



**UNIVERSIDAD
ROVIRA I VIRGILI**

Departamento de Empresa
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

TESIS DOCTORAL

**ESTIMACIÓN DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE LOS TIPOS DE
INTERÉS MEDIANTE NÚMEROS BORROSOS. APLICACIÓN A LA
VALORACIÓN FINANCIERO-ACTUARIAL Y AL ANÁLISIS DE LA
SOLVENCIA DEL ASEGURADOR DE VIDA**

Presentada por: Jorge de Andrés Sánchez

Para la obtención del grado de Doctor en
Administración y Dirección de Empresas

Director: Dr. Antonio Terceño Gómez

ÍNDICE

ÍNDICE

PRESENTACIÓN DE LA TESIS	1
1. INTRODUCCIÓN	4
2. ESTRUCTURA Y METODOLOGÍA DE LA TESIS	8
 PARTE I: INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS DE LA TEORÍA DE LOS SUBCONJUNTOS BORROSOS	 19
CAPÍTULO 1: ELEMENTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE LOS SUBCONJUNTOS BORROSOS	21
1.1. Subconjunto borroso	21
1.1.1. Definición y concepto	25
1.1.2. Definiciones sobre conjuntos borrosos	25
1.1.3. Operaciones conjuntistas básicas con subconjuntos borrosos	26
1.1.4. Principio de extensión de Zadeh	26
1.1.4.1. Principio de extensión de Zadeh generalizado	26
1.1.4.2. Principio de extensión	27
1.1.4.3. Aplicación del principio de extensión de Zadeh a través de conjuntos de nivel	27
1.1.5. Relaciones borrosas binarias	27
1.2. Números borrosos	28
1.2.1. Definición y concepto	28
1.2.2. Operaciones con números borrosos	30
1.1.2.1. Operaciones monarias	30
1.1.2.2. Operaciones binarias	32
1.1.2.3. Evaluación de funciones reales de números borrosos	35
1.2.3. Algunos tipos especiales de números borrosos	37
1.2.3.1. Números borrosos L-R de Dubois y Prade	38
1.2.3.2. Operaciones con números borrosos L-R de Dubois y Prade	39
1.2.3.3. Números borrosos trapezoidales	41
1.2.3.4. Números borrosos triangulares	43
1.2.3.5. Operaciones con números borrosos trapezoidales y triangulares	44
1.3. Resolución de ecuaciones borrosas	46
1.3.1. Método clásico de resolución de ecuaciones	47
1.3.1.1. Planteamiento general	47
1.3.1.2. Desconvolución de la suma y el producto utilizando el concepto clásico de resolución de ecuaciones	48
1.3.1.3. Desconvolución de la suma y el producto utilizando el concepto clásico de resolución de ecuaciones cuando los parámetros que intervienen son números borrosos L-L de Dubois y Prade	49
1.3.2. Método de resolución de ecuaciones de Buckley y Qu	53
1.4. Aproximación de números borrosos	55
1.4.1. Aproximación a través de un número L-L de Dubois y Prade una función de números L-L de Dubois y Prade	56
1.4.2. Una metodología para medir la calidad de la aproximación a través de un número borroso triangular de una función de números borrosos triangulares que mantenga su mismo soporte y núcleo	57
1.4.3. Una metodología para la aproximación de cualquier número borroso a través de un número trapezoidal o triangular	62

1.5. Desfuzzyficación de números borrosos	65
1.5.1. Métodos de desfuzzyficación clásicos	66
1.5.1.1. <i>Mean of maxima (MOM)</i>	66
1.5.1.2. <i>Centro de área (COA)</i>	66
1.5.1.3. <i>Media borrosa (FM)</i>	67
1.5.2. El indicador de valor de Delgado <i>et al.</i> (1998)	68
1.5.3 El valor esperado	68
 CAPÍTULO 2: ALGUNOS MODELOS DE REGRESIÓN BORROSA	71
2.1. Consideraciones previas	71
2.2. El modelo de Tanaka e Ishibuchi de regresión borrosa	74
2.2.1. Regresión con intervalos de confianza	74
2.2.2. Regresión con números borrosos	78
2.3. El modelo de Sakawa y Yano (1992)	81
2.3.1. Regresión posibilística con inputs ciertos y outputs borrosos	81
2.3.2. Regresión posibilística con inputs y outputs borrosos	85
 CAPÍTULO 3: DIVERSAS ASOCIACIONES ENTRE LA ALEATORIEDAD Y LA INCERTIDUMBRE	89
3.1. Consideraciones previas	89
3.2. Subconjuntos aleatorio borrosos	90
3.3. Probabilidad de eventos borrosos	93
3.4. Números híbridos	94
3.5. Haz de números borrosos	96
3.6. Variables borroso aleatorias	99
3.6.1. Conceptos y definiciones	99
3.6.2. Esperanza, varianza y desviación estándar de una variable borroso aleatoria	101
3.6.3. Función de distribución y cuantiles de una variable borroso aleatoria	104
3.6.4. Inferencia estadística en muestras donde las observaciones vienen dadas por números borrosos	106
3.6.4.1. <i>Media muestral, varianza muestral y desviación estándar muestral</i>	107
3.6.4.2. <i>Función de distribución muestral y cuantiles muestrales</i>	110
3.7. Variables aleatorias normales con media y varianza borrosas	112
3.7.1. Función de distribución, cuantiles e intervalos de confianza para variables aleatorias normales	112
3.7.2. Función de distribución, cuantiles e intervalos de confianza para variables aleatorias normales con media y desviación estándar borrosas	113
 CAPÍTULO 4: VALORACIÓN FINANCIERA CON INTERESES BORROSOS	117
4.1. Introducción	117
4.2. Análisis del factor de descuento con interés borroso	119
4.2.1. Planteamiento general	119
4.2.2. Análisis del factor de descuento cuando el interés viene estimado a través de números borrosos triangulares	121
4.2.3. Aproximación triangular del factor de actualización cuando los interés futuros vienen dados por números borrosos triangulares	122
4.2.3.1. <i>Aproximación triangular del factor de actualización cuando el interés triangular aplicado es variable a lo largo del tiempo</i>	122

4.2.3.2. Aproximación triangular al factor de actualización cuando el interés triangular aplicado es constante a lo largo del tiempo	131
4.3. Valoración de rentas financieras con capitales y número de términos ciertos con intereses estimados a través de números borrosos	133
4.3.1. Planteamiento general	133
4.3.2. Valor actual de rentas temporales valoradas a través de números borrosos constantes a lo largo de todo el periodo de valoración	135
4.3.3. Valor actual de rentas temporales con intereses de valoración estimados a través de números borrosos triangulares	138
4.3.4. Aproximación triangular del valor actual de renta valorada con intereses estimados por números borrosos triangulares	140
 PARTE II: ESTIMACIÓN DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE LOS TIPOS DE INTERÉS A TRAVÉS DE SUBCONJUNTOS BORROSOS Y ESTIMACIÓN DE LOS TIPOS DE INTERÉS FUTUROS	 151
 CAPÍTULO 1: ESTIMACIÓN DE LOS INTERESES FUTUROS MEDIANTE NÚMEROS BORROSOS	 153
1.1. Análisis de las tasas de interés que rigen en el mercado de deuda pública	154
1.1.1. Rendimiento interno de un título de renta fija	154
1.1.2. Los tipos spot y la estructura temporal de los tipos de interés	159
1.1.3. Tipos de interés implícitos a plazo o tipos forward	161
1.2. Teorías explicativas de la estructura temporal de los tipos de interés	163
1.2.1. La teoría pura de las expectativas racionales	164
1.2.2. La teoría de la preferencia por la liquidez	165
1.2.3. La teoría de la segmentación de mercados	166
1.2.4. La teoría del hábitat preferido	168
1.3. Aplicaciones de la estimación de la estructura temporal de los tipos de interés	169
1.4. Métodos estimativos de la estructura temporal de los tipos de interés	171
1.4.1. Modelos empíricos	172
1.4.2. Modelos de equilibrio dinámico	273
1.4.3. Modelos econométricos	175
1.5. Estimación de los intereses futuros a través de números borrosos mediante una estimación fuzzy de la ETTI	177
 CAPÍTULO 2: MÉTODOS ECONOMETRÍCOS DE ESTIMACIÓN DE LA ETTI	 183
2.1. Estimación de la ETTI a través de la curva de rentabilidades	183
2.1.1. Algunos modelos para ajustar la curva de rentabilidades	183
2.1.1.1. Estimación de la curva de rentabilidades a través de la interpolación lineal de las TIRs de los títulos	183
2.1.1.2. Ajuste polinómico de la TIR de los títulos	185
2.1.1.3. El modelos de Cohen, Kramer y Vaugh (1966)	186
2.1.1.4. El modelo de Bradley y Crame (1973)	187
2.1.2. Estimación de la ETTI a través de la estimación de la curva de rentabilidades	187
2.1.3. Estimación de los tipos forward	190
2.2. Estimación de la ETTI a través del ajuste de la función de descuento	192
2.2.1. El modelo de McCulloch	193
2.2.1.1. Splines cuadráticos en la modelización de la función de descuento	195
2.2.1.2. Splines cúbicos en la modelización de la función de descuento	197
2.2.2. El modelo de Vasicek y Fong	203

2.2.3. Comentarios a los resultados obtenidos en las estimaciones	207
2.2.4. Estimación de los tipos forward a través de la estimación directa de la ETTI	208

CAPÍTULO 3: ESTIMACIÓN DE LA ETTI MEDIANTE EL EMPLEO DE LA REGRESIÓN POSIBILÍSTICA

3.1. Estimación de la ETTI a través de la curva de rentabilidades	211
3.1.1. Planteamiento general e hipótesis	211
3.1.2. Implementación de los diversos modelos de estimación de la curva de rentabilidades considerando los datos de partida como números borrosos triangulares	214
3.1.2.1. Ajuste de la curva de rentabilidades mediante interpolación lineal	214
3.1.2.2. Estimación polinómica de la curva de rentabilidades	216
3.1.2.3. El modelo de Cohen, Kramer y Vaugh	217
3.1.2.4. El modelo de Bradley y Crame	218
3.1.2.5. Comentarios a los resultados obtenidos	219
3.1.3. Estimación de la ETTI a través de la curva de rentabilidades	220
3.1.3.1. Estimación del precio del bono par	221
3.1.3.2. Estimación de de los precios de los bonos par a partir de una estimación triangular de la curva de rentabilidades: análisis de los diferentes modelos planteados	222
3.1.3.3. Estimación de los factores de descuento al contado	230
3.1.3.4. Estimación de los factores de actualización spot a partir de una aproximación triangular de la curva de rentabilidades: análisis de los modelos planteados	235
3.1.3.5. Estimación de la ETTI	236
3.1.2.6. Estimación de los tipos spot a partir de una estimación triangular de la curva de rentabilidades: análisis de los diversos modelos planteados	241
3.1.3.7. Comentarios a los resultados obtenidos	242
3.2. Estimación de la ETTI mediante la estimación de la función de descuento	242
3.2.1. Planteamiento general e hipótesis	245
3.2.2. El modelo de McCulloch	245
3.2.3. El modelo de Vasicek y Fong introduciendo la incertidumbre en los precios negociados	251
3.2.4. Estimación de la ETTI a través de la estimación posibilística de los factores de actualización	257
3.2.5. Comentarios a los resultados obtenidos	261

CAPÍTULO 4: PREDICCIÓN DE LOS TIPOS DE INTERÉS FUTUROS A TRAVÉS DE NÚMEROS BORROSOS

4.1. Introducción	263
4.2. Obtención de los tipos de actualización forward a un año a través de números borrosos	264
4.2.1. Análisis de la existencia de solución en sentido clásico cuando realizamos la estimación directa de los factores de actualización spot	267
4.3. Estimación de los tipos de interés futuros a través de números borrosos	269
4.3.1. Estimación de los tipos fituros a través de números borrosos triangulares	271
4.3.1.1. Resultados obtenidos con los métodos de estimación de la ETTI basados en la curva de rentabilidades	274
4.3.1.2. Resultados obtenidos con los métodos de estimación del factor de actualización	277
4.4. Algunos comentarios sobre los métodos de estimación de los tipos futuros propuestos	279

PARTE III: ANÁLISIS DE LA DETERMINACIÓN DE LAS PRIMAS EN LOS SEGUROS DE VIDA Y DE LA SOLVENCIA DINÁMICA DEL ASEGURADOR CUANDO LOS TIPOS DE INTERÉS DE VALORACIÓN VIENEN ESTIMADOS A TRAVÉS DE NÚMEROS BORROSOS	283
CAPÍTULO 1: CONCEPTOS INTRODUCTORIOS	285
1.1. Seguros de vida: consideraciones previas	285
1.2. Breve análisis sobre el tratamiento del fenómeno de la mortalidad en los seguros de vida	289
1.3. Propuestas sobre el interés a aplicar en los contratos de seguros de vida	292
1.3.1. Consideraciones previas	292
1.3.2. Modelización de la incertidumbre del interés técnico en la literatura actuarial	294
1.3.3. Propuestas para la determinación del tipo (los tipos) a aplicar en el cálculo de la prima de un seguro de vida	297
1.3.3.1. <i>Propuestas para la determinación de un tipo de interés único</i>	297
1.3.3.2. <i>Propuestas para la utilización de un tipo de interés variable</i>	303
1.3.3.3. <i>Utilización de tipos de interés con periodicidad inferior al año</i>	306
1.3.3.4. <i>Intervalo esperado y valor esperado del factor de actualización</i>	307
1.4. Formulación del principio de equivalencia estático en el supuesto de interés incierto	310
1.5. Enfoque borroso estocástico en la valoración de los seguros de vida	314
1.5.1. Un breve análisis del enfoque estocástico en la valoración actuarial	314
1.5.2. Enfoque borroso estocástico en la valoración de los seguros de vida y utilización de variables borroso aleatorias	315
CAPÍTULO 2: ANÁLISIS DE LAS PRINCIPALES ESTRUCTURAS ACTUARIALES CON CERTEZA EN EL TIPO DE INTERÉS DE VALORACIÓN	319
2.1. Capital de fallecimiento	320
2.2. Capital de supervivencia	320
2.3. Seguro inmediato de vida entera	321
2.4. Seguro inmediato temporal	322
2.5. Seguro mixto o endowment	322
2.6. Rentas vitalicias anticipadas	323
2.7. Rentas temporales anticipadas	325
2.8. Análisis del comportamiento de los momentos representativos del valor actual de las diferentes estructuras actuariales respecto al tipo de interés de valoración	327
CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE LAS PRINCIPALES ESTRUCTURAS ACTUARIALES CON EL TIPO DE INTERÉS ESTIMADO A TRAVÉS DE NÚMEROS BORROSOS	335
3.1. Consideraciones generales y metodología	335
3.2. Capital de fallecimiento	338
3.2.1. Planteamiento general	338
3.2.2. Análisis cuando el tipo de interés es un número borroso constante	340

3.2.3. Análisis cuando el tipo de interés es un número borroso constante y triangular	342
3.2.4. Aplicación numérica	344
3.3. Capital de supervivencia	348
3.3.1. Planteamiento general	348
3.3.2. Análisis cuando el tipo de interés es un número borroso constante	350
3.3.3. Análisis cuando el tipo de interés es un número borroso constante y triangular	351
3.3.4. Aplicación numérica	353
3.4. Seguro vida entera	357
3.4.1. Planteamiento general	357
3.4.2. Análisis cuando el tipo de interés es un número borroso constante	358
3.4.3. Análisis cuando el tipo de interés es un número borroso constante y triangular	362
3.4.4. Aplicación numérica	363
3.5. Seguro temporal	366
3.5.1. Planteamiento general	366
3.5.2. Análisis cuando el tipo de interés es un número borroso constante	368
3.5.3. Análisis cuando el tipo de interés es un número borroso constante y triangular	369
3.5.4. Aplicación numérica	370
3.6. Seguro mixto o endowment	372
3.6.1. Planteamiento general	372
3.6.2. Análisis cuando el tipo de interés es un número borroso constante	374
3.6.3. Análisis cuando el tipo de interés es un número borroso constante y triangular	375
3.6.4. Aplicación numérica	376
3.7. Renta vitalicia anticipada	379
3.7.1. Planteamiento general	379
3.7.2. Análisis cuando el tipo de interés es un número borroso constante	381
3.7.3. Análisis cuando el tipo de interés es un número borroso constante y triangular	382
3.7.4. Aplicación numérica	383
3.8. Renta temporal anticipada	388
3.8.1. Planteamiento general	388
3.8.2. Análisis cuando el tipo de interés es un número borroso constante	390
3.8.3. Análisis cuando el tipo de interés es un número borroso constante y triangular	391
3.8.4. Aplicación numérica	392

CAPÍTULO 4: FIJACIÓN DE LAS PRIMAS Y ANÁLISIS DE LA VARIABLE BORROSO ALEATORIA PÉRDIDA PARA DIVERSAS MODALIDADES DE ESTRUCTURAS ACTUARIALES BAJO LA HIPÓTESIS DE UN ÚNICO ASEGURADO EN CARTERA

4.1. Planteamiento general	399
4.1.1. Consideraciones previas	399
4.1.2. Determinación de la prima pura única	400
4.1.3. Determinación de la función de distribución y los cuantiles de la variable borroso aleatoria pérdida si se cobra la prima pura única y determinación del recargo a aplicar para carteras de un único asegurado	402
4.2. Análisis del capital de fallecimiento con vencimiento en el año actual	407
4.2.1. Determinación de la prima pura única	407
4.2.2. Análisis de la función de distribución y los cuantiles de la variable borroso aleatoria pérdida si se cobra la prima pura única	407
4.2.3. Determinación de las primas cuando el interés de valoración vienen dado a través de un único número borroso triangular a lo largo de todo el contrato	408
4.2.4. Aplicación numérica	409
4.3. Análisis del seguro de capital diferido	413
4.3.1. Determinación de la prima pura única	413

4.3.2. Análisis de la función de distribución y los cuantiles de la variable borroso aleatoria pérdida si se cobra la prima pura única	414
4.3.3. Determinación de las primas cuando el interés de valoración vienen dado a través de un único número borroso triangular a lo largo de todo el contrato	415
4.3.4. Aplicación numérica	416
4.4. Análisis del seguro de vida entera	420
4.4.1. Determinación de la prima pura única	420
4.4.2. Análisis de la función de distribución y los cuantiles de la variable borroso aleatoria pérdida si se cobra la prima pura única	421
4.4.3. Determinación de las primas cuando el interés de valoración vienen dado a través de un único número borroso triangular a lo largo de todo el contrato	422
4.4.4. Aplicación numérica	423
4.5. Análisis del seguro temporal	426
4.5.1. Determinación de la prima pura única	426
4.5.2. Análisis de la función de distribución y los cuantiles de la variable borroso aleatoria pérdida si se cobra la prima pura única	427
4.5.3. Determinación de las primas cuando el interés de valoración vienen dado a través de un único número borroso triangular a lo largo de todo el contrato	428
4.5.4. Aplicación numérica	430
4.6. Análisis del seguro mixto	433
4.6.1. Determinación de la prima pura única	433
4.6.2. Análisis de la función de distribución y los cuantiles de la variable borroso aleatoria pérdida si se cobra la prima pura única	433
4.6.3. Determinación de las primas cuando el interés de valoración vienen dado a través de un único número borroso triangular a lo largo de todo el contrato	435
4.6.4. Aplicación numérica	437
4.7. Análisis de las rentas vitalicias anticipadas	440
4.7.1. Determinación de la prima pura única	440
4.7.2. Análisis de la función de distribución y los cuantiles de la variable borroso aleatoria pérdida si se cobra la prima pura única	441
4.7.3. Determinación de las primas cuando el interés de valoración vienen dado a través de un único número borroso triangular a lo largo de todo el contrato	442
4.7.4. Aplicación numérica	445
4.8. Análisis de las rentas temporales anticipadas	447
4.8.1. Determinación de la prima pura única	447
4.8.2. Análisis de la función de distribución y los cuantiles de la variable borroso aleatoria pérdida si se cobra la prima pura única	448
4.8.3. Determinación de las primas cuando el interés de valoración vienen dado a través de un único número borroso triangular a lo largo de todo el contrato	450
4.8.4. Aplicación numérica	454
 CAPÍTULO 5: FIJACIÓN DE LA PRIMA ÚNICA Y ANÁLISIS DE LA VARIABLE BORROSO ALEATORIA PÉRDIA A TRAVÉS DE LA TEORÍA CLÁSICA DEL RIESGO	 457
5.1. Consideraciones generales y metodología	457
5.2. Análisis de la función de distribución de la variable borroso aleatoria pérdida para una cartera de pólizas idénticas tras haberse cobrado la prima pura única	462
5.3. Fijación del recargo de seguridad para conseguir un nivel de solvencia dado por el asegurador	465
5.4. Aplicaciones numéricas	467

CAPÍTULO 6: FIJACIÓN DE LA PRIMA ÚNICA Y ANÁLISIS DE LA VARIABLE BORROSO ALEATORIA PÉRDIDA UTILIZANDO SIMULACIÓN ESTOCÁSTICA	473
6.1. Consideraciones generales y metodología	473
6.2. Determinación mediante simulación estocástica de la variable borroso aleatoria pérdida para todo el colectivo tras cobrarse la prima pura	476
6.3. Análisis de la función de distribución de la variable borroso aleatoria pérdida para una cartera de pólizas idénticas tras haberse cobrado la prima pura única. Fijación del recargo de seguridad.	481
6.4. Aplicaciones numéricas	482
CONCLUSIONES	487
1. CONCLUSIONES PROPIAS DE LA TESIS	489
2. CONCLUSIONES PROYECTIVAS DE LA TESIS	500
BIBLIOGRAFÍA	503

PRESENTACIÓN DE LA TESIS

PRESENTACIÓN

Cuando finalicé los cursos de doctorado, a mediados de 1996, de mutuo acuerdo con el director de mi tesis doctoral, el Dr. Antonio Terceño, elegí como tema de estudio la aplicación de la teoría de los subconjuntos borrosos en el análisis de los seguros de vida, en concreto, en la modelización de los tipos de interés para su valoración. Dicha teoría, de indiscutible utilidad y actualidad en la modelización de problemas económicos, tomó carta de naturaleza con la publicación en 1965 del artículo del profesor L.A. Zadeh “Fuzzy Sets”, en la revista *Information and Control*.

Así pues, hemos considerado que la cuantificación de los tipos de interés futuros difícilmente puede realizarse de forma cierta o aleatoria, justificándose en esta parte introductoria que es un supuesto, más realista, suponer que vienen estimados subjetivamente por expertos, a través de números borrosos. Una cuestión que abordaremos es la estimación de forma subjetiva de los tipos de interés futuros para realizar la valoración financiero-actuarial, cuestión que, evidentemente, es se puede hacer extensible a la valoración financiera en general. En nuestro caso, hemos considerado que los expertos son los actuantes en los mercados de renta fija, los cuales, al determinar los precios de los activos, basándose en la información disponible implícitamente expresan sus expectativas sobre los tipos de interés que regirán en un futuro. Sobre esta base, analizaremos la estimación de la estructura temporal de los tipos de interés a través de subconjuntos borrosos, de forma que la determinación de los tipos de interés que se anticipan en el mercado para el futuro, también pueda ser realizada a través de números borrosos.

La elección del tema o los temas de la tesis, por supuesto, no fue fruto del azar, sino que se enmarca dentro de una de las líneas de investigación del Departamento de Empresa de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Rovira i Virgili, que tiene como núcleo el estudio de problemas de gestión y valoración financiera utilizando la teoría de los subconjuntos borrosos. Esta línea ha dado lugar a un grupo de investigación estable que ha producido un buen número de trabajos presentados en congresos y artículos en revistas científicas, así como varias tesis doctorales evaluadas con la máxima calificación. De esta forma, se trata de una línea de investigación consolidada en la Universidad Rovira i Virgili, y creemos que contrastada.

Así, aunque el responsable último de una tesis doctoral sea el doctorando, y subsidiariamente, su director, es evidente que en este caso, también es fruto de un trabajo en equipo, ya que es deudor

de una estrecha relación personal y científica con el resto de compañeros que en el departamento al que pertenezco comparten las mismas inquietudes y campo de investigación.

1. INTRODUCCIÓN

La gestión y valoración de los seguros de vida abarca cuestiones como la fijación de primas por parte del asegurador, el estudio de su posición de solvencia, determinación de las provisiones matemáticas etc. Las variables que esencialmente deben ser tenidas en cuenta en su modelización son:

- a) En primer lugar un fenómeno que podríamos determinar como “natural”: el comportamiento de la mortalidad, morbilidad etc. en la cabeza asegurada. En condiciones normales dicho comportamiento está condicionado únicamente por la edad y el sexo de la persona en cuestión, variables, por otra parte, objetivas. No existe, actualmente, ninguna controversia sobre su naturaleza estocástica. De hecho, los actuarios analizan dicho fenómeno con el marco conceptual y matemático construido en los albores de la ciencia actuarial, siglos XVII-XVIII.
- b) El segundo fenómeno que incide en el análisis de los seguros de vida, es el fenómeno financiero, en concreto, la determinación del interés que el asegurador debe ofrecer al asegurado denominado como interés técnico, el cual debe ser estimado por el actuario. Éste deberá estar relacionado con el interés que la compañía de seguros puede conseguir invirtiendo las primas satisfechas por el asegurado a largo plazo dada la gran duración de los seguros de vida.

Respecto a este segundo fenómeno la literatura actuarial ha venido suponiendo que se trata de un parámetro cierto, que basta con cuantificarlo de forma prudentemente. Así, si suponemos que en un contexto económico dado, un interés prudente puede ser “aproximadamente el 4%”, el interés técnico utilizado sería el 4%. En fechas relativamente recientes, el problema de la incertidumbre fue abordado desde una óptica de riesgo, esto es, suponiendo la naturaleza aleatoria de los tipos de interés que rigen en los mercados financieros.

Sin embargo, si bien no es descabellado suponer una naturaleza aleatoria para el interés a corto plazo, diversos autores como Gerber (1995) en su libro “Life Insurance Mathematics”, rechazan la posibilidad de modelizar estocásticamente el tipo de interés que debe utilizarse en la valoración actuarial, sobre todo, en pólizas de larga duración.

Asimismo, y respecto al tipo de interés técnico a aplicar en los seguros de vida Lemaire apunta en su trabajo "Fuzzy Insurance" publicado en *Astin Bulletin* en 1990, páginas 36-37:

“Estimar el tipo de interés es indudablemente uno de los problemas de modelización más complejos (...). Calcular primas de seguros de vida que duran, por ejemplo, cuarenta años con un tipo de interés fijo parece un ejercicio fútil. Consideramos que la introducción de los tipos de interés borrosos como mínimo nos permitirán obtener una medida parcial a pesar de nuestra ignorancia”

Tomando como base estas reflexiones, nosotros también consideramos que un enfoque más realista en la modelización del tipo de interés es suponer que viene estimado a través de números borrosos, dada la subjetividad inherente a la fijación del tipo de interés y por tanto, que su manipulación con operadores blandos tipo “máximo-mínimo” – la utilización del principio de extensión de Zadeh- es más acorde con la información débil que se dispone sobre dicha variable. En cualquier caso, la utilización de operadores max-min es más adecuada que los operadores duros como los “suma-producto”, asociados a la modelización estocástica, los cuales se utilizarían si datos pasados se proyectaran al futuro, lo cual no creemos que sea adecuado en el contexto económico actual, o bien porque el tipo de interés se hubiera modelizado haciendo uso de probabilidades subjetivas.

Tras realizar la preceptiva exploración bibliográfica, comprobamos que la preocupación sobre el problema que implica la incertidumbre sobre el tipo de interés de valoración en los seguros de vida era relativamente reciente, y que en la mayor parte de trabajos se introducía dicha incertidumbre asignando al tipo de interés una distribución de probabilidad, metodología, que ya hemos reseñado que nos parecía discutible.

Sin embargo, no debemos olvidar que también algunos autores habían analizado la valoración de los contratos de seguros de vida utilizando intereses borrosos, algunos de ellos españoles como M. Jiménez o J.C. Ferrer, o mismamente A. Terceño; y también autores extranjeros de reputación incuestionable en la ciencia actuarial como J. Lemaire o K. Ostasiewski. En todos estos trabajos, el denominador común era la utilización de la denominada “Teoría Estática”, basada en la reducción del fenómeno de la mortalidad a sus valores esperados y la introducción de la incertidumbre en el tipo de interés mediante números borrosos. De esta forma, el problema de valoración actuarial quedaba reducido a un problema de valoración financiera con interés borroso, cuyos primeros desarrollos se deben a A. Kaufmann y J. Gil Aluja, y que posteriormente han ampliado autores como J.J. Buckley, A. Terceño o M. Jiménez.

Sin embargo, observamos que existían dos lagunas en este tratamiento de la valoración en los seguros de vida. La primera de ellas estaba en la reducción de la aleatoriedad de la mortalidad a sus valores esperados, y la segunda estaba relacionada con el procedimiento que se debía seguir en la estimación del interés o intereses borrosos a utilizar.

Respecto a la primera cuestión, el instrumental borroso existente permite trabajar con toda la incertidumbre que proviene del interés (en concreto, con los α -cortes de las estimaciones o la función de pertenencia); pero la mortalidad, y por tanto, los capitales que devengan ante cada suceso contemplado sobre la vida del asegurado quedaban reducidos a su esperanza matemática. Así, con estos instrumentos se pierde gran parte de la información relativa a la mortalidad. Por tanto, era necesario modelizar el proceso de valoración de los seguros de vida utilizando algún instrumento matemático que permitiera trabajar conjuntamente con la aleatoriedad y la borrosidad inherente a dicho fenómeno. Asimismo, el profesor J. Gil Aluja en su trabajo "Towards a new concept of economic research" publicado en la revista *Fuzzy Economic Review* en 1995, afirma en la página 21:

“Una de las características de la realidad actual es que en los problemas encontramos simultáneamente información blanda y dura, es decir, borrosa y aleatoria. Nosotros conocemos perfectamente como asociar dichos datos de diferente naturaleza sin perder información.”

Así pues, tan sólo hacía falta aplicar uno de los instrumentos de análisis de los procesos híbridos que reflejara la doble vertiente aleatoria e incierta que implica la valoración actuarial. Dichos instrumentos se encuentran desarrollados en trabajos dispersos, pero muchos de ellos son rigurosamente expuestos en la obra de los profesores A. Kaufmann y J. Gil Aluja “Las matemáticas del azar y de la incertidumbre” de 1990 y en la de A. Kaufmann, J. Gil Aluja y A. Terceño “Matemática para la economía y la gestión de empresas”, publicada en 1994. En nuestro caso, el instrumento que utilizaremos para llevar a cabo el análisis que pretendemos realizar es el concepto de *variable borroso aleatoria* que podríamos definir grosso modo como una variable aleatoria con realizaciones borrosas. Dicho instrumental se encuentra profusamente glosado en la obra de R. Kruse y K.D. Meyer “Statistics with vague data” publicada en 1987, y la base para su desarrollo fue expuesta por H. Kwakernaak en sus trabajos “Fuzzy random variables-I. Definitions and theorems” y “Fuzzy random variables-II. Algorithms and examples for the discrete case”, publicados respectivamente en 1978 y 1979 en la revista *Information Sciences*.

Respecto a la segunda laguna detectada, la estimación del tipo de interés de valoración, observamos que era un aspecto que en ambiente borroso estaba poco abordado tanto en los

trabajos de valoración actuarial como en los trabajos de valoración financiera. Así, aunque nosotros compartíamos la opinión de que en nuestro problema es más realista modelizar la incertidumbre a través de los instrumentos que proporciona la teoría de los subconjuntos borrosos, nuestra preocupación se centraba en como los “expertos”, basándose en su experiencia, expectativas, etc. estimaban los intereses que regirían durante el periodo de valoración. Por esta razón proponemos un método para la estimación de los tipos de interés a través de números borrosos, partiendo del concepto de ETTI.

Generalmente se toma como interés de referencia para realizar la valoración de cualquier activo, financiero o no, el denominado como “libre de riesgo”, es decir, el de la deuda pública, y ello es especialmente claro en los seguros de vida, ya que los aseguradores suelen cubrir sus obligaciones utilizando en un porcentaje muy elevado títulos de deuda pública. Así pues, consideramos que los expertos son los actuantes en el mercado de deuda pública, los cuales, al fijar los precios y rendimientos de los instrumentos (letras, bonos, obligaciones) que en dichos mercados se negocian, expresan implícitamente sus expectativas sobre los tipos de interés futuros. A través de las rentabilidades de los títulos de renta fija, aunque no de forma directa, se puede hallar la estructura temporal de los tipos de interés (ETTI) que rige en el mercado de deuda que estemos analizando, es decir, los tipos de interés con que el mercado descuenta el dinero en función de su vencimiento, también denominados tipos al contado, tipos spot o tipos cupón cero. A partir del conocimiento de la estructura temporal de los tipos de interés, podemos derivar los tipos implícitos o forward, que según la teoría de las expectativas racionales son los que el mercado anticipa para el futuro.

El instrumento matemático más utilizado para estimar la ETTI son los modelos econométricos, en nuestra opinión, dicho instrumento no es del todo adecuado en la estimación de la ETTI. La primera razón es el carácter fuertemente subjetivo de las estimaciones de los agentes económicos sobre el devenir de los tipos de intereses futuros, que es lo que reflejan los precios y las rentabilidades de los instrumentos negociados en los mercados de renta fija. Un segundo motivo se basa en que para cada una de las referencias negociadas en el mercado rara vez se negocia un único precio, sino una horquilla de precios (y por tanto, de rentabilidades), lo cual puede interpretarse como que los actuantes tienen distintas expectativas sobre la evolución futura de los tipos de interés. Este segundo problema había sido solucionado por la econometría reduciendo dicha horquilla a un único precio, con la pérdida de información que dicho proceder implica. Un instrumento alternativo y por otra parte más flexible y acorde con la modelización del problema que pretendíamos resolver era utilizar algún modelo de regresión borrosa en la estimación de la estructura temporal de los tipos de interés. Ello nos permitirá desarrollar una metodología que permitirá obtener la relación tipos al contado-plazo cuantificada a través de números borrosos, lo

cual es más acorde con la realidad, ya que las rentabilidades de los instrumentos de deuda pública no son únicas, sino que se mueven dentro de una horquilla de valores, siendo por tanto lógico que la ETTI tenga la misma naturaleza. De esta forma, los tipos forward que define la ETTI –los tipos anticipados por los actuantes para el futuro- también serán números borrosos. Si aceptamos que dichos tipos son los tipos que el mercado anticipa para el futuro, la segunda laguna detectada estaría, al menos parcialmente, solucionada.

2. ESTRUCTURA Y METODOLOGÍA DE LA TESIS

Sobre la base de los razonamientos y motivaciones expuestas en la presentación de la tesis, hemos dividido ésta en tres partes, que si bien pueden ser leídas de forma independiente, la motivación de cada una de ellas es la misma: proporcionar unos instrumentos que permitan al asegurador de vida un análisis más realista de su cartera de seguros. Éstas son:

- 1) Primera parte: Instrumentos matemáticos de la teoría de los subconjuntos borrosos
- 2) Segunda parte: Estimación de la estructura temporal de los tipos de interés a través de subconjuntos borrosos y estimación de los tipos de interés futuros.
- 3) Tercera parte: Análisis de la determinación de las primas en los seguros de vida y de la solvencia dinámica cuando los tipos de interés de valoración vienen estimados a través de números borrosos.

