

## EXPERIMENTANT AMB ELS ENGRANATGES

Agustí Salvat Altés. Àrea de Didàctica de les Ciències Experimentals. URV

Quan s'ha de transmetre una força i un moviment d'un punt a un altre, el mecanisme que més s'utilitza és la transmissió per corretges i politges, amb la possibilitat de variar el sentit de gir de les politges i la relació de velocitat entre elles. Aquest sistema té els avantatges de: funcionament silenciosos, no necessitar lubricació i ser de fabricació relativament econòmica. Per aquests motius el mecanisme corretja-politges el trobem a diversos aparells electrodomèstics que necessitin transmetre el moviment d'un motor a elements que girin (com el tambor de la rentadora). El principal inconvenient que presenta aquesta forma de transmissió és el lliscament que la corretja pot patir amb les politges o rodes, sobretot si els seus diàmetres són molt diferents i la distància entre eixos és petita, ja que llavors la superfície de contacte disminueix. Això es pot resoldre utilitzant politges i corretges dentades.

### Tren d'engranatge simple

Els engranatges són un sistema de rodes dentades que engranen les unes amb les altres de manera que el moviment circular de l'una es transmet a l'altra. Les rodes dentades actuen l'una sobre l'altra a través de les dents que s'intercalen entre elles, de manera que cada dent d'una roda empeny la de l'altra, obligant-la a girar.

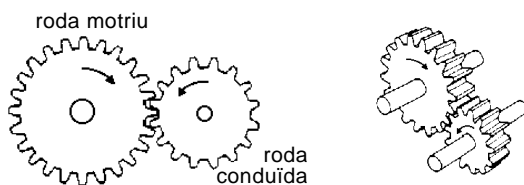


Fig. 1. Tren d'engranatge simple

Aquest sistema permet de resoldre el problema de la transmissió d'energia d'un eix a l'altre, i manté una relació definida entre llurs velocitats de rotació.

Els engranatges es poden trobar en nombrosos mecanismes quotidians: trepants, automòbils, rellotges analògics, màquines, eines, etc... i la seva acció és coneguda des de l'antiguitat. Els molins de vent ja tenien engranatges de fusta.

Al sistema d'engranatges format per dues rodes dentades s'anomena "tren d'engranatge simple". En aquest "tren", la roda que està connectada a l'aparell motor, i per tant, la que empeny, s'anomena roda motriu,

i la que és empesa, roda conduïda (Fig. 1).

En un "tren" la roda més gran també s'anomena "plat" o "corona", mentre que la petita rep el nom de "pinyó". Aquests noms són els que es fan servir a la bicicleta.

Els cossos bàsics sobre els quals són entallades les dents de les rodes són de revolució. Per entallar les dents hom emprava fresadores especials, que ho fan automàticament. Els engranatges solen ser fabricats amb acer, niló, baquelita o bé fibres comprimides.

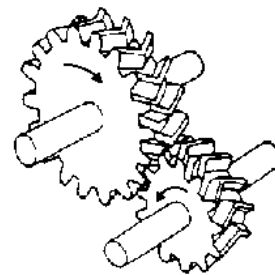


Fig. 2. Engranatge amb rodes tallades en "dent de fletxa"

### Tipus d'engranatges

**Engranatges cilíndrics.** Són emprats per transmetre un moviment entre dos eixos paral·lels. El fregament en les rodes dentades és molt alt i, per tant, es fan servir quan la potència és gran. Per això s'anomenen engranatges de força.

Quan es vol disminuir el fregament i, en conseqüència, la pèrdua de potència, s'usen engranatges amb rodes en "dent de fletxa", ja que el contacte entre les dents és més reduït.

**Engranatges cònics.** Es fan servir quan s'ha de transmetre un moviment entre dos eixos que es tallen, normalment formant un angle de 90°. les corones dentades poden tenir les dents rectes o inclinades.

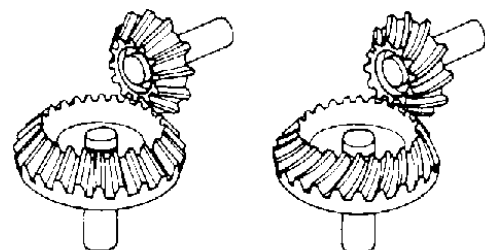


Fig. 3. Engranatges cònics de dents rectes i dents inclinades

## Engranatges cilíndrics didàctics

L'inconvenient de plantejar, a classe, un treball experimental amb engranatges rau en el fet que l'alumne no pot fabricar-se el engranatges (encara que a algun llibre de text de Primària es proposin activitats de construcció d'engranatges fent servir els taps metàl·lics de les ampolles de cervesa o de "Coca-Cola"). Si es vol que els engranatges funcionin correctament, no podem construir-los nosaltres mateixos, encara que siguem uns "manetes". Cal comprar-los!

