



Nota técnica sobre la determinación de los arcos de los arbotantes góticos

Albert Samper (1); Blas Herrera (2)

(1) Escuela Técnica Superior de Arquitectura de la Universitat Rovira y Virgili; (2) Departamento de Ingeniería Informática y Matemáticas de la Universitat Rovira i Virgili.

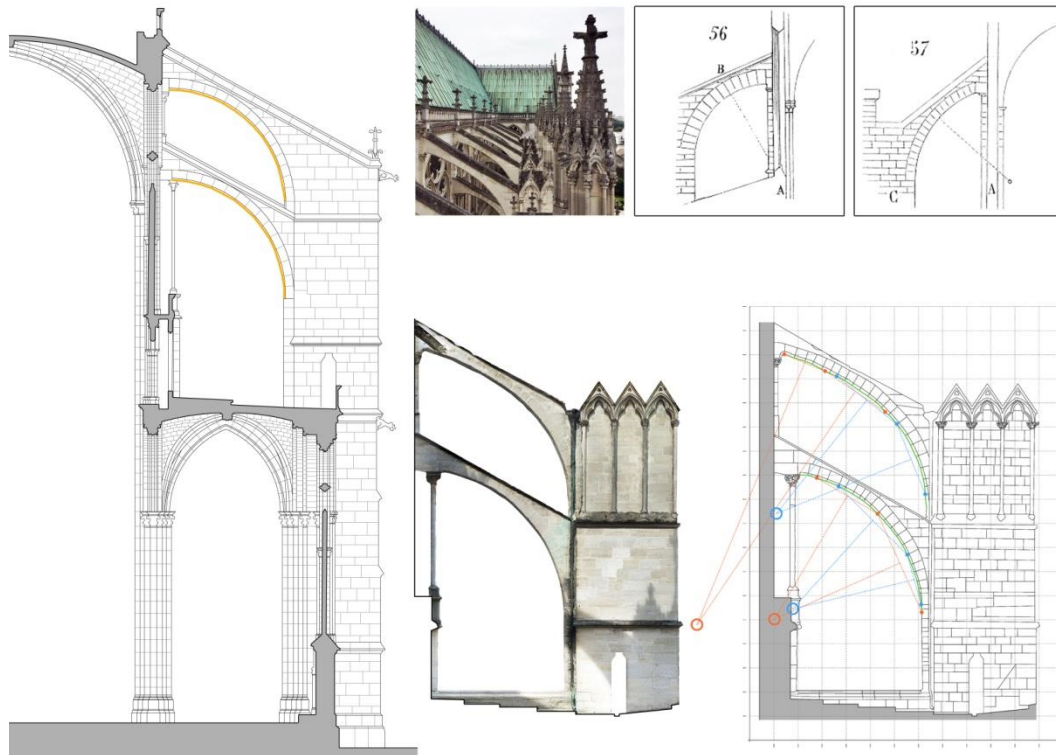


Figura 1. Síntesis gráfica del trabajo presentado. Esquema realizado por los autores.

Resumen

En 1854 Viollet-le-Duc clasificó los arcos de los arbotantes en función de dónde se ubican sus centros. Este criterio permitió agruparlos en dos tipologías: los arcos cuyos centros están ubicados en los muros en los cuales se apoyan y los que tienen el centro desplazado hacia el interior de la catedral. Bastaría con escoger tres puntos aleatorios del borde del arco del arbotante y trazar sus mediatrices para clasificarlo; no obstante, pasadas varias centurias tras su construcción, este procedimiento no es tan evidente.

La falta de precisión o el error de construcción, el desgaste con el tiempo, los movimientos sísmicos, las deformaciones estructurales u otros incidentes de distinta naturaleza, pueden hacer que aquel arco de circunferencia que se trazó durante el proceso de diseño no haya mantenido su tipología geométrica, y que la determinación de su centro sea variable en función de los tres puntos escogidos.

Con técnicas fotogramétricas, control de nube de puntos, redibujado vectorial y regresión geométrica, presentamos esta nota técnica que muestra un proceso de clasificación objetivo de un arbotante según el criterio de Viollet-le-Duc.

Palabras clave

Arbotantes, Regresión geométrica, Fotogrametría, Tipología geométrica, Viollet-le-Duc.

