DETERMINACIÓN DE LAS IBNR CON LÓGICA BORROSA♦

Jorge de Andrés Sánchez[1]
Profesor Titular de Universidad. Departamento de Gestión de Empresas. Universidad Rovira i Virgili.

RESUMEN

Una de las provisiones de mayor importancia para la estabilidad de las compañías de seguros es la de siniestros pendientes de declaración, sobre todo en ramos con un notable diferimiento de muchas de las reclamaciones como el del automóvil o el de responsabilidad civil. Por tanto, no es extraño que la literatura actuarial proponga una gran variedad de metodologías para su cálculo. Por otra parte, dadas las condiciones cambiantes del entorno en que se mueve la actividad aseguradora, no es aconsejable partir de una experiencia excesivamente amplia para el cálculo de dichas provisiones. Por estas razones, entendemos que dada la débil información de partida, la utilización de instrumentos de la lógica borrosa puede ser muy adecuada. Concretamente, en este trabajo proponemos una metodología que se basa en el uso de instrumentos de regresión borrosa y la utilización del esquema propuesto por Benjamin y Eagles (1986) para la determinación de las IBNR.

Palabras clave: Provisiones para siniestros pendientes de declaración (IBNR), Lógica borrosa, Regresión borrosa

♦ El autor desea agradecer las sugerencias de dos evaluadores anónimos, que han permitido mejorar notablemente la versión inicial del trabajo.

[1] Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Rovira i Virgili. Avenida de la Universidad 1, 43204. Reus. Telf: 977759832. Fax: 977759810. E-mail: jdas@fcee.urv.es.

1. INTRODUCCIÓN

Una de las provisiones más importantes en las compañías de no-vida es la provisión para siniestros pendientes de declaración (IBNR), por lo cual no es extraño que su determinación sea objeto de un amplio tratamiento por la literatura actuarial. En este contexto, podemos diferenciar dos tipos de enfoques básicos, cada uno de los cuales agrupa a numerosas metodologías. El primer enfoque los podemos denominar como "clásico", y adopta una perspectiva determinística. El segundo tipo de enfoque es comúnmente calificado de "estocástico" y arroja predicciones de las IBNR más completas que los métodos clásicos.

Entre los métodos clásicos son especialmente conocidos el basado en el coste medio del siniestro, el basado en el periodo medio de liquidación; y dentro de los que parten de la información organizada a través del triángulo de siniestralidad, podemos mencionar el *chain ladder* y los basados en el *link ratio*. El denominador común de todas estas técnicas es que únicamente ofrecen predicciones puntuales de las IBNR, es decir, se enmarcan en un ambiente determinístico. En Van Eeghen (1981), Taylor (1986), *Claims Reserving Manual* del Institute of Actuaries (1989) o Gil (1995) puede encontrarse una amplia recopilación de este tipo de métodos.

El segundo enfoque, denominado como "estocástico", es más sofisticado, y su origen se sitúa, según Taylor *et al.* (2003), a mediados de los años 70 del pasado siglo. En última instancia, este tipo de enfoque supone aceptar que la evolución de la siniestralidad a lo largo del tiempo para cualquier año de ocurrencia es aleatoria. Así, los métodos englobados en este grupo, tal como afirman England y Verrall (2002), buscan obtener estimaciones tanto del valor como de la variabilidad de las IBNR, siendo la situación ideal, la descripción de las IBNR a través de funciones de distribución de probabilidad completas. Dentro de los métodos estocásticos que se han ido proponiendo en la literatura, tal como afirman England y Verrall (2002), muchos de éstos parten de la formulación pura del método *chain ladder* (o de ligeras modificaciones el mismo) y realizan refinamientos estadísticos sobre éste. En este contexto podemos encontrar los trabajos de Mack (1993), England y Verrall (1999) o

Verrall (2000). Otro enfoque habitual dentro de las técnicas estocásticas consiste en considerar el incremento de la siniestralidad de un año de ocurrencia durante los diversos años de desarrollo; y más concretamente, su logaritmo neperiano, a través de una función de distribución de predefinida. En este contexto, lo más común es considerar, tal como hacen Kremer (1982), Renshaw (1989) y Verrall (1989), distribuciones de probabilidad logarítmico-normales para el incremento de la siniestralidad en los años de desarrollo (es decir, distribuciones de probabilidad normales para cuantificar su logaritmo neperiano).

Obviamente, los métodos clásicos presentan un gran problema, fruto de su relativa sencillez. Es una información tan importante para el actuario conocer el valor "medio" de las IBNR - que es lo que proporcionan los métodos clásicos-, como la posible variabilidad de las IBNR sobre este valor "medio", que servirá para estimar su valor final teniendo en cuenta que éste debe ser prudente; es decir, que debe incluir, con una base matemática fundamentada, un margen para desviaciones adversas de la siniestralidad. Así, los métodos estocásticos responden de forma adecuada a estas necesidades.

Aunque lo ideal, con independencia de que se utilice un método clásico o un método estocástico, es partir de una amplia experiencia para ajustar los parámetros de los modelos; ello, desafortunadamente, puede no ser aconsejable en la determinación de las IBNR. Straub (1997) apunta que tomar en consideración observaciones muy alejadas del momento en que deben calcularse las IBNR puede llevarnos a obtener estimaciones poco realistas para éstas. Por ejemplo, si las reclamaciones están relacionadas con daños corporales, el valor final de las indemnizaciones dependerá de variables como la inflación, los cambios en las prácticas judiciales y en la legislación, etc.

Dado que se debe utilizar una información bastante escasa respecto al fenómeno de estudio, tal como muestran Tseng *et al.* (2001) en el campo del análisis de series temporales univariantes, un instrumento muy adecuado para el tratamiento de la información es la regresión borrosa (RB), basada en la lógica borrosa (LB). En este trabajo, adaptamos la metodología de determinación de las IBNR propuesta

por Benjamin y Eagles (1986), basada en la utilización la regresión con Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO), al uso de la RB.

Debemos remarcar que la utilización de instrumentos de RB será una alternativa que, en nuestra opinión, será muy adecuada. En primer lugar, las estimaciones que obtenemos con la RB serán números borrosos. Así, debemos remarcar que la operativa de números borrosos, con la que deberemos "arrastrar" en las operaciones aritméticas que realicemos con las estimaciones toda la información (o incertidumbre) que incorporan éstas, es relativamente sencilla desde un punto de vista computacional. Ello nos permitirá obtener predicciones del valor de las IBNR y de su variabilidad, de forma relativamente sencilla. Por tanto, el uso de la RB se configurará como una alternativa que puede ser tan válida como los métodos estocásticos y superior a los determinísticos.

También queremos reseñar que en el campo actuarial, varios de los instrumentos derivados de la LB han sido utilizados por diversos autores para modelizar problemas que requieren de la utilización de juicios subjetivos por parte del actuario o bien en los cuales, como es nuestro caso, la información de partida es lo suficientemente escasa o vaga. Un trabajo panorámico sobre dichas aportaciones puede consultarse en Derrig y Ostaszewski (1998) o de Andrés y Terceño (2002). Algunas de las aplicaciones más relevantes son:

- En aspectos de la toma de decisiones del asegurador como la determinación de riesgo asegurable o la fijación de una política de reaseguro: de Wit (1982), Jablonowski (1991), Lemaire (1990), Caro (1997).

- Evaluación de la bondad de diversos métodos econométricos en la predicción de la siniestralidad, utilizando el concepto de decisión en ambiente borroso de Bellman y Zadeh (1970): Cummins y Derrig (1993).

- Tarificación y agrupación riesgos: Derrig y Ostaszewski (1995), Young (1996) y Caro (1999).

• Valoración financiera de seguros de vida y no vida con tipos de interés borrosos: Lemaire (1990), Ostaszewki (1993), Terceño *et al.* (1996) y de Andrés *et al.* (2001) en el campo de vida y Cummins y Derrig (1997) y Derrig y Ostaszewki (1997) en un contexto de no-vida.

• Ajuste de la Estructura Temporal de los Tipos de Interés con RB: de Andrés y Terceño (2003).

El resto del trabajo ha sido estructurado de la siguiente forma. En el siguiente epígrafe expondremos los instrumentos de LB que utilizaremos el trabajo y, seguidamente, expondremos el esquema de Benjamin y Eagles (1986) para la estimación de las IBNR. Posteriormente desarrollaremos nuestra metodología. Finalizamos extrayendo las conclusiones más relevantes acerca del trabajo desarrollado.

