







































































$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{i} + \omega \cdot \frac{d\mathbf{M}(\theta)}{d\theta} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{M}(\theta) \cdot \frac{d\mathbf{i}}{dt} \\ \Gamma - \Gamma_{\text{res}} &= \mathbf{J} \cdot \frac{d\omega}{dt} \\ \omega &= \frac{d\theta}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

### 2.2.1 Transformación de ecuaciones de la máquina de inducción trifásica

Para determinar el comportamiento de la máquina de inducción basta con resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (3.20). Este cálculo no es sencillo y requiere tiempo, ya que la matriz de acoplamientos  $\mathbf{M}(\theta)$  no es constante en el tiempo, aun suponiendo que la velocidad mecánica es constante y que el circuito magnético tiene un comportamiento lineal.

Por ello, se convierten las ecuaciones anteriores en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes mediante una transformación, donde se utilizan dos ángulos arbitrarios, denominados  $\Psi_s$  y  $\Psi_r$ , que sirven para transformar las ecuaciones del estátor y del rotor respectivamente.

$$\mathbf{T}_c(\Psi_s, \Psi_r) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(\Psi_s) & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(\Psi_r) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Además, para que estos ángulos arbitrarios no dependan de la posición del rotor,  $\theta$ , cumplen la siguiente condición:

$$\Psi_s = \theta + \Psi_r \quad (3.22)$$

Por lo cual,

$$\Psi_r = \Psi_s - \theta = \Psi - \theta \quad (3.23)$$

$$\mathbf{T}_c(\Psi, \theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(\Psi) & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(\Psi - \theta) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Además, se cumple:

$$\mathbf{T}_c^{-1}(\Psi, \theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{-1}(\Psi) & 0 \\ 0 & \mathbf{T}^{-1}(\Psi - \theta) \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Se debe establecer una referencia para determinar el ángulo  $\Psi$ . Las más utilizadas son:

- Referencia fija al estátor:  $\Psi = 0$
- Referencia fija al rotor:  $\Psi - \theta = 0 \Rightarrow \Psi = \theta$
- Referencia en sincronismo o fija al campo:  $\Psi = \omega_s \cdot t$ ;  $\Psi = \int \omega_s(t) \cdot dt$

Donde  $\omega_s$  es la pulsación de las tensiones del estátor.

## 2.2.2 Ecuaciones transformadas de Ku

La transformación de Ku es una de las transformaciones más utilizadas. Este método incorpora la transformación de Fortescue o de componentes simétricas, que sirve para diagonalizar matrices circulantes.

La transformación de Ku se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{K}(\Psi) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{-j\Psi} & a \cdot e^{-j\Psi} & a^2 \cdot e^{-j\Psi} \\ e^{j\Psi} & a^2 \cdot e^{j\Psi} & a \cdot e^{j\Psi} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{K}^{-1}(\Psi) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & e^{j\Psi} & e^{-j\Psi} \\ 1 & a^2 \cdot e^{j\Psi} & a \cdot e^{-j\Psi} \\ 1 & a \cdot e^{j\Psi} & a^2 \cdot e^{-j\Psi} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Donde  $a$  es el operador complejo  $a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$ .

Además  $\mathbf{K}^{-1}(\Psi) = (\mathbf{K}^t(\Psi))^*$ .

La matriz de transformación compuesta es:

$$\mathbf{K}_c(\Psi, \theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}(\Psi) & 0 \\ 0 & \mathbf{K}(\Psi - \theta) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Al aplicar la transformación de Ku a las ecuaciones eléctricas de la máquina de inducción trifásica (2.13), se obtiene:

$$\mathbf{K}_c \cdot \mathbf{v} = \mathbf{K}_c \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{K}_c \cdot \frac{d}{dt} \{ \mathbf{M} \cdot \mathbf{i} \} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{K}_c \cdot \mathbf{v} = \mathbf{K}_c \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{K}_c^{-1} \cdot \mathbf{K}_c \cdot \mathbf{i} + \mathbf{K}_c \cdot \frac{d}{dt} \{ \mathbf{M} \cdot \mathbf{K}_c^{-1} \cdot \mathbf{K}_c \cdot \mathbf{i} \} \quad (3.30)$$

