

Jenifer Jiménez Sánchez

TEORIA DE JOCS: ELS PROBLEMES DE DEMANDA

*APLICACIÓ AL FINANÇAMENT DE LES UNIVERSITATS
PÚBLIQUES CATALANES*

TREBALL FINAL DE GRAU

Dirigit per Prof. Misericòrdia Vilella Bach

Doble grau en ADE + FIC



**UNIVERSITAT
ROVIRA I VIRGILI**

Reus

2019



ÍNDEX

1. Presentació.....	7
2. Introducció	8
2.1. Descripció i objectius del treball	8
2.2. Metodologia.....	9
3. Teoria de Jocs	10
3.1. Jocs cooperatius amb utilitat transferible	12
3.2. Propietats dels jocs cooperatius	13
3.3. Solucions en jocs cooperatius	14
4. Problemes de demanda.....	20
4.1. Selecció de la regla de repartiment	21
4.2. Regles de demanda	22
4.2.1. Regla proporcional (P)	23
4.2.2. Regla proporcional ajustada (AP)	24
4.2.3. Regla de guanys igualitaris restringits (Constrained Equal Awards, CEA) ..	25
4.2.4. Regla de pèrdues igualitàries restringides (Constraint Equal Losses, CEL)	26
4.2.5. Regla del Talmud (T)	27
4.3. Propietats de les regles de repartiment	28
5. Aplicació d'un cas real	32
5.1. Descripció de la problemàtica.....	32
5.2. Resolució del cas	34
5.2.1. Regla proporcional.....	34
5.2.2. Regla proporcional ajustada.....	36
5.2.3. Regla de guanys igualitaris restringits.....	37
5.2.4. Regla de pèrdues igualitàries restringides.....	40
5.2.5. Regla del Talmud.....	42
5.3. Anàlisi de resultats	45
5.4. Conclusions.....	50
6. Referències bibliogràfiques.....	51

ÍNDEX DE TAULES I GRÀFICS

Taula 1. Resum de propietats de les regles P, AP, CEA, CEL i T	31
Taula 2. Pressupostos de la Generalitat l'any 2010 i 2014.....	33
Taula 3. Assignacions seguint la Regla Proporcional.....	35
Taula 4. Pèrdues dels agents seguint la regla P i el seu percentatge respecte les demandes.....	35
Taula 5. Assignacions seguint la Regla Proporcional Ajustada	37
Taula 6. Pèrdues dels agents seguint la regla AP i el seu percentatge respecte les demandes.....	37
Taula 7. Repartició inicial seguint el mètode CEA.....	38
Taula 8. Assignacions seguint la Regla CEA	39
Taula 9. Pèrdues dels agents seguint la regla CEA i el seu percentatge respecte les demandes.....	39
Taula 10. Assignacions seguint la Regla CEL.....	41
Taula 11. Pèrdues dels agents seguint la regla CEL i el seu percentatge respecte les demandes.....	41
Taula 12. Assignació mínima seguint la regla de Talmud	42
Taula 13. Assignació seguint CEL i assignació mínima seguint Talmud	43
Taula 14. Assignació seguint la regla de Talmud	44
Taula 15. Pèrdues dels agents seguint la regla CEL i el seu percentatge respecte les demandes.....	44
Taula 16. Assignacions seguint les diverses solucions	45
Gràfic 17. Assignacions a la Universitat de Barcelona de les diverses solucions	45
Gràfic 18. Assignacions a la Universitat Autònoma de Barcelona de les diverses solucions.....	46
Gràfic 19. Assignacions a la Universitat Politècnica de Catalunya de les diverses solucions.....	46
Gràfic 20. Assignacions a la Universitat Rovira i Virgili de les diverses solucions	47
Gràfic 21. Assignacions a la Universitat Pompeu Fabra de les diverses solucions	47
Gràfic 22. Assignacions a la Universitat de Girona de les diverses solucions	48

RESUM

El present treball de final de grau pretén realitzar una aproximació a la teoria de jocs des d'un punt de vista teòric i pràctic.

En primer lloc, en la part teòrica presentarem els conceptes teòrics més importants. Entre els quals veurem una introducció a la teoria de jocs, les propietats i solucions dels jocs cooperatius per, a continuació, descriure les diverses regles de repartiment que solucionen un problema.

En la part pràctica d'aquest treball l'objectiu es solucionar i analitzar un problema de demanda, en concret, el problema de finançament de les universitats públiques catalanes. Un problema de demanda es presenta quan el valor a repartir es insuficient per cobrir les demandes dels diversos jugadors participants. Aquest problema es presenta l'any 2014, quan el pressupost destinat a les universitats ha disminuït degut a la crisi econòmica i les universitats tenen les mateixes demandes que en els anys anteriors, per tant, el pressupost l'any 2014 no podrà cobrir aquestes demandes.

El problema de demanda del finançament de les universitats públiques catalanes serà resolt a través de les regles de repartiment següents: regla proporcional, regla proporcional ajustada, regla de guanys igualitaris restringits, regla de pèrdues igualitàries restringides i regla del Talmud.

Per últim, veurem les diferents assignacions que obtenim al resoldre el problema seguint les diverses regles de repartiment i quines beneficien més a cada una de les universitats implicades.

Conceptes clau: Teoria de jocs, problemes de demanda, finançament universitari.

RESUMEN

El presente trabajo de final de grado pretende realizar una aproximación a la teoría de juegos desde un punto de vista teórico y práctico.

En primer lugar, en la parte teórica presentaremos los conceptos teóricos más importantes. Entre los que veremos una introducción a la teoría de juegos, las propiedades y soluciones de los juegos cooperativos para, a continuación, describir las diversas reglas de reparto que solucionan un problema.

En la parte práctica de este trabajo el objetivo es solucionar y analizar un problema de demanda, en concreto, el problema de financiación de las universidades públicas catalanas. Un problema de demanda se presenta cuando el valor a repartir es insuficiente para cubrir las demandas de los diversos jugadores participantes. Este problema se presenta en el año 2014, cuando el presupuesto destinado a las universidades ha disminuido debido a la crisis económica y las universidades tienen las mismas demandas que en los años anteriores, por lo tanto, el presupuesto en el año 2014 no podrá cubrir estas demandas .

El problema de demanda de la financiación de las universidades públicas catalanas será resuelto a través de las reglas de reparto: regla proporcional, regla proporcional ajustada, regla de ganancias igualitarias restringidas, regla de pérdidas igualitarias restringidas y regla del Talmud.

Por último, veremos las diferentes asignaciones que obtenemos al resolver el problema siguiendo las diversas reglas de reparto y cuales benefician más a cada una de las universidades implicadas.

Conceptos clave: Teoría de juegos, problemas de demanda, financiación universitaria.

ABSTRACT

This final degree project aims to make an approximation to the theory of games from a theoretical and practical point of view.

In first instance, in the theoretical part we will present the most important theoretical concepts. Among those we will see an introduction to game theory, the properties and solutions of cooperative games, and then a description of the various distribution rules that can solve a problem.

In the practical part of this project the objective is to solve and analyze a bankruptcy problem, in particular, the financing problem of the Catalan public universities. A bankruptcy problem occurs when the value to be distributed is insufficient to cover the demands of the various participating players. This problem occurs in 2014, when the budget allocated to universities has decreased due to the economic crisis and universities have the same demands as in previous years, therefore, the budget in 2014 will not be able to meet these demands.

The financing problem of the Catalan public universities will be resolved through the following distribution rules: proportional rule, adjusted proportional rule, constrained equal awards, constraint equal losses and the Talmud rule.

Finally, we will see the different allocations that we obtain when solving the problem following the different rules of distribution. We will also see which rule benefits more to each one of the universities involved.

Key words: Theory of games, bankruptcy problems, university financing.



1. PRESENTACIÓ

La idea d'aquest treball es va presentar degut al interès per la microeconomia i les ganes d'obtindre més coneixements sobre aquesta temàtica. Tot i això, en les assignatures que he cursat durant la carrera hem estudiat la teoria de jocs i els jocs no cooperatius però en cap moment s'han estudiat els jocs cooperatius ni els problemes de demanda. Per aquest motiu, el treball es presentava amb major dificultat però també amb major il·lusió per descobrir una temàtica que desconeixia per complert.

Una vegada concretada la temàtica general, els jocs cooperatius, vam trobar molt interessant els problemes de demanda, aquells en els quals el valor a repartir no es suficient per a fer front a les demandes de tots els agents participants. Per això, vam buscar un problema de demanda que ens sembles interessant i es trobés relacionat amb algun cas real. Vam acabar decidint que seria curiós analitzar i solucionar el problema de demanda del finançament de les universitats públiques catalanes.

En aquest projecte em pogut treure profit dels coneixements que em van aportar assignatures com:

- Introducció a la microeconomia: que em va proporcionar els coneixements fonamentals de la teoria econòmica, en particular l'anàlisi microeconòmic.
- Microeconomia: que cobreix diversos temes microeconòmics, en especial, la teoria bàsica dels jocs no cooperatius.

2. INTRODUCCIÓ

El Treball de Final de Grau que presentem a continuació es centra en analitzar i resoldre un problema de demanda, concretament el finançament de les universitats públiques catalanes. La resolució la realitzarem a través de diverses regles de repartiment, entre les que comptem: la regla proporcional, la regla proporcional ajustada, la regla de guanys igualitaris restringits, la regla de pèrdues igualitàries restringides i la regla del Talmud. Però, abans de començar amb la resolució del cas veurem la part teòrica d'aquesta temàtica, dintre de la qual introduïrem la teoria de jocs i els problemes de demanda.

El TFG es subdividirà entre la part teòrica i aquella part més pràctica. En la primera part, com hem mencionat anteriorment, veurem la teoria de jocs, els jocs cooperatius així com les seves propietats i solucions i per últim, el problema de demanda i les seves regles de repartiment. Per altra banda, en la part pràctica resoldrem el problema de demanda del finançament de les universitats. En aquesta segona part descriurem la problemàtica i la resoldrem seguint les regles que hem mencionat anteriorment. Posteriorment analitzarem els resultats i arribarem a una conclusió respecte la resolució obtinguda.

2.1. DESCRIPCIÓ I OBJECTIUS DEL TREBALL

A través de la realització del treball de final de grau es pretén resoldre un problema de demanda. Per tant, els objectius que es pretén assolir són:

- Conèixer la teoria de jocs a nivell general
- Conèixer els jocs cooperatius amb utilitat transferible, les seves propietats i solucions
- Conèixer els problemes de demanda i les seves regles de repartiment
- Conèixer les propietats de les regles de repartiment i la seva importància per a escollir una regla.
- Aplicar les regles de repartiment a un problema concret
- Analitzar els resultats obtinguts a través de cadascuna de les regles de repartiment
- Obtindre conclusions sobre la resolució del problema de demanda

2.2. METODOLOGÍA

Per la primera part, la més teòrica, extraurem informació de diverses fonts. Les fonts d'informació utilitzades per a la obtenció de les dades necessàries per a l'elaboració d'aquest estudi han estat extretes principalment de pàgines webs i llibres de referència sobre la teoria de jocs.

A continuació, per realitzar la part pràctica les dades dels pressupostos s'han extret de la Generalitat de Catalunya dels anys 2010 i 2014 que hem obtingut directament de la pàgina web oficial de la Generalitat de Catalunya.

A través d'aquest anàlisi pretenem arribar a la conclusió de quines regles de repartiment son més favorables per a cadascuna de les universitats o agents.

A més, he creat i treballat amb un excel per programar les regles i poder fer els càlculs de manera automàtica. A través d'aquest excel que he creat aconseguim obtenir els resultats de les regles estudiades únicament insertant les demandes dels agents i la quantitat total a repartir en el full número 1 d'aquest excel.

3. TEORIA DE JOCS

La teoria de jocs es una col·lecció de models matemàtics que estudia situacions de conflicte o de cooperació per comprendre així la conducta humana front la presa de decisions. Es tracta d'una àrea que estudia estratègies òptimes i el comportament previst pels jugadors. Definim un joc com un intent d'aconseguir el millor resultat possible tenint en compte que també depèn de les accions dels altres jugadors. Qualsevol joc s'inicia gràcies als ja anomenats jugadors, els participants del joc que prenen decisions amb l'objectiu de maximitzar la seva utilitat.

La teoria de jocs es pot dividir en dues parts: la teoria descriptiva i la teoria de solució. En la primera part, descriptiva, es du a terme la presentació dels jugadors, les regles, les possibles estratègies així com els beneficis. En la segona part es presenten les solucions derivades de l'actuació dels jugadors.

Algunes de les aplicacions més importants de la teoria de jocs es troben en les ciències econòmiques així com altres ciències com la biologia, psicologia o les ciències polítiques tot i que inicialment es va desenvolupar enfocat únicament en la seva aplicació econòmica. Els economistes han utilitzat la teoria de jocs per una gran quantitat d'aplicacions des de subhastes fins monopolis, oligopolis o sistemes de votació. Però, en el cas de voler utilitzar la teoria de jocs en les situacions de la vida real és essencial constituir models simplificats de la situació real a analitzar.