Tras desarrollar los tres bloques que conforman el cuerpo de la tesis, terminamos con el preceptivo apartado de conclusiones, en el cual expondremos cuales creemos que son los principales resultados a los que hemos llegado y las cuestiones que consideramos que deben ser objeto de posteriores trabajos de investigación.

Realizamos a continuación una breve exposición del contenido de las diferentes partes de la tesis y la metodología que se ha seguido en el desarrollo de las mismas.

PARTE I: INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS DE LA TEORÍA DE LOS SUBCONJUNTOS BORROSOS

En este apartado nos limitamos a exponer los conceptos y algunos de los instrumentos que derivan de la teoría de los subconjuntos borrosos, y que son utilizadas a lo largo de la tesis. Su común denominador es que nos van a permitir manipular información que total o parcialmente tiene carácter incierto o subjetivo, y que además es cuantitativa. Es decir, se enmarcan dentro de la matemática numérica de la incertidumbre.

En la exposición que realizamos no seremos exhaustivos, ya que no se pretende realizar ninguna aportación relevante sino que se recopilan los instrumentos o tópicos más significativos que son necesarios para el posterior desarrollo de la tesis. Asimismo, también somos conscientes de que algunas de las cuestiones que se presentan no son deducibles directamente, sino que es necesario un desarrollo matemático sobre la base de teoremas, proposiciones, corolarios, etc. para llegar a ellos. Dichos desarrollos pueden ser encontrados en los trabajos citados.

Este primer apartado se ha estructurado en cuatro capítulos que son:

- 1) Elementos básicos de la teoría de los subconjuntos borrosos
- 2) Algunos modelos de regresión borrosa
- 3) Diversas asociaciones entre aleatoriedad e incertidumbre
- 4) Valoración financiera con intereses borrosos

En el primero de los capítulos recogeremos las cuestiones fundamentales, y seguramente, ampliamente conocidas por aquéllos investigadores familiarizados con la teoría de los subconjuntos borrosos. En él exponemos el concepto de subconjunto borroso, de número borroso, analizamos la evaluación de funciones con variables cuantificadas a través de números borrosos, etc. Asimismo hacemos un especial énfasis sobre la forma de operar con números borrosos triangulares y trapezoidales, y de forma más general, sobre los L-R de Dubois y Prade, que los generalizan, ya que son los que por sus especiales características, como su mayor operatividad y su fácil interpretación, presentan gran capacidad para representar cuantías estimadas subjetivamente, por ello son muy utilizados en los modelos que incorporan números borrosos en su elaboración. Por este motivo, son los que utilizaremos para representar las variables que cuantificaremos a través de números borrosos. Por esta misma razón exponemos métodos que permiten aproximar cualquier número borroso a través de uno L-R de Dubois y Prade y de forma más particular, a través de uno triangular o trapezoidal. Finalizamos exponiendo diversas metodologías de desfuzzyficación de números borrosos.

En el segundo capítulo hemos recogido el concepto de regresión borrosa a través de la exposición de los modelos básicos que han sido desarrollados en la literatura. Si bien, la idea subyacente de esta técnica es similar a la que motiva las técnicas de regresión estadística, existe una diferencia fundamental: en el caso de la regresión convencional, los errores que se cometen al suponer una relación estrictamente lineal entre la variable explicada y las explicativas se suponen aleatorios. Ello implica que las estimaciones que se pueden realizar después de ajustar los coeficientes del hiperplano que describe la relación entre variables son también variables aleatorias. En contraposición, al utilizar una regresión borrosa suponemos que las divergencias que se producen

tras ajustar los coeficientes del hiperplano que relaciona la variable explicada y las explicativas son debidas la existencia de una relación borrosa entre ellas. Con este instrumento, el "error" no se incorpora como un sumando aleatorio, sino que queda reflejado en los coeficientes del hiperplano que ajustamos, que vienen estimados por números borrosos. Por tanto, las predicciones que realicemos tras ajustar dichos coeficientes serán números borrosos.

En nuestra opinión, y tal como sostienen Mario Fedrizzi, Michelle Fedrizzi y Walenty Ostasiewicz en su trabajo de 1993 "Towards a fuzzy modelling in economics" publicado en *Fuzzy Sets and Systems*, página 267, aunque las técnicas de regresión borrosa están menos fundamentadas matemáticamente que las econométricas, también son instrumentos más adecuados que las econométricas para modelizar y cuantificar relaciones entre variables de naturaleza económica, dada su flexibilidad y al alto contenido subjetivo de la información que en muchas ocasiones es necesario manejar. Asimismo, en muchas ocasiones las variables que son observadas (por ejemplo, el precio de los activos financieros un día concreto) no son magnitudes ciertas, sino que vienen dados por una horquilla de valores. La solución que a este problema ha dado la econometría es la reducción de dicha horquilla a un único valor cierto representativo, lo cual supone una importante pérdida de información. Utilizando técnicas de regresión borrosa, podemos trabajar con toda la horquilla de valores observada sobre las variables estudiadas, si es que éstas se manifiestan como intervalos de confianza, por lo que no existe pérdida de información. En nuestra opinión, un manual esencial sobre este tema es "Fuzzy regression analysis", publicado en 1992 y cuyos editores son J. Kacprzyk y M. Fedrizzi, donde se recogen los principales modelos de regresión borrosa y algunas interesantes aplicaciones.

En el tercer capítulo analizamos algunos instrumentos diseñados para manipular la información cuantitativa cuando ésta tiene un doble carácter aleatorio y borroso –denominados por algunos autores "híbridos"-. El instrumento híbrido que se aplica en esta tesis es el concepto de variable borroso aleatoria, desarrollado ampliamente en la citada obra de R. Kruse y K.D. Meyer.

En el último capítulo de la primera parte de la tesis analizamos la valoración financiera cuando las variables que intervienen vienen cuantificadas a través de números borrosos. Aunque somos conscientes que no se trata de un instrumento que derive directamente de la teoría de los subconjuntos borrosos, sino que se trata más bien de una aplicación a la economía financiera de esta teoría, creemos que dada la abundancia y profundidad de trabajos producidos en este campo introduciendo la incertidumbre mediante los instrumentos de la teoría de los subconjuntos borrosos, la “matemática financiera borrosa” se ha convertido en un instrumento más de los que proporciona dicha teoría, en este caso para modelizar fenómenos financieros. Por ello, algunos de sus desarrollos son expuestos en esta primera parte de la tesis dado el carácter instrumental de la

misma. Dedicaremos una especial atención al supuesto en que los datos de partida (especialmente los intereses) vengan dados a través de números borrosos triangulares, lo cual es habitual en los trabajos que analizan la valoración financiera en incertidumbre. Analizaremos asimismo la validez de la aproximación triangular de las magnitudes que obtengamos tras aplicar en el proceso de valoración financiera intereses borrosos triangulares, lo cual será de utilidad en los desarrollos que se realicen en apartados posteriores.

PARTE II: ESTIMACIÓN DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE LOS TIPOS DE INTERÉS A TRAVÉS DE SUBCONJUNTOS BORROSOS Y ESTIMACIÓN DE LOS TIPOS DE INTERÉS FUTUROS

El objetivo de la segunda parte de esta tesis es desarrollar una serie de metodologías que permitan estimar los tipos de interés futuros a través de números borrosos. Partiremos de la información que es directamente observable en los mercados de renta fija pública (y por tanto, libres del riesgo de insolvencia): el precio y la rentabilidad de los instrumentos que en dichos mercados se negocian. La herramienta básica para la estimación de dichos tipos de interés, será la estructura temporal de los tipos de interés (ETTI), siendo los tipos implícitos que define los que asimilaremos a los que el mercado anticipa para el futuro.

En concreto, hemos estructurado esta segunda parte de la tesis en cuatro capítulos:

- 1) Estimación de los intereses futuros mediante números borrosos
- 2) Métodos econométricos de estimación de la ETTI
- 3) Estimación de la ETTI mediante el empleo de una regresión posibilística
- 4) Predicción de los tipos de interés futuros a través de números borrosos

El primer capítulo es introductorio, y su objetivo es motivar y justificar la necesidad de la estimación de una estructura temporal de los tipos de interés mediante números borrosos. Para ello empezamos diferenciando los diversos intereses que rigen en los mercados de renta fija: la tasa de rendimiento interno de un título, los tipos al contado y los tipos de interés forward.

Posteriormente analizamos las diversas teorías explicativas de la ETTI, justificándose de esta forma cual de ellas estamos asumiendo implícitamente al identificar los tipos forward como los tipos que en el mercado se anticipan en un futuro, que es la Teoría de las Expectativas Racionales.

Se estudian las diversas técnicas existentes para estimar la ETTI, ya que las que propondremos nosotros, si bien se basan en utilizar instrumentos de regresión borrosa, se inspirarán en las

econométricas. Ello es debido a que la utilización de instrumentos de regresión borrosa ofrece ciertas ventajas sobre los estadísticos convencionales, tal como fue comentado, a la vez que nos llevará a la solución que pretendemos resolver finalmente: traducir la débil información que proporcionan los mercados sobre las expectativas de los tipos de interés futuros en estimaciones cuantitativas de los mismos, a través de números borrosos.

En el segundo apartado analizamos los principales métodos econométricos orientados a estimar la ETTI, y en los cuales basaremos nuestras propuestas. Diferenciamos dentro de estos métodos dos grandes grupos:

- a) Aquéllos que se basan en estimar una relación lineal tasa de rendimiento de las referencias-vencimiento, en el mercado de deuda pública y que se denomina curva de rentabilidades. Dicha relación no es estrictamente la ETTI ya que los bonos y las obligaciones incorporan el cobro de flujos intermedios – los intereses o cupones-. Para acabar estimando la ETTI será necesario complementar la curva de rentabilidades con la técnica del bono par, que en cualquier caso no nos permitirá obtener una ETTI continua, sino discreta.
- b) El segundo tipo de metodologías, más atractivas teóricamente, se basarán en la estimación directa de la función de descuento que describen los tipos cupón cero, que serán funciones, lógicamente, también del vencimiento. A partir de dicha función de descuento es inmediato hallar la ETTI que define. Los modelos expuestos son los que se encuadran dentro de la familia de los splines, en concreto el de H. McCulloch, propuesto en su trabajo "Measuring the term structure of interest rates", publicado en 1971 en la revista *Journal of Bussiness* y el de O.A. Vasicek y G. Fong "Term structure modelling using exponential splines" publicado en 1982 en *Journal of Finance*.

En cualquier caso, una vez estimada la ETTI por cualquiera de los métodos econométricos propuestos, la determinación de los tipos implícitos es inmediata, ya que se trata de resolver un simple sistema de ecuaciones con coeficientes ciertos.

Con el fin de ejemplificar los métodos propuestos, y poder comparar los resultados obtenidos con los que se obtienen con técnicas de regresión borrosa, hemos realizado la estimación de la estructura temporal de los tipos de interés y de los tipos forward correspondiente a la sesión del 22-1-1999. Somos conscientes de que dicha sesión puede estar un poco alejada en el tiempo respecto a la fecha de lectura de la tesis. Sin embargo consideramos que el día elegido para realizar las correspondientes estimaciones no tiene mayor importancia, ya que el único fin del ejemplo es mostrar que las estimaciones que se obtiene con las técnicas propuestas son "razonables", y realizar una comparación empírica de los resultados que se obtengan frente a las estimaciones que realicemos con nuestra propuesta.

En el capítulo 3 propondremos diversas metodologías de estimación de una ETTI borrosa inspiradas en los métodos expuestos en el capítulo anterior y basándonos en el uso de una regresión posibilística. Todos los desarrollos efectuados se ejemplificarán estimando la ETTI, igual que antes, en el 22-1-1999, analizándose si los resultados obtenidos utilizando la regresión borrosa son coherentes respecto a los obtenidos mediante métodos econométricos. Por ejemplo, si obtenemos mediante uno de los métodos econométricos que el tipo spot a tres años es del 4%, es de esperar que en la correspondiente estimación borrosa, el interés cierto del 4% tenga un alto nivel de presunción, pero al mismo tiempo la estimación borrosa nos aportará información sobre otros tipos de interés que tienen también "posibilidad" de ocurrencia

El último capítulo de esta segunda parte de la tesis, se dedica a analizar la estimación de los tipos anticipados por el mercado cuando la ETTI es borrosa, de tal forma que los tipos forward también serán números borrosos. Este problema, que en certeza es trivial, no lo será en borrosidad, ya que se trata de resolver un sistema de ecuaciones con coeficientes estimados a través de números borrosos. En este caso también analizaremos los resultados obtenidos utilizando la metodología borrosa en la sesión que ha sido escogida para la estimación de la ETTI, y los contraponemos con los resultados obtenidos en el capítulo 2, es decir, los obtenidos utilizando técnicas de regresión convencionales.

Reseñamos que la metodología de estimación de la ETTI y los tipos implícitos planteada en los apartados 3 y 4 puede ser implementada para cualquier tipo de número borroso L-L de Dubois y Prade – es decir, con idéntica función forma derecha e izquierda- pero hacemos especial hincapié, por su gran utilización en aplicaciones prácticas, en la implementación de dichos métodos mediante números borrosos triangulares, de forma que la estimación de las diversas magnitudes que se derivan de la ETTI, especialmente, los tipos spot y los tipos forward puedan serlo, bien porque puedan ser estimados de forma directa triangularmente o porque puedan ser aproximados.

PARTE III: FIJACIÓN DE LAS PRIMAS DE LOS SEGUROS DE VIDA Y DE LA SOLVENCIA DINÁMICA DEL ASEGURADOR CUANDO LOS TIPOS DE INTERÉS DE VALORACIÓN VIENEN DADOS A TRAVÉS DE NÚMEROS BORROSOS

El estudio que se realiza en la tercera parte de la tesis, dedicada a la valoración de los seguros de vida con tipo de interés incierto, es el objetivo de esta tesis. Para acotar el campo de estudio hemos supuesto que las cuantías aseguradas ante cada evento sobre la vida del asegurador vienen

prefijadas desde el inicio del contrato, y que los sucesos considerados son únicamente el fallecimiento o la supervivencia del asegurado.

En la presentación de la tesis doctoral ya comentamos que los fenómenos básicos que determinan la valoración actuarial son: el fenómeno biométrico, en nuestro caso, la mortalidad y el fenómeno financiero. Por las razones ya expuestas al primero le damos un tratamiento probabilístico. En cuanto al segundo, se plasma en la decisión que debe tomar el asegurador respecto a la rentabilidad que debe ofrecer a sus asegurados, - interés técnico- y que lo modelizaremos utilizando la teoría de los subconjuntos borrosos.

El objetivo final en nuestro análisis será proponer una metodología que permita, en primer lugar, realizar la valoración financiero-actuarial de los seguros de vida teniendo en cuenta la doble vertiente probabilística y borrosa, que comprende el fenómeno. Dicha modelización se sustentará en la utilización del concepto de variable borroso-aleatoria. Aunque dicha metodología sea aplicada a la determinación de las primas del seguro, el instrumento propuesto debe ser igualmente válido para determinar las provisiones a constituir en un momento intermedio de la vida del contrato y debe permitir valorar la posición de solvencia del asegurador medida como probabilidad de quiebra y asignar a cada posición un nivel de presunción que vendrá dado por el de la trayectoria de los tipos de interés a que dicho nivel de solvencia esté ligado.

El desarrollo de estos objetivos nos ha llevado a estructurar esta tercera parte de la tesis en los siguientes seis capítulos:

- 1) Conceptos introductorios
- 2) Análisis de las principales estructuras actuariales con certeza en el tipo de interés de valoración
- 3) Análisis de las principales estructuras actuariales con el tipo de interés estimado a través de números borrosos
- 4) Fijación de las primas y análisis de la variable borroso aleatoria pérdida para diversas modalidades de estructuras actuariales bajo la hipótesis de un único asegurado en cartera
- 5) Fijación de la prima única y análisis de la variable borroso aleatoria pérdida a través de la teoría clásica del riesgo
- 6) Fijación de la prima única y análisis de la variable borroso aleatoria pérdida utilizando simulación estocástica

El primer apartado va dedicado a dar el marco general que utilizaremos a la hora de plantear nuestra propuesta metodológica en el análisis de los seguros de vida. En él, y tras definir el concepto de seguro de vida, analizamos brevemente el tratamiento que la matemática actuarial ha

dado tradicionalmente al fenómeno de la mortalidad. Dicho fenómeno debe enmarcarse en un contexto de riesgo, ya que a los estados posibles (edades de fallecimiento) se les puede asignar una probabilidad de ocurrencia, tal como ya hemos comentado.

Posteriormente, y dado que un seguro de vida también es un instrumento de ahorro, realizamos un detallado análisis del interés técnico y justificamos la necesidad de la utilización de la teoría de los subconjuntos borrosos para su modelización. Para ello exponemos las reflexiones y concepciones de diferentes autores sobre dicha variable y las diversas soluciones que la literatura ha dado en la modelización de la incertidumbre del rendimiento que el asegurador obtendrá invirtiendo las primas. Dichas soluciones se han concretado, básicamente, en considerar intereses aleatorios (en la gran mayoría de casos) o suponer que los intereses son borrosos. Como ya hemos comentado, nos inclinamos por esta segunda opción, dada la naturaleza de la variable objeto de cuantificación. Posteriormente proponemos diversos métodos orientados a determinar el interés o los intereses de actualización a través de números borrosos. Dado que la referencia fundamental debe ser el interés que podrá obtener con la cartera activa, que se compone en gran parte por deuda pública, creemos que una referencia válida para determinar dicho interés debe ser la ETTI del mercado de deuda pública, estimada a través de números borrosos en la segunda parte de la tesis.

También en este primer apartado formulamos el principio de equivalencia estático de valoración actuarial y suponiéndose incertidumbre en el tipo de interés, consiste en reducir los capitales financieros que intervienen en la operación, cuyo devengo depende de un determinado suceso sobre la vida del asegurado, a su esperanza matemática. Ello es debido a que en dicho principio se han basado los trabajos que han modelizado la incertidumbre en el interés de valoración a través de números borrosos.

Consideramos que un punto débil de esta metodología es que se reduce la aleatoriedad del fenómeno biométrico a sus valores esperados, por lo que hace difícil abordar problemas como la fijación de recargos sobre las primas para desviaciones de la mortalidad o analizar la posición de solvencia del asegurador. Por esa razón finalizamos este capítulo analizando el denominado enfoque estocástico en la valoración de los seguros de vida, basado en la variable aleatoria "número de periodos enteros de vida" para una persona. A partir de esta variable aleatoria se define la variable aleatoria "pérdida para el asegurador", que cuantifica el valor actual de las pérdidas que puede sufrir el asegurador tras cobrar una determinada prima. Si el tipo de interés utilizado en la actualización de los flujos asociados a un contrato de seguro es borroso, las realizaciones de dicha variable aleatoria serán números borrosos y por tanto nos encontraremos ante una variable borroso aleatoria.

En el segundo capítulo analizaremos la valoración de las estructuras actuariales más usuales en la práctica, suponiéndose certeza en el interés o intereses de valoración, desde el marco conceptual que proporciona la teoría estocástica y obteniéndose la esperanza matemática, la varianza y la desviación estándar del valor actual de las prestaciones de las mismas. En todos los casos estos parámetros son funciones del tipo de interés de valoración, siendo también analizado el comportamiento de éstos respecto al tipo o tipos de interés de valoración. Los resultados que obtengamos facilitarán la posterior aplicación de intereses cuantificados a través de números borrosos.

En el tercer capítulo realizamos un análisis análogo al del apartado 2, pero suponiéndose que los intereses de valoración vienen estimados a través de números borrosos. Así, el valor actual de las prestaciones asociadas a cada estructura será una variable borroso aleatoria, ya que los valores actuales de las prestaciones correspondientes ante cada suceso contemplado en el contrato lo son, y la esperanza matemática, varianza y desviación estándar también. Realizaremos también un análisis particular para el caso en que el tipo de interés venga dado a través de un número borroso triangular, así como la viabilidad de aproximar triangularmente esperanza matemática, varianza y desviación estándar.

En el cuarto apartado analizaremos, en primer lugar, la fijación de la prima pura única que debe cargar el asegurador, que será la esperanza matemática de las prestaciones. Para ello será necesario desfuzzyficar dicha esperanza matemática, siendo el procedimiento propuesto el cálculo del valor esperado, ya que por una parte se utiliza toda la información que proporciona el número borroso y adicionalmente se permite introducir de forma sencilla la aversión al riesgo de interés del asegurador. Posteriormente analizamos la fijación de recargos suponiendo carteras de un único asegurado, supuesto, que si bien no es realista, facilita la descripción de la metodología que seguiremos, y motiva el análisis completo de la variable borroso aleatoria pérdida para el asegurador, análisis que no tan sólo debe permitir la determinación de recargos, sino también la posición de solvencia para carteras de un único asegurado.

En los últimos capítulos de esta tercera parte de la tesis, el 5 y el 6, propondremos una metodología que permita realizar el análisis de la solvencia del asegurador y la fijación de recargos para desviaciones de siniestralidad. Si bien el valor de la prima pura única es independiente del tamaño del colectivo asegurado, el hecho de disponer de una cartera de asegurados (más de uno) debe permitir cargar al asegurado un recargo para la desviaciones de la siniestralidad menores que si consideramos a cada asegurado como un único negocio, ya que la

ley de los grandes números indica que la mortalidad debe tender a comportarse conforme a lo esperado.

En el apartado 5 partiremos del marco conceptual de la Teoría Clásica del Riesgo, lo cual implica aceptar que el valor actual de las pérdidas para el asegurador se distribuye según una variable aleatoria normal. Por supuesto, ello sólo es aplicable si la cartera de asegurados se compone de un gran número de pólizas homogéneas. Si el tipo de interés es borroso, dicho planteamiento deberá ser adaptado a que la media y la desviación estándar son borrosas, por lo que acabaremos utilizando variables borroso aleatorias normales. Bajo estos supuestos, la descripción completa de la variable borroso aleatoria pérdidas permitirá determinar, de forma rigurosa los recargos a aplicar por parte del asegurador para conseguir cierto nivel de solvencia, y determinar la posición de solvencia del asegurador una vez ha cuantificado la prima pura y el recargo a repercutir.

Basándonos en los mismos planteamientos del apartado 5, en el capítulo 6 realizamos un estudio similar para carteras homogéneas de tamaño reducido. Dado que en este caso no es realista suponer que el valor actual de las pérdidas se comporta como una variable aleatoria normal, propondremos hallar, simulando estocásticamente la mortalidad, la variable borroso aleatoria valor actual de las pérdidas de forma empírica. Con dicha variable borroso aleatoria empírica, podremos realizar los análisis propuestos en los capítulos 4 y 5.

Asimismo, hemos creído conveniente para el desarrollo de los apartados 3, 4 y 5, realizar diversas aplicaciones numéricas, con el fin de mostrar la aplicabilidad de los desarrollos efectuados.

CONCLUSIONES Y BIBLIOGRAFÍA

La penúltima cuestión que abordaremos en la presenta tesis doctoral será el preceptivo apartado de conclusiones, sintetizándose en primer lugar las que a nuestro juicio son más relevantes. Posteriormente desarrollaremos un apartado que podríamos denominar como "conclusiones proyectivas". Ello es debido a nuestra convicción de que una tesis doctoral es necesariamente una obra incompleta, de forma que los objetivos que llevan a su elaboración no están totalmente cumplidos si durante el largo periodo de tiempo que es necesario para su elaboración, al doctorando y al director no se le plantean nuevas inquietudes e interrogantes sobre el tema analizado o sobre cuestiones afines. Por esta razón, creemos que es necesario exponer las vías de investigación que consideramos que pueden seguirse tras la elaboración del trabajo, y los interrogantes e inquietudes que nos ha suscitado su elaboración.

Finalizamos con el apartado de bibliografía, donde han sido incluidos aquellos libros, artículos, documentos de trabajo etc. que han sido consultados en la elaboración de la tesis. Por supuesto, algunos han sido utilizados intensivamente pero de otros únicamente hemos aprovechado alguna idea o alguna reflexión de los autores, lo cual, por otra parte, creemos que no es despreciable. Asimismo, hemos optado por no separar la bibliografía en función de los tres grandes bloques que configuran la tesis, y presentar una bibliografía unificada. Ello es debido, en primer lugar, a que a pesar de que estos tres bloques pueden leerse independientemente, han sido redactados partiendo de un único objetivo: realizar alguna aportación en el campo de la valoración actuarial en incertidumbre. Así pues, aunque algunas referencias son específicas de una de las partes que configuran la tesis, una gran cantidad de ellas es necesaria para el desarrollo de todas las cuestiones abordadas.

PARTE I: INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS DE LA TEORÍA DE LOS SUBCONJUNTOS BORROSOS

CAPÍTULO 1:

ELEMENTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE LOS SUBCONJUNTOS BORROSOS

1.1. SUBCONJUNTO BORROSO

1.1.1. Definición y concepto

La matemática de conjuntos que podríamos denominar como clásica, se basa en la lógica aristotélica fundamentada en el principio del tercio excluso, principio que indica que una proposición únicamente puede ser verdadera o falsa, no existiendo ningún grado de verdad intermedio. Como consecuencia de dicho principio, en la teoría de conjuntos, para un subconjunto A definido sobre un conjunto universo o referencial X , un elemento del referencial pertenece o no pertenece a dicho conjunto A , es decir, no existe ningún tipo de ambigüedad sobre su pertenencia.

Matemáticamente la pertenencia a un conjunto se expresa a través de una función característica $\mu_A(x)$ que asigna valores a todos los elementos de A en el conjunto discreto $\{0, 1\}$. Dicho valor es 0 cuando su pertenencia es falsa y 1 cuando esta es cierta. Es decir, matemáticamente la función característica viene dada por:

$$\mu_A: X \rightarrow \{0, 1\}$$
$$x \in X \rightarrow \mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Del principio del tercio excluso deriva el principio de exclusión. Éste indica que si un elemento x del referencial X pertenece a un conjunto A , no pertenece a su complementario, A^c , y viceversa. Matemáticamente podemos expresar el principio de exclusión como:

$$\forall x \in X, \text{ si } \mu_A(x)=1 \Leftrightarrow \mu_{A^c}(x)=0$$

En muchas circunstancias estos principios sobre los que se sustenta la lógica clásica, y por tanto, los modelos matemáticos que de ellos se derivan pueden ser válidos para reflejar el fenómeno estudiado. Por ejemplo, un asegurador de vida puede definir sobre el conjunto referencial “colectivo asegurado” el conjunto “individuos jubilados”. La pertenencia a este conjunto no admite ningún tipo de matiz. Sin embargo, en muchas circunstancias la lógica clásica no es suficiente para reflejar o modelizar fenómenos sobre los que las personas deben tomar decisiones,

que frecuentemente son vagos. Supongamos que sobre el conjunto referencial “colectivo asegurado” definimos el conjunto “individuos con bajo nivel de colesterol”. La pertenencia a este conjunto no admite sólo el “sí” o el “no”, el “blanco” o el “negro”, salvo que arbitrariamente se fije una medida por debajo de la cual se determine que un individuo tiene un bajo nivel de colesterol o no; pero aún así, en este supuesto siempre habrá personas con un nivel de colesterol cercano a la frontera a las que se habrá encuadrado sin ningún tipo de ambigüedad dentro de las que tienen un bajo nivel de colesterol, o dentro de las que no lo tienen, perdiéndose por tanto mucha información. Si queremos representar con veracidad éste fenómeno deberemos admitir que entre el “sí” y el “no” existe una amplia gama de matices. Un determinado individuo podrá tener un nivel de colesterol “bajo”, “bastante bajo”, “poco bajo”, “muy elevado”, etc. Estos problemas no pueden ser analizados con los limitados principios del tercio excluido y el de exclusión, sino que debe partirse de uno más flexible, el de simultaneidad gradual, enunciado formalmente en Gil Aluja (1995), según el principio de simultaneidad gradual, un elemento puede pertenecer a un determinado conjunto y a la vez al conjunto complementario, siempre que se asigne a ambas pertenencias un grado o bien, una proposición puede ser verdadera y falsa a la vez siempre que se asigne un grado de verdad y de falsedad.

El instrumento por excelencia para modelizar fenómenos en los que rige el principio de simultaneidad gradual es la Teoría de los Subconjuntos Borrosos, cuya base son las lógicas multivalentes desarrolladas en el primer tercio del siglo XX por autores como Lukasiewicz o Goguen. Sin embargo, si debiéramos dar una fecha en la cual esta teoría toma carta de naturaleza es en 1965, con el trabajo de Zadeh (1965) "Fuzzy sets", en el cual se asientan los fundamentos lógicos que han permitido una rápida evolución en la creación de instrumentos de matemática aplicada –que son los que nos interesan en esta tesis- para modelizar realidades en las que rige el principio de simultaneidad gradual, o lo que es lo mismo, la vaguedad en la información.

Un conjunto borroso es un conjunto para el cual la pertenencia de un elemento está definida de forma difusa o borrosa. Así, si denominamos como X al universo o conjunto referencial, un subconjunto borroso, que denotaremos con una tilde, $\tilde{A}$, es aquel en el que la pertenencia de un elemento $x \in X$ tiene asignado un nivel de verdad que puede tomar valores en el conjunto continuo $[0,1]$. El nivel de pertenencia de un elemento x vendrá dado por su función de pertenencia o función característica, $\mu_{\tilde{A}}(x)$. Así, podemos notar a un subconjunto borroso como $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$, siendo la función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0,1]$$

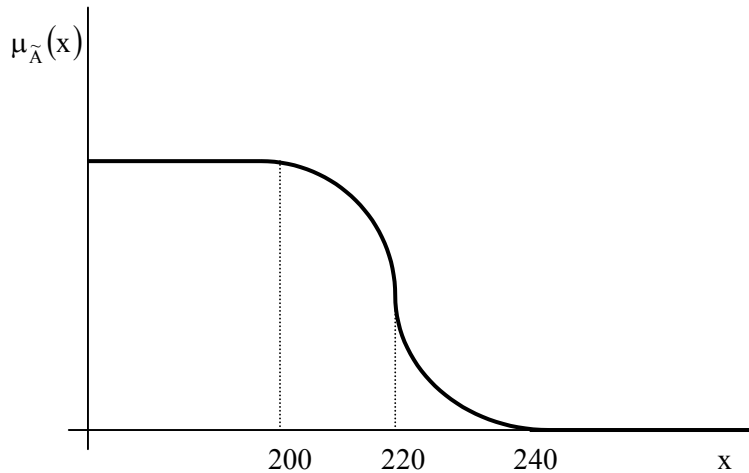
$$x \in X \rightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]$$

donde 0 indica la no pertenencia al conjunto $\tilde{A}$ y 1 la pertenencia absoluta. Evidentemente, existe una gradación del nivel de pertenencia, de forma que si $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0.9$, el nivel de pertenencia del elemento x es muy elevado, y si $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0.1$ el nivel de pertenencia de x es muy bajo.

Así, el conjunto “bajo nivel de colesterol”, puesto como ejemplo en párrafos anteriores, puede ser modelizado a través de un subconjunto borroso que notamos como $\tilde{A}$. Lemaire (1990), partiendo de que el Instituto Nacional de la Salud de los Estados Unidos aconseja que dicho nivel no debe exceder de 200 mg por decilitro de sangre, que niveles entre 200 y 240 mg/dl aumentan progresivamente el riesgo para la salud de una persona, y que a partir de 240 mg/dl el nivel de colesterol se considera de alto riesgo, propone la siguiente función de pertenencia para $\tilde{A}$, $\mu_{\tilde{A}}(x)$, que informará sobre el grado de verdad con que un individuo pertenece al grupo de personas con “bajo nivel de colesterol”:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 200 \\ 1 - 2\left(\frac{x - 200}{40}\right)^2 & 200 < x \leq 220 \\ 2\left(\frac{240 - x}{40}\right)^2 & 220 < x \leq 240 \\ 0 & 240 < x \end{cases}$$

Siendo su representación:



Por otra parte, si bien es cierto que en muchos fenómenos cabe distinguir más matices de verdad que simplemente verdadero o falso, también es cierto que el ser humano no es capaz de distinguir entre infinitos niveles de verdad. Por ejemplo, si disponemos de dos elementos de un conjunto referencial x_1 y x_2 , y en un determinado subconjunto borroso $\tilde{A}$ definido en el conjunto X su grado de pertenencia es $\mu_{\tilde{A}}(x_1) = 0.9$ y $\mu_{\tilde{A}}(x_2) = 0.1$, es fácil distinguir que x_1 pertenece a $\tilde{A}$ en

un grado mucho más elevado que x_2 . Sin embargo, si $\mu_{\tilde{A}}(x_1) = 0'6$ y $\mu_{\tilde{A}}(x_2) = 0'61$, podemos decir que x_1 pertenece con igual grado de verdad que x_2 a $\tilde{A}$, ya que el 0'01 que diferencia a ambos niveles de pertenencia es difícil de discernir. Por ello, en muchas ocasiones se reducen los niveles de pertenencia de un elemento a una escala semántica. A esta escala se le da una interpretación lingüística. A continuación presentamos las escalas semánticas mas usuales que pueden ser ordenadas de mayor a menor matización de los niveles de verdad siguiendo etiquetas lingüísticas:

Escala binaria

0: falso

1: verdadero

Escala ternaria

0: falso

0'5: ni verdadero ni falso

1: verdadero

Escala pentaria

0: falso

0'25: más falso que verdadero

0'5: ni verdadero ni falso

0'75: más verdadero que falso

1: verdadero

Escala hexaria

0: falso

0'2: casi falso

0'4: más falso que verdadero

0'6: más verdadero que falso

0'8: casi verdadero

1: verdadero

Escala endecadaria

0: falso

0'1: prácticamente falso

0'2: casi falso

0'3: bastante falso

0'4: más falso que verdadero

0'5: ni verdadero ni falso

0'6: más verdadero que falso

0'7: bastante verdadero

0'8: casi verdadero

0'9: prácticamente verdadero

1: verdadero

Así, podemos observar que un conjunto ordinario o crisp es un caso particular de un conjunto borroso, para el cual únicamente se diferencian dos niveles de pertenencia: la pertenencia absoluta y la no pertenencia. Las relaciones numéricas y semánticas establecidas son únicamente alternativas, si bien ampliamente utilizadas, aunque sin duda podrían proponerse otras relaciones.

1.1.2. Definiciones sobre conjuntos borrosos

Este apartado tiene como objetivo definir ciertos conceptos relacionados con los conjuntos borrosos a las cuales nos referiremos a lo largo de la tesis.

Definición 1: El subconjunto borroso $\tilde{A}$ es vacío si $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0 \quad \forall x \in X$.

Definición 2: El subconjunto borroso $\tilde{A}$ es normal si $\sup_{\forall x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$. En este caso, muchos autores consideran que $\mu_{\tilde{A}}(x)$ es una “medida” de posibilidad y $\tilde{A}$ es una distribución de posibilidad.

Definición 3: El conjunto de nivel α o α -corte es el conjunto crisp o nítido que contiene aquellos elementos que poseen al menos un nivel de pertenencia α . Para un subconjunto borroso $\tilde{A}$, notamos a éste conjunto como A_α , que es:

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

Definición 4: El soporte de un subconjunto borroso son aquellos elementos $x \in X$ tales que:

$$\text{sop}(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$

Definición 5: Definimos como núcleo de un subconjunto borroso al α -corte que presenta un grado de verdad 1. En concreto:

$$\text{nucl}(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$$

Definición 6: El subconjunto borroso $\tilde{A}$ es convexo si.

