RESOLUCIÓ DE PROBLEMES I APRENENTATGE DE LES MATEMÀTIQUES ESCOLARS

Luisa Girondo
Universitat Rovira i Virgili
Didàctica de la Matemàtica
marialuisa.girondo@urv.cat

Carme Julià
Universitat Rovira i Virgili
Dept. Eng. Informàtica i Matemàtiques
carme.julia@urv.cat

Resum

Aquest article descriu el que s'hauria d'entendre per *problema* i per *procés de resolució de problemes* a les aules d'educació primària per tal de relacionar-ho amb la producció de coneixement matemàtic per part de l'alumne.

Es vol incidir en la necessitat de valorar cognitivament les tasques que es demanen a l'aula i valorar el procés de resolució de problemes com la millor manera d'abordar nous coneixements i assolir aprenentatges més sòlids. Amb la finalitat d'orientar els docents, es descriuen diferents aspectes didàctics de les tres etapes del model proposat per Polya.

Paraules clau: problema; procés de resolució de problemes; educació primària; coneixement matemàtic; Polya

Comunicació Educativa, núm. 35, 2022, pàg. 101-116 | DOI: 10.17345/comeduc2022101-116
ISSN: 1575-9911 | EISSN: 2339-5559 | http://www.revistes.urv.cat/index.php/comeduc

Problem-solving and mathematics learning in schools

Abstract

This article describes what is understood by problem and the problem-solving process in the primary school classroom in order to relate the above concepts to the production of mathematical knowledge by primary school pupils.

We emphasize the need to cognitively value the tasks that are set in the classroom and to value the problem-solving process as the best way to approach new knowledge and acquire it more soundly. As a guideline for teachers, we describe various pedagogical aspects of the three stages of Polya's model.

Keywords: problem-solving; mathematics; learning; mathematical knowledge; Polya

Rebut: 14/01/2022 | Acceptat: 10/05/2022

1. Introducció

En parlar de problemes i aprenentatge, cal distingir bé a què ens referirem com a *problema*. Al món escolar hi ha dues interpretacions que voldríem distingir. La primera seria el problema com a mètode pedagògic. Ara hi ha molta literatura al voltant de la idea de l'aprenentatge basat en problemes; se'n veuen exemples a Branda (2009) i, de manera més general, a Barrows i WeeKeng (2007). Bàsicament es tracta d'enfrontar l'alumne a una situació-pregunta per a la qual no té una resposta immediata. S'espera que aquest alumne, ajudat pel professor, en col·laboració amb els companys i utilitzant coneixements previs, s'impliqui en un procés de recerca de solucions. Es considera un aprenentatge valuós el que es produeix en aquest procés.

En funció del que sigui objecte d'aprenentatge, les situacions-problema plantejades seran de l'àmbit corresponent. Per exemple, per a un estudiant d'arquitectura es pot plantejar haver de reformar una sala que tenia una funcionalitat per adaptar-la a una altra. En certa manera, es tracta de posar els discents davant de problemàtiques del seu futur camp professional. A les etapes d'escolaritat obligatòria hi ha ara la idea de "treballar per projectes". Es tracta de qüestionar-se algun aspecte de la realitat i els mateixos alumnes, guiats pel docent, seguiran un procés d'esbrinar informació, cercar fonts, acordar camins a seguir, fer-se preguntes, elaborar informes d'allò que s'ha esbrinat i fer explicacions dels passos seguits. Els projectes tenen com a punt d'interès especial que són interdisciplinaris (o almenys contenen aprenentatges que es poden assignar a dues o tres assignatures) i es presenten com a més propers a la realitat de vida dels alumnes. Lògicament, es tracta d'una tasca que mostra la complexitat de l'experiència i, per tant, per poder tractar-la cal prendre decisions i arribar a consensos. Moltes vegades caldrà treball en equip i també acostumar-se a cercar la informació pertinent. Aquests aprenentatges segurament no es donarien en un treball disciplinari tradicional. La idea exposada fins ara és, doncs, la que considera el problema, o el projecte vist com a problema, com a procés d'aprenentatge.