La teoria de jocs té els seus inicis en les aportacions matemàtiques de J. Von Neuman i O. Morgenstern el 1944 amb "Theory of Games and Economic Behaviour". Tot i això, ja s'anticipaven alguns conceptes anys anteriors amb Cournot (1838) i Edgeworth (1881). Sobre els anys seixanta es van desenvolupar els conceptes més importants gràcies a John Nash, tals com l'equilibri de Nash i la solució de negociació de Nash. Durant els anys setanta Selten va desenvolupar els jocs dinàmics i Harsanyi els jocs amb informació incompleta. Així, des de que Von Neumann, Morgenstern i John Nash van formular els principis bàsics de la teoria de jocs durant els anys 40-50 se li han atorgat múltiples aplicacions modificant, fins i tot, la forma en que s'interpretava la presa de decisions. Aquesta teoria ens porta a la conclusió que l'interès individual i l'egoisme condueix al ésser humà a una situació no òptima, conclusió totalment contrària a la que formulava tradicionalment Adam Smith "l'interès individual porta a la consecució del bé comú".

La teoria de jocs es divideix entre els jocs no cooperatius i els jocs cooperatius. Dintre d'aquest últim grup trobem un altre divisió: jocs d'utilitat transferible i jocs d'utilitat no transferible.

En els jocs no cooperatius els jugadors no tenen la possibilitat de formar coalicions ja que es centren en el seu propi benefici, a més solen ser bipersonals, és a dir, només hi participen dues persones. Dintre d'aquest tipus de jocs distingim entre estàtics i dinàmics. Els jocs estàtics son aquells en els que es prenen decisions de forma simultània, per tant, cada jugador decideix sense conèixer la decisió dels altres jugadors. En quant als jocs dinàmics la diferencia la trobem en que en el moment que un jugador decideix es possible que aquest ja conegui les decisions dels altres jugadors. També podem classificar aquests jocs entre aquells que son de suma zero, quan l'augment en el benefici d'un jugador implica una disminució en el benefici del segon jugador en la mateixa quantia, o de suma no nul·la, quan la suma del benefici dels jugadors únicament oscil·la en funció de les decisions d'ambdós jugadors.

Un dels casos més coneguts i importants entre els jocs no cooperatius es el dilema del presoner. En aquest cas, dos persones son arrestades i la policia els ofereix un tracte: si un confessa i l'altre no, el primer serà lliure mentre que l'altre serà condemnat a 6 anys; si tots dos confessen ambdós seran condemnats a 10 anys i si cap confessa no podran ser condemnats per falta de proves. Aquest exemple mostra com dos persones no cooperen (ja que busquen el seu benefici propi) fins i tot quan la cooperació els beneficia. També tenim el cas del Model Falcó – Colom o el cas de la Guerra de Sexes.

Un joc cooperatiu es aquell en que hi ha una utilitat o benefici infinitament divisible que assigna a cada coalició de jugadors una quantitat d'utilitat a través d'una solució. Un joc cooperatiu es un parell (N, v) on:

$N = \{1, 2, \dots, n\}$: El conjunt d'agents o jugadors

S, T, R : Els subconjunts de jugadors també anomenats coalicions

2^N : Tots els subconjunts de N

v : Funció característica (la utilitat que s'assigna a cada jugador)

Qualsevol joc cooperatiu es defineix com una funció que valora numèricament les diverses coalicions i que podem representar a través de:

$$v: 2^N \rightarrow R \quad \text{amb } v(\emptyset) = 0$$
$$S \rightarrow v(S)$$

En els jocs cooperatius, com hem dit anteriorment, podem diferenciar entre aquells amb utilitat transferible i aquells amb utilitat no transferible. En els jocs d'utilitat transferible els jugadors poden compensar-se mútuament mitjançant la transferència d'utilitat, a través d'un bé perfectament divisible com pot ser el diner. Aquesta capacitat de ser transferible es la que diferencia els jocs d'utilitat transferible dels jocs cooperatius d'utilitat no transferible.

Relacionant amb la teoria de jocs trobem els problemes de demanda dels que parlarem amb major detall en punts posteriors. Per aquest motiu, a continuació ens centrarem en els jocs cooperatius amb utilitat transferible

3.1. JOCS COOPERATIUS AMB UTILITAT TRANSFERIBLE

La teoria en jocs TU s'inicia gràcies a Shapley (1953) qui també introdueix el valor de Shapley (que veurem posteriorment).

Com ja em definit anteriorment, en els jocs cooperatius els jugadors tenen la possibilitat de formar coalicions o acords entre ells. A més, en el cas dels jocs cooperatius amb utilitat transferible el valor de cada coalició $v(S)$ és infinitament divisible entre tots els jugadors, el que ens dona una gran possibilitat de reparticions i, per tant, de solucions al joc.

Aquest tipus de jocs són un parell ordenat (N, v) on N es un conjunt finit de jugadors i v es la funció característica.

En els jocs amb utilitat transferible es modelitzen situacions on la cooperació beneficia als jugadors, en forma de més profit o de menys costos. Alguns exemples d'aquest tipus de jocs poden ser la construcció d'una autopista, despeses d'una comunitat de veïns o diferents partits que han de formar acords per governar.

Un altre exemple d'un joc cooperatiu amb utilitat transferible es el cas de tres municipis (A,B,C, situats en aquest ordre seguint el curs del riu) que volen construir una depuradora i decideixen cooperar. A més, el municipi B demanda la meitat d'aigua que A i C. Per tant, hem de trobar una solució tenint en compte les possibles cooperacions així com fets com que el poble B necessita menys capacitat.

3.2. PROPIETATS DELS JOCS COOPERATIUS

En els jocs podem distingir diversos tipus de jugadors. Entre ells tenim l'anomenat jugador fals (dummy) que no aporta a una coalició més del que pot obtenir ell individualment.

Un jugador es fals si $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(\{i\})$

També tenim els jugadors simètrics que realitzen aportacions equivalents a qualsevol coalició, és a dir, es podrien intercanviar sense efectes a la coalició.

Un parell de jugadors i, j es simètric si $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$

Per últim, aquells que no aporten cap benefici addicional a una coalició son els jugadors irrelevants o passius.

Un jugador i es irrellevant o passiu si $v(S) = v(S - \{i\}) + v(\{i\})$

Per altra banda, entre les propietats dels jocs cooperatius podem destacar:

Convexitat i concavitat

La propietat de convexitat es troba en els casos en que dues coalicions s'uneixen i el seu benefici conjunt (el benefici de la coalició) és major o igual a la suma del benefici de les coalicions per separat. Formalment,

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$$

En el cas contrari, quan el benefici del conjunt es menor o igual a la suma del benefici de les dues coalicions per separat, estarem parlant de concavitat. Formalment,

$$v(S) + v(T) \geq v(S \cup T) + v(S \cap T)$$

Superadditivitat

La superadditivitat implica que cap coalició és capaç d'aconseguir més del que poden aconseguir els demandats jugant tots aliats. És a dir, si dues coalicions que no tenen jugadors comuns s'uneixen en una nova coalició, el valor d'aquesta serà igual o superior a la suma dels seus beneficis individuals. Per tant, la unió de coalicions és beneficiosa.

Qualsevol $S, T \in 2^N$ tals que $S \cap T = \emptyset$ llavors $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$

Subadditivitat

Si la definició anterior es dona en sentit contrari estarem parlant d'un joc subadditiu. És a dir, dos coalicions sense jugadors comuns que juguen de manera individual obtindran un benefici superior o igual que el benefici de la coalició formada per aquestes dues coalicions.

$$S, T \in 2^N \text{ tals que } S \cap T = \emptyset \rightarrow v(S) + v(T) \geq v(S \cup T)$$

Additivitat

La propietat d'additivitat estableix que el pagament que obtenen les dues coalicions disjunts seria igual al pagament que obtindrien si el conjunt es separe.

$$S, T \in 2^N \text{ tals que } S \cap T = \emptyset \rightarrow v(S) + v(T) = v(S \cup T)$$

3.3. SOLUCIONS EN JOCS COOPERATIUS

En analitzar un joc cooperatiu, el problema consisteix en distribuir el resultat de la cooperació, $v(N)$, entre els jugadors. Aquesta distribució es representa mitjançant un vector $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^N$ on cada x representa la quantitat assignada a cada jugador. Utilitzem $X(S) = \sum_{i \in S} x_i$.

Algunes de les propietats més importants dels jocs cooperatius són:

Principi d'eficiència

El principi d'eficiència indica que la suma de les distribucions que reben tots els jugadors ha de ser igual al valor de la coalició total, es a dir,

$$x(N) = v(N)$$

Principi de racionalitat individual

Aquest principi indica que s'ha de distribuir a cada jugador com a mínim el seu valor individual $v(i)$. En altres paraules, cap jugador acceptarà menys del que obtindria per si mateix, sense aliar-se amb ningú.

El conjunt de distribucions que satisfan aquesta condició s'anomena conjunt d'imputacions. A més, si el conjunt d'imputacions del joc és no buit ens referiríem a una altre propietat, estaríem parlant d'un joc essencial.

Principi de racionalitat coalicional

Aquest principi estipula que a cada coalició s'ha d'assignar com a mínim allò que la coalició es pot assegurar sense la col·laboració de la resta de jugadors. Per tant, similar a la racionalitat individual però parlant sobre coalicions

Podem estudiar el concepte de solució des de dos punts de vista: solucions de tipus conjunt i solucions puntuals. La característica diferenciadora és que les solucions de tipus conjunt poden resultar en un número infinit, un número finit o cap repartiment mentre que en les solucions puntuals el repartiment sempre és únic (si n'hi ha).

A continuació veurem una de les solucions de tipus conjunt més important per un joc cooperatiu:

El concepte de core va ser desenvolupat per Gillies i Shapley en els anys cinquanta. Aquests dos economistes van definir el core com aquell conjunt de pagament eficients i individualment racionals on cada coalició rep almenys el seu valor, és a dir, no deixa cap coalició en una posició que pugui millorar el seu benefici. De manera formal, donat

un joc cooperatiu amb funció característica v , i conjunt de jugadors $N = \{1, 2, \dots, n\}$, el core de joc, que denotarem per $core(v)$ es:

$$core(v) = \left\{ x \in R^n \mid x(N) = v(N) \text{ i } \sum x_i \geq v(S) \text{ per a tot } S \in N \right\}$$

El core aporta assignacions que constituïran acords estables degut al fet que cap coalició podrà impugnar els acords, és a dir, cap coalició aconseguirà per si mateix més del que la coalició li pot aportar.

Algunes de les propietats més importants del core són que és tancat, acotat i convex. A aquestes tres propietats afegim les ja mencionades anteriorment: principi d'eficiència, racionalitat individual i racionalitat coalicional.

Per altra banda, un joc que tingui core serà menys conflictiu ja que tota demanda cooperativa pot ser proporcionada en contraposició a un joc sense core que deixarà com a mínim una coalició no satisfeta. En conclusió, l'existència de core, la seva mida i forma així com altres característiques són essencials per a l'anàlisi d'un joc. El principal inconvenient que trobem en el core és que pot ser massa gran o en altres ocasions pot ser un conjunt buit. Quan ens referim a que pot ser massa gran és degut al fet que el core és un conjunt convex, és a dir, si conté més d'un punt en conté infinits (conté qualsevol segment que tingui per extrems elements del core).

Per acabar de comprendre el concepte de core exposarem un exemple:

Imaginem una finca valorada pel seu propietari en 350.000€ (jugador 3), per la qual un empresari li ofereix 700.000€ (jugador 1) per utilitzar-la com a polígon industrial mentre que un altre empresari li ofereix 775.000€ (jugador 2) per construir una zona residencial. És a dir,

$$\begin{aligned} v(1) &= v(2) = v(1,2) = 0 \\ v(3) &= 350, v(1,3) = 700, v(2,3) = 775, v(1,2,3) = 775 \end{aligned}$$

Com s'ha mencionat anteriorment els punts del core són aquells que compleixen el principi d'eficiència i a més verifiquen les restriccions de racionalitat individual i coalicional. Per tant, formaran part del core els punts $(x_1 + x_2 + x_3)$ que compleixin:

- El principi d'eficiència , és a dir, $x_1 + x_2 + x_3 = 775$
- La racionalitat individual, és a dir, $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 350$
- La racionalitat coalicional, és a dir, $x_1 + x_2 \geq 0, x_1 + x_3 \geq 700, x_2 + x_3 \geq 775$

A partir d'aquí procedirem a aïllar i trobar la solució del joc.

Les distribucions $(x_1 + x_2 + x_3)$ que compleixin el principi d'eficiència però no es trobin dintre del core son inacceptables ja que algunes coalicions podrien obtindre uns resultats millors als que aconseguirien a través d'aquesta assignació. Per exemple, l'assignació (50,75,650) no seria acceptada per la coalició formada per 2 i 3 ja que per ells sols obtindrien 775 però a través d'aquesta coalició només obtenen $75+650 = 725$.