$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall \lambda \in [0, 1], \mu_{\tilde{A}}[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \mu_{\tilde{A}}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}}(x_2) \quad \forall x \in X$$

o bien el subconjunto borroso $\tilde{A}$ es convexo si sus α -cortes, A_α , son conjuntos convexos: $\forall \alpha, \alpha' \in [0, 1], \alpha \leq \alpha' \Leftrightarrow A_{\alpha'} \subseteq A_\alpha$

1.1.3. Operaciones conjuntistas básicas con subconjuntos borrosos

Complementación: Dado un subconjunto borroso $\tilde{A}$, cuya función característica es $\mu_{\tilde{A}}(x)$, el subconjunto complementario $\tilde{A}^c$ queda caracterizado por la función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \quad \forall x \in X$$

Inclusión: Diremos que un subconjunto borroso $\tilde{A}$ está incluido en otro $\tilde{B}$:

$$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{B}}(x) \geq \mu_{\tilde{A}}(x) \quad \forall x \in X$$

Unión: La unión de dos conjuntos borrosos $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$, cuyas funciones de pertenencia son respectivamente $\mu_{\tilde{A}}(x)$ y $\mu_{\tilde{B}}(x)$ es el subconjunto borroso $\tilde{C}$, $\tilde{C} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$, cuya función característica es:

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x) \quad \forall x \in X$$

Intersección: La intersección de dos conjuntos borrosos $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$, cuyas funciones de pertenencia son $\mu_{\tilde{A}}(x)$ y $\mu_{\tilde{B}}(x)$, es el subconjunto borroso $\tilde{C}$, $\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$, cuya función de pertenencia es:

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x)$$

Una descripción de las propiedades básicas de estas operaciones puede encontrarse en Kaufmann *et al.* (1994, p. 163-170).

Producto cartesiano de conjuntos borrosos: Sean los subconjuntos borrosos $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ contenidos respectivamente en los conjuntos referenciales $X_1, X_2, \dots, X_n$. Definimos el producto cartesiano de los n conjuntos borrosos $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n \subset X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ como:

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n, \mu_{\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n}(x) = \mu_{\tilde{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)$$

1.1.4. Principio de extensión de Zadeh

Se trata del principio fundamental en que se sustentan aquéllas aplicaciones de los subconjuntos borrosos basadas en la extensión de conceptos matemáticos no borrosos cuando los datos de partida son borrosos.

1.1.4.1. Principio de extensión generalizado

Sea una aplicación $f: X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$. Si definimos sobre $X_1, X_2, \dots, X_n$ los conjuntos borrosos $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ respectivamente, la aplicación f permite definir un conjunto borroso $\tilde{B} = f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n) \subseteq Y$ para el cual su función característica $\mu_{\tilde{B}}(y)$, es:

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } f^{-1}(y) = \emptyset \\ \bigvee_{y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)} (\mu_{\tilde{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)) & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset \end{cases}$$

1.1.4.2. Principio de extensión

A partir del principio de extensión generalizado –definido para una función de un producto cartesiano de conjuntos- podemos definir el principio de extensión cuando el conjunto antiimagen consta únicamente de un solo conjunto, de forma que evaluamos una aplicación $f: X \rightarrow Y$. Si definimos sobre X un subconjunto borroso $\tilde{A}$, $f(\tilde{A})$ es un subconjunto borroso $\tilde{B}$ cuya función de pertenencia $\mu_{\tilde{B}}(y)$, es:

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } f^{-1}(y) = \emptyset \\ \bigvee_{y=f(x)} \mu_{\tilde{A}}(x) & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset \end{cases}$$

1.1.4.3. Aplicación del principio de extensión Zadeh a través de conjuntos de nivel

En muchas ocasiones, al evaluar una relación funcional entre conjuntos borrosos no será posible operar con sus funciones de pertenencia, pero si hacerlo con los α -cortes o conjuntos de nivel. Nguyen (1978) demuestra que el principio de extensión puede ser aplicado a través de los α -cortes de los subconjuntos borrosos que forman parte de la antiimagen. En concreto, dicho autor demuestra que si partimos de la aplicación $f: X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$, y definimos sobre el conjunto antiimagen los subconjuntos borrosos $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ respectivamente, f induce un subconjunto borroso $\tilde{B} = f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n) \subset Y$, cuyos α -cortes, B_α pueden ser hallados como:

$$B_\alpha = f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n)_\alpha = f(A_{1_\alpha}, A_{2_\alpha}, \dots, A_{n_\alpha})$$

1.1.5. Relaciones borrosas binarias

Para dos conjuntos X e Y , una relación borrosa en $X \times Y$ será una relación entre los elementos de dos conjuntos cuyo acaecimiento lleva asociado un determinado nivel de verdad. Dicha relación vendrá dada por:

$$\tilde{R} = \{(x, y), \mu_{\tilde{R}}(x, y) \mid (x, y) \in X \times Y\}$$

donde

$$\mu_{\tilde{R}}: X \times Y \rightarrow [0, 1]$$

$$(x,y) \in X \times Y \rightarrow \mu_{\tilde{R}}(x,y) \in [0,1]$$

Zimmermann (1991) propone como ejemplo de una relación borrosa, $\tilde{R}$ = “bastante más grande que”. Esta relación está definida en $R \times R$ y propone como expresión de su función característica:

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) = \begin{cases} 0 & x \leq y \\ \frac{x-y}{10y} & y < x \leq 11y \\ 1 & x > 11y \end{cases}$$

A partir de dos relaciones borrosas $\tilde{R}_1(x,y), (x,y) \in X \times Y$ y $\tilde{R}_2(y,z), (y,z) \in Y \times Z$, podemos inferir la relación borrosa de los elementos de X y Z a través de la composición max-min realizando:

$$\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2 = \left\{ \left((x,z), \mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(x,z) = \bigvee_y (\mu_{\tilde{R}_1}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(y,z)) \right) \mid x \in X, y \in Y, z \in Z \right\}$$

1.2. NÚMEROS BORROSOS

1.2.1. Definición y concepto

Un número borroso es un subconjunto borroso, $\tilde{A}$, normal, convexo y cuyo conjunto referencial son los números reales. Se trata del instrumento por excelencia del que dispone la lógica borrosa para representar cuantías estimadas u observadas de forma difusa.

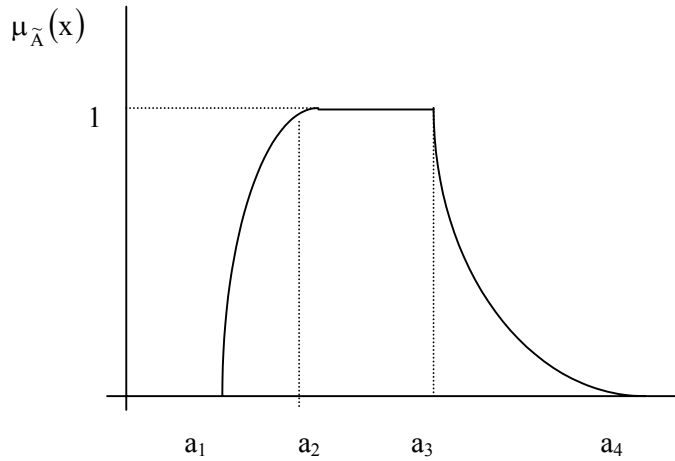
Debemos reseñar que muchos autores, dentro del concepto de número borroso diferencian a los números borrosos propiamente dichos, para los cuales el núcleo es un valor real, de los intervalos borrosos, para los cuales el núcleo es un intervalo de confianza. Nosotros entenderemos como número borroso indistintamente a ambas formas de representar cuantías difusas.

Por otra parte, el valor que toma un elemento $x \in R$ en la función de pertenencia de $\tilde{A}$, $\mu_{\tilde{A}}(x)$, es interpretado por muchos autores como una “medida” de la posibilidad de ocurrencia de x , por lo que el número borroso $\tilde{A}$ es interpretado como una distribución de posibilidad.

De forma general, la función de pertenencia de un número borroso $\tilde{A}$ puede escribirse como:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \alpha = \begin{cases} f(x) & a_1 < x \leq a_2 \\ 1 & a_2 < x \leq a_3 \\ g(x) & a_3 < x < a_4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El intervalo de confianza $[a_1, a_4]$ es el soporte del número borroso y $[a_2, a_3]$ es el núcleo del número borroso. Asimismo, $f(x)$ es creciente en $[a_1, a_2]$ y $g(x)$ es decreciente en $[a_3, a_4]$. Gráficamente podríamos representar, de forma general, un número borroso como:



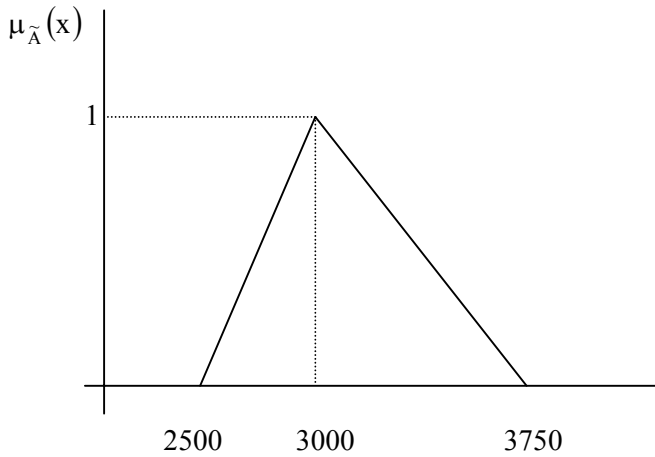
Sin embargo, en muchas ocasiones será más práctico operar con su representación a través de sus conjuntos de nivel o α -cortes, que notamos como A_α . Éstos son intervalos de confianza que podemos representar como:

$$A_\alpha = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} = [A^1(\alpha), A^2(\alpha)] = [f^{-1}(\alpha), g^{-1}(\alpha)]$$

Como ejemplo que permita mostrar la utilidad de los números borrosos en la modelización económica, supongamos que un individuo estima un determinado flujo de un proyecto de inversión real que desea iniciar. Seguramente no pueda modelizarlo como una variable aleatoria si dicho proyecto no es de reemplazo, ya que es casi seguro que no existe ningún antecedente de un proyecto de inversión igual. Sin embargo, por su experiencia en proyectos similares, sus conocimientos etc., sí que podría intuir, por ejemplo, que los ingresos correspondientes al primer año puede ser “aproximadamente 3.000 unidades monetarias”. Una forma de representar razonablemente esta cuantía sería cuantificarla a través de un número borroso $\tilde{A}$ = “aproximadamente 3.000 unidades monetarias”, cuya función de pertenencia podría ser:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \alpha = \begin{cases} \frac{x - 2500}{500} & 2.500 < x \leq 3.000 \\ \frac{3750 - x}{750} & 3000 < x \leq 3750 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Siendo entonces la representación gráfica de “aproximadamente 3.000”:



1.2.2. Operaciones con números borrosos

Como comprobaremos a continuación, el Principio de Extensión de Zadeh, y su facilidad de aplicación a través de los α -cortes permite extender las operaciones algebraicas más habituales realizadas con números reales a los números borrosos. Los conjuntos de nivel del número borroso imagen, pueden ser hallados a través de la aritmética de intervalos de confianza, pues los α -cortes de los del conjunto antiimagen lo son. Señalamos que una descripción detallada de la aritmética de intervalos de confianza, puede ser consultado Kaufmann *et al.* (1994, p. 57-78).

1.2.2.1. Operaciones monarias

En este caso, bastará aplicar el principio de extensión de Zadeh expuesto en 1.1.4.2. teniendo en cuenta que la aplicación f a evaluar es $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Asimismo, el número borroso sobre el que se realiza la operación, $\tilde{A}$, será:

$$\tilde{A} = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x)\} = \{A_{\alpha} = [A^1(\alpha), A^2(\alpha)] \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

Opuesto: Sea un número borroso $\tilde{A}$. Su opuesto $\tilde{B} = -\tilde{A}$ tendrá como función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(-x)$$

y α -cortes:

$$B_{\alpha} = [B^1(\alpha), B^2(\alpha)] = [-A^2(\alpha), -A^1(\alpha)]$$

Producto por un escalar: Sea un número borroso $\tilde{A}$ y un escalar $k \in \mathbb{R}$. Su producto $\tilde{B} = k\tilde{A}$ tendrá como función de pertenencia, si $k \neq 0$:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}\left(\frac{x}{k}\right)$$

y α -cortes:

$$B_{\alpha} = [B^1(\alpha), B^2(\alpha)] = \begin{cases} [kA^1(\alpha), kA^2(\alpha)] & k > 0 \\ [kA^2(\alpha), kA^1(\alpha)] & k < 0 \end{cases}$$

Si $k=0$:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

y

$$B_{\alpha} = [B^1(\alpha), B^2(\alpha)] = [0, 0]$$

Inverso: Sea un número borroso $\tilde{A}$, tal que $\text{sop}(\tilde{A}) \in \mathbb{R}^+$. Su inverso $\tilde{B} = \tilde{A}^{-1}$ tendrá como función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}\left(\frac{1}{x}\right)$$

y sus α -cortes, serán:

$$B_{\alpha} = [B^1(\alpha), B^2(\alpha)] = \left[\frac{1}{A^2(\alpha)}, \frac{1}{A^1(\alpha)} \right]$$

Logaritmo: Para un número borroso $\tilde{A}$ tal que $\text{sop}(\tilde{A}) \in \mathbb{R}^+$, su logaritmo neperiano $\tilde{B} = \ln(\tilde{A})$ tendrá como función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(e^x)$$

¹ Entendemos por $\mathbb{R}^+$ a aquéllos números reales estrictamente mayores que 0.

y α -cortes:

$$B_{\alpha} = [B^1(\alpha), B^2(\alpha)] = [\ln[A^1(\alpha)], \ln[A^2(\alpha)]]$$

Exponencial: Para un número borroso $\tilde{A}$, el número borroso $\tilde{B} = e^{\tilde{A}}$ tendrá como función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(\ln(x))$$

y α -cortes:

$$B_{\alpha} = [B^1(\alpha), B^2(\alpha)] = [e^{A^1(\alpha)}, e^{A^2(\alpha)}]$$

Potencia: Sea un número borroso $\tilde{A}$ tal que $\text{sop}(\tilde{A}) \in \mathbb{R}^+$, y un escalar $k \in \mathbb{R} - \{0\}$. Su potencia $\tilde{B} = \tilde{A}^k$ tendrá como función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}\left(x^{\frac{1}{k}}\right)$$

y α -cortes:

$$B_{\alpha} = [B^1(\alpha), B^2(\alpha)] = \begin{cases} \left[[A^1(\alpha)]^k, [A^2(\alpha)]^k \right] & k > 0 \\ \left[[A^2(\alpha)]^k, [A^1(\alpha)]^k \right] & k < 0 \end{cases}$$

Si $k=0$:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & x \neq 1 \end{cases}$$

y

$$B_{\alpha} = [B^1(\alpha), B^2(\alpha)] = [1, 1]$$

1.2.2.2. Operaciones binarias

A continuación analizamos las operaciones binarias entre dos números borrosos $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$, operaciones que notaremos como “*” y cuya resultante será un nuevo número borroso $\tilde{C}$. Es decir, podemos escribir $\tilde{C} = \tilde{A} * \tilde{B}$. Dentro de las operaciones binarias analizaremos las más

usuales: suma, resta, multiplicación y división. Si los α -cortes y la función de pertenencia de los números borrosos sobre las que se realizan, $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ vienen dados por:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \{x / \mu_{\tilde{A}}(x)\} = \{A_{\alpha} = [A^1(\alpha), A^2(\alpha)] / 0 \leq \alpha \leq 1\} \\ \tilde{B} &= \{x / \mu_{\tilde{B}}(x)\} = \{B_{\alpha} = [B^1(\alpha), B^2(\alpha)] / 0 \leq \alpha \leq 1\}\end{aligned}$$

para hallar la función de pertenencia de $\tilde{C}$ deberemos utilizar el principio de extensión generalizado, enunciado en 1.1.4.1., y aplicarlo teniendo en cuenta que estamos evaluando una aplicación $f: R \times R \rightarrow R$. De forma general, y si suponemos que $0 \notin \text{sop}(\tilde{A})$ y $0 \notin \text{sop}(\tilde{B})$:

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \bigvee_{x=x_1 * x_2} (\mu_{\tilde{A}}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x_2))$$

Siendo los α -cortes de $\tilde{C}$, C_{α} :

$$C_{\alpha} = [C^1(\alpha), C^2(\alpha)] = [\min\{A^1(\alpha) * B^1(\alpha), A^1(\alpha) * B^2(\alpha), A^2(\alpha) * B^1(\alpha), A^2(\alpha) * B^2(\alpha)\}, \max\{A^1(\alpha) * B^1(\alpha), A^1(\alpha) * B^2(\alpha), A^2(\alpha) * B^1(\alpha), A^2(\alpha) * B^2(\alpha)\}]$$

a) Suma de números borrosos

Sea $\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B}$, la función de pertenencia de $\tilde{C}$, $\mu_{\tilde{C}}(x)$ se halla como:

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \bigvee_{x=x_1 + x_2} (\mu_{\tilde{A}}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x_2))$$

y sus α -cortes:

$$C_{\alpha} = [C^1(\alpha), C^2(\alpha)] = [A^1(\alpha) + B^1(\alpha), A^2(\alpha) + B^2(\alpha)]$$

Propiedades:

1. $-(\tilde{A} + \tilde{B}) = (-\tilde{A}) + (-\tilde{B})$
2. Conmutativa: $\tilde{A} + \tilde{B} = \tilde{B} + \tilde{A}$
3. Asociativa: $(\tilde{A} + \tilde{B}) + \tilde{C} = \tilde{A} + (\tilde{B} + \tilde{C})$
4. Existe elemento neutro, $\tilde{0}$, cuya función de pertenencia es $\mu(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$ tal que:

$$\tilde{A} + \tilde{0} = \tilde{A}$$

5. No existe elemento opuesto ya que: $\tilde{A} + (-\tilde{A}) \neq \tilde{0}$, donde $-\tilde{A}$ ya ha sido anteriormente definido. Por esta razón a $-\tilde{A}$ se le denomina pseudo-opuesto.

b) Resta de números borrosos

Sea $\tilde{C} = \tilde{A} - \tilde{B}$, la función de pertenencia de $\tilde{C}$, $\mu_{\tilde{C}}(x)$ se halla como:

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \bigvee_{x=x_1-x_2} (\mu_{\tilde{A}}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x_2))$$

y sus α -cortes:

$$C_{\alpha} = [C^1(\alpha), C^2(\alpha)] = [A^1(\alpha) - B^2(\alpha), A^2(\alpha) - B^1(\alpha)]$$

ya que $\tilde{C} = \tilde{A} + (-\tilde{B})$.

c) Producto de números borrosos

Sea $\tilde{C} = \tilde{A} \otimes \tilde{B}$, la función de pertenencia de $\tilde{C}$, $\mu_{\tilde{C}}(x)$ se halla como:

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \bigvee_{x=x_1 \cdot x_2} (\mu_{\tilde{A}}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x_2))$$

y sus α -cortes:

$$C_{\alpha} = [C^1(\alpha), C^2(\alpha)] = \left[\min \{A^1(\alpha) \cdot B^1(\alpha), A^1(\alpha) \cdot B^2(\alpha), A^2(\alpha) \cdot B^1(\alpha), A^2(\alpha) \cdot B^2(\alpha)\}, \right. \\ \left. \max \{A^1(\alpha) \cdot B^1(\alpha), A^1(\alpha) \cdot B^2(\alpha), A^2(\alpha) \cdot B^1(\alpha), A^2(\alpha) \cdot B^2(\alpha)\} \right]$$

y si $\text{sop}(\tilde{A}), \text{sop}(\tilde{B}) \in \mathbb{R}^+$, se obtiene:

$$C_{\alpha} = [C^1(\alpha), C^2(\alpha)] = [A^1(\alpha) \cdot B^1(\alpha), A^2(\alpha) \cdot B^2(\alpha)]$$

Propiedades:

1. $(-\tilde{A}) \otimes \tilde{B} = -(\tilde{A} \otimes \tilde{B})$
2. Conmutativa: $\tilde{A} \otimes \tilde{B} = \tilde{B} \otimes \tilde{A}$
3. Asociativa: $(\tilde{A} \otimes \tilde{B}) \otimes \tilde{C} = \tilde{A} \otimes (\tilde{B} \otimes \tilde{C})$
4. Existe el elemento neutro $\tilde{1}$: $\tilde{A} \otimes \tilde{1} = \tilde{A}$, cuya su función característica es $\mu(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & x \neq 1 \end{cases}$.
5. No existe elemento inverso: $\tilde{A} \otimes \tilde{A}^{-1} \neq \tilde{1}$, donde $\tilde{A}^{-1}$ ya ha sido definido. Por esa razón, a $\tilde{A}^{-1}$ muchos autores le denominan pseudo-inverso.

6. Distributividad del producto respecto a la suma: $\tilde{C} \otimes (\tilde{A} + \tilde{B}) = (\tilde{A} \otimes \tilde{C}) + (\tilde{B} \otimes \tilde{C})$, que únicamente se cumple si $\text{sop}(\tilde{A})$ y $\text{sop}(\tilde{B})$ son positivos o negativos simultáneamente.

d) División de números borrosos

Sea $\tilde{C} = \tilde{A} \div \tilde{B}$, en los cuales $0 \notin \text{sop}(\tilde{A})$ y $0 \notin \text{sop}(\tilde{B})$: La función de pertenencia de $\tilde{C}$, $\mu_{\tilde{C}}(x)$ se halla como:

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \bigvee_{x = \frac{x_1}{x_2}} (\mu_{\tilde{A}}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x_2))$$

y sus α -cortes:

$$C_{\alpha} = [C^1(\alpha), C^2(\alpha)] = \left[\min \left\{ \frac{A^1(\alpha)}{B^1(\alpha)}, \frac{A^2(\alpha)}{B^1(\alpha)}, \frac{A^1(\alpha)}{B^2(\alpha)}, \frac{A^2(\alpha)}{B^2(\alpha)} \right\}, \max \left\{ \frac{A^1(\alpha)}{B^1(\alpha)}, \frac{A^2(\alpha)}{B^1(\alpha)}, \frac{A^1(\alpha)}{B^2(\alpha)}, \frac{A^2(\alpha)}{B^2(\alpha)} \right\} \right]$$

Si $\text{sop}(\tilde{A}), \text{sop}(\tilde{B}) \in \mathbb{R}^+$, se obtiene:

$$C_{\alpha} = [C^1(\alpha), C^2(\alpha)] = \left[\frac{A^1(\alpha)}{B^2(\alpha)}, \frac{A^2(\alpha)}{B^1(\alpha)} \right]$$

1.2.2.3. Evaluación de funciones reales de números borrosos.

Sea una función de varias variables:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

donde el vector $x \in \mathbb{R}^n$ pertenece al conjunto resultante del producto cartesiano de n conjuntos de números reales $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$. Si definimos en cada uno de los conjuntos $\mathbb{R}$ que forman $\mathbb{R}^n$ los números borrosos $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$, de forma que el i -ésimo viene dado por:

$$\tilde{A}_i = \{x_i, \mu_{\tilde{A}_i}(x_i)\} = \{A_{i_{\alpha}} = [A_i^1(\alpha), A_i^2(\alpha)] \mid 0 \leq \alpha \leq 1\} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

podemos definir en $\mathbb{R}^n$ un subconjunto borroso $\tilde{A}$, para el cual los elementos de dicho conjunto son vectores $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Su función de pertenencia es:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)$$

En este caso, $\tilde{A}$ también es un subconjunto borroso normal y convexo, donde sus α -cortes son rectángulos de dimensión n , y por tanto, son cerrados y acotados.

Asimismo, la función f induce a un subconjunto borroso $\tilde{B} = f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n)$, que será un número borroso, si f es continua en R^n . La función característica de $\tilde{B}$, $\mu_{\tilde{B}}(y)$, se hallará aplicando el principio de extensión de Zadeh:

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \bigvee_{y=f(x)} \mu_{\tilde{A}}(x) = \bigvee_{y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)} (\mu_{\tilde{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu_{\tilde{A}_n}(x_n))$$

Ya hemos comentado que en muchas ocasiones no es operativo utilizar el principio de extensión de Zadeh a través de la función de pertenencia, ya que no podemos hallar la expresión analítica de $\mu_{\tilde{B}}(y)$. Sin embargo, partiendo de los α -cortes de $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ podemos hallar los conjuntos de nivel de $\tilde{B}$, B_α , de forma que:

$$B_\alpha = \{y \in R \mid y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in A_{i_\alpha}, i=1,2,\dots,n\}$$

Si la función f es continua en R^n , B_α será un conjunto convexo en R , es decir, un intervalo de confianza de R , $B_\alpha = [B^1(\alpha), B^2(\alpha)] = [\min y, \max y]$, que se obtendrá como:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar (Maximizar) } y &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_i &\in [A_i^1(\alpha), A_i^2(\alpha)], i=1,2,\dots,n. \end{aligned}$$

Los programas matemáticos (el de maximización y el de minimización) que deberemos resolver para hallar el extremo inferior o el extremo superior de B_α son de fácil implementación, dadas las características del conjunto factible. Sus soluciones, o bien se encuentra en los vértices de A_α , o bien son un mínimo (máximo) local de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, debiéndose cumplir la condición necesaria $\nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ –ver Dong y Wong (1989)–, y la suficiente: $Hf(x_1, x_2, \dots, x_n)$ debe ser semidefinida positiva para mínimos y semidefinida negativa para máximos.

Por otra parte, debemos indicar que si notamos como C_α a los α -cortes de un número borroso $\tilde{C}$ que se obtienen aplicando la aritmética de intervalos de confianza al evaluar f , $B_\alpha \subseteq C_\alpha$. Así, $\tilde{C}$ es una solución que aproxima a $\tilde{B}$ –lo incluye–, pero que también presenta mayor incertidumbre.

Para mostrar esta aseveración, proponemos un sencillo ejemplo que puede encontrarse en Buckley y Qu (1990b). Supongamos que $y = \frac{x_1 + x_2}{x_1}$, y las variables x_1 y x_2 son estimadas a través de unos números borrosos $\tilde{A}_1$ y $\tilde{A}_2$ cuyos 0'5-cortes son $A_{1_{0'5}} = A_{2_{0'5}} = [0'5, 1'5]$. Así, el 0'5 corte de $\tilde{B}$, $B_{0'5} = \left[\frac{4}{3}, 4 \right]$. Sin embargo, el 0'5-corte de $\tilde{C}$ se obtiene como:

$$C_{0'5} = \frac{[0'5, 1'5] + [0'5, 1'5]}{[0'5, 1'5]} = \left[\frac{2}{3}, 6 \right]$$

de forma que $B_{0'5} \subset C_{0'5}$

Podemos comprobar que $\tilde{C}$ es una aproximación de $\tilde{B}$, para la cual, en muchas ocasiones sus α -cortes pueden ser hallados más fácilmente que los de $\tilde{B}$ pero a costa de incrementar su incertidumbre.

Por otra parte, en el análisis económico muchas relaciones funcionales entre variables suelen ser continuas y derivables, siendo además monótonas crecientes o decrecientes respecto a dichas variables –es decir, el signo de las derivadas parciales es conocido-. En este caso es fácil evaluar los α -cortes de $\tilde{B} = f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n)$. Supongamos que la relación funcional que induce a $\tilde{B}$, $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, es monótona creciente respecto a las m primeras variables, donde $m \leq n$, y monótona decreciente respecto al resto, es decir:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} \geq 0, i=1,2,\dots,m; \quad \frac{\partial y}{\partial x_i} \leq 0, i=m+1,m+2,\dots,n$$

En este caso, hallamos B_α como:

$$B_\alpha = [B^1(\alpha), B^2(\alpha)] = \left[f[A_1^1(\alpha), \dots, A_m^1(\alpha), A_{m+1}^2(\alpha), \dots, A_n^2(\alpha)], f[A_1^2(\alpha), \dots, A_m^2(\alpha), A_{m+1}^1(\alpha), \dots, A_n^1(\alpha)] \right]$$

1.2.3. Algunos tipos especiales de número borrosos

A continuación repasamos las formas más usuales de modelización de números borrosos que se utilizan. Estas representaciones vienen motivadas porque los números borrosos son la resultante de estimaciones subjetivas sobre magnitudes. Así, al número borroso que las cuantifica se le debe poder dar una interpretación fácilmente intuitiva, a la vez que debe permitir una fácil manipulación. De forma más precisa, Kaufmann y Gil Aluja (1986, p. 229) apuntan “*Con la utilización de números borrosos triangulares (y si es necesario los números borrosos L-R de*

Dubois y Prade que los generalizan) el experto puede establecer las correspondientes operaciones en lo incierto, en el supuesto de realizaciones que deben encadenarse en el tiempo (especialmente convoluciones maxmin para la suma de números borrosos). Se recomienda la utilización de números borrosos triangulares por su simplicidad y buena percepción por parte de los que no son matemáticos (...). Este instrumento es simple y se adaptan bien a los medios de tratamiento de la información”.

Como comprobaremos, los números borrosos que analizaremos a continuación, los L-R de Dubois y Prade, los trapezoidales y los triangulares, permiten conseguir ambos objetivos.

1.2.3.1. Números borrosos L-R de Dubois y Prade

Dubois y Prade (1980), proponen la parametrización de números borrosos, lo cual facilitará en muchos casos las operaciones realizadas con éstos, así como su interpretación. Para la construcción de un número L-R de Dubois y Prade debemos partir, en primer lugar, de dos funciones $L(x)$ y $R(x)$, las cuales se denominan funciones forma a la izquierda y a la derecha respectivamente, que están definidas como $R \rightarrow [0,1]$ y que cumplen las siguientes propiedades:

1. Son simétricas, es decir $L(x) = L(-x)$ y $R(x) = R(-x) \forall x \in \mathbb{R}$.
2. $L(0)=R(0)=1$ y $L(1)=R(1) = 0$
3. $L(x)$ y $R(x)$ son monótonas crecientes en $(-\infty, 0]$ y monótonas decrecientes en $[0, \infty)$.

En segundo lugar, para construir un número borroso $\tilde{A}$ deberemos establecer su núcleo $[a_{1C}, a_{2C}]$, que también llamaremos centro y las desviaciones que estimamos razonables sobre dicho núcleo a la izquierda, es decir, su radio izquierdo l_A y a la derecha, su radio derecho, r_A , de forma que:

$$\text{sop}(\tilde{A}) = [a_{1C} - l_A, a_{2C} + r_A]$$

De esta forma, si $\tilde{A}$ es L-R de Dubois y Prade, su función de pertenencia, $\mu_{\tilde{A}}(x)$, viene dada por:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a_{1C} - x}{l_A}\right) & a_{1C} - l_A < x \leq a_{1C} \\ 1 & a_{1C} < x \leq a_{2C} \\ R\left(\frac{x - a_{2C}}{r_A}\right) & a_{2C} < x < a_{2C} + r_A \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y sus α -cortes:

$$A_\alpha = [a_{1C} - l_A L^{-1}(\alpha), a_{2C} + r_A R^{-1}(\alpha)]$$

notándose a este número como $\tilde{A} = (a_{1C}, a_{2C}, l_A, r_A)_{LR}$. Por convención, si $l_A = r_A = 0$, $\tilde{A}$ es el intervalo crisp $[a_{1C}, a_{2C}]$, y si $a_{1C} = a_{2C} = a_C$ $\tilde{A}$ es el número cierto a_C .

En el caso en que $\text{nucl}(\tilde{A})$ sea un único número cierto, a_C , notaremos al número borroso $\tilde{A}$ como $\tilde{A} = (a_C, l_A, r_A)_{LR}$, siendo su función de pertenencia y de sus α -cortes, respectivamente:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a_C - x}{l_A}\right) & a_C - l_A < x \leq a_C \\ R\left(\frac{x - a_C}{r_A}\right) & a_C < x \leq a_C + r_A \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y:

$$A_\alpha = [a_C - l_A L^{-1}(\alpha), a_C + r_A R^{-1}(\alpha)]$$

Asimismo, si las funciones formas izquierda y derecha son iguales, $L(x) = R(x)$, diremos que $\tilde{A}$ es un número borroso L-L de Dubois y Prade, notándose este como $\tilde{A} = (a_{1C}, a_{2C}, l_A, r_A)_L$. En el caso en que el núcleo sea un único número borroso, a_C , notaremos a éste como $\tilde{A} = (a_C, l_A, r_A)_L$. Por otra parte, si $L(x) = R(x)$ y $l_A = r_A = a_R$ y el núcleo es un único valor a_C decimos que $\tilde{A}$ es un número borroso simétrico L-L de Dubois y Prade. A dicho número borroso lo notaremos como $\tilde{A} = (a_C, a_R)_L$. La función de pertenencia de $\tilde{A}$ será entonces:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{|a_C - x|}{a_R}\right) & a_C - a_R \leq x \leq a_C + a_R \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y sus α -cortes:

$$A_\alpha = [a_C - a_R L^{-1}(\alpha), a_C + a_R L^{-1}(\alpha)]$$

1.2.3.2. Operaciones con números L-R de Dubois y Prade

A continuación expresamos los resultados de algunas operaciones aritméticas con números –o intervalos- L-R de Dubois y Prade. Si la operación es monaria, utilizaremos un número L-R de

Dubois y Prade $\tilde{A} = (a_{1C}, a_{2C}, l_A, r_A)_{LR}$ y si es binaria, notaremos a los dos números borrosos L-R de Dubois y Prade que intervienen como $\tilde{A} = (a_{1C}, a_{2C}, l_A, r_A)_{LR}$ y $\tilde{B} = (b_{1C}, b_{2C}, l_B, r_B)_{LR}$

1. *Opuesto*: $\tilde{B} = -\tilde{A} = (-a_{2C}, -a_{1C}, r_A, l_A)_{LR}$

2. *Multiplicación por un escalar*: $\tilde{B} = k\tilde{A}$, con $k \in \mathbb{R}$.

2.1. Si $k > 0$, $\tilde{B} = (ka_{1C}, ka_{2C}, kl_A, kr_A)_{LR}$

2.2. Si $k < 0$, $\tilde{B} = (ka_{2C}, ka_{1C}, |k|r_A, |k|l_A)_{LR}$

2.3. Si $k = 0$, $\tilde{B} = (0, 0, 0, 0)_{LR}$, es decir, el número cierto 0.

3. *Pseudo-nverso*: $\tilde{B} = \tilde{A}^{-1}$. En este caso $\tilde{B}$ no conserva su condición de L-R de Dubois y Prade.

Sin embargo podemos aproximar a $\tilde{B} \approx \left(\frac{1}{a_{2C}}, \frac{1}{a_{1C}}, \frac{r_A}{(a_{2C})^2}, \frac{l_A}{(a_{1C})^2} \right)_{LR}$. En cualquier caso suponemos que $0 \notin \text{sop}(\tilde{A})$.