Una segona interpretació a les classes de matemàtiques és la idea de problema com a enunciat en què es donen unes informacions i es formula una pregunta. Aquesta interpretació es pot veure obrint qualsevol llibre de text de matemàtiques i és la que tracta Puig i Cerdan (1988). Per respondre-hi caldrà utilitzar coneixements i habilitats que són objecte de l'aprenentatge de la disciplina. Per això es diuen *problemes de matemàtiques*. La finalitat de treballar aquests problemes és l'adquisició d'eines matemàtiques. Quines són aquestes eines? Són nocions, conceptes i procediments ben establerts en la disciplina; també fer raonaments, practicar estratègies, fer representacions i judicis quantitatius que permeten utilitzar els coneixements adquirits i ampliar-los.

A principis dels anys noranta del segle passat, la comunitat internacional que ofereix consells (o estàndards) per al treball de les matemàtiques en l'àmbit de l'educació obligatòria, ha proposat utilitzar la resolució de problemes com a centre en l'educació matemàtica, ja que l'impacte de les calculadores i estris electrònics ha alliberat molt temps escolar dedicat abans a l'adquisició de rutines aritmètiques i algebraiques. Ara el problema cal valorar-lo com a marc que ha d'esperonar l'aprenentatge i també com a fita que cal assolir. El nivell matemàtic d'un alumne vindrà determinat pel tipus i la complexitat dels problemes que sigui capaç de resoldre.

Així, reconciliarem les dues idees de problema exposades. El problema, o la situació-problema, com a marc per fer determinats aprenentatges i el problema com a aplicació de nocions i procediments adquirits. Sense oblidar que resoldre un problema sempre va més enllà, ja que el mateix procés de resolució és un objectiu del treball que impliquen les matemàtiques. En llenguatge actual, direm que saber resoldre problemes és una competència que cal adquirir durant l'educació matemàtica.

2. Problemes aritmètics escolars

En certa manera, el treball de matemàtiques a l'escola sempre ha estat lligat a la resolució d'alguns problemes. Si agafem un llibre d'aritmètica escolar dels anys quaranta o cinquanta del segle passat (abans de la tan criticada irrupció de la denominada *matemàtica moderna*), es veuen unes lliçons dedicades a definir de manera simple cada operació aritmètica i amb les tècniques per operar corresponents. Només al final d'aquesta pràctica hi apareix un llistat de situacions quotidianes sota el gran títol de "problemes de restar", o de l'operació que sigui. Aquesta manera de procedir que va primer a l'abstracte i mostra després les aplicacions fa que no tinguin un paper primordial en l'aprenentatge. De fet, és molt conegut pels ensenyants que els alumnes llegeixen molt pel damunt aquells enunciats, ja que realment només busquen els nombres que es donen per fer l'operació ja anunciada al títol, la qual, en la majoria de casos, serà la que donarà la solució correcta.

Pel que se sap avui en dia de com cal procedir per assolir aprenentatge, és un imperatiu anar cap a un aprenentatge significatiu. Això vol dir que cal presentar als alumnes situacions que tinguin sentit, que els puguin resultar significatives. Serà organitzant i analitzant situacions quotidianes com els alumnes aprendran a fer servir les eines amb què podran iniciar la matematització de l'entorn. Els treballs i reflexions de Hans Freudenthal (1983) han estat, i són avui en dia, claus per entendre aquest enfocament de l'aprenentatge de les matemàtiques. La seva idea principal és que els alumnes arriben a l'abstracció dels objectes matemàtics (nombres, operacions, formes, propietats) en treballar contextos propers i analitzar com les matemàtiques ajuden a organitzar els fenòmens del nostre entorn i els fan comprensibles.