Los motores son diseñados de tal manera que las tres bobinas del estátor son iguales, por lo que  $r_{sa} = r_{sb} = r_{sc} = r_s$ , y también lo son las tres bobinas del rotor:  $r_{ra} = r_{rb} = r_{rc} = r_r$ . Por ello se cumple que:

$$\mathbf{K}_c \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{K}_c^{-1} = \mathbf{R} \quad (3.31)$$

Las variables transformadas se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{sk} &= \mathbf{K}(\Psi) \cdot \mathbf{v}_s & ; & & \mathbf{v}_{rk} &= \mathbf{K}(\Psi - \theta) \cdot \mathbf{v}_r & ; & & \mathbf{v}_k &= \mathbf{K}_c(\Psi, \theta) \cdot \mathbf{v} \\
 \mathbf{i}_{sk} &= \mathbf{K}(\Psi) \cdot \mathbf{i}_s & ; & & \mathbf{i}_{rk} &= \mathbf{K}(\Psi - \theta) \cdot \mathbf{i}_r & ; & & \mathbf{i}_k &= \mathbf{K}_c(\Psi, \theta) \cdot \mathbf{i} \\
 \boldsymbol{\phi}_{sk} &= \mathbf{K}(\Psi) \cdot \boldsymbol{\phi}_s & ; & & \boldsymbol{\phi}_{rk} &= \mathbf{K}(\Psi - \theta) \cdot \boldsymbol{\phi}_r & ; & & \boldsymbol{\phi}_k &= \mathbf{K}_c(\Psi, \theta) \cdot \boldsymbol{\phi}
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Si no hay saturación, es decir, si el sistema es lineal:

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{R} \cdot \mathbf{i}_k + \mathbf{K}_c \cdot \left\{ \frac{d}{dt} (\mathbf{K}_c^{-1} \cdot \mathbf{K}_c \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{K}_c^{-1}) \right\} \cdot \mathbf{i}_k + \mathbf{K}_c \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{K}_c^{-1} \cdot \frac{d \mathbf{i}_k}{dt} \tag{3.33}$$

La matriz de acoplamientos después de aplicarle la transformación de Ku ya no depende de  $\theta$ , y se define como:

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{K}_c \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{K}_c^{-1} \tag{3.34}$$

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} l_s - m_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_s + \frac{m_s}{2} & 0 & 0 & \frac{3 \cdot m}{2} & 0 \\ 0 & 0 & l_s + \frac{m_s}{2} & 0 & 0 & \frac{3 \cdot m}{2} \\ 0 & 0 & 0 & l_r - m_r & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 \cdot m}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{m_r}{2} \\ 0 & \frac{2}{2} & \frac{3 \cdot m}{2} & 0 & l_r + \frac{2}{2} & l_r + \frac{m_r}{2} \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

Si se cambia la notación por (3.36), la matriz de acoplamientos es la indicada en (3.37).

$$\begin{aligned}
 L_{s0} &= l_s - m_s & ; & & L_{r0} &= l_r - m_r \\
 L_s &= l_s + \frac{m_s}{2} & ; & & L_r &= l_r + \frac{m_r}{2} & ; & & M &= \frac{3 \cdot m}{2}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} L_{s0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{r0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_r \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

Sustituyendo  $\mathbf{M}_k$  en la ecuación (3.33) se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_k &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{i}_k + \mathbf{K}_c \cdot \left\{ \frac{d}{dt} (\mathbf{K}_c^{-1} \cdot \mathbf{M}_k) \right\} \cdot \mathbf{i}_k + \mathbf{M}_k \cdot \frac{d\mathbf{i}_k}{dt} \\ &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{i}_k + \mathbf{K}_c \cdot \frac{d\mathbf{K}_c^{-1}}{dt} \cdot \mathbf{M}_k \cdot \mathbf{i}_k + \mathbf{M}_k \cdot \frac{d\mathbf{i}_k}{dt} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Operando  $\mathbf{K}_c \cdot \frac{d\mathbf{K}_c^{-1}}{dt}$

$$\mathbf{K}_c \cdot \frac{d\mathbf{K}_c^{-1}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j \cdot \omega_\psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j \cdot \omega_\psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j \cdot s \cdot \omega_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j \cdot s \cdot \omega_\psi \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Donde:

