínima en los resultados del estudio. Este programa ofrece una gran facilidad de uso, y no es necesario disponer de una gran capacidad de computación para obtener resultados, como sucede con otros programas comerciales (39).

3. RESULTADOS

El levantamiento topográfico del rosetón de Orvieto se ha realizado mediante un escáner láser terrestre, modelo Leica ScanStation P20, con 11 posicionamientos, 8 estaciones a nivel peatonal y 3 en la cubierta del Museo Claudio Faina, situado frente a la fachada principal de la catedral. Las nubes de puntos se han procesado con los programas «Cyclone» y «3DReshaper», con el fin de obtener una imagen de gran precisión y a escala métrica del rosetón.

La digitalización del *Clypeus* se ha realizado mediante fotogrametría con el programa 123Catch de Autodesk, que per-

mite la obtención de un modelo tridimensional de forma automatizada, a partir del fotografiado exhaustivo de la pieza desde distintas posiciones. El solape entre las fotografías es total en la toma de datos, es decir, cada fotografía captura completamente el *Clypeus*, desde distintas posiciones. Se ha utilizado para ello una cámara Nikon D7000, con un objetivo Tamron (AF 17-50mm, F/2.8). Autodesk no proporciona datos sobre los algoritmos de alineación de las fotografías ni de calibración de la cámara. Una vez obtenida la malla triangular, ésta se refina con el programa Rhinoceros, con el que también se genera la ortoimagen a escala métrica. El escalado de la pieza se realiza a partir de medidas tomadas manualmente *in situ*.

Una vez obtenidos ambos modelos y generadas las ortoimágenes, se coordinan todos los puntos con el software vectorial AutoCAD (Figura 3). Los 22 puntos para el estudio se han identificado de forma organoléptica. En el caso del rosetón la elección entre todos los puntos topográficos se ha afinado detectando los 22 puntos más próximos al extremo de las esculturas, teniendo una dispersión menor de 0,002 m. El rango de precisión de la toma de datos, elección de puntos y su tratamiento lo situamos en (0,003-0,004 m), totalmente aceptable para un tratamiento matemático de esta operativa. En el caso del *Clypeus* la elección de los puntos se ha realizado sobre la escultura, con una dispersión también inferior a 0,002 m. La precisión del levantamiento y la definición de las coordenadas para el estudio se establecen en el mismo rango que el del rosetón (0,003-0,004 m). Se asume que las incidencias sobre los elementos, como los errores de ejecución o la reconstrucción del *Clypeus*, pueden alterar el método inicial de trazado, por ello se acude a una metodología que es una simbiosis entre los métodos geométricos y estadísticos. Por ello, el primer paso para este análisis geométrico y estadístico es calcular la circunferencia de regresión de los 22 puntos que configuran ambos elementos.

Se asigna a los 22 puntos para cada caso v_i ($i=1 \div 22$), de las 22 arcadas perimetrales del medallón del rosetón y de la anilla del *Clypeus* (Figura 4). En ambos elementos se observan que de los 22 vértices v_i , vemos que no existe ninguna circunferencia que pase por más de 3 puntos. Aplicando ecuaciones normales de Gauss (x_i, y_i) de estos 22 v_i (Tabla 1)

y encontramos las ecuaciones de las circunferencias [1, 2] de regresión cuadrática C para el caso del rosetón [1] y para el *Clypeus* [2].

$$0,005958 (x^2 + y^2) - 0,114367 x - 0,103766 y + 1 = 0 \quad [1]$$

Encontramos que la posición del centro del rosetón de C_1 es (9,5982, 8,7084) y su radio $R = 0,3378$ m.

$$0,003601(x^2 + y^2) - 0,108388 x - 0,051596 y + 1 = 0 \quad [2]$$

Encontramos que la posición del centro del *Clypeus* de C_2 es (15,049407, 7,164007) y su radio $R = 0,3349$ m.

En esta regresión cuadrática por circunferencia C_1 se rechaza la hipótesis nula h_0 de no correlación cuadrática por circunferencia aplicando el test F de Fisher-Snedecor con nivel de significancia $\alpha = 1 - G(2186,809; 3, 18) = 0$; y el tanto por ciento de coordenadas y explicadas por las coordenadas x de la regresión cuadrática por circunferencia C_1 es el coeficiente de determinación de Pearson ajustado del $\eta_{adj}^2 \times 100 = 99,999903\%$ debido

a que $\eta_{adj}^2 = 1 - (1 - \eta^2) \frac{22 - 1}{22 - 3 - 1}$, donde

$$\eta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{22} (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{22} (y_i - \bar{y})^2} = 0,99999917$$

es el coeficiente de determinación de Pearson de C_1 , donde $\bar{y} = \sum_{i=1}^{22} \frac{y_i}{22}$, y \hat{y}_i es la coordenada y correspondiente a la x_i obtenida por la regresión de la circunferencia C_1 . La distribución

$G(x; d_1, d_2) = I_{\frac{d_1 x}{d_1 x + d_2}} \left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2} \right)$ es la distribución de Fisher-

Snedecor donde I es la función beta incompleta regularizada. Dicho de otra forma, C_1 ofrece una correlación cuadrática por circunferencia entre las coordenadas de los 22 puntos del rosetón con probabilidad total prácticamente 1 y esta correlación explica al 99,999903% las coordenadas de los mismos. Por lo tanto, no sólo es la circunferencia que más aproxima sino que aproxima a la perfección y por ello podemos considerarla como circunferencia inicial del modelo real del rosetón.