Finalment, veurem algunes de les solucions puntuals:

El nucleolus no presenta l'inconvenient anteriorment mencionat en referència al core ja que el conjunt que trobem a través d'aquesta solució es únic (sempre que sigui no buit).

El nucleolus va ser introduït per Schmeidler (1969), la seva idea subjacent consisteix a observar les queixes que presenten les coalicions quan es proposa una distribució del valor de la coalició total, és a dir, un vector eficient. L'excés o queixa es la mesura del grau d'insatisfacció d'una coalició (S) amb la distribució. A mesura que l'excés augmenta el grau d'insatisfacció també es veu incrementant. Donat un joc cooperatiu (N,v) es defineix excés d'una coalició S respecte una distribució x com:

$$e(S,x) = v(S) - x(S)$$

Per tant, l'excés es la diferencia entre el valor de la coalició S i el valor que obté la coalició S a través de l'assignació x. Si aquest valor es positiu significarà que la coalició obté més per ella sola que a través de l'assignació i, per això, ens trobarem una coalició insatisfeta.

Aquests excessos s'ordenen de manera decreixent i donen un vector $\theta(x) \in R^{2^n}$. El vector d'excessos serà:

$$\theta(x) = (e(S,x))_{S \subseteq N}$$

Una vegada coneixem aquest concepte podem definir el nucleolus d'un joc (N, v) com el conjunt N format per les distribucions que minimitzen el grau d'insatisfacció sempre que formin part del conjunt d'imputacions. Podríem afirmar que el nucleolus dóna prioritat a les coalicions més inestables.

A més, sempre que (N, v) sigui un joc essencial, és a dir, que el conjunt d'imputacions no sigui buit, el nucleolus existeix i, a més, és únic.

Per concloure amb el nucleolus, detallarem els punts més importants sobre aquest:

1. Si el core del joc es un conjunt no buit, llavors l'únic element del nucleolus forma part del core. Aquest punt fa que el nucleolus es pugui diferenciar d'altres solucions (com per exemple, del valor de Shapley)
2. En cas de que el core sigui unitari llavors el core es igual al nucleolus.
3. Sigui el nucleolus d'un joc $N(N, v) = (N_1, N_2, \dots, N_n)$ amb jugadors i, j simètrics llavors tenim que la seva assignació a través del nucleolus serà igual ($N_i = N_j$)
4. Sigui el nucleolus d'un joc $N(N, v) = (N_1, N_2, \dots, N_n)$ amb jugadors $i \in j$ passiu llavors tenim que la seva assignació a través del nucleolus serà igual $N_i = v(\{j\})$

Per últim, veurem el valor de Shapley. El valor de Shapley és el valor que cadascun dels jugadors pot esperar o la mesura, a priori, de la seva contribució al joc. Formalment, donat un joc cooperatiu (N, v) definim Shapley com:

$$\phi(v) = \gamma(S) \cdot [v(S \cup \{i\}) - v(S)], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{On } \gamma(S) = \frac{s!(n-s-1)!}{n!}$$

La fórmula anterior ens dóna la regla per assignar pagaments a cadascun dels jugadors. Fixat un jugador i i una coalició S on el jugador i no hi és, $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ representa la contribució marginal del jugador a la coalició $S \cup \{i\}$.

El valor de Shapley busca una distribució que compleixi una sèrie de criteris (axiomes) que s'estableixen prèviament. Seguint el teorema de Shapley (1953) veurem com a

partir d'aquests quatre axiomes podem arribar a trobar una única assignació de pagament entre els jugadors, aquesta assignació la denominem valor de Shapley.

Aquests quatre axiomes són:

1. El primer axioma és l'eficiència. És a dir, la funció d'assignació $\varphi(v)$ ha de distribuir $v(N)$ entre els jugadors. Formalment:

$$\sum \varphi(v) = v(N)$$

2. La simetria és el segon axioma, qualsevol parell de jugadors serà simètric si un intercanvi dels jugadors dintre de la coalició no té efecte sobre la pròpia coalició, és a dir, realitzen aportacions equivalents a qualsevol coalició.
3. El tercer axioma defineix que els jugadors passius (jugadors que no aporten un benefici addicional a una coalició) no han de rebre cap pagament addicional
4. Per últim, l'additivitat afirma que la funció φ no s'ha de modificar davant una descomposició del joc. Podem definir l'additivitat com:

$$\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$$

El valor de Shapley és l'única assignació que verifica els quatre axiomes. A més, el valor de Shapley es pot interpretar com la contribució marginal esperada de cada jugador al entrar en una coalició considerant totes les diverses possibilitats d'ordre d'entrada i, per tal de considerar tots els ordres de manera igualitària, fem la mitjana entre tots ells.

4. PROBLEMES DE DEMANDA

Un problema de demanda també conegut com problema de distribució presenta la dificultat de dividir la quantitat disponible d'un recurs (E) definint regles que segueixin criteris ètics i operacionals i que, a més, aconseguixi que els demandants quedin, en la mesura possible, satisfets. El problema en aquest tipus de jocs es presenta quan el valor es insuficient per cobrir la suma de les demandes dels jugadors.

Definim el problema de demanda (N, d, E) on:

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ definit com *el conjunt de jugadors o demandants*

$d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ definit com *el vector de demandes, $d \in \mathbb{R}_+^n$*

E definit com *la quantitat disponible per repartir, $E > 0$*

$$D = d_1 + d_2 + \dots + d_n \in \mathbb{R}$$

Però quan la quantitat a repartir (E) no es suficient per cobrir les demandes sorgeix el problema. És a dir,

$$E < d_1 + d_2 + \dots + d_n = D$$

Per cada problema de demanda es pot definir un joc cooperatiu (N, v) . On:

$$N = \{1, 2, \dots, n\}$$

$v =$ *funció característica*

$$v : 2^N \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } v(\emptyset) = 0$$

$$v(S) = \max\{0, E - d(N/S)\} \text{ per tot } S \in N$$

En el següent apartat podrem veure diferents regles per resoldre aquest tipus de problemes.

Alguns exemples quotidians de problemes de bancarrota poden ser:

- Una empresa que entra en concurs de creditors i, per tant, ha de repartir l'actiu disponible entre els creditors. En aquest cas la demanda dels creditors sol superar en gran mesura l'actiu disponible per repartir.
- Retallades pressupostaries com pot ser l'exemple de les retallades en sanitat on les diferents partides demandaran com a mínim el que van rebre l'any anterior.
- Finançament de medicaments

4.1. SELECCIÓ DE LA REGLA DE REPARTIMENT

Determinar la regla de repartiment que seguirem per trobar la solució al problema de demanda és el primer pas i un dels més importants. La regla de repartiment escollida determinarà la quantitat assignada a cada jugador així, depenent de la regla triada aquesta quantitat assignada pot variar en gran mesura. Per tant, els demandants tindran preferències entre les possibles regles i tendiran a realitzar influència ja que d'aquesta selecció dependrà el seu propi benefici.

Per realitzar aquesta tria haurem de tindre en compte diversos factors. El primer d'ells serà veure la situació en que ens trobem. Per exemple, en la situació d'una empresa en fallida repartir la mateixa quantitat a tots els creditors pot no ser just ja que s'hauria de tindre en compte el capital que ha invertit cadascun d'ells en l'empresa. Un altre exemple seria el pressupost en sanitat o el pressupost destinant a la investigació, en aquests casos també podríem considerar que no es just assignar la mateixa quantitat a tots els implicats ja que algunes partides o investigacions poden ser més necessàries o requerir d'un major finançament.

Un altre factor a tindre en compte és que al escollir una regla de repartiment estarem, implícitament, acceptant alguns principis o propietats mentre que en rebutjarem d'altres. Per tant, hem de saber quins dels principis són més desitjables o s'adeqüen millor a les preferències dels jugadors. Aquí ens n'adonem de com els interessats participen en la selecció i exerceixen influència en ella. En el procés de selecció també és important comptar amb la personalitat d'un assessor extern que sigui imparcial davant aquesta decisió.

El procés a seguir per decidir quina regla de repartiment és la més adequada seria el següent:

Inicialment hauríem de realitzar una selecció prèvia entre totes les possibles regles bàsiques de repartiment. A través d'aquesta selecció nosaltres hem triat les següents regles: proporcional, proporcional ajustada, guanys igualitaris restringits, pèrdues igualitàries restringides i Talmud. A continuació es important triar quines prioritats son les més favorables i importants alhora de realitzar l'assignació. Com bé hem mencionat anteriorment en aquest moment els jugadors implicats exerciran influència. Per tant, el següent pas seria tindre en compte la opinió dels jugadors. A través d'aquest procés determinarem quin és l'ordre de prioritats a seguir per realitzar la selecció de la regla de repartiment. Les propietats seran l'únic element que tindrem en compte, en aquest moment, per realitzar l'elecció. Per últim, ens restarà veure quina regla compleix la propietat més desitjada, en el cas que aquesta propietat es repetís en més d'una regla tindrem en compte la següent propietat més desitjada i seguirem el procés fins que només quedi una regla de repartiment possible.

4.2. REGLES DE DEMANDA

Una vegada presentats els problemes de demanda procedirem a definir algunes de les possibles regles que s'apliquen a un problema de demanda per trobar una solució o repartiment. Una regla es pot definir com l'assignació d'una quantitat a cada jugador sempre tenint en compte la quantitat reclamada.

Abans de tot, definirem alguns conceptes bàsics del que anomenem solució:

1. Una solució mai es tractarà d'una imposició, simplement serà una recomanació per distribuir E
2. En qualsevol solució és important posar de manifest els principis que sustenten aquesta solució

Alguns d'aquests principis que s'apliquen per qualsevol regla son:

- Cap jugador rebrà més del que demanda ni una quantitat negativa.
- La quantitat disponible E s'ha de repartir en la seva totalitat, seguint el principi d'eficiència.

Només si es compleixen aquestes dues propietats estarem parlant d'una regla de repartiment. Per tant, formalment una regla de repartiment es:

$$x = F(N, d, E) \in R^n \quad \text{tal que} \quad d_i \geq x_i \geq 0 \quad i \quad \sum x_i = E$$

A continuació presentem algunes de les regles de repartiment més importants i conegudes. Al escollir alguna d'aquestes regles estarem acceptant alguns principis implícits així com rebutjant d'altres. Tot i això, no podem afirmar que una regla sigui la més favorable ja que dependrà de la situació en que el joc es desenvolupi. Per que una regla sigui la idònia ha d'aconseguir adaptar-se a les propietats característiques del joc.

4.2.1. REGLA PROPORCIONAL (P)

La regla proporcional assigna al demandant i la quantitat de $E \frac{d_i}{D}$. Per tant, cada demandant obté una fracció de la quantitat a repartir (E) que es proporcional a la seva participació en les demandes totals, és a dir, la regla proporcional distribueix el pressupost de manera proporcional a les reclamacions del jugador. La regla proporcional assigna:

$$P(N, d, E) = \lambda d \quad \text{on} \quad \lambda = E/D$$

Per comprendre millor la regla proporcional veurem un exemple simple. Imaginem una quantitat total a repartir de 900 entre tres jugadors que demanen: $d_1 = 750, d_2 = 500, d_3 = 250$. Amb aquestes dades trobem que $\lambda = \frac{900}{750+500+250} = 0,6$. Dividirem la quantitat total a repartir (900) entre la suma de les demandes dels jugadors (800+400+300) trobant que $\lambda=0,6$. Aquesta solució s'interpreta com que el pressupost cobreix el 60% de les reclamacions. Finalment, les assignacions seran: $P(900, (750, 500, 250)) = 0,6(750, 500, 250) = (450, 300, 150)$. En conclusió, a través d'una regla proporcional en aquest cas el primer jugador obtindria 450, el segon 300 i el últim 150.

En aquest cas estem tenint en compte diversos factors, des del número de jugadors fins les seves quantitats demandades a la quantitat total a repartir. Però es justa aquesta repartició? La resposta a aquesta pregunta sempre dependrà de la situació que es planteja.

4.2.2. REGLA PROPORCIONAL AJUSTADA (AP)

La regla proporcional ajustada realitza l'assignació seguint unes fases determinades. Inicialment, la regla assigna a cada agent la proporció de la quantitat a repartir que queda disponible suposant que la resta de jugadors han rebut la totalitat de la seva demanda, en el cas que no quedes res per repartir se li assignarà un pagament nul. Cada demandant rebrà el que denominarem com els mínims drets (m_i).