4. *Suma*: Para $\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B}$ se obtiene:

$$\tilde{C} = (a_{1C}, a_{2C}, l_A, r_A)_{LR} + (b_{1C}, b_{2C}, l_B, r_B)_{LR} = (a_{1C} + b_{1C}, a_{2C} + b_{2C}, l_A + l_B, r_A + r_B)_{LR}$$

5. *Resta*: Para $\tilde{C} = \tilde{A} - \tilde{B}$ se obtiene:

$$\tilde{C} = (a_{1C}, a_{2C}, l_A, r_A)_{LR} - (b_{1C}, b_{2C}, l_B, r_B)_{LR} = (a_{1C} - b_{1C}, a_{2C} - b_{1C}, l_A + r_B, r_A + l_B)_{LR}$$

6. *Multiplicación*. Para $\tilde{C} = \tilde{A} \otimes \tilde{B}$, el resultado que obtenemos no es un número borroso L-R de Dubois y Prade. Sin embargo, Dubois y Prade proponen la siguiente aproximación, suponiéndose que $\text{sop}(\tilde{B})$ y $\text{sop}(\tilde{A}) \subset \mathbb{R}^+$:

$$\tilde{C} = (a_{1C}, a_{2C}, l_A, r_A)_{LR} \otimes (b_{1C}, b_{2C}, l_B, r_B)_{LR} \approx (a_{1C} \cdot b_{1C}, a_{2C} \cdot b_{2C}, a_{1C} \cdot l_B + b_{1C} \cdot l_A, a_{2C} \cdot r_B + b_{2C} \cdot r_A)_{LR}$$

Puede comprobarse que la aproximación propuesta, aunque mantiene la naturaleza de los números borrosos de partida, no conserva, lo que a nuestro entender, es una importante información de $\tilde{C}$: su soporte. Sin embargo, si los radios toman un valor relativamente pequeño respecto a los que contiene el núcleo, y si $\text{sop}(\tilde{B})$ y $\text{sop}(\tilde{A}) \subset \mathbb{R}^+$, Dubois y Prade proponen como aproximación:

$$\tilde{C} \approx (a_{1C} \cdot b_{1C}, a_{2C} \cdot b_{2C}, a_{1C} \cdot l_B + b_{1C} \cdot l_A - l_A \cdot l_B, a_{2C} \cdot r_B + b_{2C} \cdot r_A - r_A \cdot r_B)_{LR}$$

y esta aproximación del producto sí mantiene el soporte del número borroso $\tilde{C}$.

7. *División.* Para $\tilde{C} = \tilde{A} \div \tilde{B}$, el resultado que obtenemos, igual que en el caso del producto, no es un número borroso L-R de Dubois y Prade. Sin embargo, Dubois y Prade proponen la siguiente aproximación, suponiéndose que $\text{sop}(\tilde{B})$ y $\text{sop}(\tilde{A}) \subset \mathbb{R}^+$:

$$\tilde{C} = (a_{1C}, a_{2C}, l_A, r_A)_{LR} \div (b_{1C}, b_{2C}, l_B, r_B)_{LR} \approx \left(\frac{a_{1C}}{b_{2C}}, \frac{a_{2C}}{b_{1C}}, \frac{a_{1C} \cdot r_B + b_{2C} \cdot l_A}{(b_{2C})^2}, \frac{a_{2C} \cdot l_B + b_{1C} \cdot r_A}{(b_{1C})^2} \right)_{LR}$$

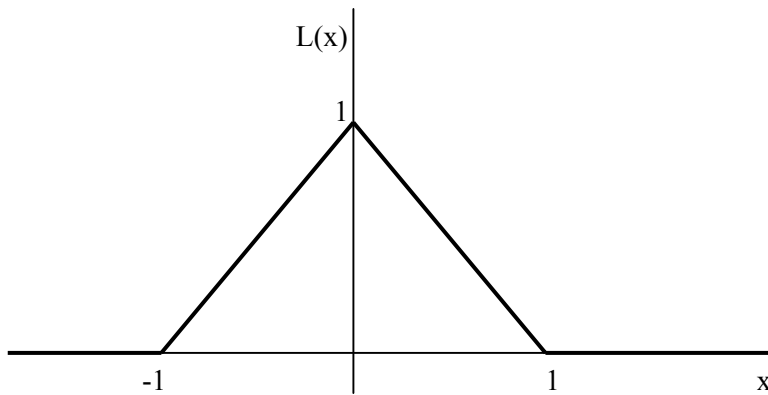
Puede comprobarse que la aproximación propuesta, aunque mantiene la naturaleza de los números borrosos de partida, vuelve a no conservar el soporte de $\tilde{C}$. Si los radios toman un valor relativamente pequeño respecto a los que contiene el núcleo, y si $\text{sop}(\tilde{B})$ y $\text{sop}(\tilde{A}) \subset \mathbb{R}^+$, la aproximación que Dubois y Prade postulan para $\tilde{C}$ es:

$$\tilde{C} \approx \left(\frac{a_{1C}}{b_{2C}}, \frac{a_{2C}}{b_{1C}}, \frac{a_{1C} \cdot r_B + b_{2C} \cdot l_A}{b_{2C}(b_{2C} + r_B)}, \frac{a_{2C} \cdot l_B + b_{1C} \cdot r_A}{b_{1C}(b_{1C} - l_B)} \right)_{LR}$$

En este caso sí que se mantiene el soporte del número borroso que aproximamos $\tilde{C}$.

1.2.3.3. Números borrosos trapezoidales

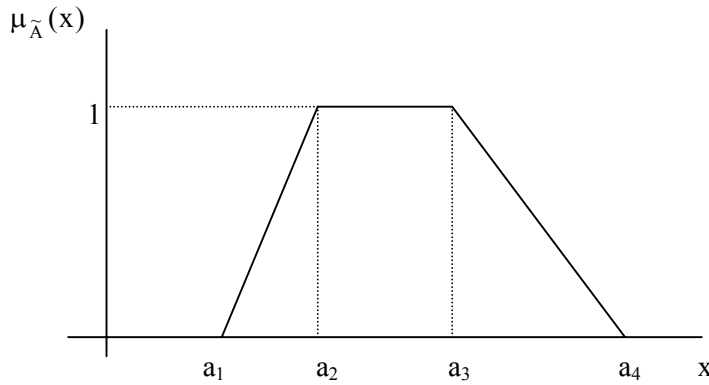
Un número borroso trapezoidal es un número borroso L-L de Dubois y Prade, cuya función de pertenencia viene definida por unas funciones forma $L(x)=R(x) = \text{Max}\{0, 1-|x|\}$, y cuyo núcleo es un intervalo de confianza. De esta forma, si $\tilde{A}$ es trapezoidal, la función forma para el tramo derecho e izquierdo de la función de pertenencia es idéntico, y queda representada por:



Asimismo, si denominamos como $[a_1, a_4]$, al soporte del número borroso $\tilde{A}$, y $[a_2, a_3]$ a $\text{nucl}(\tilde{A})$ dado que su radio izquierdo es $l_A = a_2 - a_1$ y su radio a la derecha, $r_A = a_4 - a_3$, la función de pertenencia, de $\mu_{\tilde{A}}(x)$ es:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} & a_1 < x \leq a_2 \\ 1 & a_2 < x \leq a_3 \\ \frac{a_4 - x}{a_4 - a_3} & a_3 < x < a_4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Siendo la representación gráfica de $\tilde{A}$:



Es fácil comprobar que los α -cortes de $\tilde{A}$, A_α , vienen dados por:

$$A_\alpha = [a_1 + (a_2 - a_1)\alpha, a_4 - (a_4 - a_3)\alpha]$$

Notaremos a un número borroso trapezoidal, $\tilde{A}$, o bien a través de su núcleo y sus radios como $\tilde{A} = (a_{1C}, a_{2C}, l_A, r_A)$, o alternatively, a través de una cuarteta de confianza, donde los valores que la componen son el valor más pequeño posible, el valor inferior y el valor más elevado con presunción 1 y el extremo superior del 0-corte, de forma que:

$$\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4).$$

Obsérvese que en este caso, la función que delimita el nivel de pertenencia de los valores inferiores al núcleo $f(x)$, es la recta que pasa por los puntos $(a_1, 0)$ y $(a_2, 1)$ y la que delimita el grado de pertenencia de valores más grandes que el núcleo, $g(x)$, es la recta que pasa por los puntos $(a_3, 0)$ y $(a_4, 1)$

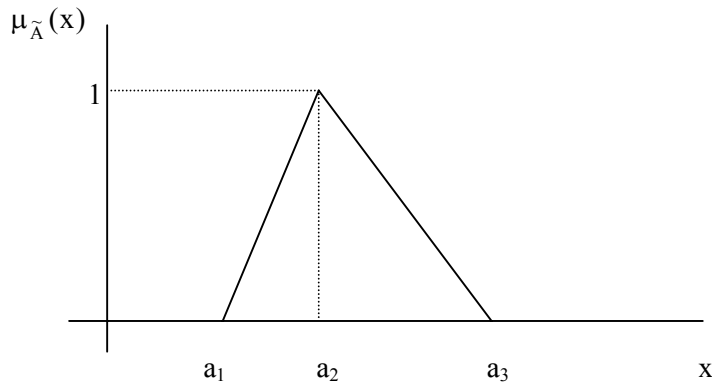
1.2.3.4. Números borrosos triangulares

Un número borroso triangular es un caso particular de número borroso trapezoidal cuyo núcleo es un valor cierto, es decir $a_2 = a_3$.

Asimismo, si denominamos como $[a_1, a_3]$, al soporte del número borroso $\tilde{A}$, dado que su radio izquierdo es $l_A = a_2 - a_1$ y su radio a la derecha, $r_A = a_3 - a_2$, la función de pertenencia, $\mu_{\tilde{A}}(x)$, es:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} & a_1 < x \leq a_2 \\ \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2} & a_2 < x \leq a_3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La representación gráfica del número borroso, $\tilde{A}$ es pues:



y por tanto, los α -cortes de $\tilde{A}$, A_α , vienen dados por:

$$A_\alpha = [a_1 + (a_2 - a_1)\alpha, a_3 - (a_3 - a_2)\alpha]$$

Notaremos a un número borroso triangular, $\tilde{A}$, o bien a través de su centro y sus radios como $\tilde{A} = (a_c, l_A, r_A)$, o alternatively, a través de una tripleta de confianza, donde los valores que la componen son el valor más pequeño posible, el valor más posible y el valor más elevado posible, es decir, $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$. Obsérvese que la función de pertenencia de un número borroso triangular es también lineal. El tramo izquierdo es la recta que pasa por $(a_1, 0)$ y $(a_2, 1)$ y el derecho la recta que toma valores en $(a_2, 1)$ y $(a_3, 0)$.

1.2.3.5. Operaciones con números borrosos trapezoidales y triangulares

A continuación exponemos los resultados que se obtienen cuando operamos con números borrosos trapezoidales o triangulares, de forma que para uno $\tilde{A}$ su expresión general es $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. Por supuesto, los resultados que se obtendrían utilizando números borrosos triangulares se hallarán sin más que considerar que si $\tilde{A}$ es triangular $a_2 = a_3$.

1. *Opuesto*: $\tilde{B} = -\tilde{A} = (-a_4, -a_3, -a_2, -a_1)$

2. *Multiplicación por un escalar*: $\tilde{B} = k\tilde{A}$, son $k \in \mathbb{R}^+$.

2.1. Si $k > 0$, $\tilde{B} = (ka_1, ka_2, ka_3, ka_4)$

2.2. Si $k < 0$, $\tilde{B} = (ka_4, ka_3, ka_2, ka_1)$

2.3. Si $k = 0$, $\tilde{B} = (0, 0, 0, 0)$, es decir, el número cierto 0.

3. *Pseudo-Inverso*: $\tilde{B} = \tilde{A}^{-1}$. En este caso $\tilde{B}$ no conserva su condición de número borroso trapezoidal, ya que su función de pertenencia es, suponiéndose que $0 \notin \text{sop}(\tilde{A})$:

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \begin{cases} \frac{a_4 - x^{-1}}{a_4 - a_3} & \frac{1}{a_4} < x \leq \frac{1}{a_3} \\ 1 & \frac{1}{a_3} < x \leq \frac{1}{a_2} \\ \frac{x^{-1} - a_1}{a_2 - a_1} & \frac{1}{a_2} < x < \frac{1}{a_1} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En Kaufmann (1986b), se propone como aproximación trapezoidal al inverso de $\tilde{A}^{-1}$, un número borroso trapezoidal con el mismo soporte y núcleo. Normalmente será buena cuando los radios de $\tilde{A}$ no son elevados respecto a su núcleo $[a_2, a_3]$. En concreto:

$$\tilde{B} \approx \left(\frac{1}{a_4}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1} \right)$$

4. *Suma*: Para $\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B}$, donde $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ y $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, se obtiene:

$$\tilde{C} = (a_1, a_2, a_3, a_4) + (b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)$$

5. *Resta*: Para $\tilde{C} = \tilde{A} - \tilde{B}$, donde $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ y $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, se obtiene:

$$\tilde{C} = (a_1, a_2, a_3, a_4) - (b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1 - b_4, a_2 - b_3, a_3 - b_2, a_4 - b_1)$$

6. *Multipliación.* Para $\tilde{C} = \tilde{A} \otimes \tilde{B}$, donde $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ y $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, el resultado que obtenemos no es un número borroso triangular. En concreto, si $\text{sop}(\tilde{B}) \text{ y } \text{sop}(\tilde{A}) \subset \mathbb{R}^+$, la función de pertenencia de $\tilde{C}$, $\mu_{\tilde{C}}(x)$, es:

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \begin{cases} \frac{-[a_1(b_2 - b_1) + b_1(a_2 - a_1)] + \sqrt{[a_1(b_2 - b_1) + b_1(a_2 - a_1)]^2 - 4(a_1b_1 - x)(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}}{2(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)} & a_1b_1 < x \leq a_2b_2 \\ 1 & a_2b_2 < x \leq a_3b_3 \\ \frac{[a_4(b_4 - b_3) + b_4(a_4 - a_3)] - \sqrt{[a_4(b_4 - b_3) + b_4(a_4 - a_3)]^2 - 4(a_4b_4 - x)(a_4 - a_3)(b_4 - b_3)}}{2(a_4 - a_3)(b_4 - b_3)} & a_3b_3 < x < a_4b_4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sin embargo, si $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ no tienen un radio elevado, $\tilde{C}$ puede aproximarse a través de un número borroso trapezoidal con el mismo soporte y núcleo, todo ello sin cometerse un excesivo error –ver Kaufmann (1986b)–. Así, si los valores de los radios toman un valor relativamente pequeño respecto a los que contiene el núcleo, y si $\text{sop}(\tilde{B}) \text{ y } \text{sop}(\tilde{A}) \subset \mathbb{R}^+$, podemos proponer como aproximación trapezoidal:

$$\tilde{C} \approx (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_3 \cdot b_3, a_4 \cdot b_4)$$

7. *División.* Para $\tilde{C} = \tilde{A} \div \tilde{B}$, donde $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ y $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, el resultado que obtenemos vuelve a perder la condición de número borroso trapezoidal. En concreto, $\mu_{\tilde{C}}(x)$ es, si $\text{sop}(\tilde{A})$ y $\text{sop}(\tilde{B})$ son positivos:

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \begin{cases} \frac{xb_4 - a_1}{(a_2 - a_1) + x(b_4 - b_3)} & \frac{a_1}{b_4} < x \leq \frac{a_2}{b_3} \\ 1 & \frac{a_2}{b_3} < x \leq \frac{a_3}{b_2} \\ \frac{a_4 - xb_1}{(a_4 - a_3) + x(b_2 - b_1)} & \frac{a_3}{b_2} < x < \frac{a_4}{b_1} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sin embargo, si los valores de los radios toman un valor relativamente pequeño respecto a los que del núcleo, y suponiéndose que $\text{sop}(\tilde{B})$ y $\text{sop}(\tilde{A}) \subset \mathbb{R}^+$, podemos proponer como aproximación trapezoidal de $\tilde{C}$, tal como se indica en el mencionado trabajo de Kaufmann (1986):

$$\tilde{C} \approx \left(\frac{a_1}{b_4}, \frac{a_2}{b_3}, \frac{a_3}{b_2}, \frac{a_4}{b_1} \right)$$

1.3. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES BORROSAS

En muchas ocasiones, el valor de una determinada magnitud que denominaremos x no vendrá dado a través de una relación funcional explícita de otras variables, sino a través de una relación funcional implícita $b=f(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$. Si queremos hallar esta magnitud –suponemos que sólo se trata de una ecuación con una variable–, deberemos despejar el valor x de la ecuación, obteniéndose $x=h(b, a_1, a_2, \dots, a_n)$. En muchas ocasiones, estas ecuaciones tienen una forma sencilla, del tipo $a+x=b$, $a \cdot x=b$, por lo que, si trabajamos en certeza, su resolución no suele plantear ningún problema.

Sin embargo, si los datos de partida vienen dados por números borrosos, de forma que los parámetros a_i , $i=1,2,\dots,n$ vienen dados por:

$$\tilde{A}_i = \{x_i, \mu_{\tilde{A}_i}(x_i)\} = \{A_{i_\alpha} = [A_i^1(\alpha), A_i^2(\alpha)] \mid 0 \leq \alpha \leq 1\} \quad i=1,2,\dots,n.$$

y el parámetro b viene dado por:

$$\tilde{B} = \{x, \mu_{\tilde{B}}(y)\} = \{B_\alpha = [B^1(\alpha), B^2(\alpha)] \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

La relación funcional que debemos resolver es:

$$\tilde{B} = f(\tilde{X}, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n)$$

en concreto, deberemos hallar el subconjunto borroso $\tilde{X}$. Aunque a veces será más operativo hallarlo a través de sus α -cortes, $X_\alpha = [X^1(\alpha), X^2(\alpha)]$, el problema es que en muchas ocasiones la ecuación anterior no tendrá resolución, ni siquiera para expresiones sencillas del tipo $\tilde{A} + \tilde{X} = \tilde{B}$ o $\tilde{A} \otimes \tilde{X} = \tilde{B}$, debido al problema que representa la no existencia en sentido estricto del elemento opuesto en la suma de números borrosos y del elemento inverso en el producto. A continuación analizamos las dos formas de enfocar este problema por la matemática borrosa. Asimismo únicamente estudiamos ecuaciones con una incógnita, y ponemos especial atención a las ecuaciones $\tilde{A} + \tilde{X} = \tilde{B}$ y $\tilde{A} \otimes \tilde{X} = \tilde{B}$, que son las que a nosotros finalmente nos interesarán.

1.3.1. Método clásico de resolución de ecuaciones

1.3.1.1. Planteamiento general

Si partimos de la relación funcional:

$$\tilde{B} = f(\tilde{X}, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n)$$

La solución de esta ecuación en el sentido clásico parte de que los α -cortes de $\tilde{X}$ deben permitir que:

$$B_\alpha = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x, a_1, \dots, a_n), a_i \in A_{i_\alpha}, i=1,2,\dots,n, x \in X_\alpha\}$$

Por tanto, la solución será todo número borroso $\tilde{X}$ cuyos α -cortes $X_\alpha = [X^1(\alpha), X^2(\alpha)]$ permitan que, por una parte:

Min $f(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$ sujeto a $a_i \in [A_i^1(\alpha), A_i^2(\alpha)]$, $i=1,2,\dots,n$ y $x \in [X^1(\alpha), X^2(\alpha)]$ de ser el extremo inferior de B_α , $B^l(\alpha)$.

Max $f(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$ sujeto a $a_i \in [A_i^1(\alpha), A_i^2(\alpha)]$, $i=1,2,\dots,n$ y $x \in [X^1(\alpha), X^2(\alpha)]$ debe ser el extremo superior de B_α , $B^2(\alpha)$. Además, se debe verificar que $\tilde{X}$ sea un número borroso, es decir:

- a) $X^1(\alpha) \leq X^2(\alpha) \forall \alpha$
- b) $X^1(\alpha) \leq X^1(\alpha')$ y $X^2(\alpha) \geq X^2(\alpha') \forall \alpha \leq \alpha'$.

Utilizando esta metodología, en muchas ocasiones no existirá solución para la ecuación que pretendemos resolver. A continuación analizamos las condiciones que requiere la existencia de solución en sentido clásico de las ecuaciones:

$$\tilde{A} + \tilde{X} = \tilde{B}$$

$$\tilde{A} \otimes \tilde{X} = \tilde{B}$$

denominadas por Kaufmann y Gupta (1985) como “desconvolución de la suma” y “desconvolución del producto” respectivamente.

1.3.1.2. Desconvolución de la suma y del producto utilizando el concepto clásico de resolución de ecuaciones borrosas.

En Kaufmann y Gupta (1985) se dan las condiciones para que exista solución en sentido clásico de $\tilde{X}$ -es decir, que realmente se trate de un número borroso- para las ecuaciones $\tilde{A} + \tilde{X} = \tilde{B}$ y $\tilde{A} \otimes \tilde{X} = \tilde{B}$ donde:

$$\tilde{A} = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x)\} = \{A_{\alpha} = [A^1(\alpha), A^2(\alpha)] \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

$$\tilde{B} = \{x, \mu_{\tilde{B}}(y)\} = \{B_{\alpha} = [B^1(\alpha), B^2(\alpha)] \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

En la ecuación $\tilde{A} \otimes \tilde{X} = \tilde{B}$ supondremos que $\text{sop}(\tilde{A})$ y $\text{sop}(\tilde{B}) \in \mathbb{R}^+$. Si bien es un supuesto un tanto restrictivo, en esta tesis no pretendemos analizar las condiciones de solución de ecuaciones borrosas en cualquier circunstancia, sino las de aquéllas que deberemos resolver en los problemas econométricos que proponemos, y en nuestro caso siempre se cumplirá dicha condición.

Respecto a la desconvolución de la suma, la ecuación a resolver expresada a través de los α -cortes es:

$$[A^1(\alpha), A^2(\alpha)] + [X^1(\alpha), X^2(\alpha)] = [B^1(\alpha), B^2(\alpha)]$$

De esta forma, la solución clásica indica que:

$$\begin{aligned} \text{a) } X^1(\alpha) &= B^1(\alpha) - A^1(\alpha) \\ \text{b) } X^2(\alpha) &= B^2(\alpha) - A^2(\alpha) \end{aligned}$$

y es condición necesaria para la existencia de solución clásica que:

$$X^1(\alpha) \leq X^2(\alpha) \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

Y es condición necesaria y suficiente para la existencia de dicha solución que:

$$\begin{aligned} X^1(\alpha) &\leq X^1(\alpha'), B^1(\alpha) - A^1(\alpha) \leq B^1(\alpha') - A^1(\alpha'), \alpha, \alpha' \in [0, 1], \alpha \leq \alpha' \\ X^2(\alpha) &\geq X^2(\alpha'), B^2(\alpha) - A^2(\alpha) \geq B^2(\alpha') - A^2(\alpha'), \alpha, \alpha' \in [0, 1], \alpha \leq \alpha' \end{aligned}$$

Así, el cumplimiento de la segunda condición implica el cumplimiento automático de la primera, pero el de la primera no implica el cumplimiento automático de la segunda.

Respecto a la desconvolución del producto, la ecuación a resolver, expresada a través de α -cortes es:

$$[A^1(\alpha), A^2(\alpha)] \cdot [X^1(\alpha), X^2(\alpha)] = [B^1(\alpha), B^2(\alpha)]$$

De esta forma, la solución clásica es, bajo las restricciones impuestas a $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$:

$$a) X^1(\alpha) = \frac{B^1(\alpha)}{A^1(\alpha)}$$

$$b) X^2(\alpha) = \frac{B^2(\alpha)}{A^2(\alpha)}$$

Al igual que antes, la condición necesaria para la existencia de solución clásica es:

$$X^1(\alpha) \leq X^2(\alpha) \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

Y la condición necesaria y suficiente:

$$X^1(\alpha) \leq X^1(\alpha'), \text{ es decir } \frac{B^1(\alpha)}{A^1(\alpha)} \leq \frac{B^1(\alpha')}{A^1(\alpha')} \quad \alpha, \alpha' \in [0,1], \alpha \leq \alpha'$$

$$X^2(\alpha) \geq X^2(\alpha') \text{ es decir } \frac{B^2(\alpha)}{A^2(\alpha)} \geq \frac{B^2(\alpha')}{A^2(\alpha')} \quad \alpha, \alpha' \in [0,1], \alpha \leq \alpha'$$

Como en el caso de la desconvolución de la suma, el cumplimiento de la segunda condición vuelve a implicar el cumplimiento automático de la primera, pero el de la primera no implica el cumplimiento de la segunda.

1.3.1.3. Desconvolución de la suma y del producto utilizando el concepto clásico de resolución de ecuaciones borrosas cuando los parámetros que intervienen son números borrosos L-L de Dubois y Prade

En Buckley y Qu (1990a) se analiza las condiciones que deben exigirse a los números borrosos $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ para que su solución, $\tilde{X}$ en sentido clásico sea un número borroso, es decir, para que exista solución en sentido clásico. De forma algo más general, supondremos que $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ son números borrosos L-L de Dubois y Prade –la función forma a la derecha es idéntica a la función forma a la izquierda-, lo cual no es tampoco excesivamente restrictivo, ya que los números borrosos que usualmente se utilizan en la práctica –triangulares, trapezoidales o gaussianos- suelen tener esta forma. Para simplificar la notación supondremos, asimismo, que se trata de números borrosos cuyo núcleo es un único número. Generalizar los resultados relajando esta última hipótesis es sencillo. Asimismo, volvemos a suponer que $\text{sop}(\tilde{A}), \text{sop}(\tilde{B}) \in \mathbb{R}^+$ cuando analicemos la desconvolución del producto.

De esta forma, podemos expresar $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ como:

$$\tilde{A} = (a_C, l_A, r_A)_L \text{ y } \tilde{B} = (b_C, l_B, r_B)_L$$

a) Resolución de $\tilde{A} + \tilde{X} = \tilde{B}$

Respecto a la desconvolución de la suma, la ecuación a resolver expresada a través de los α -cortes es en este caso:

$$[a_C - l_A L^{-1}(\alpha), a_C + r_A L^{-1}(\alpha)] + [X^1(\alpha), X^2(\alpha)] = [b_C - l_B L^{-1}(\alpha), b_C + r_B L^{-1}(\alpha)]$$

De esta forma, la solución clásica es:

$$1) X^1(\alpha) = [b_C - l_B L^{-1}(\alpha)] - [a_C - l_A L^{-1}(\alpha)] = b_C - a_C - (l_B - l_A)L^{-1}(\alpha)$$

$$2) X^2(\alpha) = [b_C + r_B L^{-1}(\alpha)] - [a_C + r_A L^{-1}(\alpha)] = b_C - a_C + (r_B - r_A)L^{-1}(\alpha)$$

La condición necesaria para la existencia de solución clásica es que $X^1(\alpha) \leq X^2(\alpha) \forall \alpha \in [0,1]$, es decir:

$$b_C - a_C - (l_B - l_A)L^{-1}(\alpha) \leq b_C - a_C + (r_B - r_A)L^{-1}(\alpha)$$

y como $L^{-1}(\alpha) \geq 0$, esta se reduce a:

$$l_A + r_A \leq l_B + r_B$$

Lo cual era de esperar, ya que si $\tilde{A} + \tilde{X} = \tilde{B}$, la amplitud de $\tilde{B}$, que es el número borroso resultante de la suma de dos, $\tilde{A}$ y $\tilde{X}$ debe tener mayor amplitud –es más incierto-, que uno de sus sumandos, $\tilde{A}$.

Es condición necesaria y suficiente para que exista solución en sentido clásico:

$$X^1(\alpha) \leq X^1(\alpha') \quad \alpha, \alpha' \in [0,1], \alpha \leq \alpha'$$

$$X^2(\alpha) \geq X^2(\alpha') \quad \alpha, \alpha' \in [0,1], \alpha \leq \alpha'$$

Respecto a la primera condición, la podemos escribir en este caso como:

$$b_C - a_C - (l_B - l_A)L^{-1}(\alpha) \leq b_C - a_C - (l_B - l_A)L^{-1}(\alpha')$$

es decir,

$$(l_B - l_A)L^{-1}(\alpha) \geq (l_B - l_A)L^{-1}(\alpha')$$

y como $L^{-1}(\alpha) \geq L^{-1}(\alpha')$, debe cumplirse que $l_B \geq l_A$

Respecto a la segunda condición necesaria y suficiente queda escrita como:

$$b_C - a_C + (r_B - r_A)L^{-1}(\alpha) \geq b_C - a_C + (r_B - r_A)L^{-1}(\alpha')$$

es decir,

$$(r_B - r_A)L^{-1}(\alpha) \geq (r_B - r_A)L^{-1}(\alpha')$$

y como $L^{-1}(\alpha) \geq L^{-1}(\alpha')$, debe cumplirse que $r_B \geq r_A$

Estas dos condiciones también podían ser intuitivas a priori. Como $\tilde{A} + \tilde{X} = \tilde{B}$, la amplitud de $\tilde{B}$, a la izquierda (a la derecha) se halla como la suma de los radios izquierdos (derechos) de $\tilde{A}$ y $\tilde{X}$. Así el radio izquierdo (derecho) de $\tilde{A}$ debe ser inferior a los radios del número borroso resultante de la suma, $\tilde{B}$. Asimismo, si existe solución, $\tilde{X}$ conserva la condición de número borroso L-L de Dubois y Prade, el cual podremos escribir como:

$$\tilde{X} = (x_C, l_X, r_X)_L = (b_C - a_C, l_B - l_A, r_B - r_A)_L$$

Obsérvese que el cumplimiento de la segunda condición (necesaria y suficiente) implica el cumplimiento automático de la condición necesaria. Si $r_B \geq r_A$ y $l_B \geq l_A \Rightarrow r_B + l_B \geq r_A + l_A$, que era lo que indicaba la condición necesaria.

b) Resolución de $\tilde{A} \otimes \tilde{X} = \tilde{B}$

Respecto a la desconvolución del producto, la ecuación a resolver ya expresada a través de α -cortes es:

$$[a_C - l_A L^{-1}(\alpha), a_C + r_A L^{-1}(\alpha)] \cdot [X^1(\alpha), X^2(\alpha)] = [b_C - l_B L^{-1}(\alpha), b_C + r_B L^{-1}(\alpha)]$$

De esta forma, la solución clásica, bajo las restricciones impuestas a $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ - positividad y son números L-L de Dubois y Prade con un soporte formado por un único número real- se obtiene como:

$$a) X^1(\alpha) = \frac{b_C - l_B L^{-1}(\alpha)}{a_C - l_A L^{-1}(\alpha)}$$

$$b) X^2(\alpha) = \frac{b_C + r_B L^{-1}(\alpha)}{a_C + r_A L^{-1}(\alpha)}$$

es decir, en este caso la solución no será un número borroso L-L de Dubois y Prade.

Es condición necesaria para la existencia de solución clásica que:

$$X^1(\alpha) \leq X^2(\alpha) \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

Es decir,

$$\frac{b_C - l_B L^{-1}(\alpha)}{a_C - l_A L^{-1}(\alpha)} \leq \frac{b_C + r_B L^{-1}(\alpha)}{a_C + r_A L^{-1}(\alpha)}$$

o, alternativamente:

$$[b_C - l_B L^{-1}(\alpha)] \cdot [a_C + r_A L^{-1}(\alpha)] \leq [b_C + r_B L^{-1}(\alpha)] \cdot [a_C - l_A L^{-1}(\alpha)],$$

que es equivalente a:

$$b_C l_A + r_A - a_C l_B + r_B \leq L^{-1}(\alpha) [r_A l_B - l_A r_B]$$

Es condición necesaria y suficiente que:

$$X^1(\alpha) \leq X^1(\alpha') \quad \alpha, \alpha' \in [0,1], \alpha \leq \alpha'$$

$$X^2(\alpha) \geq X^2(\alpha') \quad \alpha, \alpha' \in [0,1], \alpha \leq \alpha'$$

Quedando escritas las dos premisas en nuestro caso como:

$$\frac{b_C - l_B L^{-1}(\alpha)}{a_C - l_A L^{-1}(\alpha)} \leq \frac{b_C - l_B L^{-1}(\alpha')}{a_C - l_A L^{-1}(\alpha')} \quad \text{y} \quad \frac{b_C + r_B L^{-1}(\alpha)}{a_C + r_A L^{-1}(\alpha)} \geq \frac{b_C + r_B L^{-1}(\alpha')}{a_C + r_A L^{-1}(\alpha')}$$

respecto a la primera premisa, podemos observar que exigimos que:

$$[b_C - l_B L^{-1}(\alpha)] \cdot [a_C - l_A L^{-1}(\alpha')] \leq [b_C - l_B L^{-1}(\alpha')] \cdot [a_C - l_A L^{-1}(\alpha)]$$

y desarrollando esta última expresión obtenemos:

$$a_C l_B [L^{-1}(\alpha) - L^{-1}(\alpha')] \geq b_C l_A [L^{-1}(\alpha) - L^{-1}(\alpha')]$$

y como $L^{-1}(\alpha) \geq L^{-1}(\alpha') \geq 0 \Rightarrow L^{-1}(\alpha) - L^{-1}(\alpha') \geq 0$, obtenemos que $a_C l_B \geq b_C l_A$, es decir, que se

debe cumplir que $\frac{l_B}{l_A} \geq \frac{b_C}{a_C}$.

Para la segunda premisa, el procedimiento a seguir es análogo. Así, esta queda reescrita como:

$$[b_C + r_B L^{-1}(\alpha)] \cdot [a_C + r_A L^{-1}(\alpha')] \geq [b_C + r_B L^{-1}(\alpha')] \cdot [a_C + r_A L^{-1}(\alpha)]$$

y desarrollándola queda reducida a:

$$a_C r_B [L^{-1}(\alpha) - L^{-1}(\alpha')] \geq b_C r_A [L^{-1}(\alpha) - L^{-1}(\alpha')]$$

y como $L^{-1}(\alpha) \geq L^{-1}(\alpha') \geq 0 \Rightarrow L^{-1}(\alpha) - L^{-1}(\alpha') \geq 0$, obtenemos que $a_C r_B \geq b_C r_A$, es decir, que se debe cumplir que $\frac{r_B}{r_A} \geq \frac{b_C}{a_C}$.

Asimismo, el cumplimiento de esta segunda condición que es necesaria y suficiente conlleva el cumplimiento de la primera, aunque la afirmación inversa no es cierta.

1.3.2. Método de resolución de ecuaciones de Buckley y Qu

A continuación resumimos el método de resolución de ecuaciones borrosas propuesto en Buckley y Qu (1991) y Buckley (1992b). Dicho concepto de solución es aplicado posteriormente por Buckley a la resolución de sistemas de ecuaciones en Buckley (1991) y a determinadas ecuaciones o sistemas de ecuaciones típicos en economía como la TIR, las tablas input-output de Leontieff etc. en Buckley (1992a).