$$\omega_\psi = \frac{d\Psi}{dt} \quad ; \quad s = \frac{\omega_\psi - \omega}{\omega_\psi} \quad (3.40)$$

$$\begin{bmatrix} v_{s0} \\ v_{sf} \\ v_{sb} \\ v_{r0} \\ v_{rf} \\ v_{rb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s + L_{s0} \cdot p & 0 & 0 & \dots \\ 0 & r_s + L_s \cdot (p + j \cdot \omega_\psi) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & r_s + L_s \cdot (p - j \cdot \omega_\psi) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & M \cdot (p + j \cdot s \cdot \omega_\psi) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & M \cdot (p - j \cdot s \cdot \omega_\psi) & \dots \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$\begin{bmatrix} \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & M \cdot (p + j \cdot \omega_\psi) & 0 \\ \dots & 0 & 0 & M \cdot (p - j \cdot \omega_\psi) \\ \dots & r_r + L_{r0} \cdot p & 0 & 0 \\ \dots & 0 & r_r + L_r \cdot (p + j \cdot s \cdot \omega_\psi) & 0 \\ \dots & 0 & 0 & r_r + L_r \cdot (p + j \cdot s \cdot \omega_\psi) \end{bmatrix}$$

Las variables transformadas son:

- Homopolar (subíndice 0)
- *Forward* (subíndice f)
- *Backward* (subíndice b)

$$\begin{bmatrix} v_{sf} \\ v_{sb} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} e^{-j\psi} & a \cdot e^{-j\psi} & a^2 \cdot e^{-j\psi} \\ e^{j\psi} & a^2 \cdot e^{j\psi} & a \cdot e^{j\psi} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= [i_s]^t \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{M}_{sr}(\theta) \right\} \cdot i_r = \\ &= [\mathbf{K}^{-1}(\Psi) \cdot i_{sk}]^t \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{M}_{sr}(\theta) \right\} \cdot [\mathbf{K}^{-1}(\Psi - \theta) \cdot i_{rk}] = \\ &= [i_{sk}]^t \cdot [\mathbf{K}^{-1}(\Psi)]^t \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{M}_{sr}(\theta) \right\} \cdot \mathbf{K}^{-1}(\Psi - \theta) \cdot i_{rk} = \\ &= j \cdot M \cdot (i_{sb} \cdot i_{rf} - i_{sf} \cdot i_{rb}) = 2 \cdot M \cdot \text{Im}(i_{sb} \cdot i_{rf}^*) \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\left. \begin{aligned} v_{s0} &= r_s \cdot i_{s0} + L_{s0} \cdot \frac{di_{s0}}{dt} \\ \begin{bmatrix} v_{sf} \\ v_{rf} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r_s & 0 \\ 0 & r_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{sf} \\ i_{rf} \end{bmatrix} + j \cdot \omega_\psi \cdot \begin{bmatrix} L_s & M \\ S \cdot M & S \cdot L_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{sf} \\ i_{rf} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_s & M \\ M & L_r \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sf} \\ i_{rf} \end{bmatrix} \\ \Gamma - \Gamma_{res} &= J \cdot \frac{d\omega}{dt} \\ \omega &= \frac{d\theta}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{sf} \\ \phi_{rf} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & M \\ M & L_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{sf} \\ i_{rf} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$L_{sd} = L_s - M; \quad L_{rd} = L_r - M \quad (3.46)$$

### 2.3 MODELO MATEMÁTICO EN RÉGIMEN PERMANENTE

El modelo de régimen permanente establece las ecuaciones eléctricas y mecánicas que rigen el comportamiento de las máquinas cuando han alcanzado el régimen permanente de funcionamiento. Se han obtenido las ecuaciones en régimen permanente mediante la transformación de Ku.