2. LÓGICA Y REGRESIÓN BORROSA

2.1. Conceptos básicos de lógica y aritmética borrosa

La LB se construye a partir del concepto de *subconjunto borroso*. Un subconjunto borroso $\widetilde{A}$ es un subconjunto definido sobre un conjunto de referencia X para el que el nivel de pertenencia de un elemento $x \in X$ a $\widetilde{A}$ acepta más grados que 0 o 1 (no pertenencia o pertenencia absoluta). Así, un subconjunto borroso $\widetilde{A}$ puede ser definido como $\widetilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$, donde $\mu_A(x)$ es la función de pertenencia, siendo una aplicación $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$. Por tanto, el nivel de pertenencia de un elemento x en $\widetilde{A}$ toma valores en [0,1], donde 0 supone la no pertenencia de x a $\widetilde{A}$ y 1 su absoluta pertenencia, pudiendo existir para x niveles de pertenencia intermedios (por ejemplo, 0.5).

Alternativamente, un subconjunto borroso $\widetilde{A}$ puede ser representado a través de sus *α-cortes*. Un α-corte es un conjunto ordinario que contiene a aquellos elementos de $\widetilde{A}$ cuyo grado de pertenencia es,

como mínimo, α. Para el subconjunto borroso $\widetilde{A}$, denotaremos un α-corte como A_α, siendo su expresión matemática: $A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \alpha\}$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

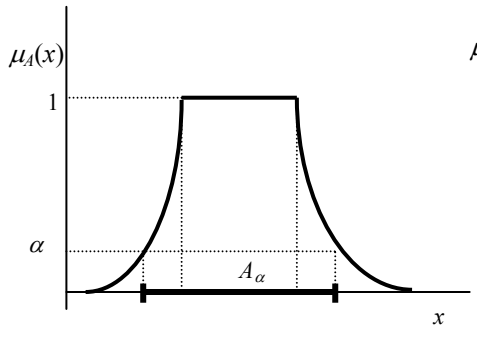

Figura 1. Número borroso $\widetilde{A}$

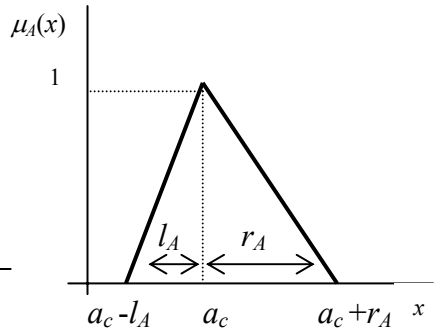

Figura 2. El NBT $\widetilde{A} = (a_C, l_A, r_A)$

Un *número borroso* (NB) $\widetilde{A}$, es un subconjunto borroso definido sobre los números reales (el conjunto referencial X es $\Re$) y es el principal instrumento de la LB para cuantificar magnitudes inciertas. Adicionalmente, un número borroso cumple dos condiciones. La primera de ellas es que es un subconjunto borroso normal, es decir, existe algún $x \in X$ para el cual $\mu_A(x) = 1$. En segundo lugar, debe ser convexo (es decir, sus α-cortes son conjuntos convexos en $\Re$, que implica que son intervalos cerrados). En la figura 1 se muestra la representación gráfica de un número borroso. En el eje de abcisas vienen dadas las "realizaciones" del NB, mientras que en el eje de ordenadas se representa el nivel de pertenencia (o verosimilitud) de dicha realización. También se representa un α-corte de $\widetilde{A}$, A_α, para un nivel α dado.

En aplicaciones prácticas, los números borrosos más utilizados son los *números borrosos triangulares* (NBT), ya que son fáciles de manipular aritméticamente y presentan una interpretación muy intuitiva. Nosotros denotaremos a un número borroso triangular $\widetilde{A}$ como $\widetilde{A} = (a, l_a, r_a)$ donde a es el centro y l_a y r_a los radios izquierdo y derecho respectivamente. Desde un punto de vista estadístico,

podríamos entender que si $\widetilde{A}$ es una variable aleatoria, a es la moda de la misma y l_a y r_a son las máximas desviaciones que se esperan respecto a la moda (son una suerte de semi-varianzas). Así, un NBT puede quedar caracterizado por su función de pertenencia, $\mu_A(x)$, o alternativamente, por sus α-cortes, A_α, como:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a-l_a}{l_a} & a-l_a < x \le a \\ \dfrac{a+r_a-x}{r_a} & a < x \le a+r_a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1)$$

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \ge \alpha\} = \left[\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)\right] = \left[a - l_a(1-\alpha), a + r_a(1-\alpha)\right] \quad (2)$$

Desde un punto de vista estadístico, mientras que la función de pertenencia puede interpretase como la función de densidad de una variable aleatoria, A_α puede interpretarse como un intervalo de confianza probabilístico, con un nivel de verosimilitud asociado de α. En la figura 2 se representa un NBT.

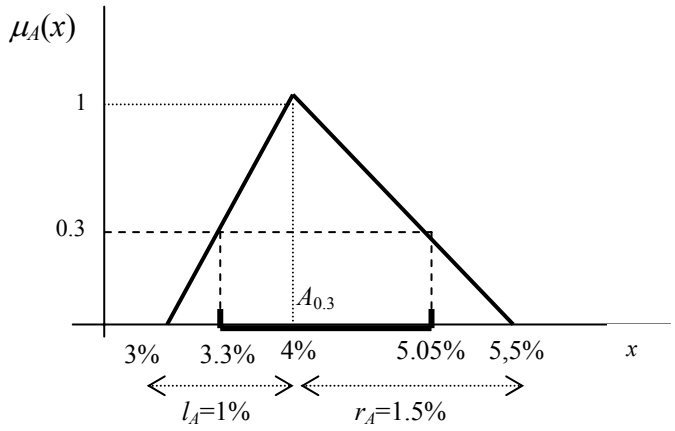

Figura 3. El NBT $\widetilde{A}$ = (4%,1%,1.5%)

Por ejemplo, supongamos que una estimación sobre el tipo de interés que se obtendrá con una determinada inversión durante un

determinado plazo, viene dada por la predicción "*el 4%, no esperándose desviaciones por debajo de más del 1%, ni por encima, de más del 1.5%".* Su representación mediante un NBT vendría dada de forma inmediata por la tripleta $\widetilde{A}$=(4%, 1%, 1.5%). En la figura 3 representamos a este número borroso. El 4% es el valor que tiene para el estimador la máxima presunción de cumplimiento. Su nivel de pertenencia en $\widetilde{A}$ es la máxima, 1. Asimismo, el estimador considera imposible la obtención de rendimientos inferiores al 3% o superiores al 5.5%, por lo que estos rendimientos tienen un nivel de pertenencia 0. El resto de rendimientos posibles (entre el 3% y el 5.5%), tienen un nivel de pertenencia que se gradúa de forma lineal, decreciendo a medida que se alejan del 4%, que es el más "verosímil". En la figura 3 también se representa el α-corte para un nivel de pertenencia α=0.3, $A_{0.3}$, que es el intervalo de confianza que contiene aquellos valores de $\widetilde{A}$ cuya pertenencia es al menos 0.3:

$A_{0,3}=\left[\underline{A}(0.3), \overline{A}(0.3)\right]$=[4%-1%(1-0.3), 4%+1.5%(1-0.3)]=[3.3%, 5.05%]

La combinación lineal de NBTs es un nuevo NBT[2]. Por tanto, si partimos de los NBT $\widetilde{A}_i = \left(a_i, l_{a_i}, r_{a_i}\right)$, i=1,2,...,n, el resultado de su combinación lineal:

$$\widetilde{B} = \sum_i k_i \widetilde{A}_i \text{ , } k_i \in \Re, \; i=1,2,...,n$$

será el NBT $\widetilde{B} = \left(b, l_b, r_b\right)$, cuyos centros y radios se obtienen como:

$$\widetilde{B} = \left(b, l_b, r_b\right) = \left(\sum_i k_i a_i \text{ , } \sum_{i|k_i \geq 0} |k_i| l_{a_i} + \sum_{i|k_i<0} |k_i| r_{a_i} \text{ , } \sum_{i|k_i \geq 0} |k_i| r_{a_i} + \sum_{i|k_i<0} |k_i| l_{a_i} \right) (3)$$

Sean $\widetilde{A}_1$=(2,1,1), $\widetilde{A}_2$=(3,2,3), $\widetilde{A}_3$=(1,0.5,2). Su combinación lineal $\widetilde{B} = \widetilde{A}_1$++2$\cdot \widetilde{A}_2$ -4$\cdot \widetilde{A}_3$, es el NBT $\widetilde{B} = (b,l_b,r_b)$=(4,13,9), donde, con (3)

[2] Ello es consecuencia de que la manipulación aritmética de subconjunto borrosos se realiza mediante el uso de convoluciones max-min, en lugar de convoluciones del tipo suma-producto, que son las utilizadas si operamos con variables aleatorias.

hemos obtenido el centro y los radios como: b=2+2·3-4·1=4; l_b=1+2·2+4·2=13; r_b=1+2·3+4·0.5=9.

