Comunicació Educativa, nº 1, 1990, 47-49
ISSN: 1575-9911. EISSN: 2339-5559
http://www.revistes.publicacionsurv.cat/index.php/comeduc

SIMETRIA I APROXIMACIÓ PER OBTENIR ANGLES PLEGANT PAPER

1.-Principis

Sovint es pensa que la matemàtica a l'escola ha d'oblidar la geometria.

Sovint es creu que la geometria a l'escola elemental només pot parlar de representació i visualització, i no pot ajudar a reflexionar i descobrir propietats.

Sovint es pensa que geometria és sinònim de càlcul amb decimals, sistema sexagesimal, noms i més noms.

Volem donar una imatge lúdica de la geometria, vinculant-la a un element poc utilitzat i bé de preu com és la papiroflèxia, on les mesures no compten.

El nostre objectiu és el de presentar diversos continguts de la "geometria oficial clàssica" a partir d'elements manipulatius que es basen en la simetria. En principi tractarem els primers doblecs que duen a l'observació d'angles.

Si cada alumne d'una classe partís d'un full de paper de mida diferent i arribés a observar que, amb un procediment comú per a tots, obtenim un "mateix resultat", una mateixa figura o forma, és que hem demostrat quelcom que és independent de la mesura de partida. Llavors, només cal explicitar-ho verbalment. La propietat descoberta no és sols una estructura comuna (Dienes 1970) sinó un pas autèntic al raonament axiomàtic a partir del llenguatge analògic (Pirie, Kieren 1989) .

El procés algebraic (tan difícil de ser significatiu) esdevindrà ple de sentit. Posar aleshores una lletra, i arribar a una conclusió algebraica no serà quelcom fictici quan sigui el moment, si abans s'ha observat la generalització com a procés en el qual tothom "fa el mateix" independentment de la mesura.

Aquest és el repte de la veritable demostració matemàtica que fem a l'escola els que hi creiem. A les línies següents veureu un exemple que podeu realitzar a l'aula en nivells diferents. Agafeu paper que es pugui llençar i... a aprendre jugant.

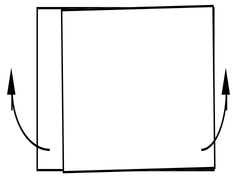
2. Angles amb un procediment binari de doblecs

Tothom ha après d'obtenir un angle de 90º per fer un ocell de paper. ¿Com raonar matemàticament el significat del que fem? L'explicació és més profunda que el propi camí per a aconseguir-ho. Vegem què fem.

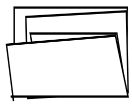
Doblegueu el paper sobre ell mateix (fig.1), premeu i torneu a fer la mateixa maniobra sobre el doblec anterior (fig.2). En desplegar, hem obtingut l' angle recte necessari (fig.3) .

Amb el primer doblec, hem construït un angle pla. Amb el segon, fem l'eix de simetria d'aquest: la meitat de l'angle pla. Per definició és l'angle de 90º.

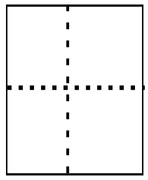
Per un procediment recursiu, podem obtenir l'angle de



(Fig.1)



(Fig.2)



(Fig. 3)

45º, el de 22,5º, i axí successivament .

Penseu com podríeu fer l'angle de 135º . No és tan difícil!

¿Fóra possible aconseguir l'angle de 67 graus i mig per un procediment anàleg ? ¿Podem obtenir d'aquesta forma qualsevol angle? Sembla que sí.

Aquest procés utilitza el fet que, donada una mesura, som capaços de tenir la meitat, quarta part, etc, i també el doble,... I un cop amb això, fent sumes, podem aconseguir aproximar-nos a qualsevol mesura angular. Aquest treball l'hem realitzat a 6è nivell d'EGB, on els alumnes poden aproximar-se al raonament esmentat .

Tot i això, el procediment anterior ens fa passar primerament per l'angle de 90º . Fóra bo saber fer-ne un altre que ens pogués servir de partida. ¿Per què no provar amb el de 60 º ?