Si se alimenta la máquina con tensiones simétricas y equilibradas de secuencia directa:

$$\begin{aligned} v_{sa} &= \sqrt{2} \cdot V_s \cdot \cos(\omega_s \cdot t + \varphi_s) \\ v_{sb} &= \sqrt{2} \cdot V_s \cdot \cos\left(\omega_s \cdot t + \varphi_s - \frac{2\pi}{3}\right) \\ v_{sc} &= \sqrt{2} \cdot V_s \cdot \cos\left(\omega_s \cdot t + \varphi_s + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

La tensión transformada del estátor es:

$$v_{sf} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (e^{-j\cdot\Psi} \cdot v_{sa} + a \cdot e^{-j\cdot\Psi} \cdot v_{sb} + a^2 \cdot e^{-j\cdot\Psi} \cdot v_{sc}) \quad (3.48)$$

Sustituyendo  $v_{sa}$ ,  $v_{sb}$  y  $v_{sc}$  en la ecuación (3.43) y operando se obtiene:

$$v_{sf} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot V_s \cdot e^{j(\omega_s \cdot t + \varphi_s - \Psi)} \quad (3.49)$$

Si se toma como referencia la de sincronismo:  $\Psi = \omega_s \cdot t$  y  $\omega_\psi = \omega_s$ . Por lo que la ecuación (3.49) queda de la siguiente manera:

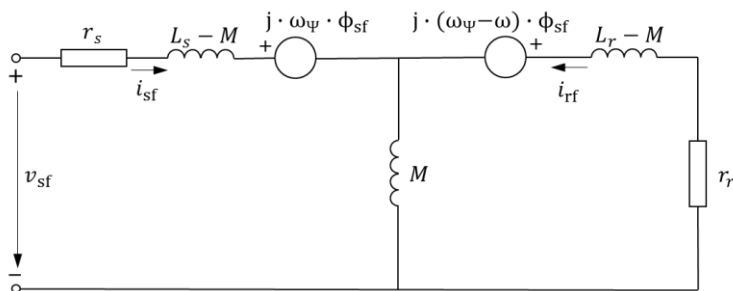


Fig. 2.2 Circuito equivalente del modelo de jaula sencilla del motor de inducción trifásico

$$v_{sf} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot V_s \cdot e^{j\varphi_s} \quad (3.50)$$

Las excitaciones del sistema son constantes o nulas:

- $v_{s0} = 0$  (la alimentación del estátor es equilibrada)
- $v_{sf} = \text{cte}$
- $v_{sb} = v_{sf}^* = \text{cte}$
- $v_{r0} = 0$  (la alimentación del rotor es nula)
- $v_{rf} = v_{rb}^* = 0$  (porque las tres tensiones del rotor son nulas)

Por tanto, las corrientes en régimen permanente serán constantes o nulas:

$$\begin{aligned} i_{sf} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot I_s \cdot e^{j\varphi_{is}} ; & i_{rf} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot I_r \cdot e^{j\varphi_{ir}} \\ i_{sb} &= i_{sf}^* ; & i_{rb} &= i_{rf}^* ; & i_{s0} &= i_{r0} = 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\left. \begin{aligned} v_{sf} &= r_s \cdot i_{sf} + j \cdot \omega_\psi \cdot L_s \cdot i_{sf} + j \cdot \omega_\psi \cdot M \cdot i_{rf} \\ 0 &= r_r \cdot i_{rf} + j \cdot s \cdot \omega_\psi \cdot M \cdot i_{sf} + j \cdot s \cdot \omega_\psi \cdot L_r \cdot i_{rf} \end{aligned} \right\} \quad (3.52)$$

$$s = \frac{\omega_\psi - \omega}{\omega_\psi} \quad (3.53)$$

$$\left. \begin{aligned} v_{sf} &= r_s \cdot i_{sf} + j \cdot \omega_\psi \cdot L_s \cdot i_{sf} + j \cdot \omega_\psi \cdot M \cdot i_{rf} \\ 0 &= \frac{r_r}{s} \cdot i_{rf} + j \cdot \omega_\psi \cdot M \cdot i_{sf} + j \cdot \omega_\psi \cdot L_r \cdot i_{rf} \end{aligned} \right\} \quad (3.54)$$