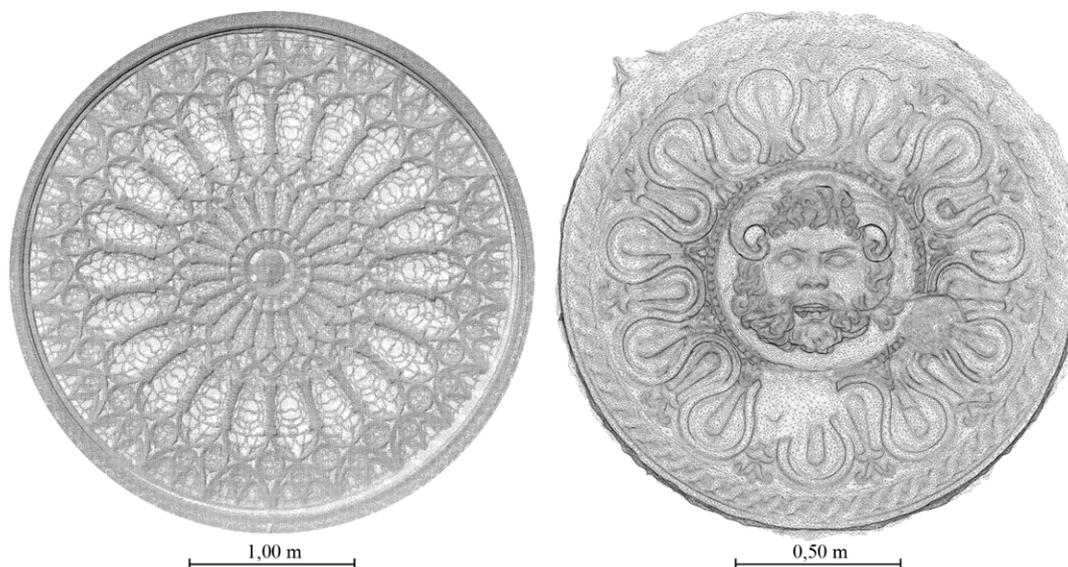


Figura 3. Levantamiento fachada principal de la catedral de Orvieto y *Clypeus* de Tarragona.

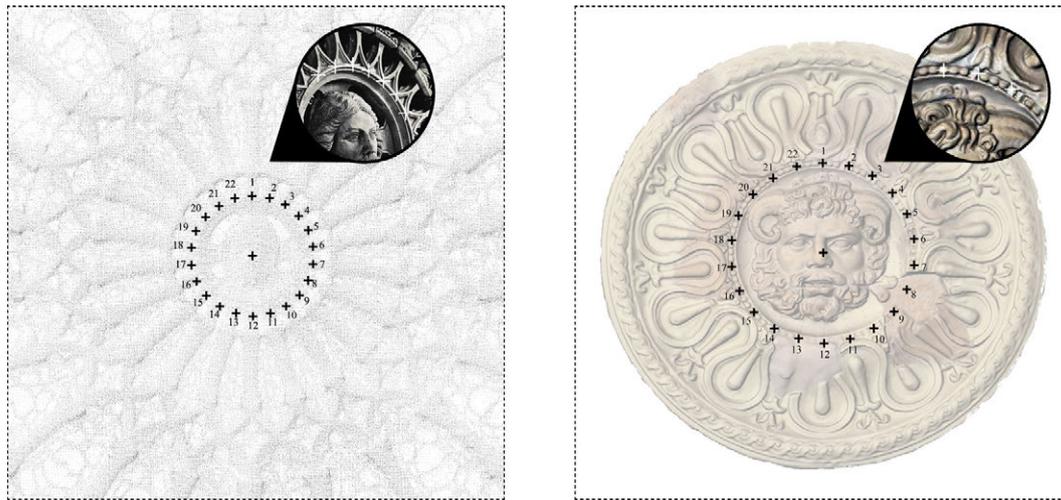


Figura 4. Selección de los 22 puntos para ambos elementos arquitectónicos considerados en el análisis.

Tabla 1. Coordenadas de los 22 vértices y parámetros relativos de la pieza central del rosetón de Orvieto y del *Clypeus* de Tarragona.

i	Pieza central del rosetón de Orvieto			<i>Clypeus</i> de Tarragona		
	Coordenadas (x _i , y _i) de v _i	Amplitud en radianes φ _i	Longitud lado m _{i,i+1}	Coordenadas (x _i , y _i) de v _i	Amplitud en radianes φ _i	Longitud lado m _{i,i+1}
1	(9,5960, 9,0424)	0,29240	0,0977	(15,0519, 7,5058)	0,26372	0,0895
2	(9,6931, 9,0313)	0,27955	0,0941	(15,1401, 7,4904)	0,26358	0,0887
3	(9,7797, 8,9944)	0,29022	0,0980	(15,2207, 7,4533)	0,28589	0,0959
4	(9,8541, 8,9306)	0,28013	0,0949	(15,2957, 7,3937)	0,28120	0,0945
5	(9,9073, 8,8520)	0,28451	0,0964	(15,3506, 7,3167)	0,30585	0,1026
6	(9,9336, 8,7593)	0,28636	0,0968	(15,3810, 7,2187)	0,29031	0,0967
7	(9,9339, 8,6625)	0,28093	0,0947	(15,3783, 7,1220)	0,28779	0,0967
8	(9,9066, 8,5718)	0,28164	0,0953	(15,3608, 7,0269)	0,25042	0,0851
9	(9,8595, 8,4890)	0,28556	0,0966	(15,3176, 6,9536)	0,28733	0,0968
10	(9,7851, 8,4274)	0,28553	0,0958	(15,2428, 6,8922)	0,33421	0,1101
11	(9,6979, 8,3876)	0,29327	0,0983	(15,1412, 6,8497)	0,27176	0,0880
12	(9,6009, 8,3714)	0,28468	0,0951	(15,0534, 6,8438)	0,28156	0,0907
13	(9,5074, 8,3887)	0,29306	0,0975	(14,9630, 6,8507)	0,30603	0,0996
14	(9,4175, 8,4263)	0,28766	0,0965	(14,8709, 6,8887)	0,29231	0,0956
15	(9,3425, 8,4871)	0,28101	0,0950	(14,7988, 6,9515)	0,29244	0,0955
16	(9,2893, 8,5658)	0,28065	0,0954	(14,7623, 6,9139)	0,28960	0,0943
17	(9,2605, 8,6568)	0,28794	0,0979	(14,7248, 7,1245)	0,31488	0,1036
18	(9,2605, 8,7547)	0,27868	0,0948	(14,7231, 7,2280)	0,22980	0,0763
19	(9,2853, 8,8462)	0,28084	0,0953	(14,7458, 7,3008)	0,36610	0,1225
20	(9,3386, 8,9252)	0,28639	0,0960	(14,8106, 7,4048)	0,25309	0,0853
21	(9,4130, 8,9858)	0,29301	0,0977	(14,8799, 7,4545)	0,24308	0,0823
22	(9,5005, 9,0292)	0,28918	0,0965	(14,8654, 7,4150)	0,29223	0,0994