Para aplicar este método de solución de ecuaciones borrosas, deberemos partir de que una relación entre números borrosos $\tilde{B} = f(\tilde{X}, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n)$, viene inducida por una relación crisp $b = f(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$, donde $\tilde{X}$ y x son las incógnitas, respectivamente. Su concepto de solución, se basa en tomar directamente la relación crisp implícita entre los parámetros $b, a_1, a_2, \dots, a_n$ y la incógnita, x , es decir:

$$x = h(b, a_1, a_2, \dots, a_n)$$

De esta forma, dado que los parámetros $b, a_1, a_2, \dots, a_n$ vienen dados por números borrosos, la solución propuesta para $\tilde{X}$ es:

$$\tilde{X} = h(\tilde{B}, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n)$$

la cual puede ser evaluada a través del principio de extensión de Zadeh. En concreto, si $h(b, a_1, a_2, \dots, a_n)$ es una función continua en los soportes de $\tilde{B}, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$, $\tilde{X}$ será un número borroso cuyos α -cortes son:

$$X_\alpha = [X^1(\alpha), X^2(\alpha)] = \{x \in \mathbb{R} \mid x = h(b, a_1, \dots, a_n), a_i \in A_{i_\alpha}, i = 1, 2, \dots, n, b \in B_\alpha\}$$

Respecto a los α -cortes de la solución propuesta, realizamos las siguientes consideraciones:

- a) En primer lugar, la solución de Buckley y Qu siempre existe. Para hallar los α -cortes de esta solución $\tilde{X} = h(\tilde{B}, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n)$, bastará con tener en cuenta las cuestiones apuntadas en el apartado 1.2.2.3. respecto a la evaluación de funciones de números borrosos.
- b) Si denominamos como X_α^C a los α -cortes que se obtienen aplicando el concepto clásico de solución de ecuaciones borrosas y X_α^B a los que se obtienen aplicando el concepto de solución de Buckley y Qu, podemos observar que la solución clásica, si existe, está contenida dentro de la solución analizada en este apartado, es decir, $X_\alpha^C \subseteq X_\alpha^B$. Así, podemos entender que la solución de Buckley y Qu es una aproximación a la verdadera solución de la ecuación borrosa, aproximación, por otra parte, más incierta que la solución original. En nuestra opinión, creemos que, si se puede, es mejor utilizar la solución clásica, ya que la incertidumbre de $\tilde{X}$ cuando se utiliza dicha solución es menor que si se utiliza la solución propuesta en este apartado.

- c) Respecto a la solución con este concepto de:

$$\tilde{A} + \tilde{X} = \tilde{B}$$

podemos observar que los α -cortes de $\tilde{X}$ son:

$$X_\alpha = [X^1(\alpha), X^2(\alpha)] = [B^2(\alpha) - A^1(\alpha), B^1(\alpha) - A^2(\alpha)]$$

siendo $\tilde{X}$ un número L-L de Dubois y Prade si $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ lo son.

- d) Respecto a la solución con esta metodología de:

$$\tilde{A} \otimes \tilde{X} = \tilde{B}$$

los α -cortes que de $\tilde{X}$ obtenemos, X_α , son:

$$X_\alpha = [X^1(\alpha), X^2(\alpha)] = \left[\frac{B^1(\alpha)}{A^2(\alpha)}, \frac{B^2(\alpha)}{A^1(\alpha)} \right]$$

y $\tilde{X}$ no es un número L-L de Dubois y Prade aunque $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ lo sean.

1.4. APROXIMACIÓN DE NÚMEROS BORROSOS

En este apartado proponemos diversas formas de aproximar números borrosos mediante números borrosos como los L-R de Dubois y Prade, y, de forma más particular como números borrosos triangulares o trapezoidales. Ello viene motivado porque, normalmente, en un determinado problema, cuando los datos de partida vienen estimados a través de unos números borrosos $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$, suelen estar asociados a estimaciones subjetivas de un experto o un conjunto de expertos, y por tanto, no son datos que puedan ser considerados como objetivos, modelizables mediante números ciertos o mediante variables aleatorias. Dada la naturaleza subjetiva de los datos de partida, no es necesaria una extrema precisión en su representación, y por tanto se suele utilizar en su cuantificación expresiones relativamente sencillas, de forma más general números L-R de Dubois y Prade, y de forma particular, números borrosos trapezoidales o triangulares, ya que permiten en muchos casos una fácil operatoria, y adicionalmente admiten una interpretación muy intuitiva.

Sin embargo, cuando inferimos una magnitud $\tilde{B}$ resultante de aplicar una determinada función $\tilde{B} = f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n)$, el resultado no será normalmente un número L-R de Dubois y Prade aunque los datos estimados inicialmente, $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ si lo sean. Por otra parte, en muchos casos no será posible hallar la función de pertenencia de $\tilde{B}$, $\mu_{\tilde{B}}(x)$, aunque si podamos hallar sus α -cortes, B_α , para una escala de verdad prefijada. Creemos que ambas cuestiones plantean ciertos problemas. En primer lugar, al no conocerse la función de pertenencia de $\tilde{B}$, se produce una pérdida de información respecto a la que disponemos de partida. En segundo lugar, la interpretación que podamos realizar del número borroso $\tilde{B}$ no es tan sencilla e intuitiva como la interpretación que se podía realizar de los números borrosos de los que partimos. En tercer lugar, si deseamos realizar posteriores transformaciones sobre $\tilde{B}$, su manipulación puede ser más complicada que si este fuera L-R de Dubois y Prade o trapezoidal, por ejemplo.

Por todo ello, creemos que puede ser de interés aproximar $\tilde{B}$ a través de un número borroso $\tilde{B}'$ que tenga la misma naturaleza que los números borrosos de partida, $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$, ya que el posible error que se cometa, puede ser compensado por las ventajas que proporcionará el número borroso aproximado, $\tilde{B}'$. Asimismo, tal como se demuestra en Jiménez y Rivas (1996), si posteriormente trabajamos con números borrosos aproximados, debido a la naturaleza de los operadores máximo y mínimo, el error de partida no va aumentando.

Concretamente, analizaremos tres enfoques distintos para la aproximación de números borrosos:

- 1) En primer lugar, e inspirándonos en Dubois y Prade (1993), generalizaremos a funciones de n números borrosos L-L de Dubois y Prade la propuesta que ellos realizan para aproximar funciones de dos variables.
- 2) Expondremos la metodología propuesta en Jiménez y Rivas (1996) para medir la calidad de la aproximación de funciones de números borrosos triangulares por un número borroso triangular que mantenga el mismo soporte y núcleo.
- 3) Expondremos un método propuesto por Delgado *et al.* (1998a) para aproximar cualquier número borroso a través de un número borroso triangular o trapezoidal.

1.4.1. Aproximación a través de un número L-L de Dubois y Prade de una función de números L-L de Dubois y Prade

Sea una función $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, suponemos que el valor de las n variables ha sido estimado mediante números L-L de Dubois y Prade, de forma que la i -ésima la podemos representar como $\tilde{A}_i = (a_{Ci}, l_{Ai}, r_{Ai})_L$, $i=1,2,\dots,n$. El valor de la función, si ésta es continua, será un número borroso $\tilde{B} = f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n)$. Supondremos asimismo, que la relación funcional que induce a $\tilde{B}$, $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, es monótona creciente respecto a las m primeras variables, donde $m \leq n$, y monótona decreciente respecto al resto, es decir:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} \geq 0, i=1,2,\dots,m; \quad \frac{\partial y}{\partial x_i} \leq 0, i=m+1,m+2,\dots,n$$

De esta forma, los α -cortes de $\tilde{B}$, B_α son:

$$B_\alpha = [B^1(\alpha), B^2(\alpha)] = \left[f(a_{1C} - l_{A1} L^{-1}(\alpha), \dots, a_{mC} - l_{Am} L^{-1}(\alpha), a_{(m+1)C} + r_{A(m+1)} L^{-1}(\alpha), \dots, a_{nC} + r_{An} L^{-1}(\alpha)), \right. \\ \left. f(a_{1C} + r_{A1} L^{-1}(\alpha), \dots, a_{mC} + r_{Am} L^{-1}(\alpha), a_{(m+1)C} - l_{A(m+1)} L^{-1}(\alpha), \dots, a_{nC} - l_{An} L^{-1}(\alpha)) \right]$$

Normalmente, $\tilde{B}$ no será un número L-L de Dubois y Prade. Sin embargo, sí podemos aproximar sus α -cortes con un desarrollo en serie de Taylor, a partir del valor de $f(a_{1C}, \dots, a_{mC}, a_{(m+1)C}, \dots, a_{nC})$. Asimismo, para simplificar notamos como a_C al vector $a_C = (a_{1C}, \dots, a_{mC}, a_{(m+1)C}, \dots, a_{nC})$. De esta forma, el extremo inferior del α -corte de $\tilde{B}$ puede ser aproximado por:

$$B^1(\alpha) \approx f(a_C) + \nabla f(a_C) \begin{pmatrix} -l_{A1} L^{-1}(\alpha) \\ \vdots \\ -l_{Am} L^{-1}(\alpha) \\ r_{A(m+1)} L^{-1}(\alpha) \\ \vdots \\ r_{An} L^{-1}(\alpha) \end{pmatrix} = f(a_C) - \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial f(a_C)}{\partial x_i} l_{Ai} - \sum_{i=m+1}^n \frac{\partial f(a_C)}{\partial x_i} r_{Ai} \right) L^{-1}(\alpha)$$

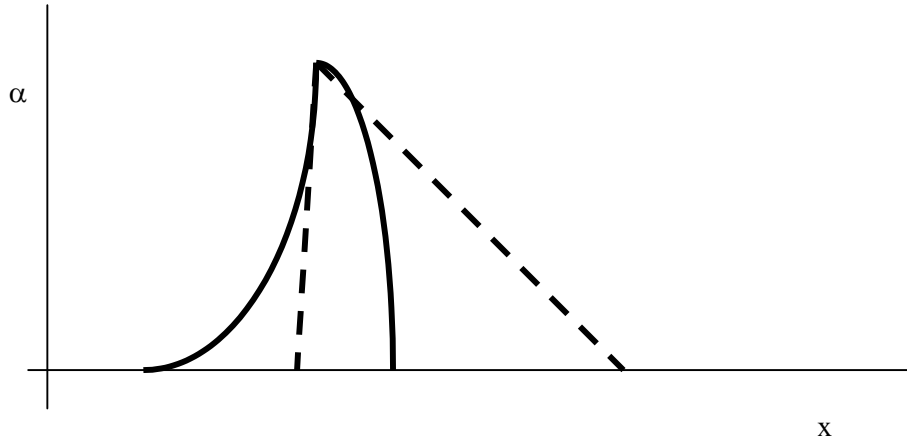
y el superior por:

$$B^2(\alpha) \approx f(a_c) + \nabla f(a_c) \begin{pmatrix} r_{A1} L^{-1}(\alpha) \\ \vdots \\ r_{Am} L^{-1}(\alpha) \\ -l_{A(m+1)} L^{-1}(\alpha) \\ \vdots \\ -l_{An} L^{-1}(\alpha) \end{pmatrix} = f(a_c) + \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial f(a_c)}{\partial x_i} r_{Ai} - \sum_{i=m+1}^n \frac{\partial f(a_c)}{\partial x_i} l_{Ai} \right) L^{-1}(\alpha)$$

de esta forma, es razonable aproximar a $\tilde{B}$ mediante un número borroso $\tilde{B}' = (b_c, l_B, r_B)_L$ donde:

$$b_c = f(a_c), l_B = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f(a_c)}{\partial x_i} l_{Ai} - \sum_{i=m+1}^n \frac{\partial f(a_c)}{\partial x_i} r_{Ai}, r_B = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f(a_c)}{\partial x_i} r_{Ai} - \sum_{i=m+1}^n \frac{\partial f(a_c)}{\partial x_i} l_{Ai}$$

Gráficamente, la relación entre $\tilde{B}$ y $\tilde{B}'$ es, suponiendo que éste último es triangular:



Obsérvese que si aceptamos que dos de las características más significativas de un número borroso son el núcleo y el soporte; el número borroso que aproxima a $\tilde{B}$, $\tilde{B}'$ mantiene el núcleo pero no mantiene el soporte. Asimismo, para niveles de presunción de α bajos, el error cometido en los α -cortes por el hecho de tomarse la aproximación triangular puede ser muy elevado.

1.4.2. Una metodología para medir la calidad de la aproximación a través de un número borroso triangular de una función de números borrosos triangulares que mantenga su mismo soporte y núcleo

En este apartado, para una función de números borrosos triangulares $\tilde{B} = f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n)$, propondremos aproximar $\tilde{B}$ a través de un número borroso triangular que tenga su mismo soporte y núcleo. Por otra parte, únicamente analizaremos el caso de números borrosos triangulares, ya que para el caso más general de trapezoidales, la transposición de los resultados es inmediata.

Una vez aproximado $\tilde{B} = f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n)$ deberemos evaluar dicha aproximación, para ello propondremos como metodología la desarrollada por Jiménez y Rivas (1996).

Estos autores consideran que un número borroso $\tilde{B}$ está bien representado por otro $\tilde{B}'$, si el error máximo que en el nivel de pertenencia de un determinado valor x se comete por tomar $\mu_{\tilde{B}'}(x)$ en lugar de $\mu_{\tilde{B}}(x)$ es pequeño. Matemáticamente, diremos que la aproximación de $\tilde{B}$ mediante un número borroso $\tilde{B}'$ será admisible si:

$$|\mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{B}'}(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x$$

donde ε es un valor convenientemente pequeño. Respecto al máximo error admisible, podemos interpretar que ε vendrá dado por el grado de matización de la verdad que adopte el decisor, es decir, por la escala de verdad por la que opte. Si se distinguen pocos matices de verdad –por ejemplo, se toma una escala pentaria-, el decisor aceptará que se comentan errores más elevados que si se adopta una escala más detallada –por ejemplo, una escala endecadaria-. En concreto, si denominamos como p los grados de verdad de la escala lingüística adoptada, hallamos ε como:

$$\varepsilon = \frac{1}{p-1}$$

de forma que, si adoptamos una escala endecadaria, que es el caso más habitual, $\varepsilon=0'1$.

Bien es cierto que en muchas ocasiones, no conoceremos la función de pertenencia del número borroso que aproximamos $\tilde{B}$, por lo que el máximo de $|\mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{B}'}(x)|$ tampoco será conocido. Sin embargo, en el mencionado trabajo de Jiménez y Rivas se da una cota superior a $|\mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{B}'}(x)|$ a través de los α -cortes de $\tilde{B}$ y $\tilde{B}'$, $B_\alpha = [B^1(\alpha), B^2(\alpha)]$ y $B'_\alpha = [B'^1(\alpha), B'^2(\alpha)]$. En concreto, si denominamos como α_I^* al valor que maximiza la distancia $|B^1(\alpha) - B'^1(\alpha)|$ y α_D^* al que lo hace para $|B^2(\alpha) - B'^2(\alpha)|$, y dichos niveles de presunción son conocidos, podemos hallar las desviaciones máximas en los extremos izquierdos y derechos de los α -cortes que con la aproximación de $\tilde{B}$, $\tilde{B}'$, se cometen. Estos serán notados como D_I^* y D_D^* , respectivamente y se calculan como:

$$D_I^* = |B^1(\alpha_I^*) - B'^1(\alpha_I^*)|$$

$$D_D^* = |B^2(\alpha_D^*) - B'^2(\alpha_D^*)|$$

De esta forma, el error que podemos cometer en el nivel de presunción de un valor x por tomar como función de pertenencia de $\tilde{B}$ la de su aproximación $\tilde{B}'$ viene acotado por:

$$|\mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{B}'}(x)| \leq \text{Max} \left\{ \frac{D_I^*}{B^1(1) - B^1(0)}, \frac{D_D^*}{B^2(0) - B^2(1)} \right\}$$

En Kaufmann (1986) se dan las expresiones de D_I^* y D_D^* para diversas operaciones binarias o monarias, $\tilde{B} = f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$ y $\tilde{B} = f(\tilde{A})$ respectivamente, donde los datos de partida son números borrosos triangulares, las cuales expondremos a continuación. Si se trata de una operación binaria, notaremos a los datos de partida como $\tilde{A}_1 = (a_1^1, a_1^2, a_1^3)$ y $\tilde{A}_2 = (a_2^1, a_2^2, a_2^3)$. Si la operación es monaria, el valor inicial es un único número borroso $\tilde{A} = (a^1, a^2, a^3)$. En todos los casos supondremos que los números borrosos de partida son positivos, es decir, que su soporte está formado por reales positivos.

a) Para $\tilde{B} = \tilde{A}_1 \otimes \tilde{A}_2$, $\tilde{B}' = (a_1^1 \cdot a_2^1, a_1^2 \cdot a_2^2, a_1^3 \cdot a_2^3)$, y las desviaciones a la izquierda y a la derecha son:

$$D_I^* = \frac{(a_1^2 - a_1^1)(a_2^2 - a_2^1)}{4}$$

$$D_D^* = \frac{(a_1^3 - a_1^2)(a_2^3 - a_2^2)}{4}$$

b) Para $\tilde{B} = \tilde{A}^{-1}$, $\tilde{B}' = \left(\frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^1} \right)$, y las desviaciones son:

$$D_I^* = \frac{1}{\sqrt{a^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^3}}$$

$$D_D^* = \frac{1}{\sqrt{a^1}} - \frac{1}{\sqrt{a^2}}$$

c) Para $\tilde{B} = \tilde{A}_1 \div \tilde{A}_2$, $\tilde{B}' = \left(\frac{a_1^1}{a_2^3}, \frac{a_1^2}{a_2^2}, \frac{a_1^3}{a_2^1} \right)$, y D_I^* y D_D^* son:

$$D_I^* = \frac{a_1^1}{a_2^3} + \left(\frac{a_1^2}{a_2^2} - \frac{a_1^1}{a_2^3} \right) \alpha_I^* - \frac{a_1^1 + (a_1^2 - a_1^1) \alpha_I^*}{a_2^3 - (a_2^3 - a_2^2) \alpha_I^*}$$

$$D_D^* = \frac{a_1^3}{a_2^1} - \left(\frac{a_1^3}{a_2^1} - \frac{a_1^2}{a_2^2} \right) \alpha_D^* - \frac{a_1^3 - (a_1^3 - a_1^2) \alpha_D^*}{a_2^1 + (a_2^2 - a_2^1) \alpha_D^*}$$

donde:

$$\alpha_I^* = \frac{a_2^3 - \sqrt{a_2^3 \cdot a_2^2}}{a_2^3 - a_2^2} \text{ y } \alpha_D^* = \frac{\sqrt{a_2^1 \cdot a_2^2} - a_2^1}{a_2^2 - a_2^1}$$

c) Si $\tilde{B} = \ln \tilde{A}$, $\tilde{B}' = (\ln(a^1), \ln(a^2), \ln(a^3))$ y las desviaciones D_I^* y D_D^* son:

$$D_I^* = \ln(a^1 + (a^2 - a^1)\alpha_I^*) - \ln a^1 - (\ln a^2 - \ln a^1)\alpha_I^*$$

$$D_D^* = \ln(a^3 - (a^3 - a^2)\alpha_D^*) - \ln a^3 + (\ln a^3 - \ln a^2)\alpha_D^*$$

donde:

$$\alpha_I^* = \frac{1}{\ln a^2 - \ln a^1} - \frac{a^1}{a^2 - a^1} \text{ y } \alpha_D^* = \frac{a^3}{a^3 - a^2} - \frac{1}{\ln a^3 - \ln a^2}$$

d) Si $\tilde{B} = e^{\tilde{A}}$, $\tilde{B}' = (e^{a^1}, e^{a^2}, e^{a^3})$ y las desviaciones son:

$$D_I^* = e^{a^1} + (e^{a^2} - e^{a^1})\alpha_I^* - e^{a^1 + (a^2 - a^1)\alpha_I^*}$$

$$D_D^* = e^{a^3} - (e^{a^3} - e^{a^2})\alpha_D^* - e^{a^3 - (a^3 - a^2)\alpha_D^*}$$

donde:

$$\alpha_I^* = \frac{1}{a^2 - a^1} \left[\ln \left(\frac{e^{a^2} - e^{a^1}}{a^2 - a^1} \right) - a^1 \right] \text{ y } \alpha_D^* = \frac{1}{a^3 - a^2} \left[a^3 - \ln \left(\frac{e^{a^3} - e^{a^2}}{a^3 - a^2} \right) \right]$$

e) Si $\tilde{B} = \tilde{A}^n$, distinguimos dos casos:

Caso 1

Si $k \in \mathbb{R}^+ - \{0,1\}$, el ajuste² propuesto es $\tilde{B}' = \left((a^1)^n, (a^2)^n, (a^3)^n \right)$. Así, si $n > 1$, las desviaciones

máximas son:

$$D_I^* = (a^1)^n + \left[(a^2)^n - (a^1)^n \right] \alpha_I^* - (a^1 + (a^2 - a^1)\alpha_I^*)^n$$

$$D_D^* = (a^3)^n - \left[(a^3)^n - (a^2)^n \right] \alpha_D^* - (a^3 - (a^3 - a^2)\alpha_D^*)^n$$

y si $n \in (0,1)$

² No consideramos $n=0$, porque sino obtenemos el número cierto 1, ni $n=1$, ya que en este caso $\tilde{B}$ es triangular, y así no hace falta aproximarlos

$$D_I^* = (a^1 + (a^2 - a^1)\alpha_I^*)^n - (a^1)^n - \left[(a^2)^n - (a^1)^n \right] \alpha_I^*$$

$$D_D^* = (a^3 - (a^3 - a^2)\alpha_D^*)^n - (a^3)^n + \left[(a^3)^n - (a^2)^n \right] \alpha_D^*$$

En ambos casos:

$$\alpha_I^* = \left(\frac{(a^2)^n - (a^1)^n}{n(a^2 - a^1)^n} \right)^{\frac{1}{n-1}} - \frac{a^1}{a^2 - a^1}$$

$$\alpha_D^* = \frac{a^3}{a^3 - a^2} - \left(\frac{(a^3)^n - (a^2)^n}{n(a^3 - a^2)^n} \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Adicionalmente, si asumimos que $n = \frac{1}{k}$, donde $k=2,3,\dots$, es decir, $\tilde{B} = \sqrt[k]{A}$, la expresión de los niveles de presunción en los que se produce mayor desviación en los α -cortes es:

$$\alpha_I^* = \left(\frac{k \left[(a^2)^{1/k} - (a^1)^{1/k} \right]}{(a^2 - a^1)^{1/k}} \right)^{\frac{k}{1-k}} - \frac{a^1}{a^2 - a^1}$$

$$\alpha_D^* = \frac{a^3}{a^3 - a^2} - \left(\frac{k \left[(a^3)^{1/k} - (a^2)^{1/k} \right]}{(a^3 - a^2)^{1/k}} \right)^{\frac{k}{1-k}}$$

Caso 2

Si $n < 0$, la aproximación propuesta es $\tilde{B}' = \left((a^3)^n, (a^2)^n, (a^1)^n \right)$. Las desviaciones máximas a la izquierda y a la derecha son, en este caso:

$$D_I^* = (a^3)^n - \left[(a^3)^n - (a^2)^n \right] \alpha_D^* - (a^3 - (a^3 - a^2)\alpha_D^*)^n$$

$$D_D^* = (a^1)^n + \left[(a^2)^n - (a^1)^n \right] \alpha_I^* - (a^1 + (a^2 - a^1)\alpha_I^*)^n$$

donde:

$$\alpha_I^* = \frac{a^3}{a^3 - a^2} - \left(\frac{(a^3)^n - (a^2)^n}{n(a^3 - a^2)^n} \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$\alpha_D^* = \left(\frac{(a^2)^n - (a^1)^n}{n(a^2 - a^1)^n} \right)^{\frac{1}{n-1}} - \frac{a^1}{a^2 - a^1}$$

Adicionalmente, si asumimos que $n = -\frac{1}{k}$, donde $k=2,3,\dots$, y por tanto, $\tilde{B} = \frac{1}{\sqrt[k]{A}}$, la expresión de

los niveles de presunción en los que se produce mayor desviación en los α -cortes es:

$$\alpha_1^* = \frac{a^3}{a^3 - a^2} - \left(\frac{k \left[(a^2)^{-1/k} - (a^3)^{-1/k} \right]}{(a^3 - a^2)^{-1/k}} \right)^{\frac{k}{1+k}}$$

$$\alpha_D^* = \left(\frac{k \left[(a^1)^{-1/k} - (a^2)^{-1/k} \right]}{(a^2 - a^1)^{-1/k}} \right)^{\frac{k}{1+k}} - \frac{a^1}{a^2 - a^1}$$

1.4.3. Una metodología para la aproximación de cualquier número borroso a través de un número borroso trapezoidal o triangular

Delgado *et al.* (1998a) consideran que las características básicas de un número pueden ser resumidas en un valor representativo, y un coeficiente que cuantifique la incertidumbre de dicho número borroso –características basadas en los conceptos estadísticos de la media y la varianza-. Como consecuencia, cualquier número borroso $\tilde{A}$ puede ser aproximado por otro $\tilde{A}'$ que sea trapezoidal o triangular, que permite el mismo valor representativo y la misma incertidumbre del número borroso $\tilde{A}$.

Si el número borroso a aproximar viene dado por:

$$\tilde{A} = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x)\} = \{A_i = [A^1(\alpha), A^2(\alpha)] \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}, i=1,2,\dots,n.$$

estos autores definen como valor de $\tilde{A}$, $V[\tilde{A}]$ al valor cierto:

$$V[\tilde{A}] = \int_0^1 s(\alpha) [A^1(\alpha) + A^2(\alpha)] d\alpha$$

Por otra parte, definen como ambigüedad del número borroso $\tilde{A}$, $A[\tilde{A}]$, a un valor que cuantificará la amplitud de los α -cortes de $\tilde{A}$. Dicha ambigüedad vendrá dada por:

$$A[\tilde{A}] = \int_0^1 s(\alpha) [A^2(\alpha) - A^1(\alpha)] d\alpha$$

Asimismo a la función $s(\alpha)$ que interviene en el cálculo del valor y la ambigüedad de un número borroso la definen como $s: [0,1] \rightarrow [0,1]$ a la que se exige:

- a) $s(0)=0$ y $s(1)=1$,
- b) La función $s(\alpha)$ es creciente respecto $\alpha \in [0,1]$, de forma que se da mayor peso en la determinación de $V[\tilde{A}]$ y $A[\tilde{A}]$ a aquellos α -cortes que presenten un mayor nivel de presunción.
- c) $\int_0^1 s(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2}$

Por otra parte, dichos autores proponen tomar $s(\alpha)=\alpha$. De esta forma, para el número borroso $\tilde{A}'$, que pretendemos que aproxime a $\tilde{A}$, y que por tanto es trapezoidal o triangular, es decir, que queda representado por: $\tilde{A}' = (a^1, a^2, a^3, a^4)$, las medidas de valor y ambigüedad son:

$$V[\tilde{A}'] = \int_0^1 \alpha [a^1 + (a^2 - a^1)\alpha + a^4 - (a^4 - a^3)\alpha] d\alpha = \frac{a^1 + 2a^2 + 2a^3 + a^4}{6}$$

$$A[\tilde{A}'] = \int_0^1 \alpha [a^4 - (a^4 - a^3)\alpha - a^1 - (a^2 - a^1)\alpha] d\alpha = \frac{a^4 + 2a^3 - 2a^2 - a^1}{6}$$

Por supuesto, si se trata de un número borroso triangular, como el centro es un único número, si notamos al número borroso que aproxima a $\tilde{A}$ como $\tilde{A}' = (a^1, a^2, a^3)$:

$$V[\tilde{A}'] = \frac{a^1 + 4a^2 + a^3}{6}, \quad A[\tilde{A}'] = \frac{a^4 - a^1}{6}$$

Así, para aproximar a un número borroso $\tilde{A}$ su equivalente trapezoidal, $\tilde{A}'$, este último debe mantener el mismo valor que $\tilde{A}$ y mantener su ambigüedad. Es decir, se debe cumplir si $\tilde{A}'$ es trapezoidal que:

$$V[\tilde{A}'] = \frac{a^1 + 2a^2 + 2a^3 + a^4}{6}, \quad A[\tilde{A}'] = \frac{a^4 + 2a^3 - 2a^2 - a^1}{6}$$

y si el que pretendemos aproximar a $\tilde{A}$, $\tilde{A}'$, es triangular, las condiciones son:

$$V[\tilde{A}'] = \frac{a^1 + 4a^2 + a^3}{6}, \quad A[\tilde{A}'] = \frac{a^4 - a^1}{6}$$

Podemos hacer las siguientes apreciaciones respecto a este planteamiento:

- a) De forma general, si el número borroso que pretendemos aproximar es trapezoidal, quedan dos grados de libertad después de plantear la igualdad entre valores y ambigüedades. Así pues, existen infinitos números borrosos trapezoidales que puedan aproximar a $\tilde{A}$. Ocurre lo mismo si el número borroso que pretendemos aproximar es triangular o trapezoidal simétrico, pero en este caso queda únicamente un grado de libertad.
- b) Únicamente el número borroso aproximado a $\tilde{A}$, $\tilde{A}'$, está perfectamente determinado si pretendemos que $\tilde{A}'$ sea triangular y simétrico.

Así pues, excepto en el caso en que $\tilde{A}'$ sea triangular y simétrico, el decisor puede seguir varias vías para determinar el número borroso aproximado.

La primera consistiría en añadir nuevas restricciones para acabar planteando un sistema de ecuaciones determinado. Éstas dependerán del problema que esté tratando el decisor, quedando pues, a su arbitrio. Por ejemplo, se puede forzar que el trapezoidal aproximado a $\tilde{A}$ tenga su mismo soporte o su mismo núcleo, hacer uso de algún coeficiente de asimetría o de entropía³, etc.

El segundo de ellos consistiría en minimizar la distancia entre $\tilde{A}$ y $\tilde{A}'$. Para ello será necesario plantear un programa matemático con restricciones de igualdad, que si suponemos que el número borroso aproximado $\tilde{A}'$ es trapezoidal será:

$$\text{Min } y = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

sujeto a:

$$V[\tilde{A}] = \frac{a^1 + 2a^2 + 2a^3 + a^4}{6}, \quad A[\tilde{A}] = \frac{a^4 + 2a^3 - 2a^2 - a^1}{6}$$

Donde $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vendría dado por una distancia (euclídea, de Hamming, etc.) entre $\tilde{A}$ y $\tilde{A}'$, o bien la suma de distancias de unos determinados α -cortes que toma en consideración, cuyo número vendrá dado por la escala semántica que el decisor adopte sobre los grados de verdad, que por supuesto, puede ser más o menos detallada. Asimismo, hacemos notar que en este programa, el conjunto factible es convexo –se trata de la intersección de dos hiperplanos–, por lo que posiblemente su resolución sea relativamente sencilla. El concepto clave sobre el que se asienta esta segunda alternativa es la noción de distancia entre números borrosos o entre intervalos de confianza, el cual viene desarrollado con detalle en Kaufmann *et al.* (1994, p.221-253).

³ Para consultar sobre el concepto de entropía, ver por ejemplo Kaufmann *et al.* (1994, p. 253-266).

1.5. DESFUZZYFICACIÓN DE NÚMEROS BORROSOS

En muchos problemas, aunque estimemos las variables que lo describen mediante números borrosos, será necesario acabar cuantificando las magnitudes que pretendemos estimar finalmente mediante un valor cierto, es decir, debemos asignarlas un valor crisp. Esto es lo que en la literatura borrosa se conoce como “desfuzzyficar” números borrosos, o lo que los profesores Kaufmann y Gil Aluja denominan como “hacer caer la entropía”. Ello será necesario, por ejemplo, si queremos ordenar números borrosos: los números borrosos, al contrario que los ciertos, no admiten un orden total. Si pretendemos ordenarlos, una alternativa es reducir dichos números borrosos a unos valores ciertos representativos, pudiéndose establecer para ellos un orden total. Otro ejemplo de la necesidad de desfuzzyficar números borrosos se da en la fijación de primas únicas para los seguros de vida, problema abordado en Terceño *et al.* (1996). El precio de un seguro –su prima– viene dado por el valor actual de las prestaciones que se compromete a dar el asegurador. Éstas pueden venir prefijadas, pero lo que el asegurador no conoce es el interés que obtendrá invirtiendo la prima o primas que perciben. Si el interés se estima subjetivamente mediante números borrosos, al descontar el valor de las prestaciones, el asegurador obtiene una prima única borrosa si el contrato se pacta a prima única. Sin embargo, en el momento de formalizarse el contrato, el asegurado debe conocer exactamente la prima que debe pagar. Así pues, el asegurador deberá desfuzzyficar la prima borrosa y convertirla en cierta para determinar el precio a cobrar por la cobertura ofrecida.

La literatura borrosa da diversas alternativas para la desfuzzyficación de números borrosos, algunas de las cuales son descritas y analizadas en este apartado.

- a) En primer lugar, aquéllas que podríamos denominar como clásicas, y estudiadas en profundidad por Zhao y Govind (1991):
 - a.1) La basada en el núcleo del número borroso, conocida como MOM –acrónimo de “mean of maxima”–.
 - a.2) La basada en el concepto del centro del área, conocida como COA –acrónimo de “center of area”–.
 - a.3) La denominada como media borrosa, FM, siendo éstas iniciales las correspondientes a “fuzzy mean”.
- b) El concepto de valor de un número borroso de Delgado *et al.* (1998a) expuesto en el apartado 1.4.
- c) La basada en el concepto de intervalo esperado, que se denomina como valor esperado, la cual ha sido analizada entre otros por Dubois y Prade (1985), Campos y González (1989a), González (1990) o Heilpern (1992) y (1995).

Con todos los métodos se pretende determinar un número cierto que denominaremos como A , que represente razonablemente bien a un número borroso $\tilde{A}$ que supondremos que vendrá dado por:

$$\tilde{A} = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x)\} = \{A_\alpha = [A^1(\alpha), A^2(\alpha)] \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

Así pues, desfuzzyficar un número borroso implicará establecer una aplicación:

$$g: F(R) \rightarrow R$$

$$\tilde{A} \in F(R) \rightarrow A \in R$$

donde por $F(R)$ notamos al conjunto de los números borrosos.

1.5.1. Métodos de desfuzzyficación clásicos

1.5.1.1. Mean of maxima (MOM)

Para un número borroso $\tilde{A}$, su número equivalente cierto A es un valor crisp que pertenece el núcleo de $\tilde{A}$, es decir:

$$A = x \mid x \in \text{Nucl}(\tilde{A})$$

En el caso en que el núcleo del número borroso se componga únicamente de un valor, la determinación de A es inmediata. Sin embargo, si el núcleo es un intervalo de confianza, el decisor deberá elegir arbitrariamente un valor de los que componen el núcleo. Obsérvese, que este método se basa en la idea estadística de la moda.

Respecto a las ventajas de este método, podemos señalar que es de fácil implementación. Sin embargo, no utiliza toda la información del número borroso y permite la introducción de la aversión al riesgo del decisor de forma muy limitada, ya que si el núcleo es un único número, su MOM queda ya prefijada, y si es un intervalo, el decisor tiene cierto margen para elegir un valor prudente, pero dicho valor sólo puede ser uno de los que conforman el núcleo.

1.5.1.2. Centro de área (COA)

Para un número borroso $\tilde{A}$, su equivalente cierto A es aquél que acumule el 50% del área que delimita su función de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}(x)$ con el eje de las abscisas. Es decir, A es aquel valor que:

$$A = X \left| \int_{A^*(0)}^x \mu_{\tilde{A}}(x) dx = \frac{1}{2} \int_{\text{sop}(\tilde{A})} \mu_{\tilde{A}}(x) dx \right.$$

Obsérvese, que este método se basa en la idea estadística de la mediana. Si bien es de más difícil implementación que el MOM, utiliza toda la información del número borroso que se desfuzzyfica. Este método no permite introducir la aversión al riesgo del decisor, sin embargo ello tiene fácil arreglo, sin más que ir variando el área que $\mu_{\tilde{A}}(x)$ debe acumular a su izquierda.

Si $\tilde{A}$ cuantifica una utilidad –por ejemplo, un beneficio–, un adverso al riesgo considerará para $\tilde{A}$ valores poco elevados –una acumulación del 25%, por ejemplo–, si es propenso al riesgo, se considerará para $\tilde{A}$ valores elevados (por ejemplo, un A que acumule a su izquierda el 80% del área) y si se es neutral al riesgo se utilizará el COA.