Al efectuar operaciones aritméticas no lineales (como el producto) con NBTs, no obtendremos un NBT. No obstante, el producto de dos NBTs puede ser aproximado razonablemente bien a través de un NBT, tal como demuestran Dubois y Prade (1993). Así, para $\widetilde{A}_i = \left(a_i, l_{a_i}, r_{a_i}\right)$, i=1,2, si las realizaciones de ambos NBs son positivas, la aproximación de $\widetilde{B} = \widetilde{A}_1 \times \widetilde{A}_2$ es:

$$\widetilde{B} \approx \left(b, l_b, r_b\right) = \left(a_1 \cdot a_2, a_1 \cdot l_{a_2} + a_2 \cdot l_{a_1}, a_1 \cdot r_{a_2} + a_2 \cdot r_{a_1}\right) \qquad (4)$$

En el anexo de este trabajo se ofrece una justificación más detallada de la aproximación (4).

Por ejemplo, supongamos que para el próximo ejercicio, una empresa estima que el número de unidades vendidas de un determinado producto es el NBT $\widetilde{N}$ =(1000, 100, 50), siendo beneficio unitario que se estima por cada unidad: $\widetilde{U}$ =(4, 1, 0.5) unidades monetarias. El beneficio total obtenido con las ventas de dicho producto será el número borroso $\widetilde{B} = \widetilde{N} \cdot \widetilde{U}$, que no es un NBT, pero que queda aproximado con (4) por el NBT (b,l_b,r_b)=(4000,1400,700), donde:

b=1000·4=4000
l_b=1000·1+4·100=1400
r_b=1000·0.5+4·50=700

En muchos problemas, aunque estimemos las variables que lo describen mediante NBs, será necesario cuantificar las magnitudes que proyectamos mediante un valor cierto. En nuestro caso, esto ocurrirá cuando debamos determinar el valor definitivo de las IBNR, por ejemplo, para reflejar su valor en los estados contables del asegurador. Este problema es lo que se conoce como *desfuzzyficar* un NB, cuyo análogo estadístico consistiría en determinar una medida de posición de una variable aleatoria. Nosotros utilizaremos el concepto de valor esperado de Campos y González (1989). El valor esperado de

un NB $\widetilde{A}$, que denotaremos como $EV[\widetilde{A}, \beta]$, se obtiene introduciendo la aversión al riesgo del decisor a partir de un parámetro $0 \leq \beta \leq 1$ como:

$$EV[\widetilde{A}, \beta] = (1-\beta)\int_0^1 \underline{A}(\alpha)\mathrm{d}\alpha + \beta\int_0^1 \overline{A}(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

y para el NBT $\widetilde{A} = (a, l_a, r_a)$, entonces:

$$EV[\widetilde{A}, \beta] = a - (1-\beta)\frac{l_a}{2} + \beta\frac{r_a}{2} \qquad (5)$$

2.2. Regresión borrosa con coeficientes asimétricos

En este subepígrafe describimos el modelo de regresión borrosa de Ishibuchi y Nii (2001) que es el que utilizaremos para determinar las IBNR. Como en cualquier método de regresión, el objetivo de la RB es determinar una relación funcional entre una variable dependiente y un conjunto de variables independientes. Dicha relación, que se supone lineal, debe ser obtenida de la muestra de n observaciones: $\{(Y_1,X_1),(Y_2, X_2),\ldots,(Y_j,X_j),\ldots,(Y_n,X_n)\}$ donde X_j es la j-ésima observación de la variable explicativa, siendo $X_j = (X_{0j}, X_{1j}, X_{2j},..., X_{ij},..., X_{mj})$. Asimismo, $X_{0j} = 1\ \forall j$, y X_{ij} es el valor observado para la i-ésima variable de la j-ésima observación de la muestra. Por otra parte, Y_j es la j-ésima observación de la variable explicada con $j=1,2,\ldots,n$.

Así, debemos estimar la siguiente función con parámetros borrosos:

$$\widetilde{Y}_j = \widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_1 X_{1j} + ... + \widetilde{A}_m X_{mj}, j=1,2,...,n$$

donde $\widetilde{Y}_j$ es la estimación de Y_j con un NB tras ajustar los parámetros $\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1,..., \widetilde{A}_m$. Obsérvese que en la RB, la imprecisión que existe en la relación lineal no se introduce con un sumando de carácter estocástico, sino dentro de los coeficientes borrosos.

Si, como es usual, se supone que los parámetros son NBTs, es decir, $\widetilde{A}_i = (a_i, l_{a_i}, r_{a_i})$, i=0,1,…,m, entonces, la estimación de Y_j, $\widetilde{Y}_j$, es también un NBT que denotamos como $\widetilde{Y}_j = \left(y_j, l_{y_j}, r_{y_j}\right)$. A partir de (3), los centros y los radios de $\widetilde{Y}_j$, j=1,...,n se obtienen como:

$$y_j = a_0 + \sum_{i=1}^{m} X_{ij} a_i \tag{6a}$$

$$l_{y_j} = l_{a_0} + \sum_{\substack{i=1 \\ x_{ij}\geq 0}}^{m} \left|X_{ij}\right| l_{a_i} + \sum_{\substack{i=1 \\ x_{ij}<0}}^{m} \left|X_{ij}\right| r_{a_i} \tag{6b}$$

$$r_{y_j} = r_{a_0} + \sum_{\substack{i=1 \\ x_{ij}\geq 0}}^{m} \left|X_{ij}\right| r_{a_i} + \sum_{\substack{i=1 \\ x_{ij}<0}}^{m} \left|X_{ij}\right| l_{a_i} \tag{6c}$$

Para ajustar los parámetros borrosos $\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1, ..., \widetilde{A}_m$ debemos determinar, en primer lugar, los centros a_0, a_1,…,a_m mediante mínimos cuadrados ordinarios (MCO). Dichas estimaciones las simbolizaremos como $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$,…,$\hat{a}_m$. Posteriormente, debemos determinar los parámetros l_{a_i} y r_{a_i}, que deben, simultáneamente, minimizar la incertidumbre total de las estimaciones de Y_j, $\widetilde{Y}_j$ (es decir, sus radios), y maximizar el grado de inclusión de la observaciones (Y_j) en sus estimaciones ($\widetilde{Y}_j$). Así, si para el segundo objetivo se requiere un cumplimiento mínimo de α^*, el ajuste de los radios se realiza resolviendo el siguiente programa lineal:

$$\underset{r_{a_i}, l_{a_i}}{\text{Minimizar}}\ z = \sum_{j=1}^{n} l_{y_j} + \sum_{j=1}^{n} r_{y_j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{m} \left|X_{ij}\right| l_{a_i} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{m} \left|X_{ij}\right| r_{a_i} \tag{7a}$$

sujeto a:

$$y_j - l_{y_j}\left(1-\alpha^*\right) = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^{m}\hat{a}_i X_{ij} - \left(l_{a_0} + \sum_{\substack{i=1 \\ x_{ij}\geq 0}}^{m} l_{a_i}\left|X_{ij}\right| + \sum_{\substack{i=1 \\ x_{ij}<0}}^{m} r_{a_i}\left|X_{ij}\right| \right)\left(1-\alpha^*\right) \leq Y_j,\ j=1,2,...,n \quad (7b)$$

$$y_j + r_{y_j}\left(1-\alpha^*\right) = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^{m}\hat{a}_i X_{ij} - \left(r_{a_0} + \sum_{\substack{i=1 \\ x_{ij}\geq 0}}^{m} r_{a_i}\left|X_{ij}\right| + \sum_{\substack{i=1 \\ x_{ij}<0}}^{m} l_{a_i}\left|X_{ij}\right| \right)\left(1-\alpha^*\right) \geq Y_j,\ j=1,2,...,n \quad (7c)$$

$$l_{a_i}, r_{a_i} \geq 0 \qquad i=0,1,...,m \quad (7d)$$

Obsérvese que (7a) se construye sumando los radios de todas las estimaciones de las observaciones; esto es, de los NBTs $\widetilde{Y}_j$, j=1,2,...,n, que han sido obtenidos en (6b) y (6c). Además, los bloques de restricciones (7b) y (7c) son consecuencia del requerimiento de congruencia α^* y para su construcción se requiere tener en cuenta la expresión de los α-cortes de un NBT, (2) y de los radios