Seguint, doncs, aquesta idea, per treballar els continguts de la matemàtica escolar marcats al currículum cal partir de l'experiència, organitzar-la, anar creant notacions, vocabulari i nocions que, en repetir-se igual en experiències diferents, portaran a crear les primers idees abstractes de la matemàtica. Parlem, evidentment, de la matemàtica elemental, que per definició de la mateixa disciplina és la que sorgeix de l'experiència sensorial. Els nombres naturals, les formes, les operacions elementals, algunes propietats, són els continguts propis d'aquesta matemàtica elemental i que cal assolir a l'etapa d'educació primària. La seva adquisició comportarà també fer raonaments, enfrontar-se a situacions noves per resoldre, valorar el punt de vista propi i el dels altres, verbalitzar i entendre raonaments i, en general, posar en pràctica les competències específiques que el currículum descriu com a components essencials de la competència matemàtica.

En vista d'això, sembla que l'aprenentatge significatiu es donarà si es treballen situacions-problema adequades. Quan a uns alumnes de primer curs se'ls planteja resoldre: "Quants fulls de paper s'han de deixar a cada taula de la classe si cada alumne ha de tenir tres fulls?", s'està plantejant un problema quantitatiu per a ells. Imaginem que a cada taula de quatre o cinc alumnes hi ha un encarregat que ha de fer la comanda que prèviament ha calculat. Com es farà el càlcul? Si els alumnes estan acostumats a pensar per ells mateixos, cada un utilitzarà el procediment que pugui. Trobarem des de l'alumne que fa una primera distribució de fulls d'un en un (real o pensada) i diu "4", continua comptant d'un en un fins a 8 de la segona ronda i continua comptant fins a 12, fins a l'alumne que diu "són 4 tres vegades" i escriu 4 + 4 + 4 al paper, per després sumar i obtenir el resultat. Al mig pot haver-hi una gran varietat de procediments. Si el que es vol com a mestres és fer adonar de mètodes cada vegada més eficaços per resoldre les situacions, caldrà posar en comú algunes maneres de fer i valorar com s'arriba a la solució amb més seguretat.

Aquesta manera de procedir s'assembla a la idea del problema com a procés per a l'aprenentatge. A un determinat nivell serà adequat quedar-se amb el mètode de resolució de cada un, però com que aquesta situació té una estructura matemàtica molt comuna amb altres situacions, el currículum determina que l'alumne ha de saber utilitzar la multiplicació i, per tant, si es presenta aquesta mateixa situació a alumnes de tercer curs cal esperar que la tradueixin directament a l'operació aritmètica. Pensant que per a cada taula caldran tres vegades quatre fulls (3 × 4), si es consideren les tres rondes del repartiment, o quatre vegades tres fulls (4 × 3) si es consideren els quatre alumnes que han de rebre tres fulls cada un. S'espera que hagin adquirit l'expertesa necessària per resoldre el problema per mètodes experts, més eficaços que els mètodes propis.

Guiar adequadament aquest pas de la resolució per mètodes propis, comprensius per a cada alumne, a mètodes experts que també han de ser compresos pels alumnes és la gran tasca de tot el treball de l'adquisició de les eines aritmètiques a l'escola. Una cosa similar passa en l'aprenentatge de tècniques de càlcul.

Quan es plantegen problemes a l'aula lligats a l'ús de les operacions aritmètiques, es pot considerar *a priori* si el problema té l'efecte d'esperonar l'adquisició de noves eines conceptuals, com per exemple la multiplicació en comptes d'haver de sumar o una idea del mínim comú múltiple que estalvia un raonament llarg de patrons. O si el problema ha de resultar un simple exercici pel qual s'hi enfronta.

Si l'alumne valora un enunciat i veu clarament el camí que ha de seguir per respondre la pregunta, és que aquella situació no és un problema per a ell. En termes pedagògics caldria referir-s'hi com a *exercici*. Durant l'escolaritat també es necessita exercitar certes habilitats, i la de reconèixer operacions per resoldre situacions quotidianes n'és una.

De fet, activitats com les que es veuen a l'exemple del quadre 1 es poden considerar exercicis de preparació de resolució de problemes. Triar l'operació adequada, saber què es pot respondre a partir d'una determinada informació, escollir les dades que són necessàries per respondre la pregunta que es fa, són aspectes parcials del treball de problemes (Girondo, 2000). Als primers nivells, o per a alumnes amb dificultats, pot ser necessari fer exercicis d'aquest tipus.