3.- On es mostra la força de la simetria per fer angles

L' angle de 60º és més difícil de construir.

Sembla que podríem pensar a utilitzar l' aritmètica: és 2/3 del de 90º .

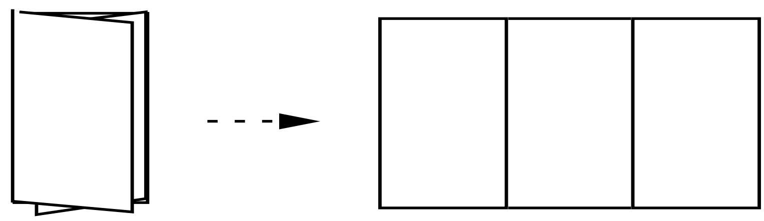
¿Qui no ha fet alguna vegada un " tríptic" d'aquests de propaganda cultural ?

Per un procediment anàleg al de doblegar aquest paper en tres parts iguals, podem obtenir l' angle de 30 º. Suposem que el lector sabrà veure'n la diferència respecte a la subdivisió anterior. Però no cal dir que ... **hem de tenir manetes**! En efecte, als nens els costa més el joc psicomotriu que la comprensió del fet .

Si observem les propietats del triangle equilàter, podem pensar en una altra solució, segurament més pràctica. Als nens només cal que els preguntem: ¿on es troba l'angle de 60º ? Vegem-ne la construcció.

L' objectiu conceptual és la construcció d'un triangle equilàter. Un cop fet, tindrem l'angle de 60º i el de 120º immediatament. Evidentment, cal tenir un full de paper per treballar.

En aquest cas cal
"apuntar" que
coincideixin les puntes



Busquem primer l'eix de simetria d'un costat del paper. L'hem anomenat AB (fig 4). El truc és doblegar el full, portant el segment AB sobre la línia puntejada (fig 5). De fet , ja hem obtingut la trisecció de l' angle de 90º al vèrtex A.En repetir el mateix procés al vèrtex B, tornant a posar el full a la posició (4), obtindrem un nou doblec amb el punt E, i apareix clarament el segment AB', i també el punt d'intersecció P. Desplegant apareixerà la figura (6) on els puntejats són els doblecs obtinguts.

L' angle CAB, és un angle de 30º. El B'AB és de 60º. Un bon procediment , oi ?

Vegeu un resultat més efectiu, i al mateix temps sorprenent que ens farà reflexionar en altres propietats geomètriques (Pedersen 1985. Disposem ara d'una tira de paper allargada. Cal doblegar per un lloc qualsevol de la tira (fig.7). Com més a l'esquerra, millor. Prémer, i desplegar (fig 8).

Ara doblega al tros de mà dreta, de forma similar a l'anterior. Prem, i desplega (fig.9).

Després doblega la part dreta de la tira, seguint el segon doblec (fig. 10).

Continuant el mateix procés , vés doblegant alternativament cap amunt i cap avall, seguint el doblec anterior. Obtindràs un seguit de doblecs al llarg de la tira.