1.5.1.3. Media borrosa (FM)

Según este método el valor cierto representativo A de un número borroso $\tilde{A}$, se halla como una media ponderada de los valores que forman parte del soporte de $\tilde{A}$, $x \in \text{sop}(\tilde{A})$, por su nivel de presunción $\mu_{\tilde{A}}(x)$. Es decir, el valor representativo de $\tilde{A}$ se hallará como:

$$A = \frac{\int_{\text{sop}(\tilde{A})} x \cdot \mu_{\tilde{A}}(x) dx}{\int_{\text{sop}(\tilde{A})} \mu_{\tilde{A}}(x) dx}$$

Obsérvese que se basa en la idea estadística de la media aritmética ponderada.

Aunque de más difícil implementación que el MOM, también se utiliza toda la información del número borroso que se desfuzzyfica, $\tilde{A}$. Igual que en los casos anteriores, no se permite introducir la aversión al riesgo del decisor. Una versión, donde si se permite introducir aversión al riesgo del decisor, es la propuesta por Yager, analizada en Bortolan y Degani (1985). En este caso se propone:

$$A = \frac{\int_{\text{sop}(\tilde{A})} g(x) \cdot \mu_{\tilde{A}}(x) dx}{\int_{\text{sop}(\tilde{A})} \mu_{\tilde{A}}(x) dx}$$

donde $g(x)$ es una función que pondera los valores de x .

Sin embargo, aunque esta modificación puede ser útil en la ordenación de números borrosos, puede no serlo tanto en la desfuzzyficación. Dependiendo de la función $g(x)$ que se utilice, el valor A puede no pertenecer al soporte del número borroso que desfuzzyficamos, por lo que no podemos decir que A sea un valor representativo. Por otra parte, creemos que esta forma de introducción de la aversión al riesgo se realiza de manera poco intuitiva para el decisor.

1.5.2. El indicador de valor de Delgado *et al.* (1998a)

Estos autores proponen para hallar el valor representativo de $\tilde{A}$ como:

$$A = \int_0^1 s(\alpha) [A^1(\alpha) + A^2(\alpha)] d\alpha$$

donde las propiedades de $s(\alpha)$ ya fueron expuestas en 1.4.3.

Aunque en ocasiones el valor de $\tilde{A}$ puede ser de difícil cálculo, como ventajas de este método podemos mencionar que se trabaja con toda la información del número borroso y que se permite ponderar la importancia de los extremos de los α -cortes en función del nivel de presunción que presenten. Sin embargo, esta medida de valor no permite introducir la aversión al riesgo del decisor pero ello puede hacerse sin más que introducir un coeficiente $0 \leq \beta \leq 1$ en la expresión de A expuesta anteriormente, de forma que:

$$A = \int_0^1 s(\alpha) [(1 - \beta)A^1(\alpha) + \beta A^2(\alpha)] d\alpha$$

donde si $\tilde{A}$ cuantifica una utilidad, β indica propensión al riesgo del decisor –a mayor β el decisor se decanta por valores más elevados de los α -cortes de $\tilde{A}$ –, y si $\tilde{A}$ es una desutilidad, β indica aversión al riesgo –se da mayor peso a las peores realizaciones de $\tilde{A}$ al hallar A –.

1.5.3. El valor esperado

Este método se basa en el concepto de intervalo esperado de un número borroso, cuya conceptualización mezcla conceptos estadísticos y de la teoría de los subconjuntos borrosos. El intervalo esperado de un número borroso $\tilde{A}$, $EI[\tilde{A}]$, se define como:

$$EI[\tilde{A}] = [E[A^1(\alpha)], E[A^2(\alpha)]] = [E^1[\tilde{A}], E^2[\tilde{A}]]$$

Donde como $E[\cdot]$ notamos al operador esperanza matemática. Para hallar el intervalo esperado de $\tilde{A}$, deberemos asumir que los niveles de presunción $\alpha \in [0,1]$ siguen alguna distribución de probabilidad (uniforme, beta, etc.), que vendrá predefinida subjetivamente por el decisor. De esta forma, podemos hallar el intervalo esperado de un número borroso $\tilde{A}$ utilizando la integral de Riemann-Stieljes como:

$$EI[\tilde{A}] = \left[\int_0^1 A^1(\alpha) dF(\alpha), \int_0^1 A^2(\alpha) dF(\alpha) \right]$$

donde $F(\alpha)$ es la función de distribución considerada para α .

Usualmente, en aplicaciones prácticas se suele considerar que el nivel de presunción $\alpha \in [0,1]$ se comporta según una distribución uniforme $U(0,1)$ –ver por ejemplo, en programación lineal posibilística, Arenas *et al.* (1997)–. En este caso, el intervalo esperado de $\tilde{A}$ es:

$$EI[\tilde{A}] = \left[\int_0^1 A^1(\alpha) d\alpha, \int_0^1 A^2(\alpha) d\alpha \right]$$

Ya conocido el intervalo esperado, podemos hallar el valor esperado de $\tilde{A}$, que denotaremos como $EV[\tilde{A}, \beta]$, donde, obviamente, $EV[\tilde{A}, \beta] = A$. El valor esperado se halla sin más que introducir la aversión al riesgo del decisor en el sentido de Hurwicz, ponderando con un parámetro $0 \leq \beta \leq 1$ los extremos del intervalo esperado, de forma que β cuantifica la aversión al riesgo del decisor. De forma general:

$$A = EV[\tilde{A}, \beta] = (1 - \beta)E[A^1(\alpha)] + \beta E[A^2(\alpha)]$$

Y si asumimos para α una ley uniforme:

$$EV[\tilde{A}, \beta] = (1 - \beta) \int_0^1 A^1(\alpha) d\alpha + \beta \int_0^1 A^2(\alpha) d\alpha$$

Evidentemente, si $\tilde{A}$ es una desutilidad, β indica aversión al riesgo, ya que, a valores más elevados de β , el decisor pondera más los valores más pesimistas del intervalo esperado que los más optimistas.

Aunque en ocasiones el valor de $\tilde{A}$ puede ser de difícil cálculo, como ventajas de este método podemos mencionar, en primer lugar, que se trabaja con toda la información del número borroso. Adicionalmente se permite ponderar la importancia de los extremos de los α -cortes en función del

nivel de presunción que presenten, sin más que asumir para α una distribución de probabilidad pertinente (por ejemplo, dando mayor densidad a valores de α elevados). Asimismo este método permite introducir la aversión al riesgo del decisor de una forma intuitiva y sencilla. Para finalizar queremos comentar que en el supuesto, muy habitual en aplicaciones prácticas, que $\tilde{A}$ sea triangular, es decir, $\tilde{A} = (a^1, a^2, a^3)$, y se asuma una distribución uniforme de α e indiferencia al riesgo del decisor, es decir, $\beta = \frac{1}{2}$, el resultado que se obtiene para A es el muy utilizado:

$$A = VE\left[\tilde{A}, \frac{1}{2}\right] = \frac{a^1 + 2a^2 + a^3}{4}$$

ver por ejemplo Kaufmann. (1986b) o Kaufmann y Gil Aluja (1993, p. 207).

CAPÍTULO 2:

ALGUNOS MODELOS DE REGRESIÓN BORROSA

2.1. CONSIDERACIONES PREVIAS

A continuación analizaremos algunos modelos de regresión borrosa que, como toda técnica de regresión, su objetivo es determinar una relación funcional entre una variable dependiente con varias variables explicativas y la podemos considerar alternativa a la más conocida de mínimos cuadrados, aunque ésta última es una técnica estadística. Asimismo, observaremos que es más versátil que los convencionales modelos de regresión estadísticos, ya que permite hallar relaciones funcionales cuando la variable dependiente, las variables independientes o ambas no se manifiestan como valores únicos, sino como intervalos de confianza.

A grosso modo, la técnica de regresión de mínimos cuadrados parte de que la relación existente entre un variable explicada, y las explicativas, que es un vector m -dimensional $x=(x_1, x_2, \dots, x_m)$, viene dada por un hiperplano, es decir:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m$$

Así, para un conjunto de n observaciones –una muestra– $\{(Y_1, X_1), (Y_2, X_2), \dots, (Y_j, X_j), \dots, (Y_n, X_n)\}$:

donde:

Y_j : Es la observación número j de la variable dependiente y , $j=1, 2, \dots, n$.

X_j : Es la observación número j con $j=1, 2, \dots, n$, de la variable independiente x . X_j es una variable m -dimensional $X_j = (X_{0j}, X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{ij}, \dots, X_{mj})$, donde $X_{0j} = 1 \ \forall j$, y X_{ij} es el valor observado sobre la variable i -ésima en el j -ésimo componente de la muestra.

dado que difícilmente podremos ajustar un hiperplano que sea compatible con todos los elementos de la muestra, se supone que la relación entre Y_j y el vector X_j es lineal $\forall j$, pero que existe un elemento de perturbación estocástico, que se comporta como una variable aleatoria de media 0, de forma que para la j -ésima observación se cumple:

$$Y_j = a_0 + a_1X_{1j} + a_2X_{2j} + \dots + a_mX_{mj} + \epsilon_j$$

siendo ε_j el término de perturbación estocástico. Si, como se supone habitualmente, la varianza es igual para los errores y que éstos están incorrelacionados, $E[\varepsilon_k \cdot \varepsilon_j] = 0 \quad \forall k \neq j$, el método de estimación utilizado es el conocido de mínimos cuadrados ordinarios. En este caso, para estimar los parámetros $a_i, i=1,2,\dots,m$, se resuelve un programa cuadrático cuya función objetivo es: $z =$

$$\sum_{j=1}^n (Y_j - \hat{Y}_j)^2, \text{ donde } \hat{Y}_j \text{ es el valor estimado de } Y_j \text{ como función de las variables } X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{mj},$$

tras haber hallado los valores de $a_1, a_2, \dots, a_m$.

Utilizando regresión borrosa también asumimos que la relación entre la variable explicada y las explicativas es lineal, pero en este caso, si disponemos de una muestra $\{(Y_1, X_1), (Y_2, X_2), \dots, (Y_j, X_j), \dots, (Y_n, X_n)\}$, las posibles divergencias que pudieran surgir entre la j -ésima observación de la variable independiente Y_j y su estimación $\hat{Y}_j$, viene dada porque entre x e y existe una relación borrosa del tipo:

$$y = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x_1 + \tilde{A}_2 x_2 + \dots + \tilde{A}_m x_m$$

donde los coeficientes $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_m$, son números borrosos, por lo que el i -ésimo queda caracterizado por:

$$\tilde{A}_i = \{x, \mu_{\tilde{A}_i}(x)\} = \{A_{i\alpha} = [A_i^1(\alpha), A_i^2(\alpha)] \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

Es decir, las divergencias que se producen respecto a la teórica relación lineal no tienen naturaleza aleatoria, sino borrosa. Asimismo, podemos comprobar que el término de error no queda introducido como sumando en el hiperplano, sino que es incorporado en los coeficientes $\tilde{A}_i, i=0,2,\dots,m$, al asumirse que son números borrosos. Por supuesto, de forma análoga a la técnica de mínimos cuadrados, una vez se disponga de la muestra, nuestro objetivo debe ser ajustar los coeficientes $\tilde{A}_i$.

Respecto a esta forma de modelización, creemos que de alguna forma, ofrece ciertas ventajas sobre la tradicional técnica de regresión. En primer lugar, porque las estimaciones que obtengamos después de ajustar los coeficientes borroso, no serán variables aleatorias, y por tanto, en muchas ocasiones de difícil tratamiento numérico, sino números borrosos, cuyo tratamiento es más sencillo. Por otra parte, si el fenómeno de estudio es de carácter económico o social, las observaciones que del mismo se obtienen son consecuencia de la interacción entre las creencias, expectativas, etc. de los agentes que participan en dicho fenómeno, y por tanto, ya hemos señalado que en nuestra opinión, no es del todo adecuado modelizar dicho fenómeno utilizando la

teoría de la probabilidad. Por ejemplo, el precio de los activos que se negocian en los mercados financieros es la consecuencia de las expectativas que tienen los participantes sobre el devenir de la economía, la confianza que a los operadores les generan los emisores de dichos activos etc. Posiblemente en este caso sea excesivamente simplificadora la existencia de linealidad entre la variable explicada y las variables explicativas lo cual se asume utilizando tanto la regresión convencional como la regresión borrosa, pero creemos que es más realista modelizar el sesgo que puede darse entre las realizaciones de la variable dependiente y el valor que teóricamente éstas pueden tomar asumiendo que la relación entre variable dependiente y variables explicativas es borrosa, que si damos una naturaleza aleatoria a dicho sesgo. Respecto a los precios de los activos financieros, estaremos asumiendo, como mínimo, el fuerte componente subjetivo que implica su determinación.

Por otra parte, en muchas circunstancias las observaciones de la variable dependiente, de la variable independiente o de ambas no vienen dadas por un número cierto, sino por un intervalo de confianza. Por ejemplo, el precio que se negocia en los mercados financieros durante una sesión para un determinado activo difícilmente es único, sino que éste suele negociarse dentro de una horquilla delimitada por un precio máximo y por un precio mínimo. Para utilizar las técnicas de mínimos cuadrados –o la más sofisticada de máximo verosímilitud- deben cuantificarse las observaciones de la variable explicada (y explicativa) a través de un único número, utilizándose por ejemplo, el precio medio negociado o el último precio en el modelo que se vaya a implementar. Es evidente que este proceder implica una importante pérdida de información. Para implementar los métodos de regresión borrosa no hace falta reducir el valor de las variables observadas a un número real, cuando son observadas como intervalos, así, podremos ajustar la relación funcional que busquemos trabajando con todos los valores observados siendo posible entonces utilizar toda la información disponible.

A continuación analizamos los dos modelos que habitualmente son utilizados en aplicaciones empíricas, propuestos por Tanaka e Ishibuchi (1992) y Tanaka (1987) y Sakawa y Yano (1992) respectivamente.

2.2. EL MODELO DE TANAKA E ISHIBUCHI DE REGRESIÓN BORROSA

2.2.1. Regresión con intervalos de confianza

Estos autores parten de que para un determinado fenómeno, el observador dispone de una muestra que representamos como: $\{(Y_1, X_1), (Y_2, X_2), \dots, (Y_j, X_j), \dots, (Y_n, X_n)\}$, donde:

a) Y_j es la observación j -ésima de la variable dependiente, $j=1,2,\dots,n$, y suponemos que viene dada a través de un intervalo de confianza:

$$Y_j = [Y_j^1, Y_j^2]$$

así, podemos representar el intervalo de confianza Y_j a través de su centro y de su radio como:

$$Y_j = \langle Y_{jC}, Y_{jR} \rangle$$

donde:

$$Y_{jC} = \frac{Y_j^1 + Y_j^2}{2} \text{ y } Y_{jR} = \frac{Y_j^2 - Y_j^1}{2}$$

si $Y_j, j=1,2,\dots,n$ son números ciertos, $Y_{jR} = 0 \forall j$.

b) X_j : es el vector observado en la j -ésima observación sobre las variables independientes, con $j=1,2,\dots,n$. Así, X_j es una variable m -dimensional $X_j = (X_{0j}, X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{ij}, \dots, X_{mj})$, donde $X_{0j} = 1 \forall j$, y X_{ij} es el valor en la j -ésima observación de la muestra para la variable i -ésima. En cualquier caso asumimos que se tratan de observaciones crisp.

En el modelo de Tanaka se asume que la relación existente entre la variable dependiente, que es un intervalo de confianza, y la variable independiente $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, que es un vector con componentes ciertos es lineal, de forma que:

$$y = A_0 + A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_mx_m$$

donde $A_i, i=0,1,\dots,m$ son intervalos de confianza:

$$A_i = \langle a_{iC}, a_{iR} \rangle, i=0,1,\dots,m.$$

Evidentemente, el objetivo final es determinar los centros y radios de A_i de forma que sean compatibles con las observaciones de que se dispone. De esta forma, si denominamos como $\hat{Y}_j =$

$\langle \hat{Y}_{jC}, \hat{Y}_{jR} \rangle$ al intervalo de confianza correspondiente al valor que estimamos para la j -ésima variable independiente, Y_j , después de hallar los parámetros $A_1, A_2, \dots, A_m$, como dicha estimación se realizaría mediante la suma:

$$\hat{Y}_j = \sum_{i=0}^m A_i X_{ij}, j=1,2,\dots,n.$$

podemos expresarla a través de sus centros y sus radios, que serán funciones de los centros y de los radios de los parámetros A_i , $i=1,2,\dots,m$:

$$\langle \hat{Y}_{jC}, \hat{Y}_{jR} \rangle = \sum_{i=0}^m \langle a_{iC}, a_{iR} \rangle X_{ij} = \left\langle \sum_{i=0}^m a_{iC} X_{ij}, \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| \right\rangle$$

En Tanaka e Ishibuchi (1992) se propone dos modelos de regresión borrosa. El primero de ellos está asociado al concepto de posibilidad. El objetivo buscado en este modelo es que las estimaciones que obtengamos de los valores de la variable independiente observados tras ajustar los parámetros $A_1, A_2, \dots, A_m$ contengan a $Y_j \forall j$, es decir, que $\hat{Y}_j$ sea posiblemente Y_j , minimizando la incertidumbre de las estimaciones realizadas sobre Y_j , $\hat{Y}_j$ tras ajustar los parámetros A_i . Asimismo, dicha incertidumbre puede ser medida por la amplitud de dicho intervalo de confianza, $\hat{Y}_j$, más concretamente, por su radio, y así, como el radio de la estimación de la j -ésima variable independiente es:

$$\hat{Y}_{jR} = \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}|$$

la incertidumbre total que genera la muestra tras ajustarse los parámetros A_i , $i=0,2,\dots,m$ es la suma de los radios de las estimaciones que realicemos sobre las variables dependientes observadas, es decir:

$$z = \sum_{j=1}^n \hat{Y}_{jR} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}|$$

Así, como buscamos minimizar la función z de forma que las estimaciones $\hat{Y}_j$ contengan las variables independientes observadas, Y_j , es decir: $Y_j \subseteq \hat{Y}_j \forall j$, para la determinación de los parámetros A_i deberemos resolver el siguiente programa lineal, siendo las variables decisión del programa los centros y los radios de los parámetros A_i :

$$\text{Minimizar } z = \sum_{j=1}^n \hat{Y}_{jR} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}|$$

sujeto a:

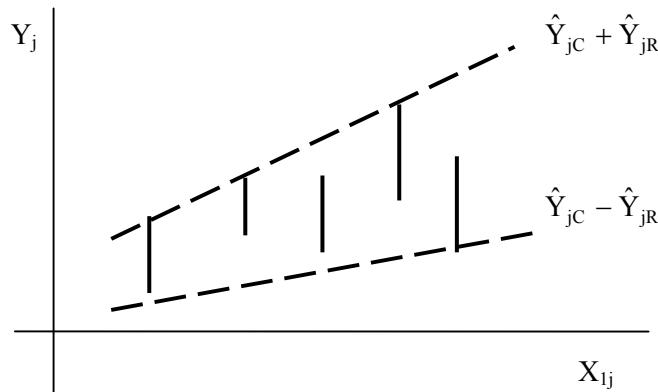
$$\hat{Y}_{jC} - \hat{Y}_{jR} = \sum_{i=0}^m a_{iC} X_{ij} - \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| \leq Y_{jC} - Y_{jR} \quad j=1,2,\dots,n$$

$$\hat{Y}_{jC} + \hat{Y}_{jR} = \sum_{i=0}^m a_{iC} X_{ij} + \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| \geq Y_{jC} + Y_{jR} \quad j=1,2,\dots,n$$

$$a_{iR} \geq 0 \quad i=0,1,\dots,m$$

Los dos primeros bloques de restricciones aseguran que las estimaciones sobre la variable dependiente realizadas contengan a las realmente observadas. Así, con el primero aseguramos que el extremo inferior de las estimaciones sean inferiores a los extremos inferiores de las observaciones mientras que con el segundo bloque de restricciones indicamos que los extremos superiores de las estimaciones deben ser superiores a los de las observaciones. El tercer bloque de restricciones se plantea porque el radio de un intervalo de confianza no puede ser negativo.

Representamos a continuación el modelo de regresión borroso basado en el concepto de posibilidad, para un modelo del tipo $Y_j = A_0 + A_1 X_{1j}$.



El segundo modelo de regresión borrosa propuesto en Tanaka e Ishibuchi (1992), está asociado al concepto de necesidad. En este caso se exigen que las estimaciones que se obtienen de las variables independientes $\hat{Y}_j^N$, estén contenidas en las realmente observadas, Y_j , $j=1,2,\dots,n$, es decir, $\hat{Y}_j^N \subseteq Y_j$, lo cual puede interpretarse como que $\hat{Y}_j^N$ es necesario en Y_j .

Si notamos a los coeficientes a estimar como $A_i^N = \langle a_{iC}^N, a_{iR}^N \rangle$, $i=0,1,\dots,m$, la incertidumbre de las estimaciones realizadas sobre las observaciones de las variables independientes es la suma de los radios de las estimaciones $\hat{Y}_j^N$, $j=1,2,\dots,n$, es decir:

$$z^N = \sum_{j=1}^n \hat{Y}_{jR}^N = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^m a_{iR}^N |X_{ij}|$$

En este modelo los autores proponen maximizar la incertidumbre de las estimaciones teniéndose en cuenta que éstas deben estar contenidas en los intervalos de confianza realmente observados para dichas variables dependientes a_{iC}^N y a_{iR}^N , $i=0,1,2,\dots,m$. Para determinar los centros y los radios de los coeficientes A_i , debemos, pues, plantear el programa lineal:

$$\text{Maximizar } z^N = \sum_{j=1}^n \hat{Y}_{jR}^N = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^m a_{iR}^N |X_{ij}|$$

sujeto a:

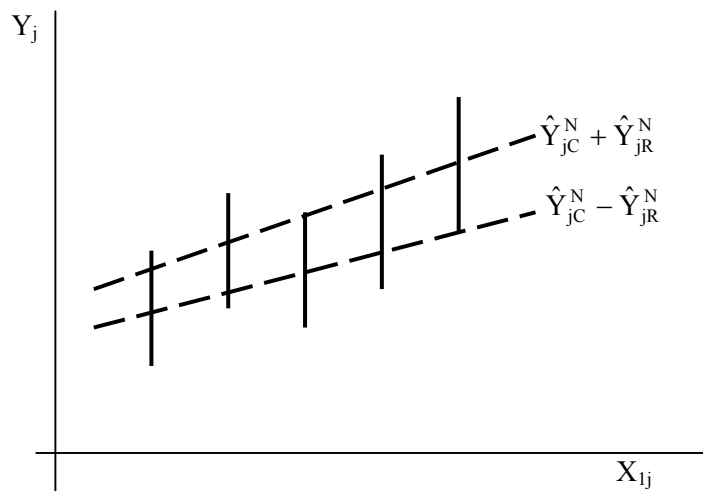
$$\hat{Y}_{jC}^N - \hat{Y}_{jR}^N = \sum_{i=0}^m a_{iC}^N X_{ij} - \sum_{i=0}^m a_{iR}^N |X_{ij}| \geq Y_{jC} - Y_{jR} \quad j=1,2,\dots,n$$

$$\hat{Y}_{jC}^N + \hat{Y}_{jR}^N = \sum_{i=0}^m a_{iC}^N X_{ij} + \sum_{i=0}^m a_{iR}^N |X_{ij}| \leq Y_{jC} + Y_{jR} \quad j=1,2,\dots,n$$

$$a_{iR}^N \geq 0 \quad i=0,1,\dots,m$$

Los dos primeros bloques de restricciones aseguran que las estimaciones sobre la variable dependiente realizadas estén contenidas en las realmente observadas. Con el primero de los dos conseguimos que el extremo inferior de las estimaciones sea superior al extremo inferior de las observaciones; y con el segundo exigimos que los extremos superiores de los intervalos de confianza correspondientes a las estimaciones sean inferiores a los de las observaciones. El tercer bloque de restricciones asegura que el radio de los parámetros $A_0, A_1, \dots, A_n$ no sea negativo.

Representamos a continuación, gráficamente y suponiendo una única variable independiente, el modelo de regresión borrosa asociado al concepto de necesidad propuesto por Tanaka:



Tanaka (1987) demuestra que el programa lineal asociado al modelo de regresión posibilística siempre tiene solución, mientras que el planteado para la regresión borrosa construida a partir del concepto de necesidad no puede asegurarse su existencia. Es fácil intuir que éste último, por ejemplo, no tendrá solución si las observaciones de la variable independiente Y_j , $j=1,2,\dots,n$ son observaciones ciertas y la muestra no proviene de un hiperplano con coeficientes ciertos. Por esta razón, en aplicaciones prácticas, se suele únicamente utilizar el modelo de regresión posibilística, y no el asociado al concepto de necesidad, pues para éste, en muchas ocasiones, no existe solución.

2.2.2. Regresión con números borrosos

En este caso partiremos de que, para un determinado fenómeno, el observador dispone de una muestra que representamos como: $\{(Y_1, X_1), (Y_2, X_2), \dots, (Y_j, X_j), \dots, (Y_n, X_n)\}$, donde las variables independientes son vectores crisp $m+1$ -dimensionales y las n observaciones de la variable dependiente son intervalos de confianza. La j -ésima observación es pues un intervalo de confianza que puede representarse a través de su centro y su radio como $\langle Y_{jC}^*, Y_{jR}^* \rangle$.

Asimismo suponemos que la j -ésima observación de la variable dependiente es un α^* -corte arbitrario del número borroso del que proviene donde α^* viene prefijada por el decisor de forma arbitraria. El número borroso que cuantifica el valor de la j -ésima observación sobre la variable dependiente es, asimismo, un número borroso L-L de Dubois y Prade simétrico que notamos como $\tilde{Y}_j = (Y_{jC}, Y_{jR})_L$. La función forma de $\tilde{Y}_j$, $L(x)$, al igual que el nivel α^* observado viene elegida por el decisor, y su forma dependerá del problema que tratemos.

De esta forma, como el α^* -corte de $\tilde{Y}_j$, $Y_{j\alpha^*}$ es:

$$Y_{j\alpha^*} = [Y_{jC} - Y_{jR} L^{-1}(\alpha^*), Y_{jC} + Y_{jR} L^{-1}(\alpha^*)], j=1,2,\dots,n.$$

podemos inferir el centro y el radio de $\tilde{Y}_j$ a través de su α -corte observado, que lo es a un nivel α^* , es decir, es $Y_{j\alpha^*}$. En concreto:

$$\begin{aligned} Y'_{jC} &= Y_{jC} \\ Y'_{jR} &= Y_{jR} L^{-1}(\alpha^*) \Rightarrow Y_{jR} = \frac{Y'_{jR}}{L^{-1}(\alpha^*)} \end{aligned}$$

Finalmente, el modelo de regresión a estimar será:

$$\tilde{y} = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x_1 + \dots + \tilde{A}_m x_m$$

Respecto a los parámetros $\tilde{A}_i$, $i=0,1,2,\dots,m$ serán números borrosos L-L simétricos de Dubois y Prade, siendo la función forma $L(x)$ a tomar idéntica a la elegida para las observaciones de la variable explicada. Así, los parámetros A_i a estimar pueden ser expresados como $\tilde{A}_i = (a_{iC}, a_{iR})_L$, $i=0,1,\dots,m$.

Como siempre, el objetivo final es estimar el centro y el radio de $\tilde{A}_i \forall i$, siendo para ello necesario tener en cuenta que tras estimar los centros y los radios de los parámetros $\tilde{A}_i$, obtendremos unas estimaciones del valor de las observaciones de las variables independientes $\hat{\tilde{Y}}_j = (\hat{Y}_{jC}, \hat{Y}_{jR})_L$. Más concretamente, como:

$$\hat{\tilde{Y}}_j = \sum_{i=0}^m \tilde{A}_i X_{ij}$$

los centros y los radios de $\hat{\tilde{Y}}_j$ vendrán dados por:

$$\hat{\tilde{Y}}_j = (\hat{Y}_{jC}, \hat{Y}_{jR})_L = \sum_{i=0}^m (a_{iC}, a_{iR})_L X_{ij} = \left(\sum_{i=0}^m a_{iC} X_{ij}, \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| \right)_L$$

apuntamos que debe ser tenido en cuenta que $X_{0j} = 1 \forall j$.

Así, como $\hat{\tilde{Y}}_j$ es un número borroso de Dubois y Prade simétrico, su función de pertenencia será:

$$\mu_{\hat{Y}_j}(x) = \begin{cases} L \left(\frac{\left| \sum_{i=0}^m a_{iC} X_{ij} - x \right|}{\sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}|} \right) & \sum_{i=0}^m a_{iC} X_{ij} - \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| \leq x \leq \sum_{i=0}^m a_{iC} X_{ij} + \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La determinación de los parámetros a_{iC} y a_{iR} , $i=0,1,\dots,m$ se realizará a través del modelo de regresión posibilística de intervalos de confianza planteado anteriormente. Apuntamos que en este caso los intervalos de confianza que entran en juego, son los α^* -cortes de $\hat{Y}_j$, $j=1,2,\dots,n$ que es desconocido, ya que desconocemos los de $\tilde{A}_i$, $i=0,1,\dots,m$ y los α^* -cortes de $\tilde{Y}_j$, $j=1,2,\dots,n$.

Respecto al α^* -corte de $\hat{Y}_j$, $\hat{Y}_{j\alpha^*} = \langle \hat{Y}'_{jC}, \hat{Y}'_{jR} \rangle$, podemos observar que este se halla a través de los α -cortes a dicho nivel α^* de los parámetros $\tilde{A}_i$, los cuales notamos como $A_{i\alpha^*} = \langle a'_{iC}, a'_{iR} \rangle$, $i=0,1,\dots,m$. De esta forma, $\hat{Y}_{j\alpha^*}$ se obtiene como:

$$\langle \hat{Y}'_{jC}, \hat{Y}'_{jR} \rangle = \sum_{i=0}^m \langle a'_{iC}, a'_{iR} \rangle X_{ij} = \left\langle \sum_{i=0}^m a'_{iC} X_{ij}, \sum_{i=0}^m a'_{iR} |X_{ij}| \right\rangle$$

Entonces, para hallar a'_{iC} y a'_{iR} , $i=0,1,\dots,m$ el programa lineal que plantearemos es el siguiente:

$$\text{Minimizar } z = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^m a'_{iR} |X_{ij}|$$

sujeto a:

$$\hat{Y}'_{jC} - \hat{Y}'_{jR} = \sum_{i=0}^m a'_{iC} X_{ij} - \sum_{i=0}^m a'_{iR} |X_{ij}| \leq Y'_{jC} - Y'_{jR} \quad j=1,2,\dots,n$$

$$\hat{Y}'_{jC} + \hat{Y}'_{jR} = \sum_{i=0}^m a'_{iC} X_{ij} + \sum_{i=0}^m a'_{iR} |X_{ij}| \geq Y'_{jC} + Y'_{jR} \quad j=1,2,\dots,n$$

$$a'_{iR} \geq 0 \quad i=0,1,\dots,m$$

Finalmente, ya hallados los centros y radios del α^* -corte de los coeficientes $\tilde{A}_i$, a'_{iC} y a'_{iR} , debemos calcular el centro y el radio de $\tilde{A}_i = (a_{iC}, a_{iR})_L \forall i$. Así, teniendo en cuenta que:

$$A_{i\alpha^*} = [a_{iC} - a_{iR} L^{-1}(\alpha^*), a_{iC} + a_{iR} L^{-1}(\alpha^*)]$$

podemos determinar a_{iC} y a_{iR} , $i=0,1,\dots,m$ como:

$$a'_{iC} = a_{iC}$$

$$a'_{iR} = a_{iR} L^{-1}(\alpha^*) \Rightarrow a_{iR} = \frac{a'_{iR}}{L^{-1}(\alpha^*)}$$

2.3. MODELO DE SAKAWA Y YANO

2.3.1. Regresión posibilística con inputs ciertos y outputs borrosos

Como en el modelo de Tanaka, Sakawa y Yano (1992) suponen que el conjunto de observaciones sobre las variables dependientes e independientes $\{(Y_1, X_1), (Y_2, X_2), \dots, (Y_j, X_j), \dots, (Y_n, X_n)\}$, las variables independientes son vectores crisp m-dimensionales y las n observaciones de la variable independiente son intervalos de confianza. De esta forma, la j-ésima observación de la variable dependiente Y_j queda cuantificada por su centro y su radio como $\langle Y'_{jC}, Y'_{jR} \rangle$ con $j=1, 2, \dots, n$.