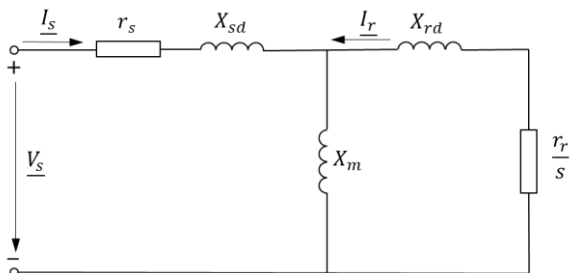


Fig. 2.3 Circuito equivalente con cinco parámetros constantes del modelo de jaula sencilla del motor de inducción

$$\left. \begin{aligned} v_{sf} &= r_s \cdot i_{sf} + j \cdot \omega_\psi \cdot (L_s - M) \cdot i_{sf} + j \cdot \omega_\psi \cdot M \cdot (i_{sf} + i_{rf}) \\ 0 &= \frac{r_r}{s} \cdot i_{rf} + j \cdot \omega_\psi \cdot M \cdot (i_{sf} + i_{rf}) + j \cdot \omega_\psi \cdot (L_r - M) \cdot i_{rf} \end{aligned} \right\} \quad (3.55)$$

$$\underline{V}_s = V_s \cdot e^{j\varphi_s} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot v_{sf} \Rightarrow \underline{I}_s = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot i_{sf} ; \underline{I}_r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot i_{rf} \quad (3.56)$$

Y las reactancias del circuito son:

$$\begin{aligned} X_{sd} &= \omega_\psi \cdot L_{sd} = \omega_\psi \cdot (L_s - M) ; X_{rd} = \omega_\psi \cdot L_{rd} = \omega_\psi \cdot (L_r - M) \\ X_m &= \omega_\psi \cdot M \end{aligned} \quad (3.57)$$

### 2.3.1 Par electromagnético

La ecuación que define el par electromagnético es:

$$\Gamma(t) = 2 \cdot M \cdot \text{Im}(i_{sf} \cdot i_{rf}^*) = 3 \cdot M \cdot \text{Im}(\underline{I}_s \cdot \underline{I}_r^*) \quad (3.58)$$

La corriente en el estátor se calcula como:

$$\underline{I}_s = - \frac{r_r + j \cdot s \cdot \omega_\psi \cdot L_r}{j \cdot s \cdot \omega_\psi \cdot M} \cdot \underline{I}_r \quad (3.59)$$

Sustituyendo (3.59) en (3.58) se obtiene la expresión final para el par electromagnético:

$$\Gamma(t) = 2 \cdot M \cdot \text{Im} \left( \left( - \frac{r_r + j \cdot s \cdot \omega_\psi \cdot L_r}{j \cdot s \cdot \omega_\psi \cdot M} \cdot \underline{I}_r \right) \cdot \underline{I}_r^* \right) = 3 \cdot \frac{1}{\omega_\psi} \cdot \frac{r_r}{s} \cdot I_r^2 \quad (3.60)$$

Tabla 2.1 Relación entre las ecuaciones de la máquina de un par de polos y de la de  $p$  pares de polos

1 par de polos	$p$ pares de polos
$\theta$	$p \cdot \theta$
$\omega$	$p \cdot \omega$
$\Gamma(t)$	$p \cdot \Gamma(t)$

### 2.3.2 Ecuaciones de la máquina de inducción con $p$ pares de polos

Para  $p$  pares de polos, el ángulo  $\theta$  se multiplica por  $p$  en la matriz  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M}(\theta_e) = \mathbf{M}(p \cdot \theta) \quad (3.61)$$

Las ecuaciones de la máquina de inducción para  $p$  pares de polos son:

$$\mathbf{v} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{i} + \frac{d}{dt} \{ \mathbf{M}(\theta_e) \cdot \mathbf{i} \} \quad (3.62)$$

$$\Gamma(t) = \left. \frac{\partial W'_{mag}([\mathbf{i}], \theta_e)}{\partial \theta} \right|_{[\mathbf{i}]=cte} = \left. \frac{\partial W'_{mag}([\mathbf{i}], \theta_e)}{\partial (\theta_e/p)} \right|_{[\mathbf{i}]=cte} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= [\mathbf{i}_s]^t \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{M}_{sr}(\theta_e) \right\} \cdot \mathbf{i}_r = [\mathbf{i}_s]^t \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial (\theta_e/p)} \mathbf{M}_{sr}(\theta_e) \right\} \cdot \mathbf{i}_r \\ &= p \cdot [\mathbf{i}_s]^t \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_e} \mathbf{M}_{sr}(\theta_e) \right\} \cdot \mathbf{i}_r \end{aligned} \quad (3.64)$$