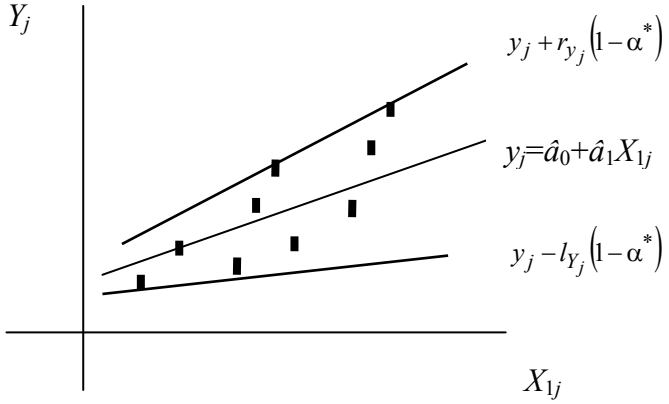

Figura 4. Forma en que la regresión borrosa se ajusta a una nube de puntos

correspondientes a $\widetilde{Y}_j$, obtenidos en (6b) y (6c). En cambio, (7d) asegura que los radios $l_{a_i}, r_{a_i}\ \forall i$ serán no negativos. En la figura 4

representamos la forma en que el modelo de regresión borrosa expuesto se ajusta a una nube de puntos. Este modelo únicamente incluye una variable explicativa; es decir, es: $\widetilde{Y}_j = \widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_1 X_{1j}$, j=1,2,...,n.

A continuación desarrollamos un ejemplo, donde debemos ajustar el modelo borroso $\widetilde{Y}_j = \widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_1 X_{1j}$ a una nube de cuatro puntos, donde las observaciones de la variable explicada y explicativa vienen dadas por $\{(Y_j,X_{1j})\}_{j=1,2,3,4}$={(3, 2); (3.5, 3); (4.5, 4); (4.75, 5)}. Así, la expresión que debemos ajustar a la nube de puntos la escribimos como:

$$\widetilde{Y}_j = \left(y_j, l_{y_j}, r_{y_j}\right) = \left(a_0, l_{a_0}, r_{a_0}\right) + \left(a_1, l_{a_1}, r_{a_1}\right) X_{1j}$$

Los pasos que se siguen en el ajuste del modelo son los siguientes:

1) En primer lugar, determinamos los centros a_0, a_1 mediante mínimos cuadrados ordinarios. Dichas estimaciones, que simbolizamos como $\hat{a}_0$ y $\hat{a}_1$ son, respectivamente, $\hat{a}_0$=1.75 y $\hat{a}_1$=0.625. Así, en (6a), y_j=1.75 +0.625X_{1j}.

2) Posteriormente, debemos estimar los radios de los parámetros borrosos $\widetilde{A}_0$ y $\widetilde{A}_1$, l_{a_i} y r_{a_i}, i=0, 1. Partiendo de la formulación del programa lineal (7a)-(7d), y fijando un nivel de inclusión de las observaciones en sus estimaciones borrosas α^*=0.5, podemos escribir el programa que deberemos resolver como:

3)

$$\underset{l_{a_0}, l_{a_1}, r_{a_0}, r_{a_1}}{\text{Minimizar}} \; z = 4\, l_{a_0} + 14\, l_{a_1} + 4\, r_{a_0} + 14\, r_{a_1}$$

sujeto a:

$1{,}75+0.625\cdot 2 - (l_{a_0} + l_{a_1}\cdot 2)(1-0.5) \leq 3$

$1{,}75+0.625\cdot 3 - (l_{a_0} + l_{a_1}\cdot 3)(1-0.5) \leq 3.5$

$1{,}75+0.625\cdot 4 - (l_{a_0} + l_{a_1}\cdot 4)(1-0.5) \leq 4.5$

$1{,}75+0.625\cdot 5 - (l_{a_0} + l_{a_1}\cdot 5)(1-0.5) \leq 4.75$

$1{,}75+0.625\cdot 2+(r_{a_0}+r_{a_1}\cdot 2)(1-0.5)\geq 3$

$1{,}75+0.625\cdot 3+(r_{a_0}+r_{a_1}\cdot 3)(1-0.5)\geq 3.5$

$1{,}75+0.625\cdot 4+(r_{a_0}+r_{a_1}\cdot 4)(1-0.5)\geq 4.5$

$1{,}75+0.625\cdot 5+(r_{a_0}+r_{a_1}\cdot 5)(1-0.5)\geq 4.75$

$l_{a_0}, l_{a_1}, r_{a_0}, r_{a_1}\geq 0$

Así, la expresión finalmente obtenida es:

$$\widetilde{Y}_j=\left(y_j, l_{y_j}, r_{y_j}\right)=(1.75,\ 0.25,\ 0)+(0.625,\ 0,\ 0.125)\ X_{1j}$$

3. DETERMINACIÓN DE LAS IBNR UTILIZANDO REGRESIÓN LINEAL

Para la determinación de las IBNR suele partirse de la información sobre la evolución de las reclamaciones ordenada en un triángulo *run-off* como el de la tabla 1.

		Año de ocurrencia									
		1	**2**	**...**	j^*	j^*+1	**...**	j	**...**	n**-1**	n
Año de desarrollo	**1**	$Z_{1,1}$	$Z_{1,2}$	…	Z_{1,j^*}	Z_{1,j^*+1}	...	$Z_{1,j}$	…	$Z_{1,n-1}$	$Z_{1,n}$
	2	$Z_{2,1}$	$Z_{2,2}$	…	Z_{2,j^*}	Z_{2,j^*+1}	...	$Z_{2,j}$	…	$Z_{2,n-1}$	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮		
	i	$Z_{i,1}$	$Z_{i,2}$	...	Z_{i,j^*}	Z_{i,j^*+1}	...	Z_{i,j^*}	...		
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮			
	$n-j+1$	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	$Z_{n-j+1,j}$			
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮					
	m**-1**	$Z_{m-1,1}$	$Z_{m-1,2}$	...	Z_{m-1,j^*}	Z_{m-1,j^*+1}					
	m	$Z_{m,1}$	$Z_{m,2}$	...	Z_{m,j^*}						

Tabla 1. Triángulo *run-off*

En la tabla 1, $Z_{i,j}$ es el coste acumulado de la siniestralidad ocurrida en el año j (nótese que disponemos de una historia de n años de ocurrencia) al final del año de desarrollo i (obsérvese que la siniestralidad para un año se desarrolla en m años), donde j=1 denota el año de ocurrencia más lejano y j=n el último disponible. Por supuesto, $n\geq m$. Asimismo, como j^* hemos denotado al último año de

ocurrencia sobre el cual se dispone información para todos los m años de desarrollo. Así, para j^*+1 se dispone información para los m-1 años siguientes de desarrollo y, en general, para $j>j^*$ se dispondrá información sobre los $m-j+j^*$ primeros años de desarrollo. Obviamente, para $j>j^*$ no se conoce el coste de la siniestralidad acumulada durante los años de desarrollo $i= m-j+j^*+1,...,m$ y por tanto, dicha siniestralidad debe ser inferida.

Un método muy útil para inferir dicha siniestralidad es el propuesto por Benjamin y Eagles (1986), B-E en adelante, que es una generalización del *chain ladder*. Éste parte de la hipótesis de que la evolución de las reclamaciones de los siniestros ocurridos en el año j–ésimo desde el i-ésimo año hasta el i+1 año de desarrollo puede ser aproximada a partir de la relación lineal:

$$Z_{i+1,j} = b_i + c_i Z_{i,j} + \varepsilon_i \tag{8}$$

donde ε_i es el término de perturbación aleatorio, debiéndose estimar los coeficientes[3] b_i y c_i mediante MCO. Por supuesto, las estimaciones de b_i y c_i, $\hat{b}_i$ y $\hat{c}_i$, deben ser obtenidas a partir de las observaciones del triángulo *run off* con los pares variable dependiente/independiente: $\{(Z_{i+1,j}; Z_{i,j})\}$ i=1,2,...,m-1, j=1,2,...,n-i

Una vez ajustada la expresión (5), debemos obtener la estimación del montante total de la siniestralidad acumulada al final de los m años de desarrollo, para cada uno de los n años de ocurrencia, $\hat{Z}_{m,j}$:

$$\hat{Z}_{m,j} = \begin{cases} Z_{m,j} & \text{si} j \le j^* \\ \hat{b}_{m-1} + \hat{c}_{m-1}\left(\hat{b}_{m-2} + \hat{c}_{m-2}\left[..\hat{b}_{m-j+j^*+1} + \hat{c}_{m-j+j^*+1}\left(\hat{b}_{m-j+j^*} + \hat{c}_{m-j+j^*} Z_{m-j+j^*,j}\right)\right]\right) & \text{si} j > j^* \end{cases} \tag{9}$$