Formalment, els drets mínims d'un jugador $m_i(N, d, E)$ venen donats per:

$$m_i(N, d, E) = \max\{E - d(N - i), 0\}$$

Per tant, podem dir que la regla proporcional ajustada assigna, inicialment, a cada jugador una quantitat inicial m_i , els seus drets mínims, de tal manera que una vegada distribuïts aquests ens restarà: $E - \sum m_i$. A més, les demandes inicials es reduiran a $d_i - m_i(N, d, E)$. Però, si la demanda d'algun dels jugadors es més gran que la quantitat restant a repartir considerarem que aquest agent demanda el mínim entre $d_i - m_i$ i la quantitat a repartir pendent. De tal manera que el nou vector de demandes serà:

$$d_i = \min\{d_i - m_i, E - m(N)\}$$

Finalment, el quantitat a repartir restant es repartirà de forma proporcional entre els agents. Formalment la regla proporcional ajustada ve donada per:

$$AP(N, E, d) = m_i(N, d, E) + P_i(E - m(N); (\min\{d_i - m_i(N, d, E), E - m(N)\}))$$

Per acabar de comprendre la regla AP solucionarem l'exemple anterior. A través de la primera assignació els agents rebran:

$$m_1 = \max\{0, E - d_2 - d_3\} = \max\{0, 900 - 750\} = 150$$

$$m_2 = \max\{0, E - d_1 - d_3\} = \max\{0, 900 - 1000\} = 0$$

$$m_3 = \max\{0, E - d_1 - d_2\} = \max\{0, 900 - 1250\} = 0$$

Després d'aquesta primera assignació, les noves demandes seran:

$$d_1 = \min\{d_1 - m_1, E - m(N)\} = \min\{600, 750\} = 600$$

$$d_2 = \min\{d_2 - m_2, E - m(N)\} = \min\{500, 750\} = 500$$

$$d_3 = \min\{d_3 - m_3, E - m(N)\} = \min\{250, 750\} = 250$$

La quantitat que ens quedarà per repartir serà igual a $E - m(N) = 900 - 150 = 750$

que repartirem de manera proporcional entre els tres jugadors $\lambda = \frac{750}{600+500+250} = 0,55$

De manera que la segona assignació serà igual a 333,33 ; 277,77 i 138,88 respectivament. Finalment l'assignació total serà:

- $AP_1(900, (750, 500, 250)) = 483,33$
- $AP_2(900, (750, 500, 250)) = 277,78$
- $AP_3(900, (750, 500, 250)) = 138,89$

4.2.3. REGLA DE GUANYES IGUALITARIS RESTRINGITS (CONSTRAINED EQUAL AWARDS, CEA)

Aquesta regla atorga la mateixa quantitat a tots els demandants sempre sense que cap d'ells obtingui més de la seva demanda individual. Els jugadors rebran E/n sempre que $\frac{E}{n} \leq d_i$, en cas contrari rebran la seva demanda.

La quantitat que resta després de realitzar aquesta primera operació es repartirà seguint la mateixa regla. Seguirem aquest procés fins que la totalitat del valor quedi repartit entre els demandants.

Per tant, podem observar com aquesta regla atorga prioritat a les demandes petites.

Formalment, donat un problema (N, E, d) la regla CEA serà:

$$CEA(N, E, d) = \min\{\lambda, d_i\} \quad \text{on} \quad \lambda \quad \text{tal que} \quad \sum \min\{\lambda, d_i\} = E$$

Seguint l'exemple anterior, inicialment començarem repartint la mateixa quantitat als tres jugadors ($900/3=300$) però el tercer demandant estaria obtenint més del que ell demanda (250). Per tant, repartirem 250 (que es la demanda mínima) a cada jugador. Una vegada feta aquesta primera distribució ens restarà per repartir $900 - (250 * 3) = 150$, però aquesta quantitat no la repartirem entre els tres jugadors ja que el jugador tres no pot rebre més quantitat. Per tant, en aquests cas $\lambda = 325 \left(\frac{250}{2} + 250 \right)$

Finalment l'assignació de cada jugador serà:

- $CEA_1(900, (750, 500, 250)) = \min\{325, 750\} = 325$
- $CEA_2(900, (750, 500, 250)) = \min\{325, 500\} = 325$
- $CEA_3(900, (750, 500, 250)) = \min\{325, 250\} = 250$

4.2.4. REGLA DE PÈRDUES IGUALITÀRIES RESTRINGIDES (CONSTRAINT EQUAL LOSSES, CEL)

A diferència de la regla de guanys igualitaris aquesta regla s'enfoca en les pèrdues, que han de ser iguals per a cada demandant. Per tant, aquesta regla dona prioritat als agents amb una demanda més elevada ja que rebran la seva quantitat en primer lloc (abans que aquells que demandin una quantitat més petita).

Aquesta regla es d'utilitat en els casos que les demandes es trobin directament relacionades amb necessitats, com per exemple, la despesa en sanitat.

El procés que seguirem per aplicar aquesta regla a un problema de demanda es el següent:

1. Sumarem totes les demandes (D)
2. Trobarem la quantitat que falta per cobrir la demanda total, és a dir, estarem trobant la pèrdua total (D-E)
3. La quantitat serà dividida en parts iguals (D-E)/n
4. De tal manera que assignarem a cada demandant:

$$d_1 - \frac{D - E}{n}$$

En cas de que el resultat de l'operació sigui positiu assignarem la quantitat obtinguda, en cas contrari (el resultat de l'operació sigui negatiu) assignarem 0 a aquest demandant ja que la quantitat a repartir mai pot ser negativa.

5. Repetirem el mateix procediment amb la part restant del valor (E).

Formalment, donat un problema (N, E, d) la regla de repartiment de pèrdues igualitàries és:

$$CEL_i(N, E, d) = \max\{0, d_i - \mu\} \quad \text{on} \quad \mu \quad \text{és la solució de} \quad \sum_{i \in N} \max\{0, d_i - \mu\} = E$$

A continuació procedirem a solucionar l'exemple amb aquesta regla de repartiment:

La suma de les demandes és 1500 i la pèrdua total serà $1500 - 900 = 600$. Per tant

$\mu = \frac{600}{3} = 200$. Finalment, l'assignació serà:

- $CEL_1(900, (750, 500, 250)) = \max\{0, 550\} = 550$
- $CEL_2(900, (750, 500, 250)) = \max\{0, 300\} = 300$
- $CEL_3(900, (750, 500, 250)) = \max\{0, 50\} = 50$

4.2.5. REGLA DEL TALMUD (T)

La regla del Talmud proposa que cap agent obtingui més de la meitat de la seva reclamació en cas que el pressupost sigui inferior a la meitat de la suma de les reclamacions i que no perdi més de la meitat de la seva reclamació en cas que el pressupost sigui superior a la meitat de la reclamació agregada. Aquesta teoria va ser formulada per Aumann i Maschler en l'any 1985.

Donat un problema (E, d) la regla de repartiment del Talmud (T) assigna:

$$T_i(E, d) = \begin{cases} \min\{d_i/2, \lambda\} & \text{si} \quad E \leq D/2 \\ \max\{d_i/2, d_i - \mu\} & \text{si} \quad E \geq D/2 \end{cases}$$

on λ és la solució de $\min\{\lambda, d_i/2\} = E$ a través de un repartiment per la regla CEA

on μ és la solució de $\max\{d_i/2, d_i - \mu\} = E$ a través de un repartiment per la regla CEL

Seguint amb l'exemple anterior la suma de les reclamacions es 1500 i el pressupost 900, per tant, el pressupost es superior a la meitat de la reclamació agregada. Seguint aquesta condició cap agent ha de perdre més de la meitat de la seva reclamació. Determinem que $\mu = 237,5$.

Les assignacions dels tres jugadors seran:

- $T_1(900, (750, 500, 250)) = \max\left\{\frac{750}{2}, 750 - 237,5\right\} = 512,5$
- $T_2(900, (750, 500, 250)) = \max\left\{\frac{500}{2}, 500 - 237,5\right\} = 262,5$
- $T_3(900, (750, 500, 250)) = \max\left\{\frac{250}{2}, 250 - 237,5\right\} = 125$

4.3. PROPIETATS DE LES REGLES DE REPARTIMENT

A continuació descriurem les propietats de les regles per les quals els jugadors es decantaran i que, per tant, determinaran la regla de repartiment preferible que serà usada en el problema de demanda. Les propietats que veurem a continuació caracteritzen les regles comentades prèviament.

Simetria o tractament igualitari

Seguint aquesta propietat dos jugadors amb idèntiques reclamacions tindran una mateixa quantitat assignada. Formalment,

$$d_i = d_j \rightarrow R_i(E, d) = R_j(E, d)$$

Per tant, amb aquesta propietat es vol expressar que dos jugadors seran iguals en el moment de l'assignació si les seves reclamacions son iguals.

Independència d'escala

Aquesta propietat afirma que les assignacions no han de dependre de la unitat de mesura, és a dir:

$$R(\omega E, \omega d) = \omega R(E, d) \quad \text{per qualsevol } \omega > 0$$

Per exemple, el canvi de divisa no ha d'afectar en l'assignació. Des d'un punt de vista matemàtic estaríem parlant d'homogeneïtat.

Composició a l'alça

La propietat de composició al alça ens indica que en cas que la quantitat a repartir augmentés, la quantitat assignada a cada jugador també hauria d'augmentar. I no tan sols això, sinó que la quantitat excedent (quantitat en que ha augmentat E) s'hauria de repartir seguint el procediment inicial. Formalment per a cada (E, d) i qualsevol $E' > E$

$$R(E', d) = R(E, d) + R(E' - E, d - R(E, d))$$

A més, la propietat de composició al alça garanteix que qualsevol problema pot ser resolt com la suma de dos subproblemes de bancarrota (el primer que correspon a les reclamacions originals i el segon que correspon al pressupost restant).

Composició a la baixa

Aquesta propietat es similar a la anterior però en sentit contrari. En cas que la quantitat a repartir disminuís les reassignacions s'haurien de dur a terme seguint el mateix procediment. És a dir, tornarem a repartir agafant com a reclamacions les assignacions inicials. Formalment per cada (E, d) i qualsevol $E' > E$

$$R(E', d) = R(E'; R(E, d))$$

Consistència

La propietat de consistència estipula que la quantitat assignada a cada un dels jugadors d'un subgrup ha de ser la mateixa que la que obtindria si es realitza un nou repartiment per aquest subgrup, amb les mateixes reclamacions, i considerant com E la suma de les assignacions que obtindria en el repartiment general. És a dir, si es reparteix la quantitat assignada a la coalició entre els jugadors que la conformen (seguint el mateix criteri que la assignació original) obtindrem la mateixa assignació.

Si aquesta propietat es coneguda per tots els jugadors aquests no tindran incentius per reclamar un canvi d'assignacions ja que aquests no variaran.

Autodualitat

La propietat d'autodualitat afirma que les assignacions en una solució han de ser les mateixes tant si es divideix la quantitat disponible (pressupost, E) com si es reparteix la quantitat que falta per cobrir totes les reclamacions (dèficit, $D-E$)

Exempció

La propietat d'exempció exigeix que aquelles reclamacions que no superin unes quantitat mínimes han de ser cobertes íntegrament.

$$d_i \leq \alpha \rightarrow F_i(E, d) = d_i$$

Aquest llindar mínim varia molt d'un autor a un altre, tenint en compte a Villar (2005) considerem que

$$\alpha = E/n$$

Per tant, a través d'aquest principi s'assigna una major prioritat als jugadors amb demandes petites.

Exclusió

En el cas de l'exclusió, les reclamacions que no arribin a una quantitat mínima seran directament rebutjades.

$$d_i \geq \alpha \rightarrow F_i(E, d) = 0$$

Seguint l'autor de la propietat d'exempció, Villar, es considera com a llindar el dèficit per càpita, és a dir,

$$\alpha = d - E * n$$

Però, podríem considerar moltes altres formes d'arribar a aquest llindar.

Per exemple, en el cas del finançament de medicaments una unitat familiar pot assumir el cost de tractaments menys prioritaris i que comportin un menor cost i, per altra banda, medicament més prioritari i amb un cost elevat seran finançats.

Regressivitat

El principi de regressivitat és contrari al de progressivitat de manera que atorga quantitats menors a aquells jugadors amb demandes més elevades i quantitats majors a jugadors amb demandes inferiors.

$$\frac{R_i(E, d)}{d_i} \geq \frac{R_j(E, d)}{d_j} \quad \text{tals que } 0 < d_i \leq d_j$$

Progressivitat

El principi de progressivitat atorga prioritat i, per tant, proporcions majors als jugadors amb demandes més elevades i, per altra banda, proporcions menors a aquells jugadors amb una demanda menor.

$$\frac{R_i(E, d)}{d_i} \leq \frac{R_j(E, d)}{d_j} \quad \text{tals que } 0 < d_i \leq d_j$$

Per acabar amb la qüestió de regles de repartiment i les seves propietats realitzarem una taula resum amb les propietats que compleixen cadascuna de les regles.