Quadre 1. Exercicis de preparació de resolució de problemes

A) A la nostra classe som 24 alumnes. Moltes vegades treballem en grups de 4 alumnes. Per a l'excursió de la setmana vinent hem portat 12 € cada alumne.
Marca quines d'aquestes preguntes es poden respondre amb la informació que et donen.
Quants grups de quatre alumnes es fan amb tota la classe?
Quants nois i quantes noies hi ha en aquesta classe?
Quant costa en total l'excursió de la setmana vinent?

B) A la nostra escola hi ha 314 alumnes. A l'escola on va la meva cosina són 452 alumnes. Quin d'aquests càlculs ens diu quants alumnes hi ha de més en una escola que a l'altra?
2 × 314 314 + 452 452 - 314

3. El procés de resolució d'un problema

Tant si la situació que es presenta com a problema és l'aplicació pràctica d'un camp de coneixement o una situació quotidiana per a les aules de primària (aprenentatge basat en problemes), com si és un problema de matemàtiques (proposat amb la intencionalitat d'utilitzar certes eines), hi ha en comú la idea de seguir un procés de resolució.

El resoledor ha de comprendre la situació que es planteja i què es vol esbrinar. Per tal que sigui un problema, com ja s'ha dit, no haurà de tenir un camí clar per trobar la solució, sinó que ha de fer un treball intel·lectual de recerca de possibilitats i eines pertinents a la situació, posar en marxa la utilització creativa dels recursos disponibles i controlar que la realització el porta a una solució lògica.

Aquest procés, força estudiat en la didàctica de la matemàtica que ha sorgit dels estudis de Polya (1982), i que es coneix com a model Polya de resolució, caracteritza el procés en tres fases:

1. Comprensió de la situació.
2. Elaboració i execució d'un pla d'actuació.
3. Explicitació i valoració de la solució obtinguda.

Treballs posteriors lligats a la didàctica en etapes escolars amplien el significat de les fases i valoren dificultats i possibles ajudes a resoledors no experts, que és el que ens trobem amb alumnes que estan iniciant-se en la matemàtica.

Parlem, doncs, ara de cada una d'aquestes fases amb perspectiva de l'escola primària.

Fase 1. Comprendre la situació que es planteja. Treball al voltant dels enunciats

En els tres o quatre primers nivells de l'escolarització obligatòria, els alumnes han d'aprendre a utilitzar els nombres i les operacions aritmètiques per tractar una multitud de situacions quotidianes. Moltes es presentaran com a marc per desenvolupar el significat que es vulgui introduir de l'operació. Ja fa temps que els currículums marquen la necessitat de valorar els diferents significats d'una determinada operació. Per als alumnes del cicle inicial no és el mateix la resta en sentit de treure que la resta en sentit de comparar. Exemples que es poden veure al quadre 2.

Quadre 2. Exemples de sentits diferents de l'operació resta

C) L'Anna tenia 25 € i s'ha comprat un estoig per a llapis que costa 9 €. Quants diners li han sobrat?
D) La Leila té estalviats 25 € i el seu germà té estalviats 9 €. Quants diners de més té la Leila?

El primer cas, presentat a alumnes de final de primer curs, aviat es veu que es resol amb una resta; en canvi, el segon l'intentaran resoldre per mètodes propis, no amb la traducció directa d'una resta. Caldrà analitzar diverses situacions de comparació additiva per fer veure que un problema que implica calcular una diferència es resol amb una resta. La necessitat de l'operació formal sempre es veu millor utilitzant nombres relativament grans. Un bon recurs, si es vol practicar traduccions d'enunciats simples a l'operació aritmètica, és llegir els problemes i simplement preparar l'expressió aritmètica que cal introduir a la calculadora per obtenir el càlcul.