La IBNR que debe dotarse para el j-ésimo año de ocurrencia, P_j, se hallará como la diferencia entre la siniestralidad acumulada proyectada para los m años de desarrollo, $\hat{Z}_{m,j}$, y la siniestralidad acumulada conocida, que denominaremos como Z_j^*. Es decir:

[3] El método *chain ladder* considera que el término independiente de (5) es nulo (b_i=0, i=1,2,...,m-1).

$$P_j = \hat{Z}_{m,j} - Z_j^* \tag{10}$$

donde:

$$Z_j^* = \begin{cases} Z_{m,j} & \text{si } j \le j^* \\ Z_{m-j+j^*,j} & \text{si } j > j^* \end{cases} \tag{11}$$

Así, la IBNR para todos los años de ocurrencia considerados, P, es:

$$P = \sum_{j=1}^{n} P_j \tag{12}$$

		Año de ocurrencia											
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Año de desarrollo	**1**	280	296	502	398	363	719	489	546	892	751	1097	580
	2	894	922	1274	1127	1034	1834	1525	1831	2635	2247	2715	
	3	1147	1254	1554	1426	1248	2278	2018	2404	3437	2869		
	4	1236	1320	1637	1502	1335	2378	2143	2539	3611			
	5	1259	1348	1670	1539	1362	2405	2209	2569				
	6	1267	1355	1675	1552	1378	2418	2213					
	7	1275	1357	1688	1560	1382	2424						
	8	1278	1361	1689	1561	1383							
	9	1278	1362	1690	1561								

Tabla 2. Triángulo *run off* tomado de Benjamin y Eagles (1986)

A continuación desarrollamos un ejemplo con los datos del trabajo de B-E, que vienen dados en la tabla 2.

El valor obtenido para los parámetros de (8) viene dado en la tabla 3.

	Año de desarrollo							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
$\hat{b}_i$	214.391	-36.378	24.825	19.204	11.404	4.773	10.267	-0.980
$\hat{c}_i$	2.476	1.305	1.042	1.008	0.999	1.001	0.994	1.001

Tabla 3. Estimaciones MCO de (5).

En la tabla 4 aparecen las IBNR a dotar para cada uno de los años de ocurrencia y la IBNR total, según la estimaciones realizadas para (8).

IBNR para el año de ocurrencia *j* (P_j)												**IBNR total**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**(*P*)**
0	0	0	0	0.4	-2.1	6.5	13.6	57.9	202.3	1023.9	1705.1	3007.7

Tabla 4. Estimaciones de la IBNR a partir de la tabla 2

Con el fin de poder comparar nuestros resultados de las IBNR de la tabla 4 y los que obtendremos con regresión borrosa, con los que ofrecen los modelos más clásicos como el *chain ladder* y algunos de los basados en el *link ratio* ofrecemos, en la tabla 5, el triángulo de *link ratios* que se deriva del triángulo *run off* de la tabla 2. En la tabla 6 se ofrece el *link ratio* considerado finalmente para cada año de desarrollo, en cada método ensayado: el máximo incremento, la media aritmética y el *chain ladder* (en este caso, los ratios no se obtienen de la tabla 5, sino de la tabla 2). Asimismo, también se ofrece la IBNR que se deduce de cada método ensayado.

		Año de ocurrencia											
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Año de desar-rollo	**1**	3.1929	3.1149	2,5378	2.8317	2.8485	2.5508	3.1186	3.3535	2.9540	2.9920	2.4749	-
	2	1.2830	1.3601	1.2198	1.2653	1.2070	1.2421	1.3233	1.3129	1.3044	1.2768		
	3	1.0776	1.0526	1.0534	1.0533	1.0697	1.0439	1.0619	1.0562	1.0506			
	4	1.0186	1.0212	1.0202	1.0246	1.0202	1.0114	1.0308	1.0118				
	5	1.0064	1.0052	1.0030	1.0084	1.0117	1.0054	1.0018					
	6	1.0063	1.0015	1.0078	1.0052	1.0029	1.0025						
	7	1.0024	1.0029	1.0006	1.0006	1.0007							
	8	1.0000	1.0007	1.0006	1.0000								
	9	-	-	-	-								

Tabla 5. *Link ratios* del triángulo *run off* de Benjamin y Eagles (1986)

Año de desarrollo	Máximo incremento	Media aritmética	Chain ladder
1	5.1846	4.0600	3.9730
2	1.5460	1.3969	1.3949
3	1.1367	1.0918	1.0886
4	1.0549	1.0323	1.0311
5	1.0234	1.0122	1.0116
6	1.0115	1.0061	1.0060
7	1.0037	1.0018	1.0017
8	1.0007	1.0003	1.0003
IBNR (*P*)	4595.36	3282.04	3210.40

Tabla 6. *Link ratios* para los diversos años de desarrollo para diversos métodos y las IBNR estimadas en cada caso

4. DETERMINACIÓN DE LAS IBNR UTILIZANDO REGRESIÓN BORROSA

En este apartado exponemos nuestra propuesta de determinación de las IBNR, que será una adaptación de la propuesta en B-E pero implementada con instrumentos de RB.

Entendemos que la utilización de la metodología expuesta en 3 presenta diversos problemas. En primer lugar, la utilización de MCO es bastante fiable cuando se dispone de una muestra amplia, pero ello no es aconsejable en nuestro problema. Obsérvese que en el ejemplo desarrollado, en el mejor de los casos hemos partido de 11 observaciones. Por otra parte, la utilización de toda la información disponible en el triángulo IBNR requiere de la estimación del montante de la siniestralidad acumulada para cada uno de los años de ocurrencia $\hat{Z}_{m,j}$, j=1,2,...,n a través de variables aleatorias o al menos, de intervalos de confianza probabilísticos, dada la existencia de término de error aleatorio en (8), lo cual implica un alto coste en términos computacionales, ya que su aproximación requerirá de simulación estocástica.

Así, asumiremos que la evolución de la siniestralidad acumulada para el año de ocurrencia *j* del *i*-ésimo hasta el (*i*+1)-ésimo año de desarrollo puede ser ajustada a través de la relación lineal borrosa:

$$\widetilde{Z}_{i+1,j} = \widetilde{b}_i + \widetilde{c}_i Z_{i,j} \tag{13}$$

Si partimos de que $\widetilde{b}_i = \left(b_i, l_{b_i}, r_{b_i}\right)$ y $\widetilde{c}_i = \left(c_i, l_{c_i}, r_{c_i}\right)$, reescribimos (13) a partir de (3) como:

$$\widetilde{Z}_{i+1,j} = \left(Z_{i+1,j}, l_{Z_{i+1,j}}, r_{Z_{i+1,j}}\right) = \left(b_i, l_{b_i}, r_{b_i}\right) + \left(c_i, l_{c_i}, r_{c_i}\right) Z_{i,j} = \left(b_i + c_i Z_{i,j}, l_{b_i} + l_{c_i} Z_{i,j}, r_{b_i} + r_{c_i} Z_{i,j}\right) \tag{14}$$

Por supuesto, los centros y los radios de $\widetilde{b}_i$ y $\widetilde{c}_i$ deben ser estimados con regresión borrosa, con la metodología expuesta en 2.2.