## 3 EFECTOS DE LOS DESEQUILIBRIOS EN EL MOTOR DE INDUCCIÓN TRIFÁSICO

---

### 3.1 INTRODUCCIÓN

El objetivo de este capítulo es analizar los efectos de los desequilibrios en los motores de inducción trifásicos, comparando los resultados teóricos obtenidos mediante simulaciones con los resultados experimentales obtenidos en el laboratorio. Para ello un sistema de tensiones trifásico desequilibrado se caracteriza mediante cuatro parámetros como se ha descrito en el capítulo 2, y se utiliza el modelo matemático descrito en el capítulo 3 para poder simular el comportamiento del motor de inducción trifásico. Posteriormente, se obtienen resultados mediante simulaciones y ensayos experimentales y se comparan y analizan dichos resultados.

### 3.2 METODOLOGÍA

El estudio se ha llevado a cabo en dos fases, en una primera fase se ha realizado el análisis a partir de los resultados obtenidos mediante simulaciones, y en la segunda se ha realizado a partir de los resultados experimentales obtenidos en el laboratorio.

En la Fase I se seleccionaron dos motores, que fueron sometidos mediante simulaciones a un total de 13060 puntos de desequilibrio. Como se describe posteriormente con mayor detalle, los puntos de desequilibrio fueron seleccionados para cubrir un amplio espectro de cada uno de los cuatro parámetros que caracterizan un sistema de tensiones desequilibrado: tipo ( $q$ ), componente directa ( $V_1$ ),  $VUF$  y  $\theta_{CVUF}$ .

En la Fase II se seleccionó un tercer motor, que fue ensayado en el laboratorio para un total de 20 puntos de desequilibrio, utilizando los aparatos de laboratorio (fuente programable, carga, aparatos de medida...) necesarios para alimentar el motor con tensiones desequilibradas y guardar los datos de las mediciones realizadas. Posteriormente, se caracterizaron los elementos del sistema ensayado para poder comparar los resultados experimentales, con otros obtenidos por simulación siguiendo la metodología utilizada en la Fase I. En este caso como el número de puntos de desequilibrio es menor, éstos se seleccionaron para cubrir el máximo espectro posible de los parámetros  $V_1$  y  $VUF$ , puesto que fueron estos dos parámetros los que se mostraron significativos en el análisis de los resultados mediante simulaciones.

Para llevar a cabo las simulaciones, en ambas fases, se diseñaron y desarrollaron una serie de algoritmos que permitían implementar el modelo matemático de cada motor y simular su comportamiento bajo un desequilibrio.

### 3.2.1 Puntos de desequilibrio

Para llevar a cabo el estudio se escogieron puntos de desequilibrio significativos en cada una de las fases.

#### Fase I

Los puntos de desequilibrio fueron generados mediante un algoritmo. El número total de puntos obtenidos fue de 13060, y los requisitos para obtenerlos fueron los siguientes:

- Tipo de desequilibrio de tensión ( $q$ ): la distribución de los 13060 puntos de desequilibrio fue: 21 puntos de T1, 1746 de T2, 3288 de T3, 21 de T4, 2151 de T5, 3859 de T6, 21 de T7 y 1953 de T8
- Componente directa de la tensión ( $V_1$ ), las restricciones seleccionadas estaban relacionadas con los módulos y los ángulos de las tensiones de fase. Para tener límites simétricos los valores seleccionados fueron de  $1,00 \text{ pu} \pm 15 \%$ . De acuerdo al cambio en el ángulo de la tensión de fase, los valores seleccionados por el algoritmo fueron de  $\pm 15^\circ$ .
- Módulo del  $CVUF$  ( $VUF$ ): el algoritmo generó: 781 puntos de desequilibrio con  $VUF = 0,5 \%$ , 1274 puntos con  $VUF = 1,0 \%$ , 1787 puntos con  $VUF = 1,5 \%$ , 2197 puntos con  $VUF = 2,0 \%$ , 2376 puntos con  $VUF = 2,5 \%$ , 2340 puntos con  $VUF = 3,0 \%$ , y 2305 puntos con  $VUF = 3,5 \%$ , siendo en total 13060 puntos de desequilibrio.
- Ángulo del  $CVUF$  ( $\theta_{CVUF}$ ): el algoritmo fue diseñado sin ninguna restricción de  $\theta_{CVUF}$ , para analizar los efectos de este parámetro.