El mateix passa amb les altres operacions. Per exemple, la funcionalitat de la multiplicació cal explicitar-la en diferents casos. Si només es presenta la multiplicació com a suma de sumands iguals, fàcilment ens servirà per saber: quants alumnes hi ha en una aula si s'asseuen en quatre fileres de sis alumnes a cada filera? Però no es tindran pistes per saber: de quantes maneres es pot triar l'esmorzar d'entrepà i beguda si hi ha sis tipus d'entrepà i quatre tipus de beguda? La didàctica de la matemàtica dona ara pistes suficients de com, a partir dels significats més elementals, moltes vegades els que s'utilitzen per iniciar els càlculs, es pot passar a treballar els significats més complexos. En tot cas, és d'esperar que al llarg de l'etapa de primària es vegin totes les principals funcionalitats de cada operació bàsica.

Tan important és aquest aspecte de l'aprenentatge de la matemàtica elemental que la recerca en educació matemàtica ja té un nom per a aquesta mena de situacions quotidianes per matematitzar. Són els denominats *problemes aritmètics verbals*. El nom ja fa referència a l'enunciat verbal del problema que es planteja als alumnes, i, a més, es fa èmfasi en els significats diferents que cada expressió verbal dona a l'operació aritmètica. Un referent és Puig i Cerdán (1988).

En la primera fase de resolució d'un problema, cal parlar de la necessitat de comprendre bé la situació que es planteja i què es demana que s'esbrini. Si l'enunciat és un text escrit, caldrà considerar la dificultat de la comprensió del text, el significat de possibles paraules noves, veure en el text quines són les informacions importants per trobar la resposta i de quines no cal fer-ne cas. Cal fixar-se en el sentit global del text i no en paraules clau; per exemple, no pensar "caldrà sumar perquè surt la paraula més".

Pot ajudar-hi fer que facin una representació gràfica. En els primers nivells es pot fer un dibuix, però cal anar cap a fer una esquematització-representació de les relacions essencials, només. Els adults hem de valorar si l'esquema o dibuix està al servei de la comprensió i del raonament o si l'alumne ja té un bon raonament abstracte i primer resol la situació i després fa un dibuix per completar el temps de la tasca.

Ara molts problemes d'aquest tipus apareixen en il·lustracions reduint molt el text, però igualment caldrà fer verbalitzar el problema als alumnes, per tal de comprovar que s'interpreta adequadament. És molt important fer aquest treball sobre els enunciats dels problemes també en sentit invers. Plantejar una operació, per exemple $4 \times 8 = 32$, i demanar als alumnes que escriguin un problema que contingui aquests nombres i pel qual calgui fer aquesta operació. Són ocasions excel·lents per treballar el denominat *sentit numèric quantitatiu*. Es pot preguntar: què podria ser 4? I el 8? En alguns casos, es poden donar unitats per tal d'orientar possibles situacions per plantejar. No serà el mateix, a l'exemple anterior, si les unitats de 32 són euros o si són hores o si són xiclets.

En situacions vivencials, tipus projecte, com ara esbrinar què caldrà comprar i com organitzar la festa de la classe de final de trimestre, els alumnes han de planificar què es vol fer, què caldrà comprar, cercar preus, capacitats de recipients... És un problema obert en què caldrà acotar, valorar, decidir i és molt interessant poder veure a la realitat posteriorment els efectes de la solució que obtenen.

En problemes aritmètics de més d'una etapa de càlcul, encara que al principi l'enunciat pot tenir organitzades totes les preguntes que s'han de respondre i, per tant, és com un seguit de dos o més problemes d'una etapa, en un nivell posterior només es formula l'última pregunta, de manera que els alumnes han de captar les preguntes ocultes que han de trobar com a pas intermedi en la resolució. És un pas important per al qual alguns alumnes necessiten força ajuda.

En problemes més de context matemàtic (trobar nombres que manquen en un puzle, valorar pesos de fruites en balances, avaluar àrees), la dificultat de l'enunciat ja no és el text, però igualment caldrà comprovar que s'interpreta correctament la situació.

Fase 2. Cercar i valorar possibilitats de resolució i executar el pla que es triï

Aquesta fase és el cor del procés de resolució. Segurament, en tractar d'entendre bé la situació, ja es busquen relacions entre les dades del problema i el que cal esbrinar (les *incògnites*, en terminologia clàssica). Si es tracta de problemes aritmètics bàsics, els alumnes han de triar l'operació o operacions que cal utilitzar. Per a aquests casos, la fase es converteix en la traducció del llenguatge corrent de l'enunciat a una o unes operacions aritmètiques i executar el càlcul. Caldria fer una estimació prèvia del resultat per fer una primera valoració de la lògica de la solució que s'espera.