De manera similar y para el caso de *Clypeus* de Tarragona, en la regresión cuadrática por circunferencia C_2 se rechaza la hipótesis nula h_0 de no correlación cuadrática por circunferencia aplicando el test F de Fisher-Snedecor con nivel de significancia $\alpha = 1 - G(354,263;3,18) = 0$, y el tanto por ciento de coordenadas y explicadas por las coordenadas x de la regresión cuadrática por circunferencia C_2 es el coeficiente de determinación de Pearson ajustado del $\eta_{\text{adj}}^2 \times 100 = 100\%$ debido a que $\eta_{\text{adj}}^2 = 1 - (1 - \eta^2) \frac{22 - 1}{22 - 3 - 1}$. En resumen, C_2 ofrece una correlación cuadrática por circunferencia entre las coordenadas de los 22 puntos del *Clypeus* con probabilidad total 1 y esta correlación explica al 100% las coordenadas de los mismos.

Las coordenadas (x_i, y_i) de los 22 vértices v_i y las amplitudes φ_i de los ángulos $\angle(\overline{Ov_i}, \overline{Ov_{i+1}}) - i = 1 + 21$ y φ₂₂ es amplitud del ángulo $\angle(\overline{Ov_{22}}, \overline{Ov_1})$ - de la zona central del rosetón y del *Clypeus* son los mostrados en la Tabla 1. Sin embargo, a fin de poder comparar los métodos con el rosetón, escalaremos las circunferencias C_1 y C_2 para que su radio sea R = 1 m al igual que el radio de todos los métodos de estudio y, además, trasladaremos ambos elementos para que sus centros de C_1 y C_2 sean el origen de coordenadas (0,0).

Analizando las diferencias entre la magnitud de para cada posible método de trazado (M₁... M_n) y el valor teórico del lado

del icosakaidígono, se pretende obtener resultados de base estadística como un método complementario a la historiografía o al conocimiento epistemológico de la pervivencia de la cultura clásica en el rosetón gótico.

3.1. Análisis y construcción de métodos

Se van a analizar las hipótesis que pudieran ser conocidas en la construcción del icosakaidígono o el endecágono en el período del siglo I al siglo XIV. Están agrupadas en aquellos métodos derivados de las aproximaciones de Pi (π), M_1 , M_2 y M_3 . Los construidos mediante escuadras los M_2 y M_3 de los que se tienen constancia en el mundo medieval, el de la división angular M_6 de los constructores de instrumentos astronómicos medievales. Finalmente el método directo M_7 , el cual posiblemente se utilizó en la misma época para la construcción del rosetón, así como también fue utilizado en el *Reliquiario del Corporale del Miracolo di Bolsena*.

3.2. Método M_1 , M_2 y M_3

Las construcciones M_1 , M_2 y M_3 se determinan a partir de una circunferencia de centro O y diámetro \overline{AB} . Se divide el diámetro en N partes, con la unidad u , con centro A y radio n veces u , se traza un arco de circunferencia que corta la circunferencia en el punto C . Con el segmento \overline{AC} del polígono inscrito en la circunferencia se traza un arco de radio \overline{AC} y centro C , encontrando así los vértices del polígono. Así se construyen de forma aproximada del endecágono con las relaciones $14/25$ (M_1), $2/7$ (M_2) y del icosakaidígono $1/7$ (M_3) (Figura 5).

Con el método M_1 de construcción del endecágono y realizando la bisectriz de cada ángulo se obtiene el icosakaidígono configurado con 20 ángulos α y 2 ángulos β ($2\pi = 20\alpha + 2\beta$), cuyas ecuaciones analíticas son las siguientes:

$$\alpha = \arcsen \frac{7}{25} \text{ y } \beta = \pi - 10\arcsen \frac{7}{25}.$$

Además, las coordenadas de los 22 vértices son:

$$u_{1,1} = (1,0); u_{n+1,1} = (\cos n\alpha, \text{sen } n\alpha)$$

con $n = 1 \div 20$ y $u_{22,1} = (\cos(20\alpha + \beta), \text{sen}(20\alpha + \beta))$, Tabla 2.

Con el método M_2 de construcción del endecágono y realizando la bisectriz de cada ángulo se obtiene el icosakaidígono configurado con 20 ángulos α y 2 ángulos

β ($2\pi = 20\alpha + 2\beta$), cuyas ecuaciones analíticas son las siguientes:

$$\alpha = \arcsen \frac{2}{7} \text{ y } \beta = \pi - 10\arcsen \frac{2}{7}.$$

Además, las coordenadas de los 22 vértices son:

$$u_{1,2} = (1,0); u_{n+1,2} = (\cos n\alpha, \text{sen } n\alpha)$$

con $n = 1 \div 20$ y $u_{22,2} = (\cos(20\alpha + \beta), \text{sen}(20\alpha + \beta))$.

El icosakaidígono realizado con el método M_3 está configurado con 21 ángulos α y 1 ángulo β ($2\pi = 21\alpha + \beta$), cuyas ecuaciones analíticas son las siguientes:

$$\alpha = 2\arcsen \frac{1}{7} \text{ y } \beta = 2\pi - 42\arcsen \frac{1}{7}.$$

Además, las coordenadas de los 22 vértices son:

$$u_{1,3} = (1,0) \text{ y } u_{n+1,3} = (\cos n\alpha, \text{sen } n\alpha) \text{ con } n = 1 \div 21.$$

3.3. Método M_4 , M_5

La construcción mediante rotación de escuadras (M_4) y (M_5) tendrá como base la hipótesis de la construcción de la torre del Villard de Honnecourt (fol. 20 r.c.), *Par chu portait om one toor a chinc arestes*, construida mediante una escuadra que va situándose por los puntos medios y sextos ($1/3-0,77$). Otro método que proponemos se realiza con una escuadra de proporciones de $(2/6)$, con la que se situará una alineación entre el segundo punto de un cateto y el extremo del otro, colocándose sobre esta alineación el nuevo lado del pentágono.