La estimación del coste final de los siniestros ocurridos durante el año *j*, $\hat{\widetilde{Z}}_{m,j}$, se obtiene evaluando (9) con NBTs; es decir:

$$\hat{\widetilde{Z}}_{m,j} = \begin{cases} Z_{m,j} & \text{si } j \le j^* \\ \widetilde{b}_{m-1} + \widetilde{c}_{m-1}\left\{\widetilde{b}_{m-2} + \widetilde{c}_{m-2}\left[\ldots \widetilde{b}_{m-j+j^*+1} + \widetilde{c}_{m-j+j^*+1}\left(\widetilde{b}_{m-j+j^*} + \widetilde{c}_{m-j+j^*} Z_{m-j+j^*,j}\right)\right]\right\} & \text{si } j > j^* \end{cases} \tag{15}$$

Obsérvese que $\hat{\widetilde{Z}}_{m,j}$ es un valor cierto si $j \le j^*$, y un número borroso en caso contrario. También es fácil comprobar que no será un NBT cuando $j > j^*+1$. No obstante, aplicando la aproximación triangular (4) en cada producto de NBTs del cálculo recursivo (15), obtendremos una buena aproximación a $\hat{\widetilde{Z}}_{m,j}$ con un NBT, y así:

$$\hat{\widetilde{Z}}_{m,j} = \left(\hat{Z}_{m,j}, l_{\hat{Z}_{m,j}}, r_{\hat{Z}_{m,j}}\right) \tag{16}$$

A partir de (16) y (10) puede inferirse la cuantía que debe provisionarse[4] para los siniestros acaecidos durante el año *j*-ésimo, que denotaremos como $\widetilde{P}_j$:

$$\widetilde{P}_j = \left(P_j, l_{P_j}, r_{P_j}\right) = \hat{\tilde{Z}}_{m,j} - Z_j^* = \left(\hat{Z}_{m,j} - Z_j^*, l_{\hat{Z}_{m,j}}, r_{\hat{Z}_{m,j}}\right) \tag{17}$$

La IBNR total será el NBT $\widetilde{P} = \left(P, l_P, r_P\right)$, que se obtiene sumando las provisiones parciales de cada año de ocurrencia *j*=1,2,...,*n*, tal como indica (12), siguiendo la regla (3):

$$\widetilde{P} = \left(P, l_P, r_P\right) = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{P}_j = \sum_{j=1}^{n} \left(P_j, l_{P_j}, r_{P_j}\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} P_j, \sum_{j=1}^{n} l_{P_j}, \sum_{j=1}^{n} r_{P_j}\right) \tag{18}$$

Para determinar la cuantía final de la IBNR a efectos contables, deberemos reducir $\widetilde{P}$ a un número cierto P^*. Para ello, proponemos utilizar el concepto de valor esperado de un número borroso, cuya expresión para NBTs, viene dada en (5). En este caso, β debe fijarse a partir de la necesaria prudencia que debe tener el actuario, es decir, debería cumplirse en (5) que β>0.5.

A continuación desarrollamos la aplicación de nuestro método al triángulo *run-off* de la tabla 2. El valor estimado para los coeficientes de (13) con un nivel de inclusión exigido en la regresión de α^*=0.5, vienen dados por la tabla 5.

[4] Obsérvese que Z_j^* puede denotarse como el NBT $Z_j^*=(Z_j^*, 0, 0)$.

		$\widetilde{b}_i = (b_i, l_{b_i}, r_{b_i})$	$\widetilde{c}_i = (c_i, l_{c_i}, r_{c_i})$
Año de desarrollo	**1**	(214.391, 312.318, 529.565)	(2.476, 0.108, 0)
	2	(-36.378, 113.445, 174.063)	(1.305, 0.025, 0)
	3	(24.825, 0.923, 30.989)	(1.042, 0.018, 0)
	4	(19.204, 1.066, 0)	(1.008, 0.010, 0.027)
	5	(11.404, 6.612, 12.386)	(0.999, 0.001, 0)
	6	(4.773, 9.019, 0)	(1.001, 0.0.007)
	7	(10.267, 2.801, 2.914)	(0.994, 0, 0)
	8	(-0.980, 0, 1.224)	(1.001, 0.001, 0)

Tabla 7. Resultados de la regresión borrosa para los coeficientes de los años de desarrollo

A continuación ejemplificamos el procedimiento de obtención de los coeficientes de la tabla 7, detallando el procedimiento de ajuste de los del año de desarrollo 5. Según (13) y (14), la acumulación de la siniestralidad en el *j*-ésimo año de ocurrencia desde el año de desarrollo 5 al 6, viene dado por la relación:

$$\widetilde{Z}_{6,j} = \widetilde{b}_5 + \widetilde{c}_5 Z_{5,j} = (b_5, l_{b_5}, r_{b_5}) + (c_5, l_{c_5}, r_{c_5}) Z_{5,j} = \\ = (b_5 + c_5 Z_{5,j}, l_{b_5} + l_{c_5} Z_{5,j}, r_{b_5} + r_{c_5} Z_{5,j})$$

Los centros de $\widetilde{b}_5$ y $\widetilde{c}_5$, b_5 y c_5, se habrán determinado previamente mediante MCO y son b_5=11.404 y c_5=0.999 (ver tabla 3). Para determinar los radios de $\widetilde{b}_5$ y $\widetilde{c}_5$, deberemos resolver el siguiente programa lineal, delimitado por (7a), (7b), (7c) y (7d):

$$\underset{l_{b_5}, l_{c_5}, r_{b_5}, r_{c_5}}{\text{Minimizar}} \; z = 7\, l_{b_5} + 11.792\, l_{c_5} + 7\, r_{b_5} + 11.792 \cdot r_{c_5}$$

sujeto a:

$$11.404 + 0.999 \cdot 1259 - (l_{b_5} + l_{c_5}\, 1259)(1-0.5) \le 1267$$
$$11.404 + 0.999 \cdot 1348 - (l_{b_5} + l_{c_5}\, 1348)(1-0.5) \le 1355$$
$$\ldots$$
$$11.404 + 0.999 \cdot 2209 - (l_{b_5} + l_{c_5}\, 2209)(1-0.5) \le 2213$$

$11.404+0.999\cdot 1259+(r_{b_5}+r_{c_5}\,1259)(1-0.5)\geq 1267$

$11.404+0.999\cdot 1348+(r_{b_5}+r_{c_5}\,1348)(1-0.5)\geq 1355$

...

$11.404+0.999\cdot 2209+(r_{b_5}+r_{c_5}\,2209)(1-0.5)\geq 2213$

$l_{b_5}, l_{c_5}, r_{b_5}, r_{c_5}\geq 0$

Obteniéndose finalmente: l_{b_5}=6.612; l_{c_5}=12.386; r_{b_5}=0.001; r_{c_5}=0.

	IBNR para el año de ocurrencia *j* ($\widetilde{P}_j$)												**IBNR total**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**($\widetilde{P}$)**
P_j	0	0	0	0	0.4	-2.1	6.5	13.6	57.9	202.3	1023.9	1705.1	3007.7
l_{P_j}	0	0	0	0	1	4.6	13.5	23.8	61.9	109.0	317.2	759.1	1290.2
r_{P_j}	0	0	0	0	1.2	4.1	20.1	35.1	140.1	150.8	355.7	1029.4	1736.6

Tabla 8. Estimaciones de la IBNR a partir de los datos de la tabla 2

Las IBNR estimadas para cada año de ocurrencia y la IBNR total, se observan en la tabla 8 y se hallan con los datos de las tablas 2 y 7. Puede observarse que para los 4 primeros años de ocurrencia, el proceso acumulativo de la siniestralidad ya ha sido completado, por lo que la provisión que debe dotarse es 0. Para el 5º año de ocurrencia, *j*=5, únicamente queda un año para completar todo el proceso de la siniestralidad, ya que el último valor conocido de la siniestralidad acumulada es $Z_{8,5}=Z_5^*=1383$. Así, utilizando (15) y (3) y los parámetros de la tabla 7, se observa que la siniestralidad acumulada estimada al final de todos los años de desarrollo, $\hat{\widetilde{Z}}_{9,5}$, es:

$$\hat{\widetilde{Z}}_{9,5}=\left(\hat{Z}_{9,5}, l_{\hat{Z}_{9,5}}, r_{\hat{Z}_{9,5}}\right)=(-0.98,\ 0,\ 1.224)+(1.001,\ 0.001,0)\cdot 1383=$$
$$=(1383.41,\ 1,\ 1.2)$$

Por tanto, con (17) se obtiene el valor de las IBNR parciales correspondientes al año de ocurrencia *j*=5, $\widetilde{P}_5$:

$$\widetilde{P}_5=\left(P_5, l_{P_5}, r_{P_5}\right)=(1383.4,\ 1,\ 1,2)-1383=(0.4,\ 1,\ 1,2)$$

En cambio, en el año de ocurrencia j=12, quedan 8 años para completar el proceso de la siniestralidad, ya que únicamente conocemos la siniestralidad del primer año de desarrollo $Z_{1,12}=Z_{12}^{*}$=580. Utilizando todos los parámetros borrosos de la tabla 5, se obtiene $\hat{\tilde{Z}}_{9,12}$ aplicando (3) y (4) en (15) como:

$$\hat{\tilde{Z}}_{9,12}=\left(\hat{Z}_{9,12},l_{\hat{Z}_{9,12}},r_{\hat{Z}_{9,12}}\right)=(-0.98,\ 0,\ 1.224)+(1.001,\ 0.001,\ 0)\cdot\{(10.267,\ 2.801,\ 2.914)+$$

$$+(0.994,0,0)[...(-36.378,\ 113.445,\ 174.063)+(1.305,\ 0.025,\ 0)\cdot((214.391,\ 312.318,\ 529.565)+$$

$$+(2.476,\ 0.108,\ 0)\cdot 580)]\}=(2285.1,\ 759.1,\ 1029.4)$$

Finalmente, el valor de las IBNR parciales correspondientes al año de ocurrencia 12, $\tilde{P}_{12}$, se obtienen con (17) como:

$$\tilde{P}_{12}=\left(P_{12},l_{P_{12}},r_{P_{12}}\right)=(2285.1,\ 759.1,\ 1029.4)-580=(1705.1,\ 759.1,\ 1029.4)$$