Si la situació no és gaire familiar als alumnes, aquesta lògica pot no ser fàcil. En tot cas, sempre es pot iniciar un camí de solució i, sense acabar-lo, veure algun indici que ens diu que no es va bé i, per tant, que cal tornar a llegir l'enunciat i modificar el pla sense esperar a finalitzar.

En problemes més complexos a vegades no se sap com començar. Són els que portaran a utilitzar estratègies de resolució. Simplificar algun aspecte del problema, pensar si ja ens hem trobat abans en alguna situació similar que pugui servir de model, fer una hipòtesi de resultat i comprovar si és vàlida o canviar la hipòtesi segons el resultat. D'aquesta manera se'n diu *fer el problema per tempteig*. S'ha observat en estudiants de l'ensenyament de Mestres que no es valora positivament aquesta manera de procedir. No obstant això, és molt útil ensenyar a fer hipòtesis de solució i a canviar-les segons convingui. Vegem-ne un exemple: "L'àvia ha donat a les seves dues netes 45 euros. A la gran li ha donat el doble que a la petita. Quants diners ha rebut la petita?" Si això els ho planteja a uns alumnes de segon curs, cap no ho podrà resoldre mitjançant l'operació 45 ÷ 3 = 15, que faria l'expert. Els alumnes, si volen fer un tempteig, poden pensar que a la petita li ha donat 20 euros. Calculen que queden 45 – 20 = 25 euros per a la gran i s'adonen que així no es verifica que una en tingui el doble que l'altra. No queden prou diners per a la gran. Cal modificar la hipòtesi donant menys diners a la neta petita. Imaginem-nos que la segona hipòtesi és que dona 12 € a la petita; per a la gran en quedarien 45 – 12 = 33, però el doble del que rep la petita serien només 24. Com cal ara modificar la hipòtesi? Tot aquest raonament quantitatiu no es dona si el que es busca com a manera de procedir és cercar, de manera ràpida, la fórmula (o l'operació) que el resol directament.

Per desenvolupar estratègies d'actuació com el tempteig, o d'altres, caldrà plantejar bons problemes que vagin més enllà dels problemes aritmètics que hem comentat. Afortunadament, per a molts alumnes no suposen un problema les situacions que es matematitzen de manera directa amb les operacions bàsiques. Ells necessiten situacions més complexes per practicar la resolució de problemes. Però també és cert que els alumnes que semblen més lents acostumen a mostrar-se interessats en situacions força complicades plantejades com a situacions vivencials, com a jocs o com a puzles per resoldre.

Fase 3. Validar la solució obtinguda i el procés seguit

Una vegada executat el pla (amb les anades o vingudes que calgui) i trobada, per tant, una solució, cal ara validar aquesta solució per a aquella situació. Si és una situació quotidiana, a mesura que els alumnes van tenint més experiència amb el món real, van adquirint sentit quantitatiu i poden veure si el resultat és o no esperable. Exemple: la factura d'una comanda de retoladors per a l'escola diu que 150 retoladors han costat 225 € i ens demanen esbrinar el preu d'un retolador. Si el nostre resultat és que surt a 15 euros… cal veure de seguida que és una barbaritat de preu per a un retolador. Però l'error pot no ser tan gran i concloure que costa 2,25 €. En aquests casos, els alumnes han d'habituar-se a comprovar mitjançant la inversió del càlcul, quant es gasta si es compren 150 retoladors a 2,25 € cada un. És molt aconsellable habituar els alumnes a fer una estimació del resultat abans de procedir formalment amb les operacions, com ara estimar que el preu d'un retolador poden ser 3 euros i veure que la factura pujaria a 450 € (important tenir fàcil el càlcul de 150 × 3) O bé, en aquest cas, valorar que el doble de 150 ja és 300; per tant, el preu del retolador que es busca estarà per sota de dos euros i així esperar un resultat entre 1 i 2 euros.