Otra tesis sería la posibilidad de construir un polígono a partir de un ábaco de la tumba de Saint-Ouen. La hipótesis comprueba que el punto 1 determina la diagonal de un cuadrado, el punto 2 la diagonal de un rectángulo de $(4/5)$, el punto 3 el lado de un triángulo equilátero y sobre el punto 4 la pendiente de una recta de un tercio. Para construir un polígono determinado debían de conocerse las proporciones de los catetos de las escuadras. La proporción $4/12$ servía para la construcción del pentágono; $4/7$ permitía construir el hexágono; $4/5$ permitía construir aproximadamente el heptágono; $4/4$ permitía construir el octógono; $8/11$ permitía construir el decágono. De esta manera la proporción $16/25$ permitía la construcción del endecágono, método (M_4) y la $1/7$ la construcción de un polígono de 44 lados (M_5) (Figura 6).

Así, este método sugiere la aproximación de los principales polígonos regulares de acuerdo con el siguiente cuadro, donde l es el lado desigual, α° el ángulo desigual y $\varepsilon\%$ el error relativo frente al polígono regular (Tabla 3).

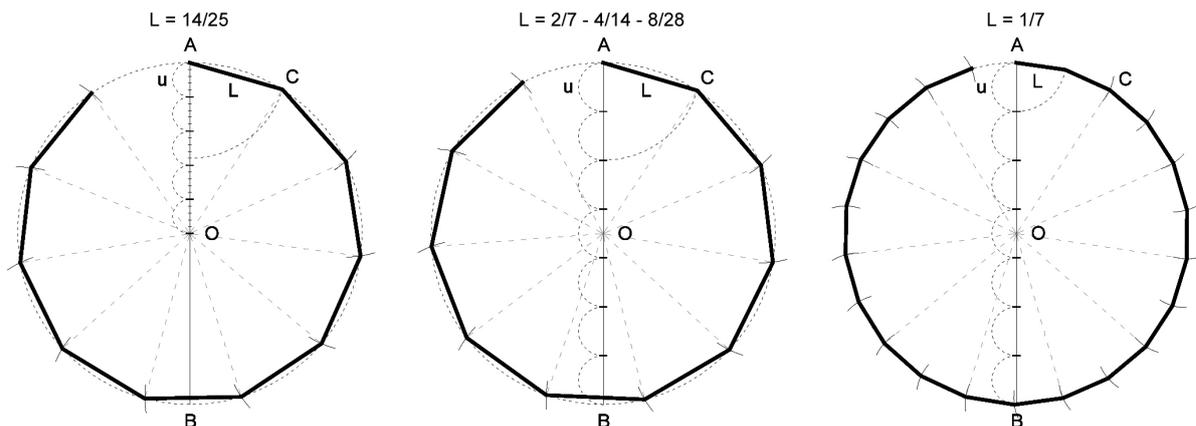


Figura 5. Resolución gráfica de los métodos M_1 , M_2 y M_3 .

Tabla 2. Correlaciones de comparación entre M_4 y las coordenadas del rosetón y del *Clypeus*.

i	Correlaciones de comparación del rosetón			Correlaciones de comparación del <i>Clypeus</i>		
	P	$\eta_{adj}^2 \times 100$	d	P	$\eta_{adj}^2 \times 100$	d
1	0,999807	99,959459	0,0038	0,994347	98,817581	0,0038
2	0,999893	99,977586	0,0039	0,994825	98,917319	0,0035
3	0,999812	99,960471	0,0039	0,994548	98,859573	0,0032
4	0,999861	99,970950	0,0040	0,994533	98,856342	0,0030
5	0,999780	99,953876	0,0041	0,994439	98,836701	0,0028
6	0,999750	99,947561	0,0041	0,994752	98,902082	0,0027
7	0,999762	99,950182	0,0041	0,994760	98,903797	0,0027
8	0,999676	99,932032	0,0042	0,994732	98,897815	0,0028
9	0,999583	99,912475	0,0041	0,994149	98,776269	0,0030
10	0,999586	99,913281	0,0041	0,994195	98,785924	0,0032
11	0,999599	99,915902	0,0041	0,994585	98,867293	0,0036
12	0,999776	99,953026	0,0040	0,994706	98,892481	0,0039
13	0,999766	99,950963	0,0040	0,994663	98,883575	0,0042
14	0,999873	99,973458	0,0039	0,994443	98,837677	0,0046
15	0,999888	99,976443	0,0038	0,994245	98,796408	0,0048
16	0,999820	99,962323	0,0038	0,957779	91,330812	0,0046
17	0,999732	99,943857	0,0037	0,994050	98,755681	0,0050
18	0,999767	99,951115	0,0037	0,992762	98,487294	0,0050
19	0,999628	99,921983	0,0037	0,994768	98,905485	0,0049
20	0,999513	99,897804	0,0037	0,990603	98,038199	0,0047
21	0,999546	99,904717	0,0037	0,992894	98,514734	0,0044
22	0,999736	99,944539	0,0037	0,940256	87,842605	0,0043
Media	0,999760	99,949672	0,0039	0,990047	97,941166	0,0039