Taula 1. Resum de propietats de les regles P, AP, CEA, CEL i T

	P	AP	CEA	CEL	Talmud
Simetria	SI	SI	SI	SI	SI
Independència d'escala	SI	SI	SI	SI	SI
Composició al alça	SI	NO	SI	SI	NO
Composició a la baixa	SI	NO	SI	SI	NO
Consistència	SI	NO	SI	SI	SI
Autodualitat	SI	SI	NO	NO	SI
Exempció	NO	NO	SI	NO	NO
Exclusió	NO	NO	NO	SI	NO
Regressivitat	SI	NO	NO	NO	NO
Progressivitat	SI	NO	NO	NO	NO

5. APLICACIÓ D'UN CAS REAL

A continuació, per posar en pràctica la teoria comentada en aquest treball, analitzarem un cas real associat a un problema de demanda.

5.1. DESCRIPCIÓ DE LA PROBLEMÀTICA

El cas a solucionar es basa en les ajudes que la Generalitat de Catalunya presta a les diverses Universitats Públiques Catalanes. Concretament les diverses universitats que obtenen finançament per part de la Generalitat son:

- Universitat de Barcelona (UB)
- Universitat Autònoma de Barcelona (UAB)
- Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)
- Universitat Rovira i Virgili (URV)
- Universitat Pompeu Fabra (UPF)
- Universitat de Girona (UdG)
- Universitat de Lleida (UdL)

Cada any la Generalitat disposa d'un pressupost limitat per destinar al finançament de les universitats, aquest pressupost és molt variable d'un any al altre depenent de la situació econòmica així com de les necessitats de les universitats i de les necessitats dels altres departaments demandants tals com el departament de sanitat, d'agricultura o d'empresa. El repartiment pot assignar una quantitat més o menys desitjada per les diferents universitats però el problema esdevé quan les quantitats que els agents o universitats demanden son superiors a la quantitat que la generalitat pot destinar a finançar-les.

Per aquest motiu, quan el pressupost d'un any a l'altre es redueix les institucions demandaran com a mínim la quantitat que van rebre l'any anterior, però això ja no és possible d'obtenir. En aquest moment ens trobem amb un problema de demanda.

En el cas analitzat la reducció mencionada es produeix de l'any 2010 al 2014. Aquesta reducció va ser deguda a la forta crisi que el país afrontava en aquella època.

Les dades que seran analitzades han estat extretes directament de la pàgina web de la Generalitat de Catalunya, concretament dels pressupostos anuals. Com hem mencionat anteriorment el problema el trobem en la reducció que van experimentar els pressupostos en el període de 2010 a 2014. A continuació veiem com es va repartir aquest pressupost en els dos anys mencionats:

Taula 2. Pressupostos de la Generalitat l'any 2010 i 2014

	Any 2010	Any 2014
Universitat de Barcelona	233.805.259,00 €	176.950.272,00 €
Universitat Autònoma de Barcelona	171.342.514,00 €	129.867.495,00 €
Universitat Politècnica de Catalunya	150.529.585,00 €	113.226.651,00 €
Universitat Rovira i Virgili	65.115.607,00 €	49.631.177,00 €
Universitat Pompeu Fabra	53.227.318,00 €	40.692.993,00 €
Universitat de Girona	50.096.538,00 €	37.777.438,00 €
Universitat de Lleida	44.426.494,00 €	33.750.907,00 €

Pressupost total: 768.543.315,00 € 581.896.933,00 €

Com podem veure en les taules l'any 2010 el pressupost era de 768.543.315 € mentre que l'any 2014 aquest mateix pressupost era de només 581.896.933€, el que implica una reducció de gairebé un 25%.

Una vegada definida a trets generals la problemàtica que analitzarem passarem a formalitzar el problema. Com ja hem mencionat anteriorment les universitats passaran a ser els jugadors en el nostre problema. Per tant, $N=7$ que numerarem seguint el següent ordre:

1. Universitat de Barcelona
2. Universitat Autònoma de Barcelona
3. Universitat Politècnica de Catalunya
4. Universitat Rovira i Virgili
5. Universitat Pompeu Fabra
6. Universitat de Girona
7. Universitat de Lleida

Per altra banda, les demandes dels jugadors vindran determinades pel que van rebre l'any 2010 que es el mínim que esperen rebre en els anys posteriors.

$$d_1 = 233.805.259,00$$

$$d_2 = 171.342.514,00$$

$$d_3 = 150.529.585,00$$

$$d_4 = 65.115.607,00$$

$$d_5 = 53.227.318,00$$

$$d_6 = 50.096.538,00$$

$$d_7 = 44.426.494,00$$

La demanda total serà de $\sum_{i=1}^7 d_i = 768.543.315,00$. Per últim, E el valor total a repartir és el pressupost disponible de l'any 2014:

$$E = 581.896.933,00$$

En resum, aquest és un problema de demanda (N, E, d) on N es el conjunt de les diverses universitats públiques catalanes que obtenen finançament de la Generalitat.

E és la quantitat disponible per dividir entre els agents, concretament, el pressupost de la generalitat per l'any 2014 i el vector de les demandes d és la quantitat que aquests mateixos agents van rebre l'any 2010.

5.2. RESOLUCIÓ DEL CAS

Una vegada plantejat el problema procedirem a resoldre'l a través de les solucions que hem comentat anteriorment, concretament aquestes son: regla proporcional, regla proporcional ajustada, regla de guanys igualitaris restringits, regla de pèrdues igualitàries restringides i regla del Talmud. Seguint aquestes solucions dividirem aquest apartat.

5.2.1. REGLA PROPORCIONAL

Començarem a solucionar aquesta problemàtica a través de la regla proporcional. Abans d'iniciar la resolució de la problemàtica detallarem novament les demandes:

$$d_1 = 233.805.259,00; \quad d_2 = 171.342.514,00; \quad d_3 = 150.529.585,00; \quad d_4 = 65.115.607,00; \quad d_5 = 53.227.318,00; \quad d_6 = 50.096.538,00; \quad d_7 = 44.426.494,00$$

Considerant $E = 581.896.933,00$ € i les demandes mencionades anteriorment trobem que el valor λ és igual a 0,757, és a dir, que el pressupost cobreix el 75,7% de les demandes totals dels agents.

El valor λ es calcula a través de la divisió de la quantitat a repartir entre la demanda total:

$$\lambda = \frac{581.896.933}{768.543.315} = 0,757 = 75,7\%$$

Una vegada trobat aquest valor les assignacions es calcularan a través de la multiplicació del valor λ per les demandes de cada un dels agents.

Taula 3. Assignacions seguint la Regla Proporcional

Universitat de Barcelona	177.023.936,68 €
Universitat Autònoma de Barcelona	129.730.727,52 €
Universitat Politècnica de Catalunya	113.972.371,01 €
Universitat Rovira i Virgili	49.301.804,16 €
Universitat Pompeu Fabra	40.300.673,35 €
Universitat de Girona	37.930.226,24 €
Universitat de Lleida	33.637.194,02 €

Assignació total: 581.896.933,00 €

En la taula següent podrem observar la diferència entre el valor que demanen cada un dels jugadors i el valor que se'ls hi acaba assignant així com el percentatge que aquest obté sobre la seva demanda individual.

Taula 4. Pèrdues dels agents seguint la regla P i el seu percentatge respecte les demandes

	Pèrdues	% s/d
Universitat de Barcelona	56.781.322,32 €	24,29%
Universitat Autònoma de Barcelona	41.611.786,48 €	24,29%
Universitat Politècnica de Catalunya	36.557.213,99 €	24,29%
Universitat Rovira i Virgili	15.813.802,84 €	24,29%
Universitat Pompeu Fabra	12.926.644,65 €	24,29%
Universitat de Girona	12.166.311,76 €	24,29%
Universitat de Lleida	10.789.299,98 €	24,29%

Si ens fixem amb la diferència entre el que demanda cada un dels agents i el que obté a través d'aquesta primera assignació trobarem valors més grans per aquells amb demandes més grans i valors més petits per aquells amb demandes més petites. Però, si busquem la proporció d'aquesta diferència amb el que demanen en tots els casos trobarem la mateixa solució, 24,29%, dit d'un altre manera $1 - \lambda$.

5.2.2. REGLA PROPORCIONAL AJUSTADA

Com hem vist en punts anterior per resoldre un joc a través de la regla proporcional ajustada hem de seguir diversos passos. Abans de tot recordarem quines son les demandes dels diferents agents:

$$d_1 = 233.805.259,00; \quad d_2 = 171.342.514,00; \quad d_3 = 150.529.585,00; \quad d_4 = 65.115.607,00; \quad d_5 = 53.227.318,00; \quad d_6 = 50.096.538,00; \quad d_7 = 44.426.494,00$$

Començarem per calcular l'assignació dels drets mínims.

$$m_1 = \max \{E - D + d_1, 0\} = 47.158.877$$

$$m_2 = \max \{E - D + d_2, 0\} = 0$$

$$m_3 = \max \{E - D + d_3, 0\} = 0$$

$$m_4 = \max \{E - D + d_4, 0\} = 0$$

$$m_5 = \max \{E - D + d_5, 0\} = 0$$

$$m_6 = \max \{E - D + d_6, 0\} = 0$$

$$m_7 = \max \{E - D + d_7, 0\} = 0$$

Per tant, haurem repartit una quantitat total de 47.158.877 i ens restarà per repartir 534.738.056, a més les noves demandes seran iguals a :

$$d_1 = \min\{d_1 - m_1, E - m(N)\} = 186.646.382$$

$$d_2 = \min\{d_2 - m_2, E - m(N)\} = 171.342.514$$

$$d_3 = \min\{d_3 - m_3, E - m(N)\} = 150.529.585$$

$$d_4 = \min\{d_4 - m_4, E - m(N)\} = 65.115.607$$

$$d_5 = \min\{d_5 - m_5, E - m(N)\} = 53.227.318$$

$$d_6 = \min\{d_6 - m_6, E - m(N)\} = 50.096.538$$

$$d_7 = \min\{d_7 - m_7, E - m(N)\} = 44.426.494$$

La quantitat restant que ens queda per repartir l'assignarem de manera proporcional a les demandes.

$$\lambda = \frac{534.738.056}{721.384.438} = 0,7413 = 74,13\%$$

Per tant, les assignacions finals seran:

Taula 5. Assignacions seguint la Regla Proporcional Ajustada

Universitat de Barcelona	185.513.571,41 €
Universitat Autònoma de Barcelona	127.010.451,04 €
Universitat Politècnica de Catalunya	111.582.525,78 €
Universitat Rovira i Virgili	48.268.012,54 €
Universitat Pompeu Fabra	39.455.623,18 €
Universitat de Girona	37.134.881,11 €
Universitat de Lleida	32.931.867,93 €

Assignació total: 581.896.933,00 €

En la següent taula podem veure la diferència entre el que han rebut els jugadors a través de l'assignació per la regla proporcional ajustada i el que van demandar així com el percentatge que aquesta diferència representa sobre les seves demandes.

Taula 6. Pèrdues dels agents seguint la regla AP i el seu percentatge respecte les demandes

	Pèrdues	% s/d
Universitat de Barcelona	48.291.687,59 €	20,65%
Universitat Autònoma de Barcelona	44.332.062,96 €	25,87%
Universitat Politècnica de Catalunya	38.947.059,22 €	25,87%
Universitat Rovira i Virgili	16.847.594,46 €	25,87%
Universitat Pompeu Fabra	13.771.694,82 €	25,87%
Universitat de Girona	12.961.656,89 €	25,87%
Universitat de Lleida	11.494.626,07 €	25,87%

Totes les universitats tenen el mateix percentatge de pèrdues respecte a la seva demanda, concretament del 25,87%, degut a que els seus drets mínims son iguals a zero. A excepció de la Universitat de Barcelona ja que és la única que si que obté drets mínims. Per tant, veiem com aquelles universitats que obtenen drets mínims (els agents amb major demanda) son més beneficiades per la regla proporcional ajustada.