1. Introducción

Las investigaciones modernas sobre arquitectura gótica y la escasa, pero valiosa, información de los tratados medievales han ayudado a conocer sustancialmente esta arquitectura, su modus operandi, las leyes aplicadas y sus procesos creativos y constructivos. A modo de ejemplo, aquí indicamos algunas referencias destacables (Huerta 2006, Nikolinakou, Tallon y Ochsendorf 2005, Velilla 2019). El afán por dar continuidad al conocimiento en este ámbito nos ha motivado a presentar esta nota técnica aplicada a uno de los elementos más representativos de la arquitectura gótica: los arbotantes.

En 1854 Viollet-le-Duc clasificó los arcos de los arbotantes en función de dónde se ubican sus centros (Viollet le Duc 1854, Llopis 2019). Este criterio permitió agruparlos en dos tipologías (Fig. 1): A), los arcos de los arbotantes cuyos centros están ubicados en los muros en los cuales se apoyan y, B), los que tienen el centro desplazado hacia el interior de la catedral. Bastaría con escoger tres puntos aleatorios del borde del arco del arbotante y trazar sus mediatrices para clasificarlos; no obstante, pasadas varias centurias tras su construcción, este procedimiento no es tan evidente, ni tampoco válido, para poder realizar tal clasificación, como el lector podrá observar a lo largo de la presente nota.

La falta de precisión o el error de construcción, el desgaste en el tiempo, los movimientos sísmicos, las deformaciones estructurales u otros incidentes de distinta naturaleza, pueden hacer que aquel arco de circunferencia que se trazó durante el proceso de diseño no haya mantenido su tipología geométrica, y que la determinación de su centro sea variable en función de los tres puntos escogidos.

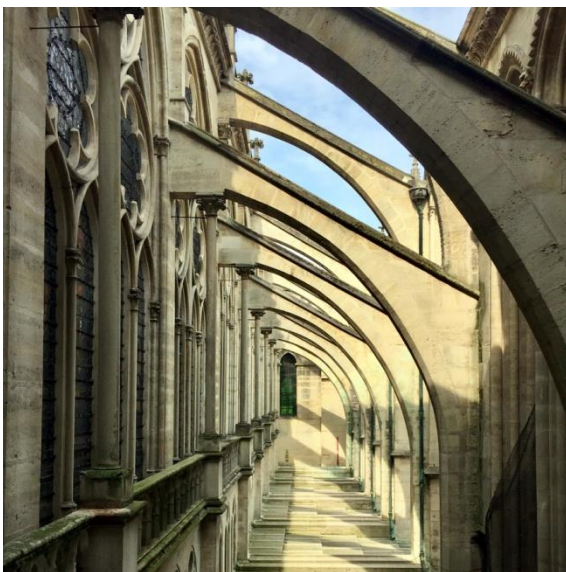


Figura 2. Vista exterior de la zona de los arbotantes de la Catedral

de San Denis donde se realizó el estudio fotogramétrico. Fotografía realizada por los autores.

Esta alteración en la forma de los arbotantes puede hacer que su clasificación no se produzca correctamente con el método de las mediatrices, conduciendo a conclusiones erróneas o imprecisas sobre los procesos medievales. Por ello, con técnicas fotogramétricas, control de nube de puntos, redibujado vectorial y regresión geométrica, presentamos esta nota técnica que muestra un proceso objetivo de clasificación de arbotantes según el criterio de Viollet-le-Duc. Este proceso lo aplicaremos, a modo de ejemplo, a uno de los arbotantes de una de las catedrales góticas más singulares: La Catedral de San Denis en Francia (Fig. 2).

2. Discusión

Los procesos geométricos, gráficos y matemáticos que usaremos son bien conocidos, pero especialmente aplicados al criterio histórico de clasificación comentado anteriormente.

Como se muestra en la Figura 3, los centros de las circunferencias que configuran el diseño de un arbotante de San Denis son variables en función de la elección de los tres puntos del borde que determinan las mediatrices. Incluso, y como se observa en la misma figura, esta variación puede ser tan dispar que no permita saber qué tipo, A o B, el maestro de obras usó para el diseño los arcos que configuran este arbotante.