En aquesta fase 3, és convenient que diferents alumnes aclareixin com han arribat al resultat. Fer que l'expliquin en veu alta els obliga a organitzar-se el pensament i produir un discurs intel·ligible per als altres. Si el problema és més complex, els obligarà a explicitar què han fet primer, què han fet després, com s'han adonat que no anaven bé cercant la solució i els ha calgut refer algunes fases. A més d'exposar el seu procediment, caldrà entendre el procés seguit per uns altres companys que pot ser poc o molt diferent del que ells havien pensat.

No oblidem que això és un treball molt de llenguatge verbal, prioritari en aquests nivells. En els cursos més alts es pot demanar fer un informe escrit per enviar a uns companys d'un altre centre, treball que involucra la llengua i va cap al llenguatge de la ciència (frases no ambigües, alguna notació matemàtica, ús d'aquest vocabulari).

4. Consideracions finals

La resolució de problemes és, com s'ha intentat exposar abans, el marc idoni per aprendre matemàtiques. Resol tant un problema un alumne de P5 al qual demanen esbrinar quants llapis li queden dels deu que hi ha a la capsa si en dona sis al company del costat i per respondre agafa palets per simular els llapis, separa els sis i compta els que li queden per donar la resposta com un alumne de cicle superior que s'enfronta a una situació nova que pot abordar amb les seves eines i estratègies però que no té un camí clar per seguir.

Pel que fa al procés de resolució que es descriu en les tres fases enunciades, cal que els alumnes vagin desenvolupant el control del procés. Els adults, en resoldre problemes, ja hem desenvolupat aquella mena de gestor intern que ens acompanya i anem controlant si aquest pas és segur, si el següent és lògic... No s'espera treballar gaire per trobar un resultat fallit. Aquesta idea del gestor intern està recollida a Mason, Burton i Stacey (1988). Els alumnes de primària s'han d'iniciar en la capacitat de resoldre problemes, però ajudats per l'adult. És allò de treballar en la zona de desenvolupament proper que la psicologia cognitiva encertadament ens ha descrit. Al principi serà l'adult el que portarà, gràcies a les seves preguntes i suggeriments, el control del procés: què cal esbrinar, què sabem, com podrien pensar, quina seria una solució lògica... Però al llarg de l'escolaritat cal anar deixant aquest control als mateixos alumnes. Si es treballa al currículum de manera explícita la resolució de problemes, es van aconseguint èxits pedagògics. Si només es presenten alguns enunciats per exemplificar aplicacions de nocions presentades, no es pot dir que es facin problemes. És una manera de veure alguns conceptes en context, que també caldrà fer, però no és estrictament un treball de resolució de problemes.

La dificultat que es pot presentar en els docents poc experimentats és trobar problemes-situacions que siguin interessants per desenvolupar pensament matemàtic. Hi ha força material ja a disposició en els recursos que mostra el Departament d'Educació de la Generalitat, força material dels concursos i activitats organitzades per les associacions de professorat de matemàtiques, i la porta oberta de la xarxa. Recomanem per a aquest tipus d'activitat el lloc web, lligat a la Universitat de Cambridge, <https://nrich.maths.org>, de lliure accés i amb moltes activitats per a tots els nivells de primària i secundària.

Un autèntic problema sempre serà una activitat "productiva", productiva en el sentit de generar aprenentatge nou. Plantejar activitats als alumnes que impliquin un treball important de valorar, decidir, provar, en resum, fer raonaments matemàtics serà com convertir les classes de matemàtiques en tasques productives d'aprenentatge significatiu. Si es valora la paraula *problema* com a negativa de cara als alumnes, que també passa, es pot parlar d'investigacions, de petits projectes, de càlculs amb diners, amb temps… i no cal utilitzar la paraula *problema*.