En la tabla 8 se observa que la IBNR final ha quedado ajustada por el NBT $\tilde{P}$=(3007.7, 1290.2, 1736.6). Es decir, se considera que, a partir de la experiencia pasada, el valor más verosímil para las IBNR es 3007.7, pero éste valor podría desviarse por debajo en 1290.2 unidades monetarias (hasta 1717.5) y por encima, hasta 1736.6 unidades monetarias (hasta 4744.3). Es decir, todos los posibles valores obtenidos para las IBNR incluyen los estimados en el epígrafe 3 con los métodos clásicos ensayados – ver tabla 6- y, por supuesto, con la estimación puntual que hemos realizado con B-E. Obviamente, el actuario debe acabar fijando un valor definitivo para las IBNR (por ejemplo, para reflejarlo en los estados contables). Su cuantificación debe ser prudente y a la vez, coherente, con los datos disponibles. Por ejemplo, para un nivel de aversión al riesgo β=1, la IBNR final (P^{*}) se calcula con (5) como:

$$P^{*}=EV[\tilde{P},\ 1]=3007.7-(1-1)\cdot\frac{1290.2}{2}+1\cdot\frac{1736.6}{2}=3876$$

5. CONCLUSIONES

Dada la débil información (por su escasez) que debe utilizarse en la determinación de las IBNR, entendemos que la aplicación en su cálculo de la lógica borrosa es una alternativa válida a los métodos estocásticos; que, en cualquier caso, ofrecen indudablemente una respuesta igualmente adecuada al problema de estimar las IBNR. En última instancia, tanto nuestro método como con los estocásticos permiten estimar tanto el valor más "verosímil" de las provisiones como su variabilidad. Este aspecto es muy importante para el actuario, ya que le permite determinar los recargos de seguridad a aplicar de manera fundamentada. El funcionamiento de nuestro método es muy similar al de muchos métodos estocásticos. En nuestro caso, las IBNR quedan descritas mediante NBs (que vienen caracterizados por sus funciones de pertenencia), mientras que con los métodos estocásticos, las IBNR quedarían estimadas a través de variables aleatorias (caracterizadas por tanto, por distribuciones de probabilidad).

Así, al igual que los métodos estocásticos, entendemos que nuestro método es más completo que los métodos clásicos (*chain ladder*, los basados en el *link ratio*, etc.) ya que estos últimos, a partir de la información disponible, únicamente ofrecen estimaciones puntuales de las IBNR.

Concretamente, en nuestro trabajo hemos propuesto el uso la regresión borrosa y la aritmética de números borrosos para la estimación final de las IBNR. Como se ha podido comprobar, su empleo permite trabajar con la incertidumbre asociada a las estimaciones (obtenemos una estimación de la IBNR final mediante un número borroso) con un coste computacional que creemos que es muy aceptable.

Para determinar el montante final de las IBNR (por ejemplo, a efectos de reflejarlo en los estados contables del asegurador), será necesario reducir nuestra estimación borrosa a un valor cierto, de igual forma que las estimaciones de las IBNR estocásticas deben ser reducidas a algún valor concreto (la esperanza matemática, un cuantil, etc.). Nuestra propuesta consiste en la utilización del concepto de valor esperado, que permite introducir de forma sencilla e intuitiva la prudencia del actuario en la determinación de las provisiones.

6. BIBLIOGRAFÍA

BELLMAN, R.E. y L.A. ZADEH (1970). Decision Making in a fuzzy environment. *Management Sciences* 17, B141-B164.

BENJAMIN, S. y L.M. EAGLES (1986). Reserves in Lloyd's and the London market. *Journal of the institute of actuaries*. 113, 2, 197-257.

CAMPOS, L.M. y A. GONZÁLEZ (1989). A subjective approach for ranking fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 29, 145-153.

CARO, R. (1997). Una aproximación a una operación de seguro de autos mediante la técnica fuzzy. *Anales del instituto español de actuarios*, 3, 3º época.

CARO, R. (1999). *Modelo multivariante en la tarificación del seguro de automóvil*. Universidad Pontificia Comillas.

CUMMINS, J.D. y R.A. DERRIG (1993). Fuzzy trends in property-liability insurance claim costs. *Journal of Risk and Insurance* 60,3, 429-465.

CUMMINS, J.D. y R.A. DERRIG (1997). Fuzzy financial pricing of property-liability insurance. *North American Actuarial Journal* 1, 4, 21-44.

DE ANDRÉS, J.; M.G. BARBERÀ; A. FERNÁNDEZ y A. TERCEÑO (2001). Analysis of the life insure's solvency in whole life annuities using fuzzy parameters*, Actas del VIII Congreso de la Sociedad Internacional de Gestión y Economía Fuzzy* (SIGEF), 343-346 (long abstract).

DE ANDRÉS, J y A. TERCEÑO (2003). Aplicaciones actuariales de la teoría de los subconjuntos borrosos*. Cuadernos del Instituto de Investigaciones de Estadística y Matemática Actuarial de la Universidad de Buenos Aires* 5, 1-40.

DE ANDRÉS, J y A. TERCEÑO (2003). Applications of Fuzzy Regression in Actuarial Analysis*. Journal of Risk and Insurance* 70, 4, 665-699.

DE WIT, G.W. (1982). Underwriting and uncertainty. *Insurance: Mathematics and Economics* 1, 277-285.

DERRIG, R.A. y K. OSTASZEWSKI (1995). Fuzzy techniques of pattern recognition in risk and claim classification. *Journal of Risk and Insurance* 62, 447-482.

DERRIG, R.A. y K. OSTASZEWSKI (1997). Managing the tax liability of a property liability insurance company. *Journal of Risk and Insurance* 64, 695-711.

DERRIG, R.A. y K OSTASZEWSKI (1998). Fuzzy sets methodologies in Actuarial Science. En: Zimmermann, H.-J. (ed.): *Practical applications of fuzzy technologies.* Kluwer Academic Publishers, 531-556.

DUBOIS, D. y H. PRADE (1980). *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. Academic Press.

DUBOIS, D.; PRADE, H. (1993). Fuzzy numbers: an overview. En Dubois, D., Prade, H.; Yager, R.R. (eds.). *Fuzzy sets for intelligent systems.* Morgan Kaufmann Publishers. San Mateo (California), 113-148.

ENGLAND, P.D. y R.J. VERRALL (1999). "Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claim reserving". *Insurance: Mathematics and Economics* 25, 281-293.

ENGLAND, P.D. y R.J. VERRALL (2002*). Stochastic claims reserving in general insurance*. Institute of Actuaries. Disponible en http://www.actuaries.org.uk/ sessional/sm0201.pdf.

GIL, J.A. (1995). Provisión para siniestros pendientes. Métodos de cálculo. *Previsión y Seguro* 44, 21-39.

INSTITUTE OF ACTUARIES (1989). *Claims reserving manual*. Institute of Actuaries (London).

ISHIBUCHI, H. y M. NII (2001). Fuzzy regression using asymmetric fuzzy coefficients and fuzzified neural networks. *Fuzzy Sets and Systems* 119, 273-290.

JABLONOWSKI, M. (1991). Fuzzy logic and insurance decisions. *CPCU Journal* September, 181-187.

KREMER, E. (1982). "IBNR claims and the two-way of ANOVA". *Scandinavian Actuarial Journal*, 47-55.

LEMAIRE, J. (1990). Fuzzy insurance. *Astin Bulletin* 20, 33-55.

MACK, T. (1993). "Distribution-free calculation of the standard error of chain-ladder reserve estimates". *Astin Bulletin* 23, 213-223.

OSTASZEWSKI, K. (1993). *An investigation into possible applications of fuzzy sets methods in actuarial science.* Society of Actuaries.

RENSHAW, A.E. (1989). "Chain-ladder modelling and interactive modelling (claims reserving and GLIM)". *Journal of the Institute of Actuaries* 116. 559-587.