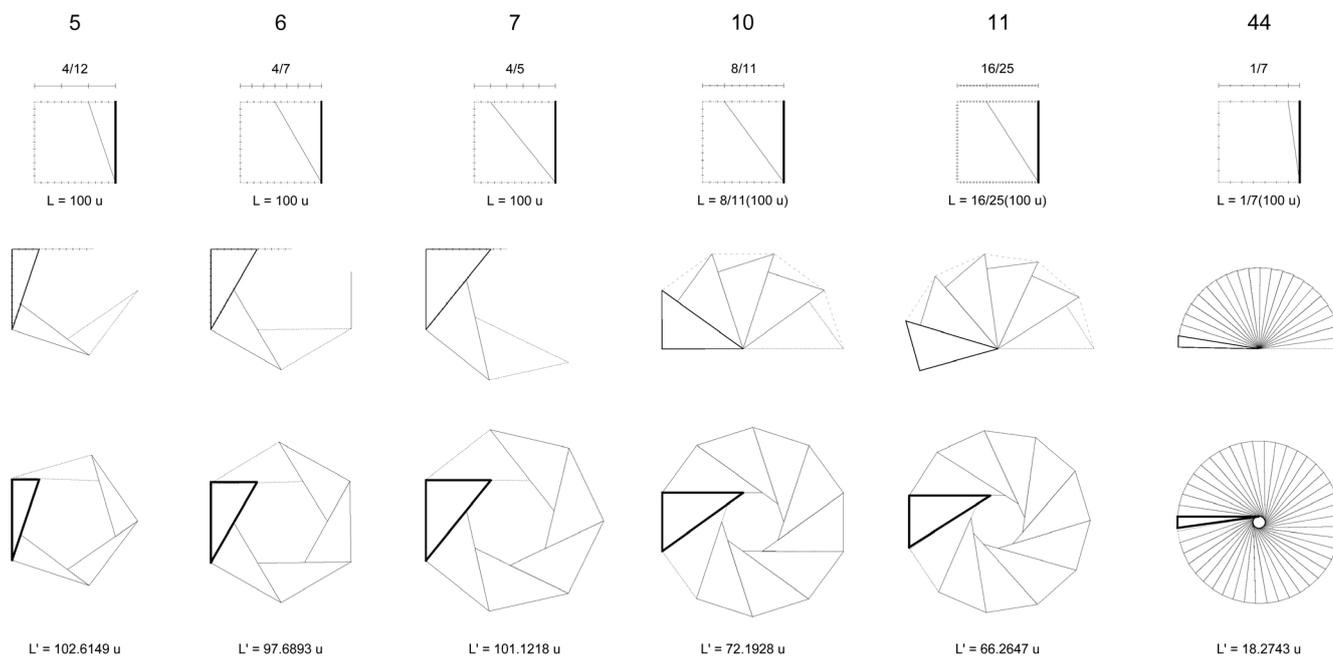


Figura 6. Metodología de construcción de polígonos regulares mediante rotación de escuadras.

Tabla 3. Construcción de polígonos regulares mediante rotación de escuadras.

N.º lados	Proporción	Longitud L	Longitud L'	$\epsilon\%$	α	α'
5	4/12	100 u	102,614 u	2,614	71,565°	73,739°
6	4/7	100 u	97,689 u	2,310	60,446°	58,724°
7	4/5	100 u	101,121 u	1,121	51,340°	51,958°
10	8/11	8/11 (100) u	72,192 u	0,534	36,027°	35,753°
11*	16/25	16/25 (100) u	66,264 u	2,264	32,619°	33,807°
44*	1/7	1/7 (100) u	18,274 u	3,988	32,520/4	34,795°/4

Con el método M_4 de construcción del endecágono y realizando la bisectriz de cada ángulo se obtiene el icosakaidígono configurado con 20 ángulos α y 2 ángulos β ($2\pi = 20\alpha + 2\beta$), cuyas ecuaciones analíticas son las siguientes:

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \frac{16}{25} \text{ y } \beta = \pi - 5 \arctan \frac{16}{25}.$$

Además, las coordenadas de los 22 vértices son:

$$u_{1,4} = (1,0); u_{n+1,4} = (\cos n\alpha, \text{sen } n\alpha)$$

con $n = 1 \div 20$ y $u_{22,4} = (\cos(20\alpha + \beta), \text{sen}(20\alpha + \beta))$.

En la Tabla 2 se muestran directamente las medias de los parámetros de las correlaciones de comparación entre M_4 y los R_i , $i = 1 \div 22$.

El icosakaidígono del método M_5 está configurado con 21 ángulos α y 1 ángulo β ($2\pi = 21\alpha + \beta$), cuyas ecuaciones analíticas son las siguientes:

$$\alpha = 2 \arctan \frac{1}{7} \text{ y } \beta = 2\pi - 42 \arctan \frac{1}{7}.$$

Además, las coordenadas de los 22 vértices son:

$$u_{1,5} = (1,0) \text{ y } u_{n+1,5} = (\cos n\alpha, \text{sen } n\alpha) \text{ con } n = 1 \div 21.$$

Se observa que el proceso M_4 está configurado con diez ángulos iguales α y un ángulo diferente β al resto, y que el proceso M_5 está configurado con 42 ángulos iguales α y dos ángulos diferentes β . En la construcción de cualquier instrumento existe una imprecisión, con lo que es necesario ajustar dicho utensilio.

3.4. Método M_6

La construcción mediante los instrumentos astronómicos se ha definido como M_6 . El método permite operar mediante el *recto* de este instrumento, de manera que mediante la división angular de la esfera del astrolabio $360^\circ/22 = 16,36^\circ$, o del cuadrante $90^\circ/(5 + 1/2) = 16,36^\circ$, se puede determinar la figura del icosakaidígono. Con la construcción de estos astrolabios se subdividía el perímetro de la circunferencia de su esfera en 72 marcas, una cada 5° , realizada mediante la bisectriz del ángulo de 30° y luego trisecando, con un método clásico aproximado, el ángulo de 15° . El problema es determinar la precisión de la división y la apreciación de un grado en el astrolabio. Así se puede operar con una construcción donde se determina el ángulo de $16,36^\circ$ y con la aproximación de $(16^\circ + 1/3^\circ)$, con ello podríamos operar con 20 ángulos iguales de $16,33^\circ$ y dos desiguales de $16,70^\circ$. Este método podría corregir el error mediante reiteración y ajuste.

El icosakaidígono del método M_6 está configurado con 21 ángulos α_i y 1 ángulo β ($2\pi = \sum_{i=1}^{21} \alpha_i + \beta$), cuyas ecuaciones analíticas son las siguientes:

$$\alpha_i = \frac{17\pi}{66} - 6 \arctan \left(\frac{2 \sin \frac{\pi}{24}}{2 \cos \frac{\pi}{24} + 1} \right) + \epsilon_i$$

$$\text{y } \beta = 126 \arctan \frac{2 \text{sen } \frac{\pi}{24}}{2 \cos \frac{\pi}{24} + 1} - \frac{75\pi}{22} - 21\epsilon_i.$$

En estas ecuaciones hemos considerado que el error cometido por el escultor al asignar intuitivamente la diferencia angular de $\Delta = \frac{\pi}{132} \text{ rad} = 1,36^\circ$ es $\epsilon_i = \frac{0,1\pi}{180}$.