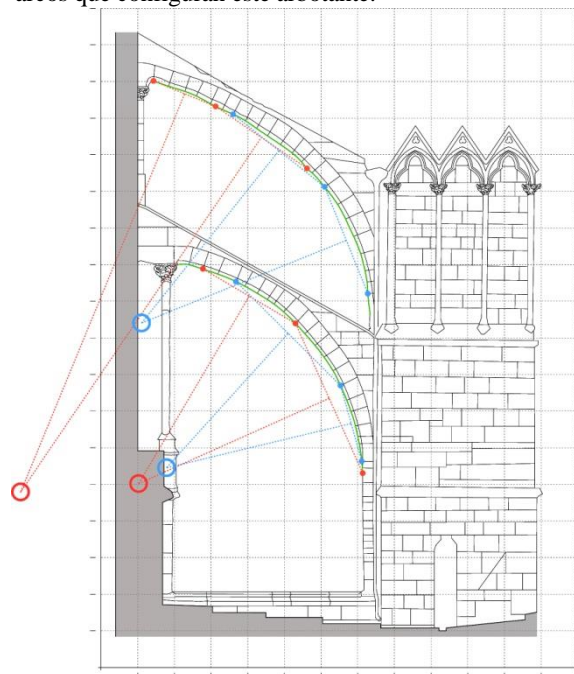


Figura 3. Muestra gráfica de la indefinición de los centros de dos arcos que configuran un arbotante de la Catedral de San Denis. Mostramos en color rojo los centros que quedan desplazados hacia

el interior de la catedral, en color azul los centros que quedan cercanos al muro de apoyo de los arbotantes y en color verde los bordes de los arcos que configuran el arbotante. Esquema realizado por los autores.

Para sortear el problema presentado, realizamos el siguiente proceso estructurado en dos fases: una fase gráfica y otra fase geométrica.

2.1. Fase gráfica:

En esta subsección determinamos el levantamiento topográfico del arbotante de estudio mediante técnicas fotogramétricas y redibujado vectorial en CAD (Fig. 3 y Fig. 4). Esta reconstrucción gráfica nos permite generar una curva que perfila el borde de cada uno de los arcos que configura el arbotante; por ejemplo, al arco superior lo llamaremos arco \mathcal{A}_1 y al inferior \mathcal{A}_2 . Ambos arcos están coloreados en verde en la Figura 3. Para cada una de estas dos curvas obtenemos las coordenadas XY (coordenadas $P_i = (x_i, y_i)$) de 10.000 puntos que las configuran; llamaremos nube $\mathcal{N}_1 = \{P_i\}_{i=1}^{i=n}$ y $\mathcal{N}_2 = \{P_i\}_{i=1}^{i=n}$ al conjunto de puntos de la primera y de la segunda, respectivamente. Con la ayuda de una rutina lisp, llamada EPC, exportamos en formato TXT las coordenadas de los puntos que configuran las dos nubes \mathcal{N}_1 y \mathcal{N}_2 .

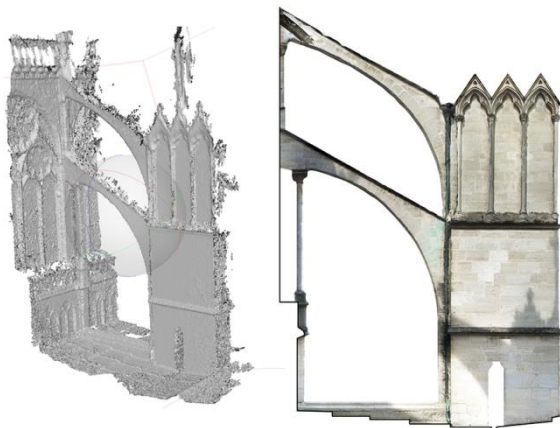


Figura 4. A la izquierda, nube de puntos del resultado fotogramétrico. A la derecha, ortofoto resultante que nos ha permitido realizar el levantamiento vectorial. Esquema realizado por los autores.