Asimismo suponemos que la j-ésima observación de la variable dependiente es un α^* -corte arbitrario de un número borroso L-L de Dubois y Prade simétrico, siendo dicho número borroso denotado por $\tilde{Y}_j = (Y_{jC}, Y_{jR})_L$. Así, si determinamos, la función forma de $\tilde{Y}_j$, a través de su α^* -corte observado $Y_{j\alpha^*} = \langle Y'_{jC}, Y'_{jR} \rangle$ podemos hallar el centro y el radio del número borroso del que proviene de forma análoga a lo comentado en el modelo de regresión anterior para outputs borrosos. En concreto:

$$Y'_{jC} = Y_{jC}$$

$$Y'_{jR} = Y_{jR} L^{-1}(\alpha^*) \Rightarrow Y_{jR} = \frac{Y'_{jR}}{L^{-1}(\alpha^*)}$$

Por otra parte, y como siempre, el modelo de regresión a estimar es:

$$\tilde{y} = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x_1 + \dots + \tilde{A}_m x_m$$

donde los parámetros $\tilde{A}_i$, $i=0, 1, 2, \dots, m$ serán números borrosos L-L simétricos de Dubois y Prade, y por tanto, estos vienen representados por $\tilde{A}_i = (a_{iC}, a_{iR})_L$, $i=0, 1, \dots, m$. Asimismo, el objetivo final es la determinación del centro y el radio de $\tilde{A}_i \forall i$. Tras estimar dichos parámetros, obtendremos unas estimaciones del valor de las observaciones de las variables independientes $\hat{\tilde{Y}}_j = (\hat{Y}_{jC}, \hat{Y}_{jR})_L$ donde:

$$\hat{\tilde{Y}}_j = (\hat{Y}_{jC}, \hat{Y}_{jR})_L = \sum_{i=0}^m (a_{iC}, a_{iR})_L X_{ij} = \left(\sum_{i=0}^m a_{iC} X_{ij}, \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| \right)_L$$

Sakawa y Yano, para medir la congruencia de la relación lineal borrosa de las variables independientes con la explicada respecto a las observaciones obtenidas, utilizan el concepto de posibilidad de que dos números borrosos sean iguales. Según dicha medida, para dos números borrosos $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$, donde:

$$\tilde{A} = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x)\} = \{A_\alpha = [A^1(\alpha), A^2(\alpha)] \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

$$\tilde{B} = \{x, \mu_{\tilde{B}}(x)\} = \{B_\alpha = [B^1(\alpha), B^2(\alpha)] \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

la posibilidad de que $\tilde{A} = \tilde{B}$ es igual o mayor que α , $\text{Poss}(\tilde{A} = \tilde{B}) \geq \alpha$, si se cumple que:

$$A^2(\alpha) \geq B^1(\alpha) \text{ y } A^1(\alpha) \leq B^2(\alpha)$$

De esta forma, diremos que la posibilidad de que la j-ésima observación de la variable dependiente, $\tilde{Y}_j$ es igual en un grado igual o superior a α a su estimación $\hat{\tilde{Y}}_j$, si se cumple:

$$\sum_{i=0}^m a_{iC} X_{ij} - \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| L^{-1}(\alpha) \leq Y_{jC} + Y_{jR} L^{-1}(\alpha)$$

$$\sum_{i=0}^m a_{iC} X_{ij} + \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| L^{-1}(\alpha) \geq Y_{jC} - Y_{jR} L^{-1}(\alpha)$$

Finalmente, el programa matemático que proponen Sakawa y Yano para determinar los parámetros a_{iC} y a_{iR} , consiste en resolver un programa donde se minimice la incertidumbre de las estimaciones de $\tilde{Y}_j$, $\hat{\tilde{Y}}_j$, para todas la observaciones realizadas y se maximice conjuntamente el grado de cumplimiento de $\tilde{Y}_j = \hat{\tilde{Y}}_j \forall j$. Entonces, para hallar los centros y los radios de los coeficientes $\tilde{A}_i$, $i=0,1,\dots,m$ debemos resolver el programa multiobjetivo no lineal:

$$\text{Minimizar } z = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}|$$

$$\text{Maximizar } \alpha$$

sujeto a:

$$\sum_{i=0}^m a_{iC} X_{ij} - \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| L^{-1}(\alpha) \leq Y_{jC} + Y_{jR} L^{-1}(\alpha) \quad j=1,2,\dots,n$$

$$\sum_{i=0}^m a_{iC} X_{ij} + \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| L^{-1}(\alpha) \geq Y_{jC} - Y_{jR} L^{-1}(\alpha) \quad j=1,2,\dots,n$$

$$a_{iR} \geq 0 \quad i=0,1,\dots,m$$

Si fijamos para la segunda función objetivo un valor numérico α^* , es decir, $\alpha \geq \alpha^*$, que bien puede ser el nivel de presunción que el decisor considera que es al que se obtienen las observaciones de la variable dependiente, el programa matemático a resolver se reduce a uno lineal que expresamos como:

$$\text{Minimizar } z = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}|$$

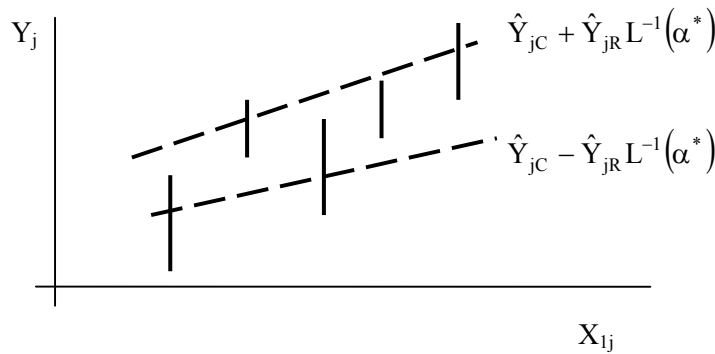
sujeto a:

$$\sum_{i=0}^m a_{iC} X_{ij} - \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| L^{-1}(\alpha^*) \leq Y_{jC} + Y_{jR} L^{-1}(\alpha^*) \quad j=1,2,\dots,n$$

$$\sum_{i=0}^m a_{iC} X_{ij} + \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| L^{-1}(\alpha^*) \geq Y_{jC} - Y_{jR} L^{-1}(\alpha^*) \quad j=1,2,\dots,n$$

$$a_{iR} \geq 0 \quad i=0,1,\dots,m$$

Para un modelo de regresión con una variable independiente, $\tilde{Y} = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 X_1$, y tomándose el nivel de presunción α^* para el cumplimiento de $\tilde{Y}_j = \hat{\tilde{Y}}_j$, el funcionamiento del modelo de Sakawa y Yano quedaría representado en la siguiente figura:



Es decir, con este modelo exigimos una menor congruencia entre las observaciones de la variable explicada $\tilde{Y}_j$ y sus estimaciones, $\hat{\tilde{Y}}_j$, que en el de Tanaka e Ishibuchi. En el modelo de Sakawa y Yano se exige, para un nivel α^* prefijado por el decisor, que exista únicamente cierto solapamiento entre el α -corte de la variable independiente observada, $Y_{j\alpha^*}$ y su valor estimado

tras hallar los parámetros a_{iC} , a_{iR} , $i=0,1,\dots,m$, $\hat{Y}_{j\alpha^*}$, es decir: $Y_{j\alpha^*} \cap \hat{Y}_{j\alpha^*} \neq \emptyset$, mientras que con el de Tanaka exigimos que $\hat{Y}_{j\alpha^*} \cap Y_{j\alpha^*} = Y_{j\alpha^*}$.

Queremos señalar que el modelo de regresión posibilístico de Tanaka puede ser adaptado al planteamiento realizado por Sakawa y Yano, pero teniendo en cuenta que no exigimos la igualdad entre observaciones y estimaciones, sino que exigimos que el hiperplano ajustado incluya las observaciones realizadas. En este caso para dos números borrosos $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$, diremos que $\tilde{A}$ contiene a $\tilde{B}$ con una posibilidad igual o superior a α $\text{Poss}(\tilde{B} \subseteq \tilde{A}) \geq \alpha$ si $B_\alpha \subseteq A_\alpha$, es decir, si:

$$A^1(\alpha) \leq B^1(\alpha) \text{ y } A^2(\alpha) \geq B^2(\alpha)$$

De esta forma, diremos que la posibilidad de que la j -ésima observación de la variable dependiente, $\tilde{Y}_j$ está contenida con un grado igual o superior a α en $\hat{\tilde{Y}}_j$, si se cumple:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m a_{iC} X_{ij} - \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| L^{-1}(\alpha) &\leq Y_{jC} - Y_{jR} L^{-1}(\alpha) \\ \sum_{i=0}^m a_{iC} X_{ij} + \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| L^{-1}(\alpha) &\geq Y_{jC} + Y_{jR} L^{-1}(\alpha) \end{aligned}$$

Así, podríamos plantear un el programa matemático para determinar los parámetros a_{iC} y a_{iR} , de forma que se minimice la incertidumbre de las estimaciones de $\tilde{Y}_j$, $\hat{\tilde{Y}}_j$, y conjuntamente, se maximice $\text{Poss}(\tilde{Y}_j \subseteq \hat{\tilde{Y}}_j) \forall j$. Para ello debemos plantear el programa multiobjetivo no lineal:

$$\text{Minimizar } z = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}|$$

Maximizar α

sujeto a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m a_{iC} X_{ij} - \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| L^{-1}(\alpha) &\leq Y_{jC} - Y_{jR} L^{-1}(\alpha) & j=1,2,\dots,n \\ \sum_{i=0}^m a_{iC} X_{ij} + \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| L^{-1}(\alpha) &\geq Y_{jC} + Y_{jR} L^{-1}(\alpha) & j=1,2,\dots,n \\ a_{iR} &\geq 0 & i=0,1,\dots,m \end{aligned}$$

Si fijamos para la segunda función objetivo un cumplimiento mínimo de α^* que es el nivel al cual el decisor considera que se obtienen los intervalos de confianza $\langle Y'_{jC}, Y'_{jR} \rangle$, $j=1,2,\dots,n$, el

programa matemático que debemos plantear queda transformado en un programa lineal convencional cuyo planteamiento será:

$$\text{Minimizar } z = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}|$$

sujeto a:

$$\sum_{i=0}^m a_{iC} X_{ij} - \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| L^{-1}(\alpha^*) \leq Y_{jC} - Y_{jR} L^{-1}(\alpha^*) \quad j=1,2,\dots,n$$

$$\sum_{i=0}^m a_{iC} X_{ij} + \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| L^{-1}(\alpha^*) \geq Y_{jC} + Y_{jR} L^{-1}(\alpha^*) \quad j=1,2,\dots,n$$

$$a_{iR} \geq 0 \quad i=0,1,\dots,m$$

2.3.2. Regresión posibilista con inputs y outputs borrosos

En este caso partimos de un conjunto de observaciones $\{(Y_1, X_1), (Y_2, X_2), \dots, (Y_j, X_j), \dots, (Y_n, X_n)\}$, donde como siempre, las n observaciones de la variable independiente son intervalos de confianza. Para la j -ésima observación representamos a dicho intervalo a través de su centro y su radio como $\langle Y'_{jC}, Y'_{jR} \rangle$ con $j=1,2,\dots,n$. Si suponemos que estas observaciones son un α^* -corte arbitrario de un número borroso L - L de Dubois y Prade simétrico que finalmente cuantifica a la j -ésima observación de la variable dependiente, siendo el correspondiente a Y_j , $\tilde{Y}_j = (Y_{jC}, Y_{jR})_L$ podemos obtener sus centros y sus radios como:

$$Y'_{jC} = Y_{jC}$$

$$Y'_{jR} = Y_{jR} L^{-1}(\alpha^*) \Rightarrow Y_{jR} = \frac{Y'_{jR}}{L^{-1}(\alpha^*)}$$

Por otra parte, los inputs, $X_j, j=1,2,\dots,n$ son vectores m -dimensionales, para las cuales, el i -ésimo componente es un intervalo de confianza. Así, X_j puede ser representado como:

$$X_j = (\langle 1, 0 \rangle, \langle X'_{1jC}, X'_{1jR} \rangle, \langle X'_{2jC}, X'_{2jR} \rangle, \dots, \langle X'_{ijC}, X'_{ijR} \rangle, \dots, \langle X'_{mjC}, X'_{mjR} \rangle)$$

Asimismo, el intervalo de confianza que cuantifica a la observación j -ésima de la variable i -ésima, con $i \geq 1$, también provienen de un número L - L de Dubois y Prade simétrico, es decir: $\tilde{X}_{ij} = (X_{ijC}, X_{ijR})_L$, que también es observado a un nivel α^* . Por tanto, se obtienen las siguientes relaciones entre los centros y radios de las observaciones y los números borrosos de los que provienen:

$$X'_{ijC} = X_{ijC}$$

$$X'_{ijR} = X_{ijR} L^{-1}(\alpha^*) \Rightarrow X_{ijR} = \frac{X'_{ijR}}{L^{-1}(\alpha^*)}$$

Así pues, el modelo de regresión que debemos utilizar en este caso es:

$$\tilde{Y} = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 \tilde{x}_1 + \dots + \tilde{A}_m \tilde{x}_m$$

donde los parámetros $\tilde{A}_i$, $i=0,1,2,\dots,m$ serán como siempre L-L simétricos, por tanto, el i-ésimo coeficiente lo representaremos como $\tilde{A}_i = (a_{iC}, a_{iR})_L$, $i=0,1,\dots,n$. Tras estimar dichos parámetros, más concretamente sus centros y sus radios, obtendremos unas estimaciones del valor de las observaciones de las variables independientes $\hat{Y}_j$ que no serán L-L de Dubois y Prade –aunque con los instrumentos propuestos en el apartado 1.4. podríamos aproximarlos por uno de la misma naturaleza-. En concreto, los α -cortes de $\hat{Y}_{j_\alpha} = [\hat{Y}_j^1(\alpha), \hat{Y}_j^2(\alpha)]$, se hallarán de la siguiente forma:

$$\hat{Y}_j^1(\alpha) = \sum_{i=0}^m \text{Min} \left\{ (a_{iC} - a_{iR} L^{-1}(\alpha)) \cdot (X_{ijC} - X_{ijR} L^{-1}(\alpha)), (a_{iC} - a_{iR} L^{-1}(\alpha)) \cdot (X_{ijC} + X_{ijR} L^{-1}(\alpha)), \right. \\ \left. (a_{iC} + a_{iR} L^{-1}(\alpha)) \cdot (X_{ijC} - X_{ijR} L^{-1}(\alpha)), (a_{iC} + a_{iR} L^{-1}(\alpha)) \cdot (X_{ijC} + X_{ijR} L^{-1}(\alpha)) \right\}$$

y

$$\hat{Y}_j^2(\alpha) = \sum_{i=0}^m \text{Max} \left\{ (a_{iC} - a_{iR} L^{-1}(\alpha)) \cdot (X_{ijC} - X_{ijR} L^{-1}(\alpha)), (a_{iC} - a_{iR} L^{-1}(\alpha)) \cdot (X_{ijC} + X_{ijR} L^{-1}(\alpha)), \right. \\ \left. (a_{iC} + a_{iR} L^{-1}(\alpha)) \cdot (X_{ijC} - X_{ijR} L^{-1}(\alpha)), (a_{iC} + a_{iR} L^{-1}(\alpha)) \cdot (X_{ijC} + X_{ijR} L^{-1}(\alpha)) \right\}$$

Al igual que en el caso de inputs ciertos, en este modelo se propone minimizar la amplitud conjunta de todas las estimaciones que obtenemos sobre las variables dependientes realizadas, $\hat{Y}_j$, $j=1,2,\dots,n$, y simultáneamente maximizar el grado de presunción con que $\text{Poss}(\hat{Y}_j = \tilde{Y}_j) \geq \alpha$, $j=1,2,\dots,n$. El programa matemático que debemos plantear y resolver para hallar en este caso a_{iC} y a_{iR} , $i=0,1,\dots,m$ es análogo al del apartado 2.3.1.:

$$\text{Minimizar } z = \sum_{j=1}^n [\hat{Y}_j^2(0) - \hat{Y}_j^1(0)]$$

Maximizar α

sujeto a:

$$\hat{Y}_j^1(\alpha) \leq Y_{jC} + Y_{jR} L^{-1}(\alpha) \quad j=1,2,\dots,n$$

$$\begin{aligned}\hat{Y}_j^2(\alpha) &\geq Y_{jC} - Y_{jR} L^{-1}(\alpha) & j=1,2,\dots,n \\ a_{iR} &\geq 0 & i=0,1,\dots,m\end{aligned}$$

De esta forma, si exigimos para la segunda función objetivo un nivel mínimo α^* de cumplimiento, que será al que el decisor considera que ha obtenido los intervalos de confianza que cuantifican a las observaciones obtenidas de la variable dependiente y las variables independientes, el programa anterior se transforma en el siguiente, con función objetivo única:

$$\text{Minimizar } z = \sum_{j=1}^n [\hat{Y}_j^2(0) - \hat{Y}_j^1(0)]$$

sueto a:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_j^1(\alpha^*) &\leq Y_{jC} + Y_{jR} L^{-1}(\alpha^*) & j=1,2,\dots,n \\ \hat{Y}_j^2(\alpha^*) &\geq Y_{jC} - Y_{jR} L^{-1}(\alpha^*) & j=1,2,\dots,n \\ a_{iR} &\geq 0 & i=0,1,\dots,m\end{aligned}$$

Por otra parte, podemos adaptar el planteamiento de Sakawa y Yano al modelo de Tanaka, teniendo en cuenta que la adecuación entre $\hat{Y}_j$ e $\tilde{Y}_j$ viene dada por el grado α con el que $\text{Poss}(\tilde{Y}_j \subseteq \hat{Y}_j) \geq \alpha$. Si minimizamos la incertidumbre de las estimaciones sobre la variable explicada y conjuntamente maximizamos el nivel de presunción con que dichas estimaciones de la variable dependiente incluyen sus valores realmente observados, el programa multiobjetivo que debemos plantear es:

$$\text{Minimizar } z = \sum_{j=1}^n [\hat{Y}_j^2(0) - \hat{Y}_j^1(0)]$$

Maximizar α

sueto a:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_j^1(\alpha) &\leq Y_{jC} - Y_{jR} L^{-1}(\alpha) & j=1,2,\dots,n \\ \hat{Y}_j^2(\alpha) &\geq Y_{jC} + Y_{jR} L^{-1}(\alpha) & j=1,2,\dots,n \\ a_{iR} &\geq 0 & i=0,1,\dots,m\end{aligned}$$

De esta forma, si exigimos para la segunda función objetivo un nivel mínimo de cumplimiento α^* , el programa anterior se transforma en un programa matemático con un único objetivo:

$$\text{Minimizar } z = \sum_{j=1}^n [\hat{Y}_j^2(0) - \hat{Y}_j^1(0)]$$

sujeto a:

$$\hat{Y}_j^1(\alpha^*) \leq Y_{jC} - Y_{jR} L^{-1}(\alpha^*) \quad j=1,2,\dots,n$$

$$\hat{Y}_j^2(\alpha^*) \geq Y_{jC} + Y_{jR} L^{-1}(\alpha^*) \quad j=1,2,\dots,n$$

$$a_{iR} \geq 0 \quad i=0,1,\dots,m$$

CAPÍTULO 3:

DIVERSAS ASOCIACIONES ENTRE LA ALEATORIEDAD Y LA INCERTIDUMBRE

3.1. CONSIDERACIONES PREVIAS

Como señalamos al principio de esta tesis, cuando sobre un determinado fenómeno se dispone de información objetiva de los diferentes estados que puede adoptar y de la frecuencia con que son adoptados, es decir, dicho fenómeno es medible, su cuantificación debe ser hecha en certeza o debe estudiarse mediante la estadística. Sin embargo, en ciencias como la economía, la gestión de empresas –en general, las ciencias sociales–, en muchas ocasiones no podemos medir dicho fenómeno. En este caso, el analista debe partir únicamente de la vaga información que se dispone del fenómeno realizando estimaciones subjetivas en base a su experiencia y conocimientos, siendo en este contexto un instrumento más válido y realista para la manipulación de la información de que se dispone la teoría de los subconjuntos borrosos que la teoría de la probabilidad.

Sin embargo, en el fenómeno que pretendemos estudiar inciden variables de diferente naturaleza, unas de carácter objetivo y medibles, por tanto son modelizables mediante la teoría de la probabilidad, pero otras tienen un carácter vago y subjetivo, siendo lo más adecuado modelizarlas como subconjuntos borrosos. En este caso deberemos aceptar en el estudio de dicho fenómeno la aleatoriedad y la borrosidad conjuntamente si queremos representar fielmente el problema que analizamos. Por tanto, para llegar a una solución más o menos realista, será necesario, por tanto, combinar instrumentos y conceptos de la teoría de la probabilidad y de la teoría de los subconjuntos borrosos.

En estas circunstancias, la Teoría de los Subconjuntos Borrosos, dispone de diversas herramientas que permiten manipular la información cuando esta tiene carácter borroso y aleatorio a la vez, es decir, híbrido. Dichas herramientas permiten, por una parte, que la pérdida de información durante la manipulación de la misma sea mínima, y por otra, que las operaciones a realizar puedan ser implementadas con cierta facilidad. Para cumplir el primer objetivo planteado, estos instrumentos tratarán a la información borrosa, con operadores maxmin, mucho más adecuados a su carácter “blando”, y a la información de carácter aleatorio con operadores suma-producto.

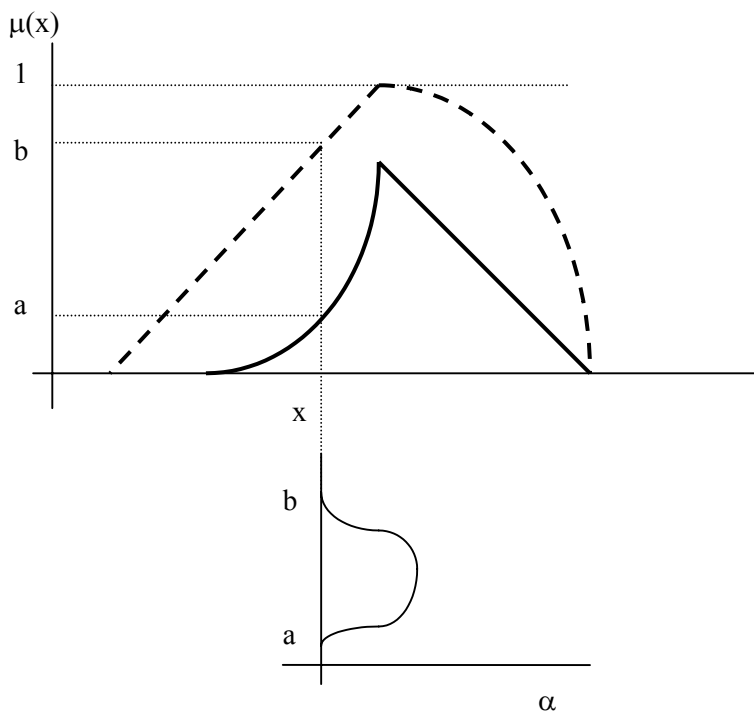
De entre los instrumentos que se han desarrollado para manipular datos híbridos (borrosos y aleatorios a la vez), en este apartado analizaremos los siguientes instrumentos:

a) Subconjuntos aleatorios borrosos	b) El concepto de evento borroso
c) El concepto de número híbrido	d) Haz de números borrosos
e) Las variables borroso aleatorias	f) Las variables aleatorias normales con media y varianza cuantificada a través de números borrosos

3.2. SUBCONJUNTOS ALEATORIO BORROSOS

Este instrumento ha sido desarrollado, entre otros, por Hirota (1981) y Kaufmann y Gil Aluja (1990). Si un subconjunto borroso $\tilde{A}$ definido en un conjunto referencial X viene dado por su función de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}(x)$, que indica el grado de pertenencia de x a $\tilde{A}$, con $\mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]$, y dicha pertenencia es un valor cierto; en contraposición, en un subconjunto aleatorio borroso, que notaremos como $\tilde{\tilde{A}}$, el nivel de pertenencia de un valor x vendrá dado por una distribución de probabilidad. Así, la pertenencia de un valor x a $\tilde{\tilde{A}}$, $\mu_{\tilde{\tilde{A}}}(x)$, será aleatoria, y vendrá dada por $f(\mu_{\tilde{\tilde{A}}}(x) = \alpha)$, siendo $f(\mu_{\tilde{\tilde{A}}}(x) = \alpha)$ una probabilidad si $\mu_{\tilde{\tilde{A}}}(x)$ es una variable aleatoria discreta y una función de densidad, si el nivel de pertenencia de x es una variable aleatoria continua.

Podemos representar un subconjunto aleatorio borroso con la siguiente figura:



De esta forma, los operadores básicos para subconjuntos borrosos como el mínimo y el máximo, - correspondientes a la intersección y unión de conjuntos- se ven afectados por las leyes de la probabilidad, ya que el nivel de pertenencia de un valor x a un subconjunto aleatorio borroso viene dado por una ley de probabilidad. Es decir, si operamos con subconjuntos aleatorios borrosos no podremos hallar, lógicamente, el nivel de pertenencia de un elemento x al conjunto unión, intersección o al conjunto complementario, sino de la probabilidad de que su nivel de pertenencia al conjunto unión, intersección y complementario tome un determinado valor.

De esta forma, sea $x \in X$, y dos subconjuntos borroso aleatorios $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$, para los cuales el nivel de pertenencia de x viene dado por $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_1$ y $\mu_{\tilde{B}}(x) = \mu_2$, que son variables aleatorias. Para el operador mínimo, si denotamos como p una medida de probabilidad, se obtiene:

$$p(\mu_1 \wedge \mu_2 = \alpha) = p(\mu_1 = \alpha) p(\mu_2 > \alpha) + p(\mu_2 = \alpha) p(\mu_1 > \alpha) + p(\mu_1 = \alpha) p(\mu_2 = \alpha)$$

Por otra parte, para el operador máximo, los resultados son:

$$p(\mu_1 \vee \mu_2 = \alpha) = p(\mu_1 = \alpha) p(\mu_2 < \alpha) + p(\mu_2 = \alpha) p(\mu_1 < \alpha) + p(\mu_1 = \alpha) p(\mu_2 = \alpha)$$

y para el complementario obtenemos

$$p(\mu_{\tilde{A}^c}(x) = \alpha) = p(\mu_1 = 1 - \alpha)$$

Si $\mu_{\tilde{A}}(x)$ y $\mu_{\tilde{B}}(x)$ son variables aleatorias continuas, donde notamos como $f_1(\mu)$ a la función de densidad de $\mu_{\tilde{A}}(x)$, y $f_2(\mu)$ a la función de densidad de $\mu_{\tilde{B}}(x)$, entonces, las funciones de densidad del nivel de presunción resultante de realizar las operaciones mínimo, máximo y complementación son:

$$\begin{aligned} f(\mu_1 \wedge \mu_2 = \alpha) &= f_1(\alpha) \int_{\alpha}^1 f_2(\mu) d\mu + f_2(\alpha) \int_{\alpha}^1 f_1(\mu) d\mu \\ f(\mu_1 \vee \mu_2 = \alpha) &= f_1(\alpha) \int_0^{\alpha} f_2(\mu) d\mu + f_2(\alpha) \int_0^{\alpha} f_1(\mu) d\mu \\ f(\mu_{\tilde{A}^c}(x) = \alpha) &= f_1(1 - \alpha) \end{aligned}$$

Asimismo, podemos definir estas operaciones, de forma que se simplifique la notación, a través de las funciones de distribución complementarias de $\mu_{\tilde{A}}(x)$ y $\mu_{\tilde{B}}(x)$, las cuales notaremos respectivamente como $F_1(\alpha)$ y $F_2(\alpha)$. Para $\mu_{\tilde{A}}(x)$, si ésta es una variable aleatoria discreta, obtenemos $F_1(\alpha)$ como:

$$F_1(\alpha) = \sum_{\forall \mu \geq \alpha} p(\mu)$$

y si $\mu_{\tilde{A}}(x)$ es una variable aleatoria continua:

$$F_1(\alpha) = \int_{\alpha}^1 f_1(\mu) d\mu$$

De esta forma, podemos hallar las funciones de distribución complementarias de $\mu_1 \wedge \mu_2$, $\mu_1 \vee \mu_2$ y la de $\mu_{\tilde{A}^c}(x)$ como:

$$F(\mu_1 \wedge \mu_2 = \alpha) = F_1(\alpha)F_2(\alpha)$$

$$F(\mu_1 \vee \mu_2 = \alpha) = F_1(\alpha) + F_2(\alpha) - F_1(\alpha) \cdot F_2(\alpha)$$

$$F(\mu_{\tilde{A}^c}(x) = \alpha) = 1 - F_1(1 - \alpha)$$

Por otra parte, para el subconjunto borroso $\tilde{A}$ podemos hallar su valor esperado, $E[\tilde{A}]$, que será un subconjunto borroso ordinario, ya que $\forall x$ su nivel de pertenencia en $\tilde{A}$ queda reducido a un valor cierto. De esta forma:

$$\mu_{E[\tilde{A}]}(x) = \int_0^1 \mu f_1(\mu) d\mu$$

Para finalizar, esbozamos el concepto de número aleatorio borroso. Para ello partimos de que para un subconjunto aleatorio borroso $\tilde{A}$, podemos generar un subconjunto borroso ordinario para cada uno de los niveles de $\alpha \in [0,1]$, pudiendo estos ser notados como $\tilde{A}^{(\alpha)}$. Para dicho subconjunto definiremos su función de pertenencia como:

$$\mu_{\tilde{A}^{(\alpha)}}(x) = F(\alpha)$$

donde notamos como $F(\alpha)$ al valor de la función de distribución complementaria de $\mu_{\tilde{A}}(x)$ en α .

De esta forma, diremos que $\tilde{A}$ será un número aleatorio borroso si $\tilde{A}^{(\alpha)} \forall \alpha$ es un número borroso, es decir, si:

a) El conjunto referencial de $\tilde{A}$ son los reales.

b) $\forall \alpha$, $\tilde{A}^{(\alpha)}$ es normal y convexo. Así:

$$b.1) \sup_{\forall x \in X} \mu_{\tilde{A}^{(\alpha)}}(x) = 1 \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

$$b.2) \forall x_1, x_2 \in X, \forall \lambda \in [0, 1], \forall \alpha \in [0, 1] \mu_{\tilde{A}(\alpha)}[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \mu_{\tilde{A}(\alpha)}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}(\alpha)}(x_2).$$

3.3. LA PROBABILIDAD DE EVENTOS BORROSOS

Para definir el concepto de probabilidad de un evento borroso, empezaremos enunciando para un conjunto probabilizable Ω , donde Ω es el conjunto de sucesos elementales, el concepto de probabilidad, que es una aplicación tal que:

$$p: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ A \subset \Omega \rightarrow p(A)$$

donde A es un conjunto nítido de Ω , o un evento nítido.

Los axiomas que rigen a la probabilidad, suponiéndose, en cualquier caso, que los conjuntos que definimos sobre Ω son booleanos son:

- 1) $p(A) \geq 0$
- 2) $\forall A \in \Omega$ y $\forall B \in \Omega$ y $A \cap B = \emptyset$
 $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
- 3) $p(\Omega) = 1$

A partir de estos axiomas, deducimos fácilmente las siguientes propiedades:

- 4) $p(\emptyset) = 0$
- 5) $p(A^c) = 1 - p(A)$
- 6) $p(A) + p(B) = p(A \cap B) + p(A \cup B)$
- 7) Si $B \subset A \Rightarrow p(B) \leq p(A)$

Zadeh (1968) denomina como evento borroso a un subconjunto borroso $\tilde{A}$ definido sobre el conjunto de sucesos elementales Ω . Por supuesto, para $\tilde{A}$ la pertenencia de un elemento $\omega \in \Omega$ tiene asignado un nivel de verdad que vendrá dado por su función característica, $\mu_{\tilde{A}}(\omega)$. Zadeh

propone hallar la probabilidad de un evento borroso, $p(\tilde{A})$, como:

$$p(\tilde{A}) = \sum_{\omega \in \Omega} \mu_{\tilde{A}}(\omega) p(\omega)$$

Si el conjunto referencial sobre el que definimos la distribución de probabilidad fueran los números reales, es decir $\Omega \subset \mathbb{R}$ y si para éste denotamos como un suceso elemental al número crisp x , la probabilidad del evento borroso $\tilde{A}$ será, en general:

$$p(\tilde{A}) = \int_{\Omega} \mu_{\tilde{A}}(x) dF(x)$$

donde $F(x)$ es la función de probabilidad acumulada. Si el conjunto Ω es discreto, y denotamos como $p(x)$ a la probabilidad de un elemento x , entonces:

$$p(\tilde{A}) = \sum_{\Omega} \mu_{\tilde{A}}(x) p(x)$$

y si es continuo:

$$p(\tilde{A}) = \int_{\Omega} \mu_{\tilde{A}}(x) f(x) dx$$

La probabilidad definida para eventos borrosos cumple asimismo los axiomas de la probabilidad:

- 1) $p(\tilde{A}) \geq 0$
- 2) $\forall \tilde{A} \in \Omega \text{ y } \forall \tilde{B} \in \Omega \text{ si } \tilde{A} \cap \tilde{B} = \emptyset \Rightarrow \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(\omega) = \mu_{\tilde{A}}(\omega) \wedge \mu_{\tilde{B}}(\omega) = 0 \quad \forall \omega$
 $p(\tilde{A} \cup \tilde{B}) = p(\tilde{A}) + p(\tilde{B})$
- 3) $p(\Omega) = 1$

A partir de estas propiedades se deduce fácilmente:

- 4) $p(\emptyset) = 0$
- 5) $p(\tilde{A}^c) = 1 - p(\tilde{A})$, donde $\mu_{\tilde{A}^c}(\omega) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(\omega)$
- 6) $p(\tilde{A}) + p(\tilde{B}) = p(\tilde{A} \cap \tilde{B}) + p(\tilde{A} \cup \tilde{B})$, donde $\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(\omega) = \mu_{\tilde{A}}(\omega) \vee \mu_{\tilde{B}}(\omega)$
- 7) Si $\tilde{B} \subset \tilde{A} \Rightarrow \mu_{\tilde{A}}(\omega) \geq \mu_{\tilde{B}}(\omega) \quad \forall \omega$, se cumple que $p(\tilde{B}) \leq p(\tilde{A})$

3.4. NÚMEROS HÍBRIDOS

Sobre el concepto de número híbrido, del que daremos a continuación unos breves apuntes, puede consultarse, para una exposición más detallada, Kaufmann y Gupta (1985), Kaufmann (1986a) o Kaufmann *et al.* (1994).

Un número híbrido se construye sumando a una cuantía borrosa –siendo su representación por excelencia un número borroso- y que denotaremos por $\tilde{A}$, una cuantía aleatoria M . A un número híbrido lo notaremos por el par $(\tilde{A}, M)$ donde:

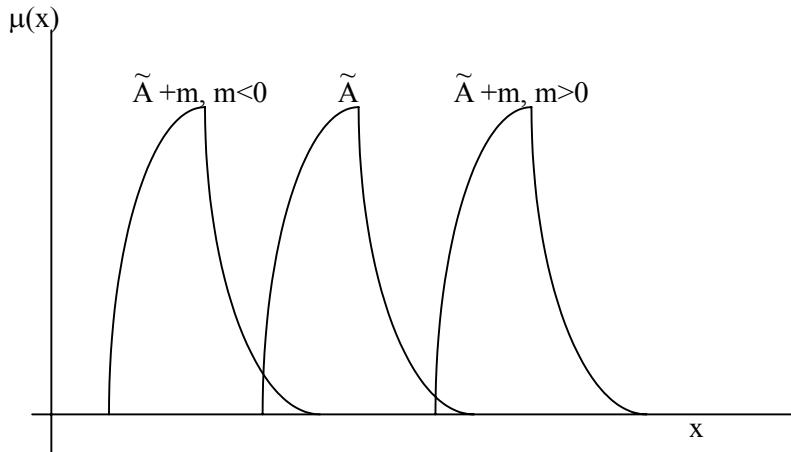
$$(\tilde{A}, M) = \tilde{A} + M$$

donde $\tilde{A}$, por ser un número borroso, viene caracterizado por:

$$\tilde{A} = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x)\} = \{A_{\alpha} = [A^1(\alpha), A^2(\alpha)] \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

y M , por ser una variable aleatoria, que supondremos que es continua, viene caracterizada por su función de densidad $f(m)$.

Para una determinada realización de M , m , obtenemos la suma de un número borroso con una constante, $\tilde{A} + m$ –lo que muchos autores denominan “traslación”-, operación que puede ser representado gráficamente como:



De esta forma:

$$\mu_{\tilde{A}+m}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x - m)$$

y

$$A_{\alpha} + m = [A^1(\alpha) + m, A^2(\alpha) + m]$$

De esta forma, la suma $A_{\alpha} + M$ es un intervalo de confianza aleatorio, siendo para una realización $A_{\alpha} + m$, la correspondiente a la que toma m en la variable aleatoria de la que proviene, $f(m)$. De esta forma:

$$f(A_\alpha + m) = f([A^1(\alpha)+m, A^2(\alpha)+m]) = f(m)$$

Por otra parte, la suma de dos números híbridos $(\tilde{A}_1, M_1)$ y $(\tilde{A}_2, M_2)$ cuya resultante es otro número híbrido que notamos como $(\tilde{A}, M)$, se realiza de la siguiente forma:

$$(\tilde{A}, M) = (\tilde{A}_1, M_1) + (\tilde{A}_2, M_2) = (\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2, M_1 + M_2)$$

Donde como “+” notamos a la suma realizada mediante la convolución maxmin, y como “+’” a la suma realizada mediante la convolución suma-producto. De esta forma, la función de pertenencia de $\tilde{A}$, $\mu_{\tilde{A}}(x)$ se hallará a través de $\mu_{\tilde{A}_1}(x_1)$ y $\mu_{\tilde{A}_2}(x_2)$ como:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \bigvee_{x=x_1+x_2} (\mu_{\tilde{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(x_2))$$

Y la función de densidad de M , $f(m)$, se halla a través de la de M_1 , $f_1(m_1)$ y de la de M_2 , $f_2(m_2)$, de forma que:

$$f(m) = \int_{\mathbb{R}} f_1(m - m_2) f_2(m_2) dm = \int_{\mathbb{R}} f_1(m_1) f_2(m - m_1) dm$$

Así, un número borroso $\tilde{A}$, es un caso particular de un número híbrido $\tilde{A} = (\tilde{A}, 0)$, siendo 0 un número cierto donde su distribución de probabilidad es:

$$p(m) = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Una variable aleatoria M es un caso particular de número híbrido $(0, M)$. En este caso, la función de pertenencia del número cierto 0 es:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

3.5. HAZ DE NÚMEROS BORROSOS

Sobre el concepto de haz de números borrosos, puede ser consultado por ejemplo, en Kaufmann y Gupta (1985) o Kaufmann *et al.* (1994). Un haz de números borrosos es un instrumento que generaliza el concepto de variable aleatoria. Así, para definir el concepto de haz partiremos de la definición de variable aleatoria. Una variable aleatoria se construye realizando una aplicación sobre el conjunto de sucesos elementales Ω :

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \in \Omega \rightarrow x = X(\omega)$$

Así X es una variable aleatoria porque involucra los resultados del espacio muestral ω , asimismo, X es una función de realizaciones reales, es decir, transforma todos los posibles resultados de Ω , ω , en puntos sobre la recta de los reales.