Por lo tanto las expresiones analíticas quedan de la siguiente manera:

$$\alpha = \frac{17\pi}{66} - 6 \arctan \frac{2 \text{sen } \frac{\pi}{24}}{2 \cos \frac{\pi}{24} + 1} + \frac{0,1\pi}{180}$$

$$\text{y } \beta = 126 \arctan \frac{2 \text{sen } \frac{\pi}{24}}{2 \cos \frac{\pi}{24} + 1} - \frac{75\pi}{22} - \frac{21 \cdot 0,1\pi}{180}.$$

Además, las coordenadas de los 22 vértices son: $u_{1,5} = (1,0)$ y $u_{n+1,5} = (\cos n\alpha, \text{sen } n\alpha)$ con $n = 1 \div 21$.

3.5. Método M_7

El método de construcción directa M_7 parte del triángulo equilátero ABC, trazamos un segmento paralelo e igual al lado AB que pase por el vértice C, completando el rectángulo ABDE. Trazando las diagonales de este rectángulo encontramos O, centro de la circunferencia que circunscribe el polígono. Prolongando la recta que pasa por O y C, hasta que intercepte con la circunferencia, encontramos el punto F. Con centro D y radio DF trazamos seis arcos consecutivos de circunferencia, encontrando así G, H, I, J, K, y L. De la misma manera y con el mismo radio, con centro en E, trazamos dos arcos determinando los puntos M y N. Con centro A y radio DF encontramos sobre la circunferencia el punto P. Con centro B y radio DF trazamos ocho arcos consecutivos de circunferencia encontrando así los puntos restantes Q, R, S, T, U, V, W y X. Se observa que este proceso está configurado con catorce ángulos iguales α y ocho ángulos diferentes β al resto (Figura 7).

El icosakaidígono del método M_7 está configurado con 14 ángulos α y 8 ángulos β , cuyas ecuaciones analíticas son las siguientes:

$$\alpha = \pi - 4 \arctan \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ y } \beta = -\frac{3\pi}{2} + 7 \arctan \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

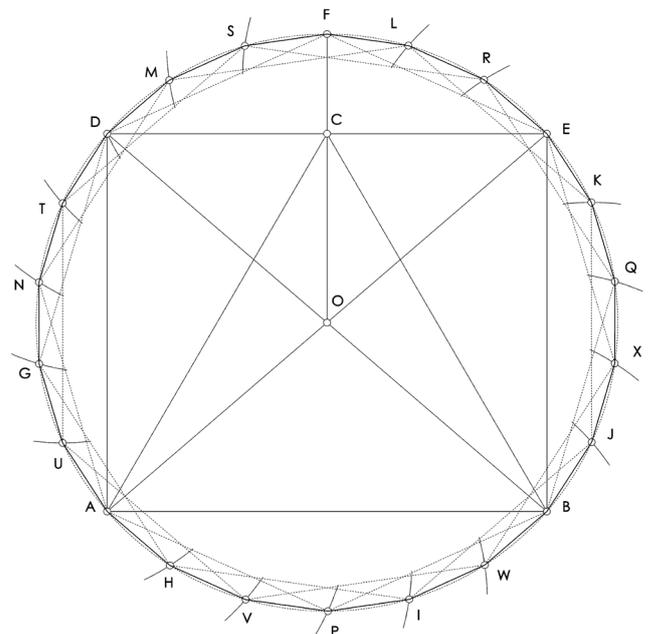


Figura 7. Construcción geométrica del método M_7 .

Además, las coordenadas de los 22 vértices son: $u_{1,11} = (1,0)$; $u_{n+1,11} = (\cos n\beta, \sin n\beta)$ con $n = 1 \div 2$; $u_{n+2,11} = (\cos(\beta + n\alpha), \sin(\beta + n\alpha))$ con $n = 2 \div 4$; $u_{n+3,11} = (\cos(2\beta + n\alpha), \sin(2\beta + n\alpha))$ con $n = 4 \div 5$; $u_{n+4,11} = (\cos(3\beta + n\alpha), \sin(3\beta + n\alpha))$ con $n = 5 \div 7$; $u_{n+5,11} = (\cos(4\beta + n\alpha), \sin(4\beta + n\alpha))$ con $n = 7 \div 9$; $u_{n+6,11} = (\cos(5\beta + n\alpha), \sin(5\beta + n\alpha))$ con $n = 9 \div 11$; $u_{n+7,11} = (\cos(6\beta + n\alpha), \sin(6\beta + n\alpha))$ con $n = 11 \div 12$ y $u_{n+8,11} = (\cos(7\beta + n\alpha), \sin(7\beta + n\alpha))$ con $n = 12 \div 14$.

4. DISCUSIÓN, ANÁLISIS DE LOS COEFICIENTES DE PEARSON

Una vez analizados los siete métodos de análisis de las hipótesis ($M_1 \dots M_7$), se procede a la comparación de éstos en función de las medias de los coeficientes Ajustados de Determinación de Pearson. El uso de dichos coeficientes tiene sentido siempre que sean altamente representativos; esta característica se mide con el Coeficiente de Variación de Pearson CV. De forma estándar, estadísticamente se considera que la media es representativa si $CV < 25\%$; haciendo los cálculos con todos los parámetros anteriores observamos que los CV obtenidos para las medias de los Coeficientes ajustados $\eta_{adj}^2 \times 100$ son todas menores que 0,052%. Esta altísima representatividad permite disponer con todos los resultados, geométricos y estadísticos, de las 154 comparaciones, por pieza. La más aproximada es la que se hace con el modelo M_7 , en ambos casos según la Tabla 4 (Figura 8).

5. CONCLUSIÓN

El llamado icosakaidígono, polígono de 22 lados, no aparece en los *Elementa* de Euclides, ni en el *Almagesto* de Tolomeo, ni en las escasas *Practica Geometriae* de la época, pero puede ser construido mediante diferentes aproximaciones. Desde el punto de vista estadístico el método que más se aproxima en la construcción de las esculturas del *Clypeus* Tarragona, Jupiter-Ammon (s. I), y el del rosetón de la catedral Orvieto, con la escultura de la faz de Cristo (s. XIV), es el M_7 , utilizado probablemente en la construcción del *Reliquiario del Corporale del Miracolo di Bolsena* (1337-1338) de la catedral de Orvieto.