Acabem presentant, al quadre 3, una situació-problema extreta del lloc web recomanat abans. És una situació històrica real, un problema-investigació que es pot abordar amb alumnes de 6è en què es convida els lectors a resoldre'l parant atenció als raonaments, hipòtesis, dubtes, decisions, tornades enrere i, finalment, validació de la solució. Cal experimentar el plaer de validar cada resoledor la solució obtinguda sense necessitat d'un jutge extern; és el que té la lògica matemàtica, fa visible la correcció del raonament emprat. Malgrat aquesta invitació als lectors a enfrontar-se sols a la resolució, hem considerat convenient exposar el nostre sistema de raonament al final. Això permetrà també comprovar que diversos camins porten a trobar la solució (en aquest cas, esbrinar les característiques del nou sistema horari que, per cert, és força lògic però encara avui en dia fem servir l'antic!).

Quadre 3. Problema extret de <https://nrich.maths.org/4818>

A França, el 1793, preocupats com estaven per ajustar els sistemes d'unitats de mesura al sistema decimal de numeració, van fer el canvi del sistema horari habitual a un sistema decimal. La implantació va durar poc temps i, al cap de dos anys, es va tornar a l'habitual que encara utilitzem la majoria de països.

A la imatge veus en horitzontal el que marquen dos rellotges digitals simultàniament al sistema habitual i al sistema decimal francès en dos moments del dia: a les 15:43 h i a les 12:00 h. Et demanen esbrinar quines eren les característiques d'aquest sistema decimal francès que pots deduir.

temps actual	temps sistema decimal francès
15:43	6:54
12:00	5:00

Pista de resolució i resultat

A partir de les informacions de simultaneïtat horària dels rellotges en els dos sistemes, és fàcil veure que, si al sistema actual són les 12, i representa la meitat d'un dia de 24 hores, en el sistema decimal francès un dia tenia 10 hores. Però caldrà esbrinar, d'aquestes noves "hores", com eren de llargues, a quants minuts actuals corresponen, quina divisió es feia d'aquesta nova hora. Com que es volia un sistema decimal, cal pensar que la dividirien en 10 o en 100 parts, que serien els seus corresponents minuts. La lectura d'una hora com a 6:54 ja dona pista que hauria d'estar dividida aquella hora en 100 parts, i no en 10.

Per tant, la hipòtesi de resolució del problema és que el dia en el nou horari tenia 10 hores de 100 parts o minuts del sistema francès. Ara cal comprovar si es verifica aquesta hipòtesi.

Una hora del sistema francès és 2,4 vegades (24 ÷ 10) una hora del sistema actual. Per tant, una hora nova són (2,4 × 60) 144 minuts actuals. O, el que seria el mateix, un minut, o la centèsima part, de la nova hora són 1,44 minuts actuals. Si ara dibuixem una línia temporal i anem situant damunt el que marca el rellotge actual i a sota el que marcaria el rellotge amb el sistema francès (a les 12:00 h corresponen les 5:00 h, a les 14:24 h corresponen les 6:00 h. Han de passar encara 79 minuts actuals per tal que el rellotge actual marqui les 15:43 h. Al rellotge francès, 79 minuts són 79 ÷ 1,44 = 54 minuts; encara no s'ha arribat a 55. Per tant, el rellotge amb el sistema francès marcarà les 6:54 h. La hipòtesi es compleix. Per tant, hem esbrinat les característiques del sistema decimal que es proposava.

Referències bibliogràfiques

Barrows, H. S., i Wee Keng Neo, L. (2007). *Principles and Practice of a PBL*. Pearson Prentice Hall.

Branda, L. (2009). "L'aprenentatge basat en problemes. Consideracions generals". Dins *L'aprenentatge basat en problemes* (p. 11-46). Servei de Publicacions de la UAB.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Kluwer.

Girondo, L. (2000). "Consideracions sobre el treball de resolució de problemes a l'escola". *Comunicació Educativa*, 13, 56-60. <https://doi.org/10.17345/comeduc200056-60>.

Mason, J.; Burton, L., i Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente*. Labor-MEC.

Polya, G. (1982). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trilla.

Puig, L., i Cerdán, F. (1988) *Problemas aritméticos escolares*. Síntesis.

University of Cambridge. Faculty of Mathematics. [Consulta: 01/07/2022]. <https://nrich.maths.org/>.