Existeixen uns models d'engranatges cilíndrics mòbils fabricats per la casa de material didàctic ENOSA (Fig. 4), que tenen l'avantatge de ser projectables amb el retroprojector. Així, només cal un exemplar perquè tots els alumnes de la classe puguin treballar experimentalment amb els engranatges. Una altra qüestió és si tots els alumnes els podran manipular directament!

El sistema consta d'una entrada de força (amb maneta) i d'un suport mòbil ("guitarra") on es poden muntar les diferents rodes dentades. El joc de rodes dentades va des de 30 a 120 dents, augmentant de 5 en 5. Una

característica de les rodes dentades és que el nombre de dents de cada roda coincideix amb el seu diàmetre (en mm). És a dir, la roda de 40 dents té un diàmetre de 40 mm.

Amb aquest conjunt d'elements es poden realitzar totes les combinacions possibles en la transmissió per rodes dentades.

## Algunes activitats que es poden realitzar

Tot seguit es detallen un conjunt d'activitats amb engranatges que es poden fer amb alumnes de Primària o de Secundària. Val a dir que el llistat d'activitats que a continuació es proposen només és una part, important, de les que es poden fer amb aquest material didàctic. Pel que fa a quines activitats són adients a Primària i/o a Secundària, és evident que no es pot dir, de forma general, quina seqüència d'activitats és adient a Primària i quina a Secundària, ja que això dependrà de les capacitats i del nivell de coneixements dels respectius alumnes. Per tant, serà cada professor qui haurà de decidir les activitats que pot proposar als seus alumnes.