Por otra parte existe una extraordinaria coincidencia métrica entre ambas figuras, el *Clypeus* tiene una circunferencia de regresión de $R = 0,3349$ m, mientras que la de la faz de Cristo es de $R = 0,3378$ m. Los lados teóricos del icosakaidígono también se aproximan enormemente, en el primer caso 0,0953 m y en el rosetón 0,0961 m. La composición del cuerpo central la figura de la faz de Cristo tiene la misma alegoría que los *Clypeus* respecto al dios Jupiter-Ammon, es como si esta conciencia compositiva hubiera perdurado desde la tradición clásica, a lo largo de más de un milenio, hasta el gótico.

En el resultado estadístico en segunda posición aparece la posible construcción mediante escuadras por rotación del M_4 , método que con su progresivo ajuste podría llegar a mejorar su precisión para el trazado de las esculturas.

Tabla 4. Ranking descendente de comparación.

Comparación con el rosetón				Comparación con el <i>Clypeus</i>			
Métodos	P	$\eta_{adj}^2 \times 100$	d	Métodos	P	$\eta_{adj}^2 \times 100$	d
M_7	0,999938	99,986940	0,00034	M_7	0,990233	98,069530	0,00013
M_4	0,999883	99,975434	0,00205	M_4	0,990187	97,968161	0,00203
M_3	0,999853	99,969185	0,00215	M_3	0,990140	97,953991	0,00212
M_6	0,999761	99,949825	0,00308	M_1	0,990047	97,941166	0,00391
M_1	0,999760	99,949672	0,00396	M_5	0,990021	97,935968	0,00362
M_5	0,999707	99,938510	0,00366	M_6	0,990045	97,933191	0,00305
M_2	0,998850	99,758999	0,00864	M_2	0,989124	97,738024	0,00855

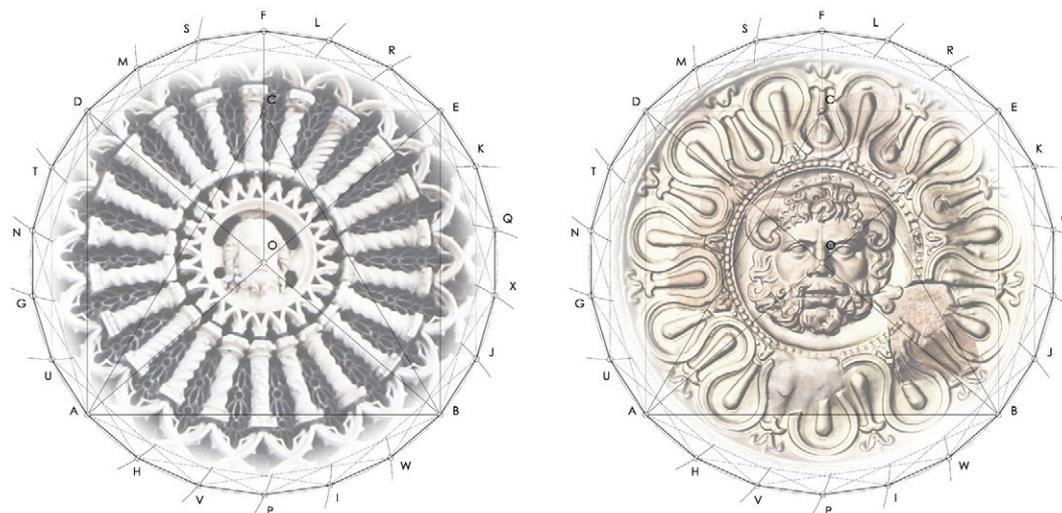


Figura 8. Construcción geométrica M_7 del *Corporale del Miracolo di Bolsena*.