2.2. Fase geométrica:

Obtenidos los ficheros de coordenadas, procedemos al cálculo geométrico de la cónica de regresión de cada una de las nubes \mathcal{N}_1 y \mathcal{N}_2 . El resultado de este cálculo es la curva de ecuación general $\gamma \equiv Bx^2 + Cy^2 + Dxy + Ex + Fy + 1 = 0$, la cual es la curva cónica que mejor ajusta a la nube minimizando la suma siguiente de residuos cuadráticos $\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (Bx_i^2 + Cy_i^2 + Dx_iy_i + Ex_i + Fy_i + 1)^2$. La solución del problema del cálculo de γ la ofrecen las ecuaciones normales de Gauss; en concreto, resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1_i x_i^4 & x_i^2 y_i^2 & x_i^3 y_i & x_i^3 & x_i^2 y_i & B & -1_i x_i^2 \\ x_i^2 y_i^2 & 1_i y_i^4 & x_i y_i^3 & x_i y_i^2 & y_i^3 & C & -1_i y_i^2 \\ x_i^3 y_i & x_i y_i^3 & x_i^2 y_i^2 & x_i^2 y_i & x_i y_i^2 & D & -x_i y_i \\ x_i^3 & x_i y_i^2 & x_i^2 y_i & 1_i x_i^2 & x_i y_i & E & -1_i x_i \\ x_i^2 y_i & y_i^3 & x_i y_i^2 & x_i y_i & 1_i y_i^2 & F & -1_i y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1_i x_i^2 \\ -1_i y_i^2 \\ -x_i y_i \\ -1_i x_i \\ -1_i y_i \end{pmatrix}$$

En esta ecuación el rango de variación de i es $i=1:n$ con el convenio de suma de Einstein, siendo $1_i = 1$. Por ejemplo, $x_i^2 y_i = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 y_i$, y $1_i y_i^4 = \sum_{i=1}^{i=n} y_i^4$.

La curva de regresión que obtenemos es una elipse, y no una circunferencia. Este resultado geométrico confirma que los diferentes agentes naturales, mecánicos y de ejecución, citados en el apartado anterior, han condicionado que la curva que mejor se ajusta al arco es una elipse y no una circunferencia, como cabría esperar dado que estos arcos fueron diseñados con tal tipología geométrica. En la Figura 5 podemos visualizar dos detalles aumentados del arco superior donde en color verde se ha pintado el borde del arco y en color naranja la elipse de regresión γ . En esta Figura 5 el lector puede observar que la línea elíptica –no circular– naranja se ajusta significativamente al borde y hace inviable el método del trazado de las mediatrices para obtener la ubicación de los centros. Por ello, para sortear este problema –ya que no hay una forma objetiva de elegir 3 puntos para las mediatrices– proponemos utilizar la circunferencia de regresión la cual sí es objetiva. Así, a continuación, procedemos al cálculo geométrico de las circunferencias de regresión de las nubes \mathcal{N}_1 y \mathcal{N}_2 con el que hemos obtenido el resultado gráfico, en color azul, de las figuras 5 y 6.

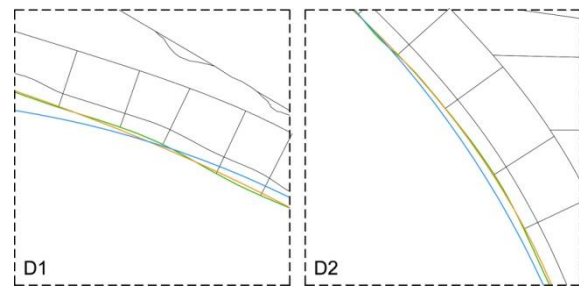


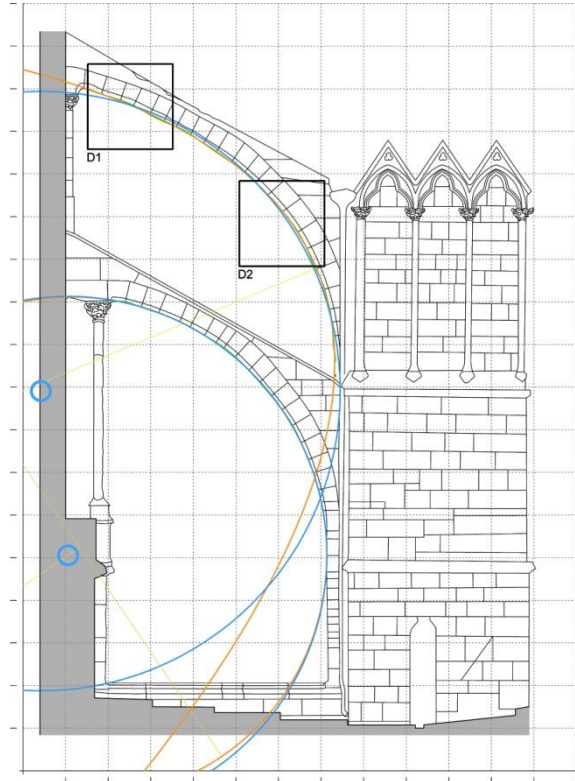
Figura 5. Detalle (observar Figura 6) de dos fragmentos del arco superior. En verde el borde del arco, en naranja la elipse γ y en azul la circunferencia θ . Esquema realizado por los autores.