#### Fase II

En esta fase, se generaron 20 puntos de desequilibrio con las siguientes características:

- $V_1$ : los valores seleccionados fueron 0,85, 0,90, 0,95 y 1,00 pu
- $VUF$ : los valores seleccionados fueron 1, 2, 3, 4 y 5 %. Se seleccionaron alrededor del desequilibrio de tensión límite de la mayoría de normas:  $VUF_{std} = 2 \%$

Como ya se ha comentado, el análisis de los resultados de las simulaciones que se realizó de forma previa a los ensayos de laboratorio, permitió conocer que los parámetros tipo ( $q$ ) y ángulo de  $CVUF$  ( $\theta_{CVUF}$ ) no presentaban influencia significativa en la corriente y el par de los motores de inducción trifásicos estudiados.

Con las características anteriormente descritas y mediante las fórmulas 2.1 y 2.3, se calcularon los valores de  $v_a$ ,  $v_b$  y  $v_c$ , necesarios para la configuración de la fuente de tensión programable, en cada uno de los 20 puntos de desequilibrio seleccionados.

### 3.2.2 Motores seleccionados

Inicialmente, para llevar a cabo las simulaciones de los 13060 puntos de desequilibrio se eligió un motor, de aquí en adelante referido como motor 1, con las siguientes características: 75 kW, 3300 V, 50 Hz, 15,3 A, 484 Nm y 1455 min<sup>-1</sup>. El motor arrastraba una carga mecánica con par parabólico respecto a la velocidad del rotor, funcionando en condiciones nominales en régimen permanente.

Posteriormente, se añadió un segundo motor para confirmar los resultados obtenidos con el motor 1. Las principales características del segundo motor, referido como motor 2, son: 7,5 kW, 400 V, 50 Hz, 15,3 A, 39,7 Nm, 1460 min<sup>-1</sup>. Al igual que el motor 1, el motor 2 arrastraba una carga mecánica con par parabólico respecto a la velocidad del rotor, funcionando también en condiciones nominales en régimen permanente.

Finalmente, se llevaron a cabo las simulaciones del motor ensayado en el laboratorio, a partir de ahora referido como motor 3, cuyas características son: 1,5 kW, 230 V, 50 Hz, 6 A, 0,1 Nm y 1420 min<sup>-1</sup>. La carga mecánica de este motor presentaba un par lineal, funcionando en régimen permanente en un punto con un índice de carga ligeramente inferior al nominal.

#### Modelo matemático

En todas las simulaciones se utilizó el modelo de jaula sencilla con cinco parámetros constantes. Este modelo proporciona buenos resultados cuando los puntos de operación están cerca del punto de funcionamiento nominal, comparado con el modelo de doble jaula de siete parámetros constantes [31]. Este modelo se puede representar con el circuito equivalente de la Fig. 2.3.

#### Estimación de parámetros del motor 1

Los 5 parámetros del modelo de jaula sencilla del motor 1 se estimaron en [32] y fueron utilizados en la Fase I. Sus valores se muestran en la Tabla 3.1

Tabla 3.1 Parámetros del motor 1

$R_s$ ( $\Omega$ )	$R_r$ ( $\Omega$ )	$X_m$ ( $\Omega$ )	$X_{sd}$ ( $\Omega$ )	$X_{rd}$ ( $\Omega$ )
7,52	3,51	577,32	12,57	12,57

Tabla 3.2 Parámetros del motor 2

$R_s$ ( $\Omega$ )	$R_r$ ( $\Omega$ )	$X_m$ ( $\Omega$ )	$X_{sd}$ ( $\Omega$ )	$X_{rd}$ ( $\Omega$ )
0,85	0,57	27,49	1,37	1,37





















































































































