REFERENCIAS

- (1) Koppel, E. M. (1987). Relieves arquitectónicos en Tarragona. En Trillmich, W., Zanker, P. (coord.), *Stadtbild und Ideologie die Monumentalisierung hispanischer Städte zwischen Republik und Kaiserzeit: Kolloquium in Madrid vom 19. bis 23. Oktober 1987*. Bayerische Akademie der Wissenschaften. Munich: Supplements, New series 103, 1990, pp. 327-340.
- (2) Peña Jurado, A. (2009). La decoración escultórica. En Ayerbe, R., Barrientos, T., Palma, F., *El Foro de Augusta Emerita: génesis y evolución de sus recintos monumentales*. Anejos de Archivo Español de Arqueología, LIII (pp. 583-622). Mérida: CSIC.
- (3) Ascani, V. (1997). *Il Trecento Disegnato. Le Basi Progettuali Dell'architettura Gotica in Italia*, pp. 67-82. Roma: Viella.
- (4) Bonelli, R. (1951). I disegni per la facciata del Duomo di Orvieto (1944). *Bollettino dell'Istituto Storico-Artistico Orvietano*, VII: 1-25.
- (5) Damiani, M. (1991). I restauri di Giuseppe Valadier alla facciata del duomo di Orvieto. *Architettura, Storia E Documenti* (pp. 260-274).
- (6) Gillerman, D. M. (1994). The Evolution of the Design of Orvieto Cathedral, ca. 1290-1310. *Journal of the Society of Architectural Historians*, 53: 300-321, <https://doi.org/10.2307/990939>.
- (7) Lassus, J. B. A. (1858). *Album de Villard de Honnecourt. Architecte du XIIIe Siècle*. Paris: Imprimerie impériale. PL XXIX y PL XXX.
- (8) Ascani, V. (1989). Le dessin d'architecture médiéval en Italie. En *Les Bâisseurs de Cathédrales Gothiques* (pp. 255-277). Strasbourg: Musées de la ville de Strasbourg.
- (9) Bork, R. (2005). Plan B and the Geometry of Façade Design at Strasbourg Cathedral, 1250-1350. *Journal of the Society of Architectural Historians*, 64: 442-473, <https://doi.org/10.2307/25068200>.
- (10) Recht, R. (1989). *Les Bâisseurs de Cathédrales Gothiques*, pp. 393-397. Strasbourg: Musées de la ville de Strasbourg.
- (11) Bucher, F. (1979). *Architector. The Lodge Books and Sketchbooks of Medieval architects*, vol. I, pp. 209, 216, 222, 268. New York: Abaris Books.
- (12) Heath, T. L. (1908). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, vol. II, pp. 91-95. Cambridge: Cambridge University Press.
- (13) Toomer, G. J. (1984). *Ptolemy's Almagest*, pp. 35-74. Translated and annotated by G. J. Toomer. With a foreword by Owen Gingerich. London: Gerald Duckworth & Co.
- (14) Branner, R. (1960). Villard de Honnecourt, Archimedes, and Chartres. *Journal of the Society of Architectural Historians*, XIX: 91-96, <https://doi.org/10.2307/988023>.
- (15) Heath, T. L. (1921). *A History of Greek Mathematics*, Vol. II: From Aristarchus to Diophantus, pp. 328-329. Oxford: The Clarendon Press.
- (16) Schoene, H. (1903). *Heronis Alexandrini Opera Quae Supersunt Omnia*. Vol III: Rationes Dimetiendi et Commentatio Dióptrica, p. 63. Leipzig: Teubner.
- (17) Toldrà, J. M., et al. (2014, 12-14 de junio). The octagon, the hendecagon and the approximation of pi: the geometric design of the clypeus in the enclosure of Imperial cult in Tarraco. En *XII International Forum, Le vie dei Mercanti, Best practice in heritage conservation management, from the world to Pompeii*. Aversa, Capri.
- (18) Wilson Jones, M. (2000). *Principles of Roman Architecture*, p. 75. 3.^a edición. New Haven and London: Yale University Press.
- (19) Bechmann, R. (1991). *Villard de Honnecourt. La pensée technique au XIIIe siècle et sa communication*, pp. 146-148. Paris: Picard Éditeur.
- (20) Sarrade, M. T. (1986). *Sur les connaissances mathématiques des bâtisseurs de cathédrales*, pp. 48-54. Paris: Librairie du Compagnonnage.
- (21) Nuere, E. (2001). *Nuevo tratado de la carpintería de lo blanco*, p. 68. Madrid: Ediciones Munilla-Leira.
- (22) Pez, B. (1853). Hermanni Contracti monachi Augiensis de mensura astrolabii liber. *Patrologia Latina*, vol. 143, MPL143, Col. 0379-0390A.
- (23) Baron, R. (1956). Hugonis de Sancto Victore Practica geometriae. *Osiris*, 12: 176-224, <https://doi.org/10.1086/368598>.
- (24) Victor, S. K. (1979). *Practical geometry in the high middle ages. Artis cuiuslibet consummatio and the pratike de geometrie*, pp. 107-471. Philadelphia: The American Philosophical Society.
- (25) Hahn, N. L. (1982). *Medieval Mensuration: "Quadrans vetus" and "Geometrie due sunt partes principales"*, pp. 6-113. Transactions of the American Philosophical Society. Philadelphia: The American Philosophical Society.
- (26) Busard, H. L. L. (1965). The Practica Geometriae of Dominicus de Clavasio. *Archive for History of Exact Sciences*, 2: 520-575, <https://doi.org/10.1007/BF00324882>.
- (27) Beaujouan, G. (1975). Réflexions sur les rapports entre théorie et pratique au Moyen Âge. En Murdoch, J. E., Sylla, E. D. (Eds.), *The Cultural Context of Medieval Learning* (pp. 437-484). Dordrecht, Boston: D. Reidel, https://doi.org/10.1007/978-94-010-1781-7_12.
- (28) Barbella, G. (2010). *Incendio di Borgo di Raffaello. Il rosone del misterio Trinitario*. Brescia.
- (29) Armesto, J., et al. (2010). Modelling masonry arches shape using terrestrial laser scanning data and nonparametric methods. *Engineering Structures*, 32: 607-615, <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2009.11.007>.
- (30) Núñez, A., et al. (2012). Generation of virtual models of cultural heritage. *Journal of Cultural Heritage*, 13: 103-106, <https://doi.org/10.1016/j.culher.2011.06.004>.
- (31) Alkan, R. M., et al. (2012, 6-10 May). Analysis of The Accuracy of Terrestrial Laser Scanning Measurements. En *FIG Working Week 2012*. Rome, Italy.
- (32) Serrano, F., Saumell, J., Berenguer, F. (2014). Análisis de resultados métricos de una nube de puntos y una medición directa en el patrimonio edificado. El Santuario de La Montaña en Cáceres. *Informes de la Construcción*, 66(534): e016, doi: <http://dx.doi.org/10.3989/ic.12.059>.

- (33) Pavlidis, G., Koutsoudis, A., Fotis, A., Vassilios, T., & Christodoulos, C. (2007). Methods for 3D digitization of Cultural Heritage. *Journal of Cultural Heritage*, 8(1): 93-98, <http://doi.org/10.1016/j.culher.2006.10.007>.
- (34) Yilmaz, H. M., Yakar, M., Gulec, S. A., & Dulgerler, O. N. (2007). Importance of digital close-range photogrammetry in documentation of cultural heritage. *Journal of Cultural Heritage*, 8(4): 428-433, <https://doi.org/10.1016/j.culher.2007.07.004>.
- (35) McCarthy, J. (2014). Multi-image photogrammetry as a practical tool for cultural heritage survey and community engagement. *Journal of Archaeological Science*, 43: 175-185, <https://doi.org/10.1016/j.jas.2014.01.010>.
- (36) Koutsoudis, A., Vidmar, B., Ioannakis, G., Arnaoutoglou, F., Pavlidis, G., & Chamzas, C. (2014). Multi-image 3D reconstruction data evaluation. *Journal of Cultural Heritage*, 15(1): 73-79, <https://doi.org/10.1016/j.culher.2012.12.003>.
- (37) Souto-Vidal, M., Ortiz-Sanz, J., Gil-Docampo, M. (2015). Implementación del levantamiento eficiente de fachadas mediante fotogrametría digital automatizada y el uso de software gratuito. *Informes de la Construcción*, 67(539): e107, doi: <http://dx.doi.org/10.3989/ic.14.098>.
- (38) Chandler, J. H., Fryer, J. (2013). Autodesk 123D Catch: How accurate is it? *Low cost digital photogrammetry. Geomatics World*, January/February, <http://geomaticsjc.lboro.ac.uk/ven/webpages/OtherFiles/Chandler,%20Fryer%20-%202013%20-%20AutoDesk%20123D%20Catch%20How%20accurate%20is%20it.pdf>
- (39) McCarthy, J. (2014). Multi-image photogrammetry as a practical tool for cultural heritage survey and community engagement. *Journal of Archaeological Science*, 43(1): 175-185, <http://doi.org/10.1016/j.jas.2014.01.010>.

* * *