5.2.3. REGLA DE GUANYIS IGUALITARIS RESTRINGITS

Com bé indica el nom d'aquesta regla als diferents demandants se'ls hi assignarà la mateixa quantitat sense que cap d'ells obtingui més del que demanda. Per tant, per solucionar el problema seguirem el següent procés, però abans veurem les demandes dels agents:

$$\begin{aligned}
 d_1 = & 233.805.259,00; & d_2 = & 171.342.514,00; & d_3 = & 150.529.585,00; & d_4 = & \\
 & 65.115.607,00; & d_5 = & 53.227.318,00; & d_6 = & 50.096.538,00; & d_7 = & 44.426.494,00
 \end{aligned}$$

El primer pas serà dividir la quantitat a repartir o quantitat del bé a repartir entre el número total de jugadors:

$$\frac{E}{n} = \frac{581.896.933}{7} = 83.128.133,29$$

Però aquest valor supera la quantitat que demanden algunes universitats, concretament la Universitat Rovira i Virgili, la Universitat Pompeu Fabra, la Universitat de Girona i la Universitat de Lleida. Per tant, a aquests universitats els hi assignarem la seva demanda íntegra. De moment, la repartició quedarà:

Taula 7. Repartició inicial seguint el mètode CEA

Universitat de Barcelona	-
Universitat Autònoma de Barcelona	-
Universitat Politècnica de Catalunya	-
Universitat Rovira i Virgili	65.115.607,00 €
Universitat Pompeu Fabra	53.227.318,00 €
Universitat de Girona	50.096.538,00 €
Universitat de Lleida	44.426.494,00 €

Una vegada fet aquest primer repartiment ens quedarà pendent d'assignar la diferència entre el total a repartir i el que acabem de repartir, que ens donarà un valor de 369.030.976 que repartirem igualitàriament entre les tres universitats a les que encara no hem assignat res.

$$\frac{369.030.976}{3} = 123.010.325,33$$

Per tant, a través de la solució del problema trobem que el valor x es igual a 123.010.325,33 €. Formalment:

$$CEA(E, d) = \min\{123.010.325,33, d_i\}$$

Finalment, les assignacions seran:

Taula 8. Assignacions seguint la Regla CEA

Universitat de Barcelona	123.010.325,33 €
Universitat Autònoma de Barcelona	123.010.325,33 €
Universitat Politècnica de Catalunya	123.010.325,33 €
Universitat Rovira i Virgili	65.115.607,00 €
Universitat Pompeu Fabra	53.227.318,00 €
Universitat de Girona	50.096.538,00 €
Universitat de Lleida	44.426.494,00 €

Assignació total: 581.896.933,00 €

Formalment,

$$CEA_1 = \min\{123.010.325,33, 233.805.259,00\} = 123.010.325,33$$

$$CEA_2 = \min\{123.010.325,33, 171.342.514,00\} = 123.010.325,33$$

$$CEA_3 = \min\{123.010.325,33, 150.529.585,00\} = 123.010.325,33$$

$$CEA_4 = \min\{123.010.325,33, 65.115.607,00\} = 65.115.607,00$$

$$CEA_5 = \min\{123.010.325,33, 53.227.318,00\} = 53.227.318,00$$

$$CEA_6 = \min\{123.010.325,33, 50.096.538,00\} = 50.096.538,00$$

$$CEA_7 = \min\{123.010.325,33, 44.426.494,00\} = 44.426.494,00$$

En la taula següent podem veure la diferència entre el que els jugadors demanen i el que se'ls hi acaba assignant seguint aquesta regla, per tant, la seva pèrdua.

Taula 9. Pèrdues dels agents seguint la regla CEA i el seu percentatge respecte les demandes

	Pèrdues	% s/d
Universitat de Barcelona	110.794.933,67 €	47,39%
Universitat Autònoma de Barcelona	48.332.188,67 €	28,21%
Universitat Politècnica de Catalunya	27.519.259,67 €	18,28%
Universitat Rovira i Virgili	0,00 €	0,00%
Universitat Pompeu Fabra	0,00 €	0,00%
Universitat de Girona	0,00 €	0,00%
Universitat de Lleida	0,00 €	0,00%

Si seguim la regla de guanys igualitaris restringits destaquem com les universitats amb demandes petites es veuen beneficiades ja que obtenen tot el que demanen. Per tant, veiem com la Universitat Pompeu Fabra, la Universitat de Girona, la Universitat de Lleida i la Universitat Rovira i Virgili obtenen tot el que demanen mentre que les tres universitats restants obtenen menys del que demanen.

Destaquem que la Universitat de Barcelona, l'agent que més demanda, és la més perjudicada ja que la diferència entre la demanda i la seva assignació és d'exactament 110.794.933,67€ amb unes pèrdues respecte la seva demanda de gairebé el 50% seguida de la Universitat Autònoma de Barcelona amb unes pèrdues d'aproximadament el 30%

5.2.4. REGLA DE PÈRDUES IGUALITÀRIES RESTINGIDES

Per a continuar resoldrem aquest problema de demanda a través de la regla de pèrdues igualitàries restringides o Constraint Equal Losses (CEL). A través d'aquesta regla el que farem serà, com el seu nom indica, igualar les pèrdues, enteses com la diferència entre la demanda i la possible assignació.

Per resoldre aquest problema haurem de començar per veure quines son les demandes i quines son les pèrdues totals o la quantitat que falta per cobrir la demanda a través de la resta:

$$d_1 = 233.805.259,00; \quad d_2 = 171.342.514,00; \quad d_3 = 150.529.585,00; \quad d_4 = 65.115.607,00; \quad d_5 = 53.227.318,00; \quad d_6 = 50.096.538,00; \quad d_7 = 44.426.494,00$$

$$D - E = 768.543.315 - 581.896.933 = 186.646.382$$

Una vegada coneixem aquesta diferència l'haurem de dividir entre els agents que participen en el joc. Per tant, la pèrdua unitària serà de:

$$\frac{D - E}{n} = \frac{186.646.382}{7} = 26.663.768,86$$

Finalment, haurem d'assignar a cada jugador:

$$d - 26.663.768,86$$

A continuació podem veure el quadre amb el resultat d'aplicar aquest procés al problema de demanda analitzat:

Taula 10. Assignacions seguint la Regla CEL

Universitat de Barcelona	207.141.490,14 €
Universitat Autònoma de Barcelona	144.678.745,14 €
Universitat Politècnica de Catalunya	123.865.816,14 €
Universitat Rovira i Virgili	38.451.838,14 €
Universitat Pompeu Fabra	26.563.549,14 €
Universitat de Girona	23.432.769,14 €
Universitat de Lleida	17.762.725,14 €

Formalment l'assignació serà la solució d'aplicar:

$$CEL_1 = \max\{0, 207.141.490,14\} = 207.141.490,14$$

$$CEL_2 = \max\{0, 144.678.745,14\} = 144.678.745,14$$

$$CEL_3 = \max\{0, 123.865.816,14\} = 123.865.816,14$$

$$CEL_4 = \max\{0, 38.451.838,14\} = 38.451.838,14$$

$$CEL_5 = \max\{0, 26.563.549,14\} = 26.563.549,14$$

$$CEL_6 = \max\{0, 23.432.769,14\} = 23.432.769,14$$

$$CEL_7 = \max\{0, 17.762.725,14\} = 17.762.725,14$$

A continuació podem veure una taula on tenim la diferència entre l'assignació i la demanda de cada un dels agents i el percentatge que aquesta diferència representa sobre la seva demanda.

Taula 11. Pèrdues dels agents seguint la regla CEL i el seu percentatge respecte les demandes

	Pèrdues	% s/d
Universitat de Barcelona	26.663.768,86 €	11,40%
Universitat Autònoma de Barcelona	26.663.768,86 €	15,56%
Universitat Politècnica de Catalunya	26.663.768,86 €	17,71%
Universitat Rovira i Virgili	26.663.768,86 €	40,95%
Universitat Pompeu Fabra	26.663.768,86 €	50,09%
Universitat de Girona	26.663.768,86 €	53,22%
Universitat de Lleida	26.663.768,86 €	60,02%

La regla de pèrdues igualitàries beneficia a aquells agents amb demandes més elevades, com podem veure en la taula. Destaquem com la Universitat de Barcelona, l'agent amb una demanda més elevada, té una pèrdua d'únicament un 11,4% respecte la seva demanda front la Universitat de Lleida, el jugador amb la demanda més baixa, que té unes pèrdues del 60%. Tot i que en termes absoluts totes les universitats tinguin un valor de pèrdues igual, aquestes no tenen el mateix impacte en elles.

5.2.5. REGLA DEL TALMUD

Seguint la regla del Talmud cap agent pot obtindre més de la meitat de la seva reclamació en cas que el pressupost sigui inferior a la meitat de la suma de les reclamacions ni pot perdre més de la meitat de la seva reclamació en cas que el pressupost sigui superior a la meitat de la reclamació agregada. Una vegada més, abans de començar a resoldre el cas veurem les demandes dels agents:

$$d_1 = 233.805.259,00; \quad d_2 = 171.342.514,00; \quad d_3 = 150.529.585,00; \quad d_4 = 65.115.607,00; \quad d_5 = 53.227.318,00; \quad d_6 = 50.096.538,00; \quad d_7 = 44.426.494,00$$

En aquest cas:

$$E = 581.896.933$$

$$\frac{D}{2} = 384.271.657,5$$

El pressupost és superior a la meitat de la reclamació agregada i, per tant, cap agent pot perdre més de la meitat de la seva reclamació. Seguint aquest principi trobem que els agents han de rebre com a mínim:

Taula 12. Assignació mínima seguint la regla de Talmud

Universitat de Barcelona	116.902.629,50 €
Universitat Autònoma de Barcelona	85.671.257,00 €
Universitat Politècnica de Catalunya	75.264.792,50 €
Universitat Rovira i Virgili	32.557.803,50 €
Universitat Pompeu Fabra	26.613.659,00 €
Universitat de Girona	25.048.269,00 €
Universitat de Lleida	22.213.247,00 €
	384.271.657,50 €

A partir d'aquest punt realitzarem la repartició seguint la regla CEL ja que, com hem mencionat en la teoria anterior, en el cas que la quantitat a repartir sigui superior a la meitat de les demandes realitzarem el repartiment seguint la regla CEL sense que ningú obtingui més de $d/2$.

Per tant, per realitzar el repartiment començarem per calcular les pèrdues totals. És a dir,

$$D - E = 768.543.315 - 581.896.933 = 186.646.382$$

A partir d'aquí veurem quina es la pèrdua individual dividint la pèrdua total entre el total de jugadors:

$$\frac{D - E}{7} = \frac{186.646.382}{7} = 26.663.768,86$$

Assignarem a cada jugador la diferència entre la seva demanda i la pèrdua unitària que acabem de calcular, però tenint en compte l'assignació mínima. En el quadre següent podem observar l'assignació mitjançant la regla CEL, la seva assignació mínima i la diferència entre ambdós.

Taula 13. Assignació seguint CEL i assignació mínima seguint Talmud

	CEL	Mínim ($d_i/2$)	Diferència
UB	207.141.490,14 €	116.902.629,50 €	90.238.860,64 €
UAB	144.678.745,14 €	85.671.257,00 €	59.007.488,14 €
UPC	123.865.816,14 €	75.264.792,50 €	48.601.023,64 €
URV	38.451.838,14 €	32.557.803,50 €	5.894.034,64 €
UPF	26.563.549,14 €	26.613.659,00 €	- 50.109,86 €
UdG	23.432.769,14 €	25.048.269,00 €	- 1.615.499,86 €
UdL	17.762.725,14 €	22.213.247,00 €	- 4.450.521,86 €

Com podem observar en el cas de la Universitat Pompeu Fabra, la Universitat de Girona i la Universitat de Lleida obtenen a través de la regla CEL una assignació inferior a la seva assignació mínima. Aquesta diferència entre l'assignació CEL i el mínim ens dona un valor total de -6.116.131,57 € que haurem de repartir entres les altres 4 universitat que poden suportar aquesta pèrdua, és a dir, la pèrdua unitària extra serà de 1.529.032,89€.

En conclusió, l'assignació final seguint la regla del Talmud serà de:

Taula 14. Assignació seguint la regla de Talmud

Universitat de Barcelona	205.612.457,25 €
Universitat Autònoma de Barcelona	143.149.712,25 €
Universitat Politècnica de Catalunya	122.336.783,25 €
Universitat Rovira i Virgili	36.922.805,25 €
Universitat Pompeu Fabra	26.613.659,00 €
Universitat de Girona	25.048.269,00 €
Universitat de Lleida	22.213.247,00 €

Assignació total: 581.896.933,00 €

Finalment, veurem les pèrdues de cada una de les universitats, és a dir, la diferència entre la demanda i la seva assignació final així com el percentatge que aquest representa respecte les demandes.

Taula 15. Pèrdues dels agents seguint la regla CEL i el seu percentatge respecte les demandes

	Pèrdues	% s/d
Universitat de Barcelona	28.192.801,75 €	12,06%
Universitat Autònoma de Barcelona	28.192.801,75 €	16,45%
Universitat Politècnica de Catalunya	28.192.801,75 €	18,73%
Universitat Rovira i Virgili	28.192.801,75 €	43,30%
Universitat Pompeu Fabra	26.613.659,00 €	50,00%
Universitat de Girona	25.048.269,00 €	50,00%
Universitat de Lleida	22.213.247,00 €	50,00%

Tot i que la quantitat final assignada és bastant similar pels set jugadors demandants destaquem com el percentatge sobre les demandes és molt diferent donant prioritat als agents amb demandes més elevades. A més, destaquem com les tres universitats que obtenien una demanda inferior al mínim a través de la regla CEL acaben sofrint unes pèrdues del 50%, la meitat de la seva demanda.

5.3. ANÀLISIS DE RESULTATS

A continuació analitzarem els resultats obtinguts a través de les diverses solucions.