STRAUB, E. (1997). *Non-life insurance mathematics*. Springer.
TAYLOR, G.C. (1986). *Claims reserving in non-life insurance*. North-Holland.
TAYLOR, G.; G. McGUIRE, y A. GREENFIELD (2003). *Loss reserving: past, present and future.* Centre for Actuarial Studies of the University of Melbourne.
TERCEÑO, A.; G.BARBERÀ; J. DE ANDRÉS, y C. BELVIS (1996). Fuzzy methods incorporated to the study of personal insurances. *Fuzzy Economic Review* 1, 2, 105-119.
TSENG, F.-M.; G.-H. TZENG; H.-C. YU y B. J.-C. YUAN (2001). Fuzzy ARIMA model for forecasting the foreign exchange market. *Fuzzy Sets and Systems* 118, 9-19.
VAN EEGHEN, J. (1981). *Loss Reserving methods, Surveys on actuarial studies 1*. Nationale-Nederlanden.
VERRALL, R.J. (1989). "A space state representation of the chain ladder model". *Journal of the Institute of Actuaries* 116, 589-610.
VERRALL, R.J. (2000). "An investigation into strochastic claims reserving models and the chain-ladder technique". *Insurance: Mathematics and Economics* 19, 31-43.

ANEXO

En este anexo justificamos la aproximación triangular (4) del epígrafe 2.1. para el producto de dos números borrosos triangulares (NBTs). Concretamente, para $\widetilde{A}_i = \left(a_i, l_{a_i}, r_{a_i}\right)$, i=1,2, si las realizaciones de ambos números borrosos (NBs) son positivas, la aproximación de $\widetilde{B} = \widetilde{A}_1 \times \widetilde{A}_2$ que se propone es:

$$\widetilde{B} \approx \left(b, l_b, r_b\right) = \left(a_1 \cdot a_2, a_1 \cdot l_{a_2} + a_2 \cdot l_{a_1}, a_1 \cdot r_{a_2} + a_2 \cdot r_{a_1}\right) \qquad (1A)$$

La aproximación (1A) se puede hacer extensiva a los denominados números borrosos L-R, que son una generalización NBTs. Un NB L-R $\widetilde{A}$, necesita de la definición de su centro, a y las desviaciones a la izquierda y derecha, $l_a \geq 0$ y $r_a \geq 0$, respectivamente, cuyo significado es el mismo que para los NBTs. Así, denotaremos a un NB L-R $\widetilde{A}$ como $\widetilde{A}=(a,l_a,r_a)_{LR}$. Para acabar de construir su función de pertenencia debemos definir dos funciones reales con imagen en $[0,1]$, $L(x)$ y $R(x)$ –denominadas funciones forma a la izquierda y a la derecha- que cumplen las condiciones:

$L(0)=R(0)=1$ (2A)

$L(x)=L(-x)$; $R(x)=R(-x)$ (3A)

L y R son no crecientes en $[0, \infty)$ (4A)

$$\lim_{x\to\infty} L(x) = \lim_{x\to\infty} R(x) = 0 \qquad (5A)$$

Entonces, la función de pertenencia de $\widetilde{A}$, $\mu_A(x)$, queda definida como:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a-x}{l_a}\right) & \text{para } x \leq a \\ R\left(\dfrac{a-x}{r_a}\right) & \text{para } x \geq a \end{cases} \qquad (6A)$$

y los α-cortes de $\widetilde{A}$, A_α, se obtienen a partir de (6A) como:

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} = \left[\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)\right] = \left[a - l_a L^{-1}(\alpha), a + r_a R^{-1}(\alpha)\right] \qquad (7A)$$

Sea una relación funcional $y=f(x_1,x_2, \ldots,x_n)$. Si x_1, x_2, …, x_n no son números reales sino los NBs $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2,\ldots, \widetilde{A}_n$, $f(\cdot)$ induce un NB $\widetilde{B} = f\left(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2,..., \widetilde{A}_n\right)$ cuyos α-cortes, B_α, pueden ser obtenidos a través de los de los números borrosos con que evaluamos la función, $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2,\ldots, \widetilde{A}_n$, que denotamos como $A_{1_\alpha}, A_{2_\alpha},..., A_{n_\alpha}$ respectivamente. Para ello debemos calcular:

$$B_\alpha = f\left(A_{1_\alpha}, A_{2_\alpha},..., A_{n_\alpha}\right) \tag{8A}$$

En muchas ocasiones, la función a evaluar es monótona creciente o decreciente respecto a sus argumentos, lo que facilitará sobremanera obtener los α-cortes de $\widetilde{B}$ que derivan de dicha función. Si $f(\cdot)$, que induce a $\widetilde{B}$, es creciente respecto a las m primeras variables, donde $m\leq n$, y decreciente respecto a las últimas n-m variables, B_α es:

$$B_\alpha = \left[\underline{B}(\alpha), \overline{B}(\alpha)\right] = \left[f\left(\underline{A_1}(\alpha),\ldots,\underline{A_m}(\alpha), \overline{A_{m+1}}(\alpha),\ldots,\overline{A_n}(\alpha)\right), f\left(\overline{A_1}(\alpha),\ldots,\overline{A_m}(\alpha), \underline{A_{m+1}}(\alpha),\ldots,\underline{A_n}(\alpha)\right)\right] \tag{9A}$$

Así, sea un par de NBs L-R, $\widetilde{A}_i = \left(a_i, l_{a_i}, r_{a_i}\right)_{LR}$, i=1,2, para los cuales sus realizaciones son positivas y con los que debemos evaluar $\widetilde{B} = \widetilde{A}_1 \times \widetilde{A}_2$. Para obtener los α-cortes de B_α, debemos tener en cuenta que el producto corresponde a una relación funcional $f(x_1,x_2)=x_1x_2$ que, dado que x_1 y x_2 son positivos, es monótona creciente respecto a ambos argumentos. Por tanto, a partir de (7A) y (9A) es fácil comprobar que los extremos de los α-cortes de B_α, son:

$$\underline{B}(\alpha) = a_1 \times a_2 - \left(a_1 \times l_{a_2} + a_2 \times l_{a_1}\right) \times L^{-1}(\alpha) + l_{a_1} \times l_{a_2} \times \left[L^{-1}(\alpha)\right]^2 \tag{10A}$$

$$\overline{B}(\alpha) = a_1 \times a_2 - \left(a_1 \times r_{a_2} + a_2 \times r_{a_1}\right) \times R^{-1}(\alpha) + r_{a_1} \times r_{a_2} \times \left[R^{-1}(\alpha)\right]^2 \tag{11A}$$

Las expresiones (10a) y (11a) se pueden simplificar si se desprecian los términos $l_{a_1} \times l_{a_2} \times \left[L^{-1}(\alpha)\right]^2$ y $r_{a_1} \times r_{a_2} \times \left[R^{-1}(\alpha)\right]^2$; tal como proponen Dubois y Prade (1993), utilizando como argumento la aproximación

lineal de $\underline{B}(\alpha)$ y $\overline{B}(\alpha)$ mediante un desarrollo en serie de Taylor a partir de α=1. Así, estamos suponiendo que los radios l_{a_1}, l_{a_2}, r_{a_1} y r_{a_2} son relativamente reducidos comparados con los centros a_1 y a_2 y/o que estamos obteniendo los α-cortes para niveles de presunción relativamente elevados -valores de α cercanos a 1 y, por tanto, valores de $L^{-1}(\alpha)$ y $R^{-1}(\alpha)$ cercanos a 0, tal como se deduce de la primera propiedad, (2A), exigida para las funciones $L(x)$ y $R(x)$-. Ello supone que:

$$\underline{B}(\alpha) \approx a_1 \times a_2 - \left(a_1 \times l_{a_2} + a_2 \times l_{a_1}\right) \times L^{-1}(\alpha) \qquad (12A)$$

$$\overline{B}(\alpha) \approx a_1 \times a_2 - \left(a_1 \times r_{a_2} + a_2 \times r_{a_1}\right) \times R^{-1}(\alpha) \qquad (13A)$$

Así, a partir de la expresión (7A) de los α-cortes de un número borroso L-R, puede observarse que (12A) y (13A) se corresponden con las expresiones de los extremos de los α-cortes de un NB L-R; obteniéndose por tanto una aproximación del producto de dos NBs L-R análoga a (1A):

$$\widetilde{B} = \widetilde{A}_1 \times \widetilde{A}_2 \approx (b, l_b, r_b) = \left(a_1 \cdot a_2, a_1 \cdot l_{a_2} + a_2 \cdot l_{a_1}, a_1 \cdot r_{a_2} + a_2 \cdot r_{a_1}\right)_{LR}$$

View publication stats