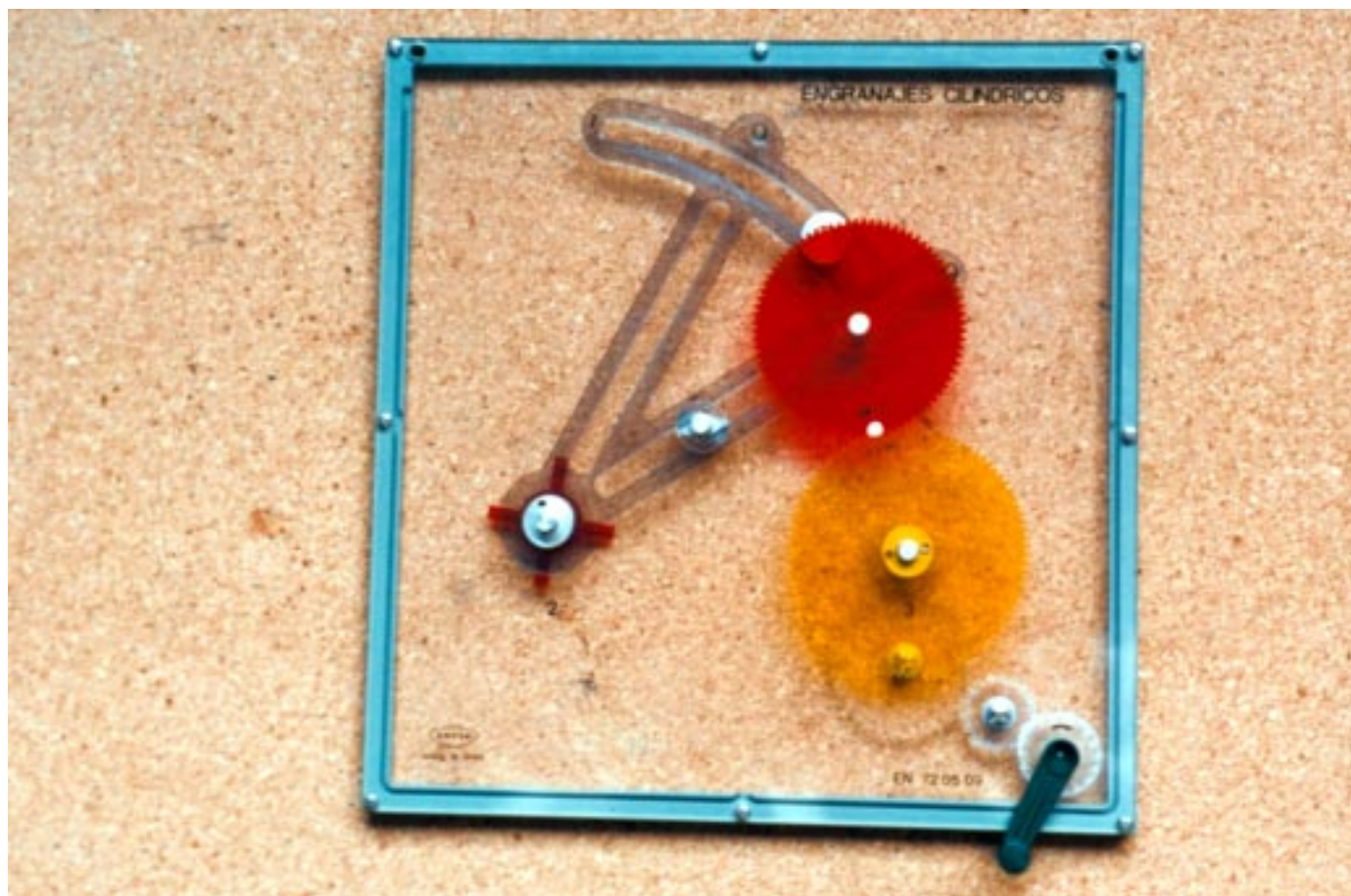


Fig. 4. Engranatges cilíndrics didàctics

# Experiències didàctiques

## ACTIVITAT 1. El sentit de rotació de les rodes dentades.

Es munten un nombre parell de rodes dentades (2 o 4, per exemple) i s'observa que el sentit de rotació de la primera i l'última roda són contraris. Si el nombre és senar (3 o 5, per exemple), el sentit de rotació de la primera i l'última roda és el mateix.

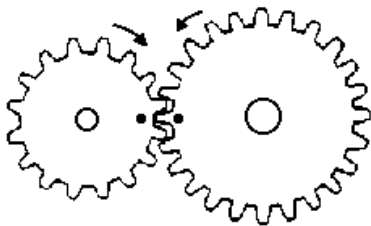


Fig. 5. Detall dels punts de referència (•) sobre les rodes

## ACTIVITAT 2. Buscant la llei de l'engranatge simple.

S'enganxa un petit paper circular (5 mm de diàmetre) sobre dues rodes dentades diferents. Aquests "punts" serviran com a referència a l'hora de comptar les voltes que facin les rodes. Es munten les rodes dentades sobre el mecanisme de forma que els dos punts quedin enfrontats (figura 5).

S'acciona el mecanisme i els alumnes van comptant les voltes que fa cada roda fins que els dos punts tornin a quedar en la mateixa posició que a la fig. 5. Els resultats obtinguts amb diferents combinacions de rodes dentades es mostren a la taula 1.

A partir dels valors de la taula 1 és fàcil comprovar que la relació  $nm/nc$  és la mateixa que la  $zc/zm$ . Per tant, la llei de l'engranatge és:  $nm/nc = zc/zm$ .

$z_m$	$z_c$	$n_m$	$n_c$
30	60	2	1
30	90	3	1
40	120	3	1
40	60	3	2
50	70	7	5
70	90	9	7
80	60	3	4
110	60	6	11

Taula 1. Voltes que fa la roda motora ( $n_m$ ) i la conduïda ( $n_c$ ) en funció del nombre de dents de cadascuna d'elles ( $z_m$ : nombre de dents de la roda motora;  $z_c$ : nombre de dents de la roda

A cadascuna de les fraccions de la llei ( $nm/nc$  i  $zc/zm$ ) se l'anomena relació de transmissió de l'engranatge:  $r = zc/zm = nm/nc$ .

## ACTIVITAT 3. La reducció i multiplicació de la velocitat.

Es munten dues rodes amb un nombre de dents força diferents (40 dents la motriu i 80 dents la conduïda, per exemple). Es fa girar el tren i s'observa que la conduïda gira més ràpid (el doble) que la motriu ("multiplicació de la velocitat"). S'intercanvien les dues rodes i s'observa el fenomen contrari ("reducció de la velocitat").

Quan es munti la roda motora de 40 dents amb la conduïda de 60 dents, la relació de transmissió entre ambdues serà:  $r = zc/zm = 60/40 = 3/2$ .