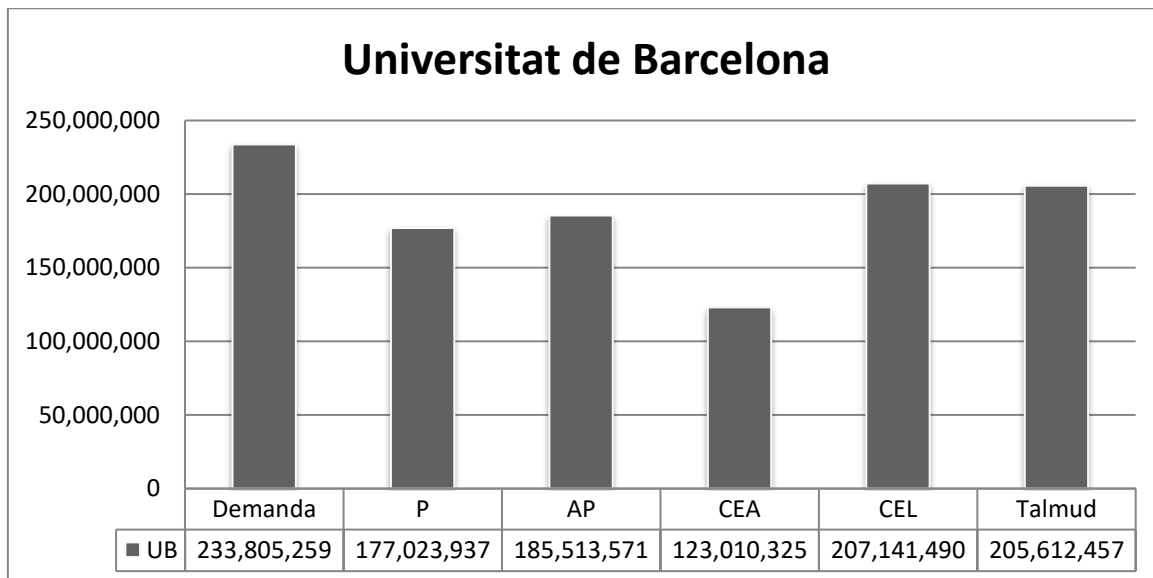
Inicialment veurem una taula resum de les solucions:

Taula 16. Assignacions seguint les diverses solucions

	Demanda	P	AP	CEA	CEL	Talmud
UB	233.805.259	177.023.937	185.513.571	123.010.325	207.141.490	205.612.457
UAB	171.342.514	129.730.728	127.010.451	123.010.325	144.678.745	143.149.712
UPC	150.529.585	113.972.371	111.582.526	123.010.325	123.865.816	122.336.783
URV	65.115.607	49.301.804	48.268.013	65.115.607	38.451.838	36.922.805
UPF	53.227.318	40.300.673	39.455.623	53.227.318	26.563.549	26.613.659
UdG	50.096.538	37.930.226	37.134.881	50.096.538	23.432.769	25.048.269
UdL	44.426.494	33.637.194	32.931.868	44.426.494	17.762.725	22.213.247

Gràcies a aquesta taula podem observar la diferència dels valors assignats a cada una de les universitats en funció de la solució. Però, per veure de forma més detallada i visual el repartiment mostrarem un gràfic de les assignacions per a cada jugador o universitat.

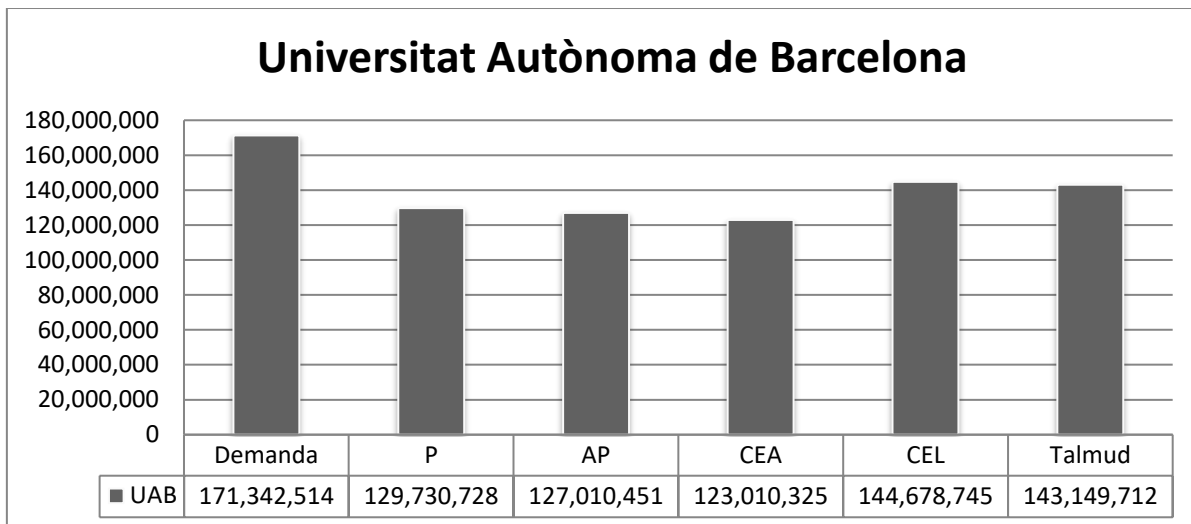
Gràfic 17. Assignacions a la Universitat de Barcelona de les diverses solucions



Destaquem com la Universitat de Barcelona es veu més beneficiada en el cas d'un repartiment a través de la regla de pèrdues igualitàries (CEL) seguit de prop de la regla de Talmud. Per altra banda, la regla de guanys igualitaris perjudica a la Universitat de Barcelona ja que, com hem comentat anteriorment, aquesta regla dóna prioritat als

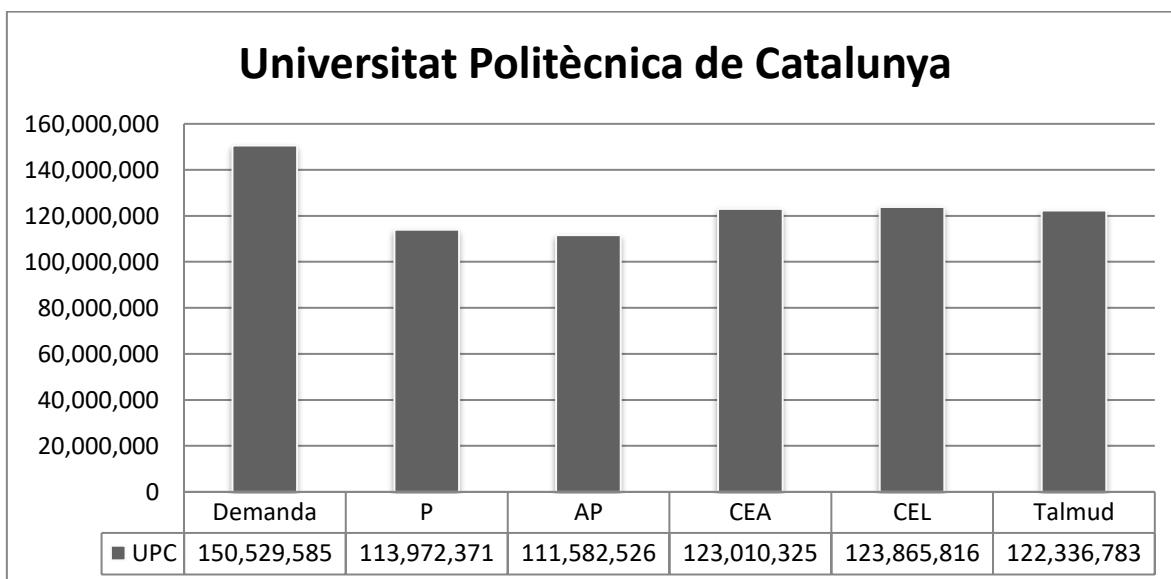
agents amb demandes més petites i la UB és la universitat amb una demanda més elevada.

Gràfic 18. Assignacions a la Universitat Autònoma de Barcelona de les diverses solucions



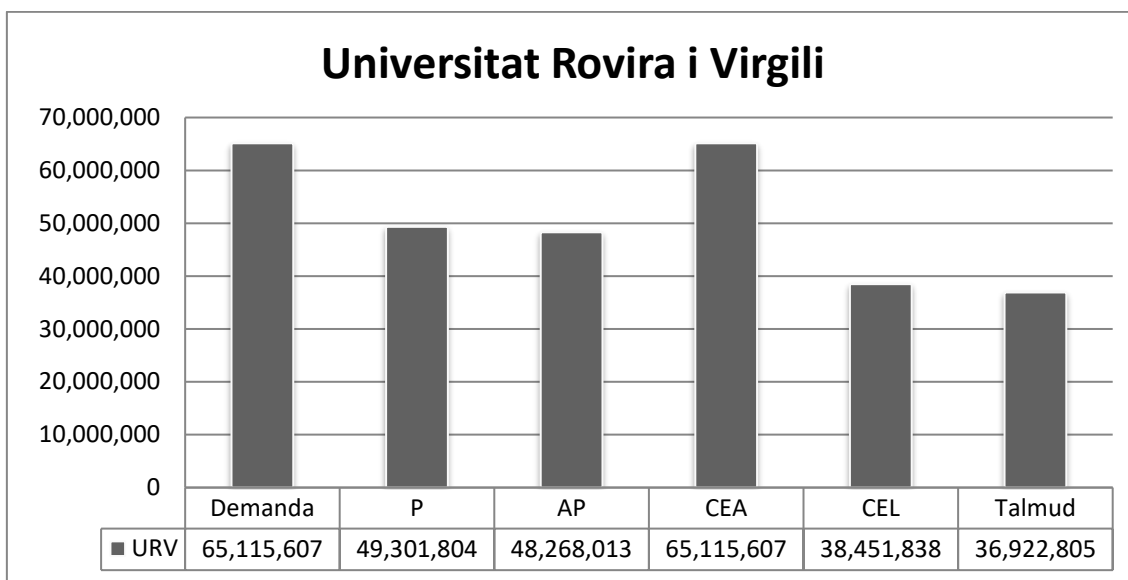
D'igual manera que la Universitat de Barcelona la Universitat Autònoma de Barcelona es veu beneficiada per la regla de pèrdues igualitàries restringides i per la regla del Talmud al ser les universitats amb una demanda més elevada. Per altra banda, amb les regles restants aquest agent obté uns valors molt similars tot i que destaca lleugerament la regla proporcional.

Gràfic 19. Assignacions a la Universitat Politècnica de Catalunya de les diverses solucions



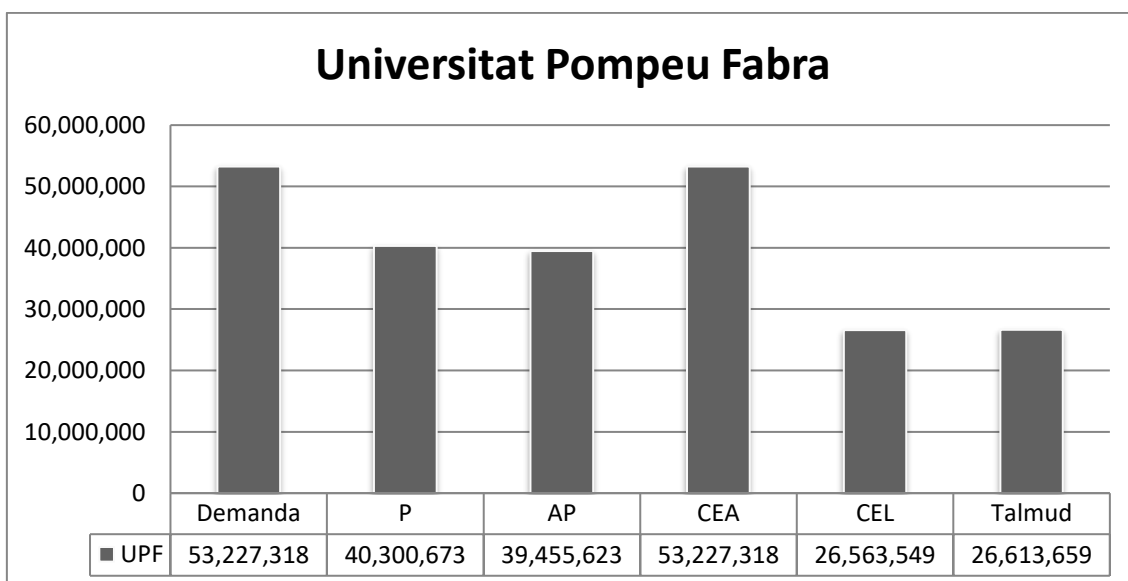
La Universitat Politècnica de Catalunya obté aproximadament la mateixa quantitat en totes les possibles assignacions, tot i això, les regles que destaquen són la de guanys igualitàries, la de pèrdues igualitàries i la regla del Talmud ja que aquest agent té una demanda que es troba en posicions intermèdies quan la comparem amb els altres jugadors.