Para el cálculo de la circunferencia de regresión de cada una de las nubes, buscamos la ecuación $\theta \equiv Bx^2 + By^2 + Ex + Fy + 1 = 0$, la cual es la que mejor ajusta a la nube minimizando la suma siguiente de residuos cuadráticos $\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (Bx_i^2 + By_i^2 + Ex_i + Fy_i + 1)^2$. La solución del problema del cálculo de θ la ofrecen las ecuaciones normales de Gauss; resolviendo:

$$\begin{pmatrix} 1_i(x_i^2 + y_i^2)^2 & x_i(x_i^2 + y_i^2) & y_i(x_i^2 + y_i^2) \\ x_i(x_i^2 + y_i^2) & 1_i x_i^2 & x_i y_i \\ y_i(x_i^2 + y_i^2) & x_i y_i & 1_i y_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1_i(x_i^2 + y_i^2) \\ -1_i x_i \\ -1_i y_i \end{pmatrix}$$

3. Conclusiones

Presentamos un proceso gráfico y geométrico para determinar de manera objetiva una clasificación de los arcos de los arbotantes según el criterio de Viollet-le-Duc. Como ejemplo, hemos mostrado esta metodología aplicándola a dos de los arcos de un arbotante de la Catedral de San Denis; y sobre ellos podemos concluir,



sorteando la indeterminación y ambigüedad que mostrábamos en la Figura 3, que los arcos que configuran el arbotante de estudio pueden ser clasificados según el tipo A (Fig. 6); es decir, los centros de ambas circunferencias de regresión se encuentran en el muro donde se apoyan los arbotantes y no en el interior.

Figura 6. Resultado del proceso descrito. En verde mostramos el borde los arcos, en naranja las elipses de regresión y en azul las circunferencias de regresión. Esquema realizado por los autores.

Referencias

- Huerta, S. F., 2006. Geometry and equilibrium: The gothic theory of structural design. *Structural Engineer*, 84 (2), pp. 23-28.
- Llopis-Pulido, V. et al., 2019. Analysis of the Structural Behavior of the Historical Constructions: Seismic Evaluation of the Cathedral of Valencia. *Int. J. Archit. Herit*, 13, pp. 205–214.
- Nikolinakou, M. K., Tallon, A. J. y Ochsendorf, J. A., 2005. Structure and form of early Gothic flying buttresses. *Revue Européenne de Génie Civil*, 9(9-10), pp. 1191-1217.
- Velilla, C. et al., 2019. Rampant Arch and Its Optimum Geometrical Generation. *Symmetry*, 11(5), pp.

627.

Viollet le Duc, E. 1854. Dictionnaire Raisonné de L'architecture Française du XIe au XVIe Siècle. B. Bance, París.https://fr.wikisource.org/wiki/Dictionnaire_raisonn%C3%A9_de_l'architecture_fran%C3%A7aise_du_XIe_au_XVIe_si%C3%A8cle/Arc-boutant.

Datos biográficos de los autores

Albert Samper

URV-UdG, albert.samper@urv.cat

Breve CV: Albert Samper es Arquitecto y obtuvo su Ph.D en la Universidad Rovira i Virgili de Tarragona en 2014. Actualmente es profesor Ayudante Doctor (Programa Lector Serra Húnter), responsable del Área de Expresión Gráfica de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura y Responsable de Investigación del equipo de dirección de la misma escuela. Sus campos de investigación son: la geometría y la representación gráfica aplicada a la arquitectura.

Blas Herrera

URV, blas.herrera@urv.cat

Breve CV: Blas Herrera es Geómetra y obtuvo su D.SC. en Matemáticas en la Universidad Autònoma de Barcelona en 1994. Actualmente es Titular de Universidad en la Universitat Rovira i Virgili. Sus campos de investigación son: la geometría clásica y diferencial y su aplicación a la arquitectura, mecánica de fluidos y la Ingeniería.