Als nois / es els costa de veure que ens hem basat en

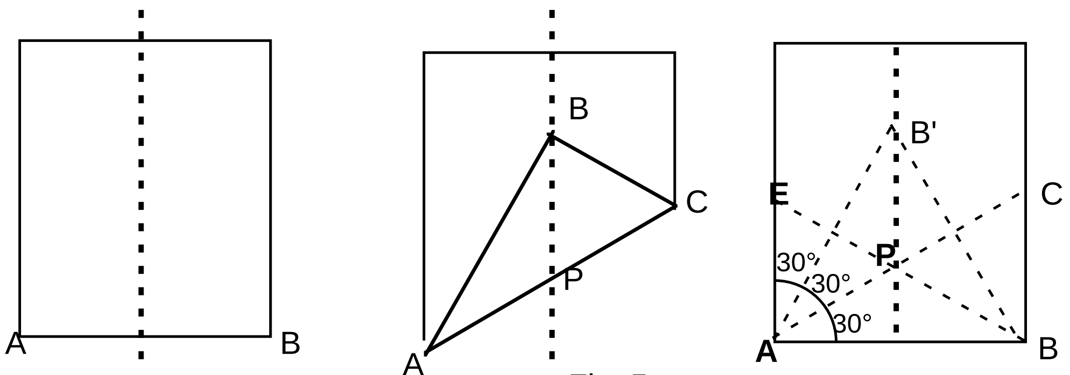
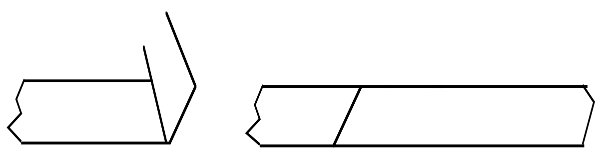


Fig. 4 Fig. 5 Fig.6

el fet que el triangle equilàter té tres eixos de simetria a 30º, però les sis o set vegades que he tingut l'oportunitat de treballar-ho amb ells, sempre m'ha sorprès de trobar un o dos alumnes que descobreixen el truc, fent simplement aquesta referència a la simetria.

3.- Quan l' enginy és necessari i l'exactitud no és el més important ...

Quan el paper que tenim no és un foli gran, sinó una tira de paper, el camí anterior pot exigir unes habilitats psicomotrius extraordinàries que no tothom té.



(7) (8)

La sorpresa és que ...

Prova de mesurar amb el transportador el setè angle... ÉS DE 60º !!!

Fig.9

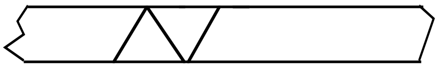


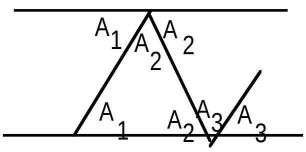
Fig.10

5. On s'explica... per als incrèduls

Observeu el dibuix (fig.11) i seguiu el raonament dels dos primers doblecs.

$$A_1 + 2\ A_2 = 180°$$

fig.11



Ara fixa't que A_1 volia ser una aproximació de l' angle de 60º. Per tant, diguem que A_1 60 $+b_1$

D'on , substituint

A_2 = 1/2 (180 - A_1) = 1/2 (180 - 60 - b_1) = - 1/2 b_1

I d' ací,

A_2 -60 = - 1/2 b_1 = - 1/2 (A_1 - 60)

La igualdat anterior demostra que A_2 es troba més a prop de 60º que no pas A_1. Anàlogament, si l'angle al tercer doblec és A_3, veuríem que

A_3 - 60 = 1/2 (A_2 - 60) = 1/4 (A_1- 60)

d'on A_2 és més a prop de l' angle de 60º que A_1 .

A cada doblec, la diferència entre l'angle i el de 60º es redueix a la meitat. Si l'angle de partida fos de 76º, per exemple, calculeu i veureu que A és ja 60,1º. Si teniu en compte que l'apreciació dels transportadors i la nostra vista són limitades, entendreu que el resultat obtingut és força bo, i passa per tenir 60º.

Deixem per al lector més algebrista la demostració més formal del fet que al setè pas ja ens hem acostat amb la precisió de menys d'un grau .

Joaquim Giménez
Professor de Didàctica de les Matemàtiques

Referències:

CASTELNUOVO, E. (1981): *La geometria*. Ed Ketrés. Barcelona.
DIENES, ZP. (1970): *Las seis etapas del aprendizaje de las matemáticas.* Teide. Barcelona.
KIEREN, T. PIRIE,S. (1989): «Recursive theory of mathematical understanding» in *For the learning of mathematics* 9,3 (Nov 89) Montréal. pp 7-11.
PEDERSEN, J. (1985): «Folding and geommetry» in *Mathematical Digest* núm. 59.