La relació de velocitats entre la roda motora i la conduïda també serà  $r$ . És a dir, de 3 a 2.

Cal fer notar que, en general, els sistemes d'engranatges s'utilitzen més com a reductors que no pas com a multiplicadors, ja que, normalment, la velocitat dels motors és més alta que la que desenvolupen les màquines que accionen.

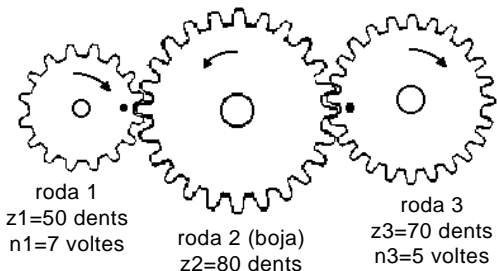


Fig. 6. El paper de la roda boja

## ACTIVITAT 4. El misteri de la roda boja

Ara es tracta de veure si el fet d'introduir una tercera roda entre dues rodes dentades altera la relació de transmissió de les dues primeres. Com a exemple es poden agafar dues rodes de 50 i 70 dents. Si es col·loquen en la posició de la fig. 5 i es fan voltar fins que tornin a coincidir els punts negres, s'obindrà que la roda motora gira 7 voltes, mentre que la conduïda en fa 5. Ara s'introdueix entre elles una roda dentada de 80 dents, per exemple. Es col·loquen en la posició de la figura 6 i es fan voltar fins que els punts negres tornin a estar en la mateixa posició. Si es compta el nombre de voltes de la primera i tercera roda, es veurà que fan 7 i 5 voltes, respectivament. Per tant, la roda central no altera la relació de voltes entre les dues primeres rodes. Per això, a aquesta roda central se l'anomena roda boja. És convenient provar amb rodes boges de diferent nombre de dents per adonar-se que la roda boja mai no altera la relació de transmissió de les dues rodes inicials.

## ACTIVITAT 5. Justificació del misteri de la roda boja.

A partir de la llei de l'engranatge és fàcil veure que

# Experiències didàctiques

una roda boja no altera la relació de transmissió entre dues rodes dentades.

Suposem que tenim l'engranatge muntat, només, amb les rodes 1 i 3 de la fig. 6. La relació de transmissió entre ambdues rodes serà:  $n_1/n_3 = z_3/z_1 = 70/50 = 7/5$ .

$z_m$	$z_c$	$mcm(z_m, z_c)$	$nm = mcm/z_m$	$nc = mcm/z_c$
30	60	60	$60/30=2$	$60/60=1$
30	90	90	$90/30=3$	$90/90=1$
40	120	120	$120/40=3$	$120/120=1$
40	60	120	$120/40=3$	$120/60=2$
50	70	350	$350/50=7$	$350/70=5$
70	90	630	$630/70=9$	$630/90=7$
80	60	240	$240/80=3$	$240/60=4$
110	60	660	$660/110=6$	$660/60=11$

Taula 2. Determinació de les voltes que fa la roda motora ( $nm$ ) i la conduïda ( $nc$ ) a partir de l'expressió del mínim comú múltiple del nombre de dents de cadascuna d'elles ( $z_m$ : nombre de dents de la roda motora,  $z_c$ : nombre de dents de la roda conduïda)

Quan fem el muntatge de la figura 6, la relació de transmissió entre la roda 1 i 2 serà:  $n_1/n_2 = z_2/z_1$ . I entre la roda 2 i la 3:  $n_2/n_3 = z_3/z_2$ .

Multiplicant entre elles les dues igualtats anteriors, tindrem:  $(n_1/n_2) \cdot (n_2/n_3) = (z_2/z_1) \cdot (z_3/z_2)$

Simplificant  $n_2$  i  $z_2$ , queda:  
 $n_1/n_3 = z_3/z_1 = 70/50 = 7/5$ .

### ACTIVITAT 6. Justificació de la llei de l'engranatge.

Aquesta activitat justifica, de forma teòrica, la llei de l'engranatge trobada de forma experimental a l'activitat 2.

Suposem que tenim dues rodes dentades en la mateixa posició que les de la fig. 5. La motora té  $z_m$  dents mentre que la conduïda en té  $z_c$ . Si les fem girar fins que tornin a coincidir els punts negres, la primera haurà girat  $nm$  voltes i la segona,  $nc$ . Els camins recorreguts pels punts de la perifèria de cada roda són:

Roda motora:  $l_m = nm \cdot 2\pi \cdot r_m$ , on  $r_m$  és el radi de la roda motora.