Gràfic 20. Assignacions a la Universitat Rovira i Virgili de les diverses solucions



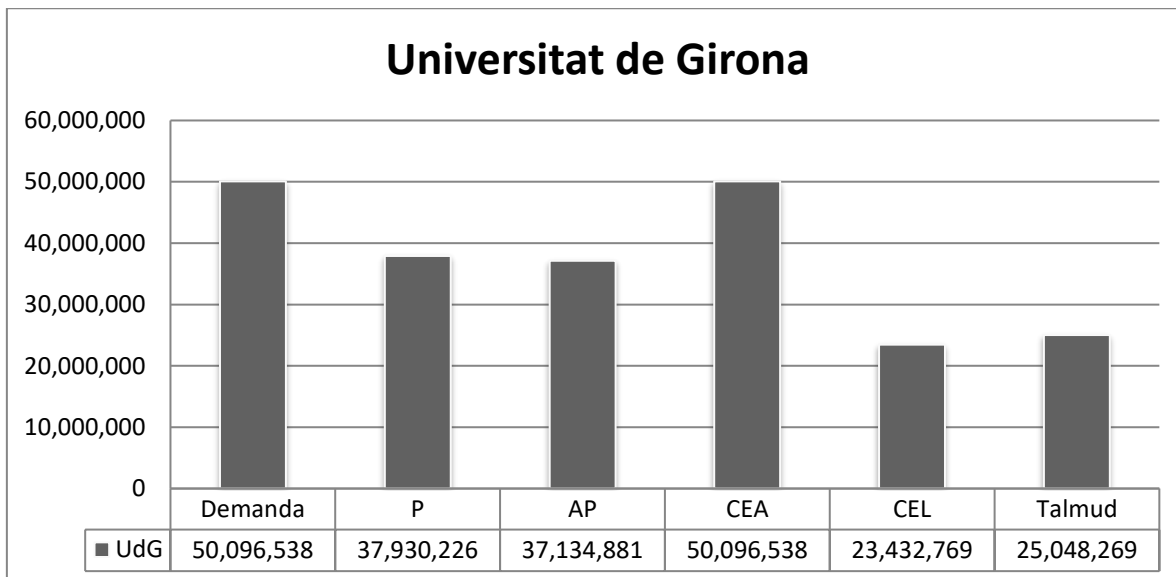
La Universitat Rovira i Virgili obté la totalitat de la seva demanda a través de la regla de guanys igualitàries. Les altres dues regles que més beneficien a aquest agent són la regla proporcional i la proporcional ajustada.

Gràfic 21. Assignacions a la Universitat Pompeu Fabra de les diverses solucions



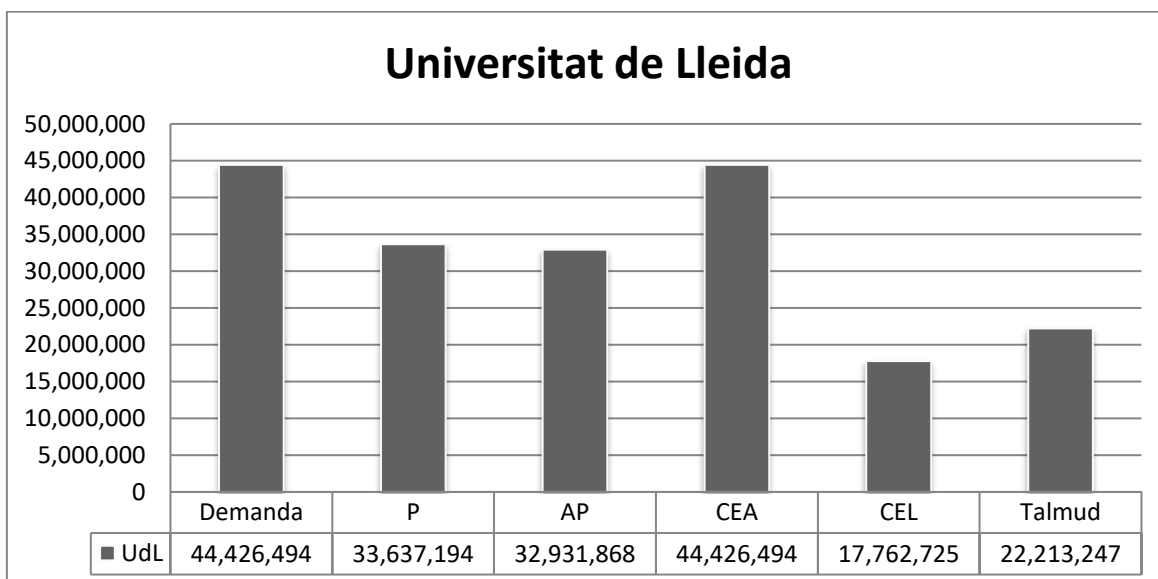
Seguint l'argument que hem mencionat anteriorment la Universitat Pompeu Fabra, al ser un dels agents amb una demanda més baixa, es veu beneficiada per la regla de guanys igualitaris ja que obté la totalitat de la seva demanda. Per altra banda, la regla de pèrdues igualitàries així com la regla del Talmud es la que assigna una menor quantitat a aquesta universitat.

Gràfic 22. Assignacions a la Universitat de Girona de les diverses solucions



D'igual manera que la Universitat Pompeu Fabra la Universitat de Girona rep tota la seva demanda a través de la regla de guanys igualitaris, per tant, es la que més li beneficia seguida de les regles proporcional i proporcional ajustada. Com a conseqüència, la regla que més perjudica a aquest agent es la regla de pèrdues igualitàries així com la regla del Talmud.

Gràfic 23. Assignacions a la Universitat de Lleida de les diverses solucions



A través de la regla de guanys igualitaris a la Universitat de Lleida se li assigna la totalitat de la demanda mentre que a través de la regla de pèrdues igualitàries rep menys de la meitat de la seva demanda. La regla proporcional i proporcional ajustada assignen a aquest agent aproximadament tres quarts de la seva demanda.

Si ens referim a les propietats de les regles de repartiment considerem important que es compleixin les següents propietats:

- Simetria: ja que considerem essencial que els agents amb reclamacions iguals se'ls hi acabi assignant una quantitat igual. Però a través d'aquesta propietat no podem descartar cap de les regles de repartiment ja que totes les regles analitzades compleixen la propietat de simetria, com podeu veure en la taula 1.
- Composició a l'alça: creiem important que si la quantitat a repartir augmenta, les assignacions de cada un dels agents també han d'augmentar. La regla proporcional ajustada i la regla del Talmud no compleixen aquesta propietat.
- Exempció: aquesta propietat exigeix que les reclamacions que no superin unes quantitat mínimes es cobreixin íntegrament. Destaquem la propietat d'exempció ja que considerem que les universitats més petites es poden trobar amb majors problemes en el moment de créixer i finançar-se, per tant, l'ajuda de la Generalitat pot ser essencial per elles. La única regla que compleix aquesta propietat és la CEA.

En resum, si només tinguéssim en compte les tres propietats anteriors que ens semblen importants arribaríem a la conclusió que la millor decisió seria escollir la regla de repartiment CEA.

5.4. CONCLUSIONS

En aquest treball hem analitzat els conceptes essencials de la teoria de jocs i dels problemes de demanda. Hem introduït el problema de demanda aplicant en un primer moment els conceptes de solució dels jocs cooperatius, concretament hem presentat el core, el nucleolus i el valor de Shapley. A més, hem realitzat una introducció de les regles més importants dels problemes de bancarrota: regla proporcional, regla proporcional ajustada, regla de guanys igualitaris restringits, regla de pèrdues igualitàries restringides i regla del Talmud. És a dir, hem aconseguit conèixer la teoria de jocs, els jocs cooperatius, els problemes de demanda i algunes de les seves regles de repartiment.

Per últim, hem aplicat les regles analitzades en un cas pràctic sobre el finançament de les universitats públiques catalanes per part de la Generalitat de Catalunya. Aconseguint així descobrir com aplicar les regles estudiades a un problema concret i real. A més, hem vist com les diverses regles aplicades aporten solucions molt diverses als agents, fent que cada una de les regles sigui més interessant i favorable pels diversos jugadors, en aquest cas, universitats. Per altra banda, en cada situació de demanda és convenient exigir que les solucions compleixin unes propietats o altres. En el problema analitzat hem considerat apropiat que les regles compleixin les propietats de simetria, composició a l'alça i exempció, arribant a la conclusió que únicament la regla de guanys igualitaris restringits (CEA) compleix aquestes condicions.

També a través de la resolució del cas podem destacar com la regla de pèrdues igualitàries restringides afavoreix a les universitats amb demandes elevades com la UB i la UAB. Mentre que la regla de guanys igualitaris restringits beneficia a les universitats amb demandes molt inferiors, entre les que comptem la URV, UPF, UdG i UdL. A més, una de les altres idees a les que hem pogut arribar és que aquells agents o universitats amb una demanda mitjana obtenen assignacions molt similars a través de totes les regles de repartiment, en el problema de demanda analitzat aquest raonament el trobem en la UPC.

Com a treball futur destacaria l'avanç continu en les regles de demanda. Els problemes que es presenten en el nostre dia a dia són extensament diversos que precisen millores i ajustos per fer front a aquests canvis ja que les eines que ens presenta la teoria de jocs són de gran utilitat per resoldre aquest tipus de problemes.

6. REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

Aguilar Ameneiro, J. (2018). *El problema de demanda*. Consultat el 04/03/2019, de Universidade Da Coruña. Lloc web: http://eio.usc.es/pub/mte/descargas/Proyectos_FinMaster/Proyecto_1080.pdf

Alhama Manzano. I. (2015). *Reglas de bancarrota*. Consultat el 06/03/2019, de Universidad de Murcia. Lloc web: https://www.um.es/documents/118351/2874787/TFM_ALHAMA+MANZANO.pdf/b18069d4-d703-4cb2-860a-c0c1bca1c368

Amer, R., Carreras F., Magaña A. (2008). *Aplicaciones de los juegos cooperativos al contexto empresarial*. Consultat el 20/02/2019 de Intangible Capital web: https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099/4859/juegos_cooperativos.pdf

Facultat d'Economia i Empresa (2018a). *Normativa del Treball de Fi de Grau de la Facultat d'Economia i Empresa de la Universitat Rovira i Virgili*. Consultat el 28/01/2019 web: https://campusvirtual.urv.cat/pluginfile.php/2894958/mod_resource/content/6/2018.09.21%20punt%2004%20Modificacions_Normativa_TFG_FEE.pdf

Facultat d'Economia i Empresa (2018b). *Guia per a l'elaboració del Treball de Fi de Grau de la Facultat d'Economia i Empresa*. Consultat el 25/01/2019 web: https://campusvirtual.urv.cat/pluginfile.php/2895057/mod_resource/content/6/Guia_TFG%20FEE%20CURS%202018_19.pdf

Generalitat de Catalunya. *Pressupostos*. Consultat el 07/03/2019 de Generalitat de Catalunya web: <http://economia.gencat.cat/ca/ambits-actuacio/pressupostos/>

Guerrero Casas, F.M., Hinojosa Ramos, M.A., Sánchez Sánchez, F.J. (2016). *Teoría de Juegos Aplicada a Problemas de Bancarrota*. Consultat el 08/03/2019, de Universidad Pablo de Olavide . Lloc web: <https://docplayer.es/14702241-Teoria-de-juegos-aplicada-a-problemas-de-bancarrota.html>

- Hinojosa, M.A., Sánchez F.J., (2004). *Problemas de Bancarrota Multi-escenario*. Consultat el 07/03/2019, de Universidad Pablo de Olavide. Lloc web: https://www.researchgate.net/publication/26442420_Problemas_de_bancarrota_multi-escenario
- Landinez-Lamadrid, D., Ramirez-Ríos D., Neira Rodado, D. (2017). *Shapley Value: its Algorithms and Application to Supply Chains*. Consultat el 10/03/2019 web: <https://revistascientificas.cuc.edu.co/ingecuc/article/view/1495/Landinez-Lamadrid>
- Malkevitch, J. *Resolving Bankruptcy Claims*. Consultat el 05/03/2019, de American Mathematical Society web: <http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-bankruptcy>
- Pérez Navarro, J. (2004). *Teoría de juegos*. Madrid: Prentice Hall
- Rafels, C. (1995). *Teoria de jocs, solucions i aplicacions*
- Rafels, C., Izquierdo i Aznar, J.M. (1999). *Jocs cooperatius i aplicacions econòmiques*. Barcelona : Edicions de la Universitat de Barcelona.
- Sánchez Rodríguez, E., Vidal Purga, J.J (2014). *Juegos coalicionales*. Vigo: Servizo de Publicacións de Universidade de Vigo
- Sevilla, A. *Teoría de juegos*. Consultat el 19/02/2019 de Economipedia web: <https://economipedia.com/definiciones/teoria-de-juegos.html>
- Shubik, M. (1992). *Teoría de juegos en las ciencias sociales: conceptos y soluciones*. México, D.F.: Fondo de Cultura Económica.
- Stokel-Walker, C. *¿Qué es exactamente la teoría de juegos?*. Consultat el 25/02/2019, de BBC web: https://www.bbc.com/mundo/noticias/2015/02/150220_teoría_de_juegos_que_es_finde_dv