Roda conduïda:  $l_c = nc \cdot 2\pi \cdot r_c$ , on  $r_c$  és el radi de la roda conduïda.

És evident que quan tornin a coincidir els punts negres, els camins recorreguts per la perifèria d'ambdues rodes ( $l_m$  i  $l_c$ ) és el mateix, per tant:

$$l_m = l_c \Rightarrow nm \cdot 2\pi r_m = nc \cdot 2\pi r_c \Rightarrow nm \cdot r_m = nc \cdot r_c$$

Com que hi ha una proporcionalitat directa entre el radi de les rodes dentades i el nombre de dents de cada roda (radi = nombre de dents/2), l'expressió anterior es

pot escriure com:  $nm \cdot z_m/2 = nc \cdot z_c/2$ .

Simplificant la igualtat anterior i reagrupant termes, s'obté la llei de l'engranatge:  $nm/nc = z_c/z_m$ .

### ACTIVITAT 7. Altres expressions de la llei de l'engranatge.

Quan la llei de l'engranatge s'escriu en forma de producte:  $nm \cdot z_m = nc \cdot z_c$ , és evident que  $nm \cdot z_m$  és múltiple de  $z_m$  i de  $z_c$  alhora (ja que  $nm$  i  $nc$  són nombres naturals). Per tant,  $nm \cdot z_m = mcm(z_m, z_c)$ , on  $mcm$  representa el mínim comú múltiple del nombre de dents d'ambdues rodes. Aïllant  $nm$  s'obté una expressió que dona el nombre de voltes de la roda conductora:

$$nm = mcm(z_m, z_c)/z_m$$

Argumentant de la mateixa manera per a la roda conduïda, s'obté:  $nc = mcm(z_m, z_c)/z_c$ .

Si es té en compte la relació que existeix entre el mínim comú múltiple i el màxim comú divisor de dos nombres:  $mcm(z_m, z_c) \cdot MCD(z_m, z_c) = z_m \cdot z_c$ , el nombre de voltes de les rodes també es pot expressar com:

$$\text{Roda conductora: } nm = z_c/MCD(z_m, z_c)$$

$$\text{Roda conduïda: } nc = z_m/MCD(z_m, z_c)$$

$z_m$	$z_c$	$MCD(z_m, z_c)$	$nm = z_c/MCD$	$nc = z_m/MCD$
30	60	30	$60/30=2$	$30/30=1$
30	90	30	$90/30=3$	$30/30=1$
40	120	40	$120/40=3$	$40/40=1$
40	60	20	$60/20=3$	$40/20=2$
50	70	10	$70/10=7$	$50/10=5$
70	90	10	$90/10=9$	$70/10=7$
80	60	20	$60/20=3$	$80/20=4$
110	60	10	$60/10=6$	$110/10=11$

Taula 3. Determinació de les voltes que fa la roda motora ( $nm$ ) i la conduïda ( $nc$ ) a partir de l'expressió del màxim comú divisor del nombre de dents de cadascuna d'elles ( $z_m$ : nombre de dents de la roda motora,  $z_c$ : nombre de dents de la roda conduïda)

### ACTIVITAT 8. Determinació del nombre de voltes mitjançant el mínim comú múltiple.

Fent servir les expressions de la llei de l'engranatge en el format del mínim comú múltiple, s'obtenen les dades de la taula 1 de forma "teòrica".

És fàcil comprovar que els valors obtinguts per aquest mètode coincideixen amb els valors determinats experimentalment a l'activitat 2.

Els resultats obtinguts fent servir aquest mètode es mostren a la taula 2.

# Experiències didàctiques

## ACTIVITAT 9. Determinació del nombre de voltes mitjançant el màxim comú divisor.

Fent servir les expressions de la llei de l'engranatge en el format del màxim comú divisor, es poden obtenir les dades de la taula 1 de forma "teòrica" i comprovar que coincideixen amb els valors determinats experimentalment a l'activitat 2.

Els valors teòrics obtinguts pel mètode del "màxim comú divisor" es mostren a la taula 3.

## ACTIVITAT 10. L'enigma de la roda de 35 dents.

Quan es munta la roda de 35 dents com a motora ( $z_m=35$ ) amb cadascuna de la resta de rodes conduïdes disponibles ( $z_c \geq 40$ ), el nombre de voltes que fa cada roda ( $n_m$  i  $n_c$ ) segueix unes determinades lleis. Fent servir les dades de la taula 4, troba aquestes lleis i justifica-les mitjançant la llei de l'engranatge.

$z_m$	$z_c$	$n_m$	$n_c$	$z_m$	$z_c$	$n_m$	$n_c$
35	40	8	7	35	85	17	7
35	45	9	7	35	90	18	7
35	50	10	7	35	95	19	7
35	55	11	7	35	100	20	7
35	60	12	7	35	105	3	1
35	65	13	7	35	110	22	7
35	70	2	1	35	115	23	7
35	75	15	7	35	120	24	7
35	80	16	7				

Taula 4. Nombre de voltes que fa la roda motora ( $n_m$ ) i la conduïda ( $n_c$ ), quan la motora té 35 dents i la conduïda 40 o més

En aquest problema s'han de diferenciar dos casos: 1) quan el nombre de dents de la roda conduïda és múltiple del nombre de dents de la motora, i 2) quan no passa això.

Cas 1. Que el nombre de dents de la roda conduïda sigui múltiple del nombre de dents de la roda motora només es dona en dues situacions:  $z_c=70$ ,  $z_c=105$  dents. Per tant, les lleis que donen el nombre de voltes són:  $n_m = z_c/z_m = 70/35 = 2$ , i  $105/35 = 3$ .  $n_c=1$ .

La justificació de les dues lleis anteriors és senzilla. Quan  $z_c$  és múltiple de  $z_m$  es verifica que  $z_c = n \cdot z_m$  (amb  $n=2$  o  $3$ ). Per tant, el mínim comú múltiple de  $z_m$  i  $z_c$  serà:  $mcm(z_m, z_c) = z_c = n \cdot z_m$ .

$z_m$	$z_c$	$mcm(z_m, z_c)$	$z_m$	$z_c$	$mcm(z_m, z_c)$
35	40	$280=7 \cdot 40$	35	85	$595=7 \cdot 85$
35	45	$315=7 \cdot 45$	35	90	$630=7 \cdot 90$
35	50	$350=7 \cdot 50$	35	95	$665=7 \cdot 95$
35	55	$385=7 \cdot 55$	35	100	$700=7 \cdot 100$
35	60	$420=7 \cdot 60$	35	105	
35	65	$455=7 \cdot 65$	35	110	$770=7 \cdot 110$
35	70		35	115	$805=7 \cdot 115$
35	75	$525=7 \cdot 75$	35	120	$840=7 \cdot 120$
35	80	$560=7 \cdot 80$			

Taula 5. Expressió del mínim comú múltiple de  $z_m$  i  $z_c$ , en funció de  $z_c$

Les voltes que farà la roda motora seran:  
 $n_m = mcm(z_m, z_c)/z_m = z_c/z_m = n \cdot z_m/z_m = n$ . I les de la roda conduïda:  $n_c = mcm(z_m, z_c)/z_c = z_c/z_c = 1$ .

Cas 2. Quan el nombre de dents de la roda conduïda no és múltiple del nombre de dents de la roda motora, les lleis que donen el nombre de voltes d'ambdues són:  $n_m = z_c/5$  i  $n_c = 7$ .

Per justificar les dues lleis anteriors cal tenir en compte que el mínim comú múltiple de  $z_m$  i  $z_c$  sempre és de la forma:  $mcm(z_m, z_c) = 7 \cdot z_c$  (Vegeu la taula 5).

Fent servir la llei de l'engranatge en el format del mínim comú múltiple, obtindrem les voltes que farà cada roda. Les voltes de la roda motora seran:

$n_m = mcm(z_m, z_c)/z_m = 7 \cdot z_c/35 = z_c/5$ . I les de la roda conduïda:  $n_c = mcm(z_m, z_c)/z_c = 7 \cdot z_c/z_c = 7$ .

Si el lector té ganes de buscar altres relacions interessants entre les rodes dels engranatges projectables, pot estudiar els següents casos:

- Roda motora de 55 dents, roda conduïda entre 60 i 120 dents.
- Roda motora de 65 dents, roda conduïda entre 70 i 120 dents.
- Roda motora de 85 dents, roda conduïda entre 90 i 120 dents.
- Roda motora de 95 dents, roda conduïda entre 100 i 120 dents.