Un haz de números borrosos generaliza el concepto de variable aleatoria, porque en este caso, mediante la función $X(\omega)$ no hacemos corresponder a ω un valor real x , sino un número borroso $\tilde{A}_\omega$, que es un caso más general de número cierto. Así, $\tilde{A}_\omega$ puede ser representado como:

$$\tilde{A}_\omega = \{x, \mu_{\tilde{A}_\omega}(x)\} = \{A_\omega = [A_\omega^1(\alpha), A_\omega^2(\alpha)] \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

Bien es cierto que no podemos afirmar que el fin último de un haz de números borrosos sea generalizar el concepto de variable aleatoria, sino crear una herramienta que sea útil para la agregación, de forma objetiva, de estimaciones realizadas por expertos –por lo tanto, subjetivas– cuya representación se realiza a través de números borrosos. Por supuesto, con dicha agregación se pretende obtener una estimación subjetiva que represente a la de todos los expertos, y por tanto sea más fiable que la de cada uno de ellos. Una aplicación importante de un haz de números borrosos se encuentra en el ámbito de los métodos de previsión borrosos, como por ejemplo en el sistema Fuzzy-Delphi, que generaliza el método Delphi convencional, y es desarrollado por Kaufmann y Gil Aluja (1986).

Si suponemos que el espacio muestral está formado por los expertos, siendo entonces $\Omega = \{1, 2, \dots, i, \dots, n\}$, para la i -ésima realización de dicho espacio, es decir, la opinión emitida por el i -ésimo experto, esta queda cuantificada no por un valor real x , sino por un número borroso $\tilde{A}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, donde:

$$\tilde{A}_i = \{x_i, \mu_{\tilde{A}_i}(x_i)\} = \{A_i = [A_i^1(\alpha), A_i^2(\alpha)] \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

Las probabilidades de $\{1, 2, \dots, i, \dots, n\}$, $\{p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n\}$ pueden venir dadas por la importancia que se asigne a cada experto, donde en cualquier caso $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, de forma que la probabilidad o peso probabilístico que se da a $\tilde{A}_i$ es p_i . Asimismo, si otorgamos a todos los expertos el mismo peso probabilístico –les asignamos la misma fiabilidad–, $p_i = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

La agregación de todas las estimaciones se realizará a través del número borroso medio, $\tilde{A}^m$, que deberá ser hallado en el caso en que $p_i = \frac{1}{n}$:

$$\tilde{A}^m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i$$

Cuya función de pertenencia vendrá dada por:

$$\mu_{\tilde{A}^m}(x) = \bigvee_{x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i} \left(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu_{\tilde{A}_n}(x_n) \right)$$

y sus α -cortes:

$$A_{\alpha}^m = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i^1(\alpha), \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i^2(\alpha) \right]$$

Asimismo, si no asignamos la misma probabilidad a todos los expertos, es decir, discriminamos entre expertos más fiables y menos fiables, el número borroso medio $\tilde{A}^m$ se halla como:

$$\tilde{A}^m = \sum_{i=1}^n p_i \tilde{A}_i$$

Siendo su función de pertenencia, $\mu_{\tilde{A}^m}(x)$:

$$\mu_{\tilde{A}^m}(x) = \bigvee_{x = \sum_{i=1}^n p_i x_i} \left(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(x_2) \dots \wedge \mu_{\tilde{A}_n}(x_n) \right)$$

y sus α -cortes:

$$A_{\alpha}^m = \left[\sum_{i=1}^n p_i A_i^1(\alpha), \sum_{i=1}^n p_i A_i^2(\alpha) \right]$$

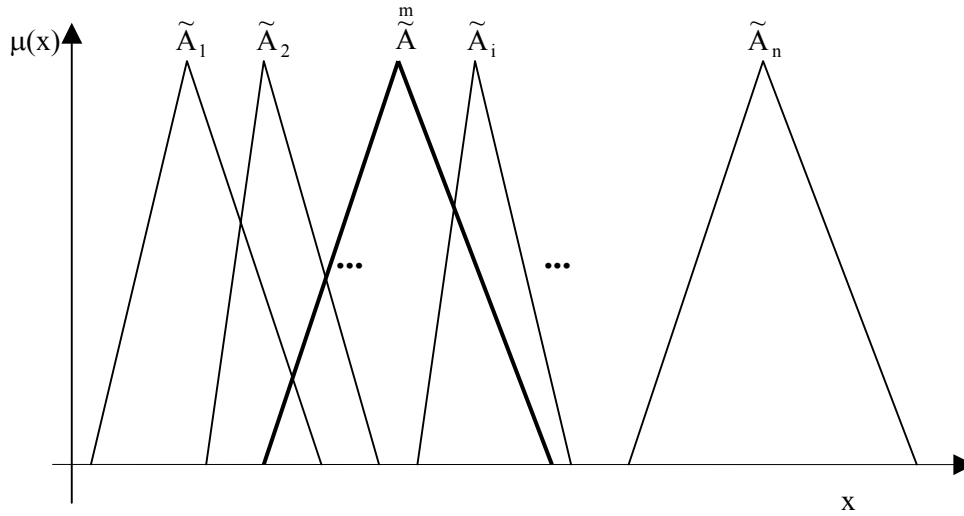
Una forma sencilla y razonable de expresar las estimaciones de los expertos es cuantificarlos mediante números trapezoidales o triangulares, de forma que, en el primer caso –más general-, vendrán dadas por las cuartetos $\tilde{A}_i = (a_i^1, a_i^2, a_i^3, a_i^4)$, $i=1,2,\dots,n$. En este caso, el número borroso que agrega todas las opiniones, $\tilde{A}^m$, también será trapezoidal –o triangular-. En concreto, si asignamos la misma probabilidad a todos los expertos:

$$\tilde{A}^m = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^1, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^3, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^4 \right)$$

y de forma más general, si consideramos que los distintos opinantes merecen distinta confianza:

$$\tilde{A}^m = \left(\sum_{i=1}^n p_i a_i^1, \sum_{i=1}^n p_i a_i^2, \sum_{i=1}^n p_i a_i^3, \sum_{i=1}^n p_i a_i^4 \right)$$

Finalmente representamos el concepto de haz y de número borroso medio en la siguiente figura:



3.6. VARIABLES BORROSO ALEATORIAS

3.6.1. Conceptos y definiciones

El concepto de variable borroso aleatoria ha sido desarrollado, de forma dispersa en diferentes trabajos, siendo los más representativos Kwakernaak (1978) y (1979), Nahmias (1979), Puri y Ralescu (1986) y Kruse y Meyer (1987). En ellos se analiza como trasponer y generalizar a las variables aleatorias y los conceptos que de dicho instrumento se derivan al caso en que las realizaciones de la misma sean subconjuntos borrosos en R . Como la herramienta por excelencia para expresar cuantías borrosas son los números borrosos, nosotros únicamente analizaremos el caso en que las realizaciones de las variables borroso aleatorias sean números borrosos.

Una variable borroso aleatoria se construye realizando la siguiente aplicación sobre el conjunto de sucesos elementales Ω , sobre los que se ha definido una ley de probabilidad:

$$\tilde{X} : \Omega \rightarrow F(R)$$

$$\omega \in \Omega \rightarrow \tilde{A}_\omega$$

donde $F(R)$ es el conjunto de números borrosos y $\tilde{A}_\omega$ es el número borroso asociado al suceso elemental ω , y por tanto, puede venir representado por:

$$\tilde{A}_\omega = \{x, \mu_{\tilde{A}_\omega}(x)\} = \{A_\omega = [A_\omega^1(\alpha), A_\omega^2(\alpha)] \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

En nuestro caso, únicamente estudiaremos las variables borroso aleatorias discretas, y que provienen de un espacio de sucesos elementales $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_n\}$. Así, para ω_i , el número borroso asociado a dicho suceso será notado como $\tilde{A}_i$, donde:

$$\tilde{A}_i = \{x, \mu_{\tilde{A}_i}(x)\} = \{A_{i_\alpha} = [A_i^1(\alpha), A_i^2(\alpha)] \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}, i=1,2,\dots,n.$$

A partir de las posibles realizaciones en que pueden concretarse cada uno de los sucesos, podemos definir dentro de $\tilde{X}$, variables aleatorias convencionales, X , cuyas realizaciones son $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y que deben llevar aparejadas consigo un nivel de presunción. Así, podemos hallar la función característica de una variable borroso aleatoria $\tilde{X}$, $\mu_{\tilde{X}}(X)$, como:

$$\mu_{\tilde{X}}(X) = \bigwedge_{i=1}^n \mu_{\tilde{A}_i}(x_i)$$

que indicará el grado de verdad con que la variable aleatoria X reconstruye a la variable borroso aleatoria $\tilde{X}$.

Normalmente, como hemos comprobado a lo largo de todo este capítulo, cuando debemos manipular subconjuntos borrosos suele ser difícil trabajar con funciones de pertenencia, y en cambio es mucho más fácil trabajar con conjuntos de nivel. De esta forma, podemos definir a $\tilde{X}$ a través de los conjuntos de nivel asociados a los α -cortes de $\tilde{A}_i$, $i=1,2,\dots,n$. Así, los α -cortes de $\tilde{X}$, X_α , son aquellas variables aleatorias cuyas realizaciones son:

$$X_\alpha = \{x_i \in R \mid \mu_{\tilde{A}_i}(x_i) \geq \alpha\}$$

Así, para X_α , definimos como variable aleatoria inferior, $X^1(\alpha)$ aquella que sus realizaciones son los extremos inferiores de los α -cortes de A_{i_α} , $i=1,2,\dots,n$, y como variable aleatoria superior, $X^2(\alpha)$ aquella cuyas realizaciones son sus extremos superiores. Así:

$$X^1(\alpha) = \inf \{x_i \in R \mid \mu_{\tilde{A}_i}(x_i) \geq \alpha\} = A_i^1(\alpha), \text{ con } p_i, i=1,2,\dots,n$$

$$X^2(\alpha) = \sup \{x_i \in R \mid \mu_{\tilde{A}_i}(x_i) \geq \alpha\} = A_i^2(\alpha), \text{ con } p_i, i=1,2,\dots,n$$

3.6.2. Esperanza, varianza y desviación estándar de una variable borroso aleatoria

La primera definición que ofrecemos para la esperanza matemática, y las medidas de dispersión varianza y desviación estándar de una variable borroso aleatoria, es la propuesta en Kruse y Meyer (1987), y consiste en definirlas vía principio de extensión de Zadeh. De esta forma, estas medidas vendrán dadas también por los subconjuntos borrosos que notamos como $\tilde{E}[X]$, $\tilde{V}[X]$ y $\tilde{D}[X]$, cuyas funciones de pertenencia quedarán definidas a través de la de $\tilde{X}$. Así, obtenemos la función de pertenencia de la esperanza matemática como:

$$\mu_{\tilde{E}[X]}(x) = \bigvee_{x=E[X]} \mu_{\tilde{X}}(X)$$

la de la varianza será:

$$\mu_{\tilde{V}[X]}(x) = \bigvee_{x=V[X]} \mu_{\tilde{X}}(X)$$

y la de la desviación estándar:

$$\mu_{\tilde{D}[X]}(x) = \bigvee_{x=D[X]} \mu_{\tilde{X}}(X) = \mu_{\tilde{V}[X]}(x^2)$$

Como $E[X]$, $V[X]$ y $D[X]$ hemos notado los operadores esperanza matemática, varianza y desviación estándar para una variable aleatoria cierta X .

Por otra parte, para una variable aleatoria discreta X cuyas realizaciones son: $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ la cuales presentan una probabilidad $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, podemos entender que $E[X]$, $V[X]$ y $D[X]$ son funciones de sus realizaciones y las probabilidades que éstas llevan asociadas. Así, su expresión es:

$$E[X] = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

$$V[X] = \sum_{i=1}^n p_i \left(x_i - \sum_{i=1}^n p_i x_i \right)^2$$

$$D[X] = \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i \left(x_i - \sum_{i=1}^n p_i x_i \right)^2}$$

Así, si entendemos como variable borroso aleatoria a una variable aleatoria cuya realización i -ésima es un número borroso $\tilde{A}_i$, siendo su probabilidad asociada p_i , $i=1,2,\dots,n$, la función de

pertenencia de la esperanza, la varianza y la desviación estándar pueden ser halladas a través del principio de extensión de Zadeh realizando:

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{E}[X]}(x) &= \bigvee_{x=\sum_{i=1}^n p_i x_i} (\mu_{\tilde{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)) \\ \mu_{\tilde{V}[X]}(x) &= \bigvee_{x=\sum_{i=1}^n p_i \left(x_i - \sum_{i=1}^n p_i x_i \right)^2} (\mu_{\tilde{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)) \\ \mu_{\tilde{D}[X]}(x) &= \bigvee_{x=\sqrt{\sum_{i=1}^n p_i \left(x_i - \sum_{i=1}^n p_i x_i \right)^2}} (\mu_{\tilde{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)) = \mu_{\tilde{V}[X]}(x^2)\end{aligned}$$

Es evidente que en muchas ocasiones no podremos hallar la expresión analítica de la función de pertenencia de $\tilde{E}[X]$, $\tilde{V}[X]$ y $\tilde{D}[X]$, pero sí que será posible representar dichos momentos de una variable borroso aleatoria a través de sus α -cortes. Así, los α -cortes de la esperanza matemática, $E[X]_\alpha$ vienen dados por:

$$E[X]_\alpha = \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^n p_i x_i, x_i \in A_{i\alpha}, i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

Y como la función esperanza matemática es monótona creciente respecto al valor de las realizaciones, obtenemos que:

$$E[X]_\alpha = [E^1[X](\alpha), E^2[X](\alpha)] = [E[X^1(\alpha)], E[X^2(\alpha)]] = \left[\sum_{i=1}^n p_i A_i^1(\alpha), \sum_{i=1}^n p_i A_i^2(\alpha) \right]$$

Obsérvese que su valor coincide con el que se obtiene para el valor medio de un haz de números borrosos.

Respecto a la varianza, observamos que sus α -cortes son:

$$\begin{aligned}V[Z]_\alpha &= \left\{ x \in \mathbb{R}^+ \mid x = \sum_{i=1}^n p_i \left(x_i - \sum_{i=1}^n p_i x_i \right)^2, x_i \in A_{i\alpha} \ i = 1, 2, \dots, n \right\} = \\ &= [\text{Min } x, \text{Max } x]\end{aligned}$$

Dado que no existe monotonía de $V[X]$ respecto a las realizaciones, x , para hallar los extremos de $V[X]_\alpha$ deberemos plantear el siguiente programa matemático:

$$\text{Minimizar (Maximizar) } x = \sum_{i=1}^n p_i \left(x_i - \sum_{i=1}^n p_i x_i \right)^2$$

s.a.:

$$A_i^1(\alpha) \leq x_i \leq A_i^2(\alpha) \quad i=1, \dots, n$$

Siendo el máximo de x , el extremo superior de $V[X]_\alpha$, y el mínimo de x , su extremo inferior. Si bien, estos programas matemáticos son relativamente sencillos de resolver, realizar dicha implementación para todos los que se desee, puede ser costoso. Por ejemplo, si se trabaja con una escala endecadaria, el número de programas matemáticos a resolver será 22. Inspirándonos en Frühwirth-Schnatter (1992), donde se propone una aproximación a la desviación estándar muestral cuando ésta se compone de números borrosos basada en la aritmética de los intervalos de confianza, apuntaremos una aproximación a los α -cortes de la varianza que facilitarán su computación, aunque a costa de obtener un número borroso más incierto.

En certeza, podemos definir a una realización centrada de una variable aleatoria X como: $c_i = x_i - E[X]$, siendo entonces la variable C , $C = X - E[X]$, la variable aleatoria centrada que deriva de X . De forma análoga, definimos para la i -ésima realización de $\tilde{X}$, $\tilde{A}_i$, por tanto, la correspondiente a una variable borroso aleatoria, a su valor centrado como $\tilde{C}_i = \tilde{A}_i - \tilde{E}[X]$, utilizándose en la construcción de los α -cortes de $\tilde{C}_i$, $C_{i\alpha}$ la aritmética de intervalos de confianza se tiene:

$$C_{i\alpha} = [C_i^1(\alpha), C_i^2(\alpha)] = [A_i^1(\alpha) - E^2[X](\alpha), A_i^2(\alpha) - E^1[X](\alpha)]$$

A partir de los α -cortes de $\tilde{C}_i$, hallamos $(\tilde{C}_i)^2$, que es un número borroso cuyos α -cortes son:

$$(C_{i\alpha})^2 = \left[[(C_i)^2]^- (\alpha), [(C_i)^2]^+ (\alpha) \right]$$

donde:

$$[(C_i)^2]^- (\alpha) = \begin{cases} [C_i^1(\alpha)]^2 & \text{si } C_i^1(\alpha) \geq 0 \\ [C_i^2(\alpha)]^2 & \text{si } C_i^2(\alpha) \leq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{y} \quad [(C_i)^2]^+ (\alpha) = \begin{cases} [C_i^2(\alpha)]^2 & \text{si } C_i^1(\alpha) + C_i^2(\alpha) \geq 0 \\ [C_i^1(\alpha)]^2 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De esta forma,

$$V[X]_\alpha \approx \sum_{i=1}^n p_i (C_{i\alpha})^2 = \left[\sum_{i=1}^n p_i [(C_i)^2]^- (\alpha), \sum_{i=1}^n p_i [(C_i)^2]^+ (\alpha) \right]$$

y así, como $D[X]_\alpha = \sqrt{V[X]_\alpha}$, entonces:

$$D[X]_{\alpha} \approx \left[\sqrt{\sum_{i=1}^n p_i [(C_i)^2]^{-}(\alpha)}, \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i [(C_i)^2]^{+}(\alpha)} \right]$$

El concepto de varianza y desviación estándar que hemos planteado anteriormente está basado en el concepto de distancia euclídea borrosa entre números borrosos –ver para el análisis de dicho concepto Dubois y Prade (1980)-. Sin embargo, diversos autores como Feng *et al.* (2000) consideran que, aunque es razonable sostener que el valor esperado de una variable borroso aleatoria es un número borroso, las varianza de una variable borroso aleatoria no debe ser borrosa, ya que por la naturaleza del indicador varianza o desviación estándar éstos deben ser índices ciertos. Así, la idea subyacente de esta modelización de varianza es la utilización del concepto de distancia cierta entre números borrosos, concepto que ya propusimos en el apartado 1.4. como instrumento en la aproximación de números borrosos. Basándose en el concepto de distancia euclídea cierta entre números borrosos, Feng *et al.* definen como varianza cierta de una variable borroso aleatoria, la cual notaremos como $V^*[X]$ a:

$$\begin{aligned} V^*[X] &= \frac{1}{2} \int_0^1 (V[X^1(\alpha)] + V[X^2(\alpha)]) d\alpha = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \sum_{i=1}^n p_i \left(A_i^1(\alpha) - \sum_{i=1}^n p_i A_i^1(\alpha) \right)^2 + \sum_{i=1}^n p_i \left(A_i^2(\alpha) - \sum_{i=1}^n p_i A_i^2(\alpha) \right)^2 \right\} d\alpha \end{aligned}$$

Siendo entonces la desviación estándar que se deriva del concepto de varianza de Feng, $D^*[X]$:

$$D^*[X] = \sqrt{V^*[X]} = \sqrt{\frac{1}{2} \int_0^1 (V[X^1(\alpha)] + V[X^2(\alpha)]) d\alpha}$$

3.6.3. Función de distribución y cuantiles de una variable borroso aleatoria

Para una variable aleatoria discreta X , cuyas realizaciones son $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y cuyas probabilidades asociadas son $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, la función de distribución de X , que notamos como $F[x]$ es una función tal que:

$$F[x] = p[X \leq x] = \sum_{\forall i | x_i \leq x} p_i$$

Una función de distribución $F[x]$ debe cumplir las siguientes propiedades:

- i) $F[x]$ es no decreciente
- ii) $F[x] \rightarrow 0$ si $x \rightarrow -\infty$ y $F[x] \rightarrow 1$ si $x \rightarrow 0$
- iii) $p[X > x] = 1 - p[X \leq x] = 1 - F[x]$

En el caso de variables borroso aleatorias, la función de distribución será un subconjunto borroso $\tilde{F}[x]$, que indicará $p[\tilde{X} \leq x]$. Su función de pertenencia se podrá hallar a través de la de $\tilde{X}$ planteando:

$$\mu_{\tilde{F}[x]}(z) = \bigvee_{z=F[x]=p(X \leq x)} \mu_{\tilde{X}}(X)$$

Asimismo, también podemos hallar sus conjuntos de nivel, lo cual será normalmente más operativo. En este caso, debemos tener en cuenta que dos variables aleatorias X e Y discretas, cuyo campo de variación es, $\{x_i\}_{i=1\dots n}$ y $\{y_i\}_{i=1\dots n}$ respectivamente con $P[X=x_i]=P[Y=y_i]=p_i$, si $x_i \geq y_i \forall i$, se cumple siempre que $P[X \leq x] \leq P[Y \leq x]$. De esta forma, para X_α definiremos los α -cortes de la función de distribución, $F[x]_\alpha$ a través de los α -cortes de la variable aleatoria inferior y superior para dicho nivel α . En concreto, el extremo inferior $F^1[X](\alpha)$, se construirá a través de $X^2(\alpha)$ y el superior $F^2[X](\alpha)$ a través de $X^1(\alpha)$:

$$F^2[x](\alpha) = p[X^1(\alpha) \leq x] = \sum_{\forall i / A_1^1(\alpha) \leq x} p_i \text{ y } F^1[x](\alpha) = p[X^2(\alpha) \leq x] = \sum_{\forall i / A_2^2(\alpha) \leq x} p_i$$

Así, $F[x]_\alpha$ no será, en variables borroso aleatorias discretas, un intervalo de confianza, ya que su dominio es discreto. Sin embargo se puede afirmar que:

$$F[x]_\alpha \subseteq [F^1[x](\alpha), F^2[x](\alpha)]$$

cumpléndose asimismo que $F[x]_\alpha \supseteq F[x]_{\alpha'} \forall \alpha \leq \alpha'$ ya que $A_{i\alpha} \supseteq A_{i\alpha'}$, $i=1,2,\dots,n$.

Por supuesto, también podremos hallar la función de pertenencia de $\tilde{F}[x]$ través de $F[x]_\alpha$ como:

$$\mu_{\tilde{F}[x]}(z) = \{\text{Max } \alpha \mid z \in F[X]_\alpha\}, \text{ con } \alpha \in [0,1]$$

Para definir el concepto de cuantil en una variable borroso aleatoria también partiremos del concepto de cuantil para una variable aleatoria discreta. Se denomina ε -cuantil de una variable aleatoria X al menor valor que acumula a su izquierda una probabilidad de ε , siendo dicho cuantil notado como q^ε . En concreto, éste se halla como:

$$q^\varepsilon = \text{Min } x \mid F[x] \geq \varepsilon \text{ o } \text{Min } x \mid p[X \leq x] \geq \varepsilon$$

Por supuesto, en una variable borroso aleatoria los cuantiles serán subconjuntos borrosos. A partir de la función de pertenencia de $\tilde{X}$, podemos definir el ε -cuantil de $\tilde{X}$, $\tilde{Q}^\varepsilon$ como:

$$\mu_{\tilde{Q}^\varepsilon}(q) = \bigvee_{q = \min x | F[x] \geq \varepsilon} \mu_{\tilde{X}}(X)$$

A pesar de que los α -cortes de la función de distribución no vienen estrictamente dados mediante un intervalo de confianza, los α -cortes del $1-\varepsilon$ cuantil de $\tilde{Q}^\varepsilon$, Q_α^ε , si lo serán. De esta forma para hallar Q_α^ε deberemos partir de $F[x]_\alpha$, obteniéndose:

$$Q_\alpha^\varepsilon = [Q^{1\varepsilon}(\alpha), Q^{2\varepsilon}(\alpha)]$$

donde:

$$Q^{1\varepsilon}(\alpha) = \min x | F^2[x](\alpha) \geq \varepsilon \quad \text{y} \quad Q^{2\varepsilon}(\alpha) = \min x | F^1[x](\alpha) \geq \varepsilon$$

Es decir, a partir de la inversa de la función de distribución inferior, que es la de $X^2(\alpha)$, obtendremos el extremo superior del α -corte de $\tilde{Q}^\varepsilon$ y viceversa.

Asimismo, si las realizaciones de las variables borroso aleatorias $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ cumplen que:

$$A_i^1(\alpha) \leq A_{i+1}^1(\alpha), i=1,2,\dots,n-1 \quad \forall \alpha$$

$$A_i^2(\alpha) \leq A_{i+1}^2(\alpha), i=1,2,\dots,n-1 \quad \forall \alpha$$

Los extremos inferior y superior de Q_α^ε son:

$$Q^{1,\varepsilon}(\alpha) = A_i^1(\alpha) | \min_{j \leq i} p_j \geq \varepsilon \quad \text{y} \quad Q^{2,\varepsilon}(\alpha) = A_i^2(\alpha) | \min_{j \leq i} p_j \geq \varepsilon$$

Y así,

$$Q_\alpha^\varepsilon = [Q^{1\varepsilon}(\alpha), Q^{2\varepsilon}(\alpha)] = [A_i^1(\alpha), A_i^2(\alpha)]$$

y por tanto:

$$\tilde{Q}^\varepsilon = \tilde{A}_i$$

3.6.4. Inferencia estadística en muestras donde las observaciones vienen dadas por números borrosos

En este epígrafe analizaremos la determinación de la media muestral, de la varianza y desviación estándar muestral, la función de distribución empírica y los cuantiles empíricos en muestras tomadas de variables aleatorias, cuando las cuantías que son observadas no vienen dadas de forma

cierta, sino mediante números borrosos. Es decir, en este caso, se supone que el observador dispone de n observaciones que vienen dadas por números borrosos, siendo el correspondiente a la i -ésima observación $\tilde{A}_i$:

$$\tilde{A}_i = \{x, \mu_{\tilde{A}_i}(x)\} = \{A_{i_\alpha} = [A_i^1(\alpha), A_i^2(\alpha)] \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}, i=1,2,\dots,n.$$

El hecho de que los datos obtenidos de la muestra sean borrosos, puede venir dado, por ejemplo, por la dificultad o la imposibilidad de cuantificar exactamente los mismos. Ello puede darse, por ejemplo, si la metodología que se utiliza para su medición no es la adecuada o bien por la misma naturaleza de los datos –por ejemplo, en los mercados financieros, durante una misma sesión no suele negociarse un único precio, sino que suelen negociarse varios, de forma que, por ejemplo, el precio de una acción un determinado día no es “2000”, sino “aproximadamente 2000”. En estas circunstancias la cuantificación de dichos datos es vaga, siendo más realista modelizarlos a través de números borrosos.

En nuestra exposición, nos basaremos en el trabajo ya mencionado de Frühwirth-Schnatter (1992). El enfoque que en dicho trabajo se da al problema que se analiza, es muy similar al expuesto por nosotros en el análisis de las variables borroso aleatorias, siendo esta la razón por la que incluimos esta herramienta dentro del apartado dedicado a las variables borroso aleatorias.

3.6.4.1. Media muestral, varianza muestral y desviación estándar muestral

Estos parámetros representativos del valor medio y la dispersión serán definidos a través del principio de extensión de Zadeh. Para ello partiremos de que la esperanza muestral de una variable aleatoria X , $\hat{E}[X]$, su varianza, $\hat{V}[X]$ y su desviación estándar, $\hat{D}[X]$, si la muestra obtenida es un vector $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, siendo sus componentes cuantías ciertas, puede expresarse como una función $f: R^n \rightarrow R$, en la que las variables independientes son los datos obtenidos. En concreto:

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ V[X] &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \\ D[X] &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \end{aligned}$$

Sin embargo, si los datos vienen dados a través de un vector borroso, donde el i -ésimo componente es el número borroso $\tilde{A}_i$, $i=1,2,\dots,n$, la esperanza, la varianza y la desviación estándar muestral son unos números borrosos que notamos respectivamente como $\hat{E}[X]$, $\hat{V}[X]$ y $\hat{D}[X]$. Su función de pertenencia puede ser hallada vía principio de extensión de Zadeh como:

$$\begin{aligned}\mu_{\hat{E}[X]}(x) &= \bigvee_{x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i} \left(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu_{\tilde{A}_n}(x_n) \right) \\ \mu_{\hat{V}[X]}(x) &= \bigvee_{x=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \left(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu_{\tilde{A}_n}(x_n) \right) \\ \mu_{\hat{D}[X]}(x) &= \bigvee_{x=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}} \left(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu_{\tilde{A}_n}(x_n) \right) = \mu_{\hat{D}[X]}(x^2)\end{aligned}$$

Por otra parte, los α -cortes de la esperanza matemática de $\hat{E}[X]$, $\hat{E}[X]_\alpha$, son intervalos de confianza que se pueden hallar como:

$$\hat{E}[X]_\alpha = \left\{ x \mid x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, x_i \in A_{i\alpha}, i=1,2,\dots,n \right\}$$

Y como la media muestral es monótona creciente respecto al valor de las cuantías que la forman obtenemos que:

$$\hat{E}[X]_\alpha = [\hat{E}^1[X](\alpha), \hat{E}^2[X](\alpha)] = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i^1(\alpha), \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i^2(\alpha) \right]$$

Respecto a la varianza muestral, observamos que:

$$\begin{aligned}\hat{V}[X]_\alpha &= \left\{ x \in \mathbb{R}^+ \mid x = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2, x_i \in A_{i\alpha} \ i=1,2,\dots,n \right\} = \\ &= [\text{Min } x, \text{Max } x]\end{aligned}$$

Dado que no existe monotonía de $\hat{V}[X]$ respecto al valor de los valores obtenidos en la muestra, para hallar los extremos de $\hat{V}[X]_\alpha$ deberemos plantear y resolver el siguiente programa matemático:

$$\text{Minimizar (Maximizar) } x = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

s.a.:

$$A_i^1(\alpha) \leq x_i \leq A_i^2(\alpha) \quad i=1, \dots, n$$

Siendo el máximo de x , el extremo superior de $\hat{V}[X]_\alpha$, y el mínimo de x , su extremo inferior. Como ya comentamos cuando analizamos la determinación de los α -cortes de la varianza borrosa de una variable borroso aleatoria, creemos que, si la escala de verdad que emplea el observador es relativamente detallada, este enfoque puede no ser operativo, ya que el número de programas a resolver puede ser excesivo. Frühwirth-Schnatter (1992) propone una aproximación a la varianza y a la desviación estándar muestral, que se basa en la aritmética de intervalos, siendo dicha aproximación la que inspiró nuestra propuesta para aproximar la varianza de una variable borroso aleatoria. Esta aproximación incluye al α -corte real de la varianza, y facilita su cálculo, si bien a costa de obtenerse un número borroso más incierto.

Para ello, deberemos hallar el valor centrado de cada una de las observaciones de forma análoga a lo realizado en 3.6.2. Para la i -ésima realización de la muestra $\tilde{A}_i$, su valor centrado es $\tilde{C}_i = \tilde{A}_i - \hat{E}[X]$. Para hallar los α -cortes de $\tilde{C}_i$ utilizamos la aritmética de intervalos, de forma que:

$$C_{i_\alpha} = [C_i^1(\alpha), C_i^2(\alpha)] = [A_i^1(\alpha) - \hat{E}^2[X](\alpha), A_i^2(\alpha) - \hat{E}^1[X](\alpha)]$$

A partir de los α -cortes de $\tilde{C}_i$, hallamos $(\tilde{C}_i)^2$, siendo los α -cortes de este último número borroso:

$$(C_{i_\alpha})^2 = \left[[(C_i)^2]^- (\alpha), [(C_i)^2]^+ (\alpha) \right]$$

donde:

$$[(C_i)^2]^- (\alpha) = \begin{cases} [C_i^1(\alpha)]^2 & \text{si } C_i^1(\alpha) \geq 0 \\ [C_i^2(\alpha)]^2 & \text{si } C_i^2(\alpha) \leq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{y} \quad [(C_i)^2]^+ (\alpha) = \begin{cases} [C_i^2(\alpha)]^2 & \text{si } C_i^1(\alpha) + C_i^2(\alpha) \geq 0 \\ [C_i^1(\alpha)]^2 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De esta forma,

$$\hat{V}[X]_\alpha \approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (C_{i_\alpha})^2 = \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(C_i)^2]^- (\alpha), \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(C_i)^2]^+ (\alpha) \right]$$

y así, como $D[X]_\alpha = \sqrt{V[X]_\alpha}$, entonces:

$$D[X]_{\alpha} \approx \left[\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(C_i)^2]^{-}(\alpha)}, \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(C_i)^2]^{+}(\alpha)} \right]$$

3.6.4.2. Función de distribución muestral y cuantiles muestrales

Para definir la función de distribución y los cuantiles para muestras con observaciones borrosas, partiremos de su definición suponiendo que la muestra tomada se compone de cuantías ciertas, las cuales vienen dadas por el vector $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$. El valor de la función de distribución empírica para una cuantía x , $\hat{F}[x]$ es:

$$\hat{F}[x] = \sum_{\forall x_i \leq x} \frac{1}{n}$$

siendo el dominio de $\hat{F}[x]$ el conjunto discreto $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}$.

Si la muestra viene dada por n valores borrosos $\tilde{A}_i$, $i=1, 2, \dots, n$, entonces, la función de distribución para un valor x viene dado por un subconjunto borroso $\hat{\tilde{F}}[x]$ cuya función de pertenencia es:

$$\mu_{\hat{\tilde{F}}[x]}(z) = \bigvee_{z = \sum_{\forall x_i \leq x} \frac{1}{n}} \left(\bigwedge_{i=1}^n \mu_{\tilde{A}_i}(x_i) \right)$$

También podemos hallar los α -cortes de la función de distribución muestral a través de sus α -cortes, $\hat{F}[x]_{\alpha}$. El valor inferior de $\hat{F}[x]_{\alpha}$, $\hat{F}^1[x](\alpha)$ se hallará a través de los extremos superiores de los α -cortes de las observaciones, $A_i^2(\alpha)$, $i=1, 2, \dots, n$ y el superior, $\hat{F}^2[x](\alpha)$, a través de los inferiores, $A_i^1(\alpha)$, $i=1, 2, \dots, n$. Así:

$$\hat{F}^2[x](\alpha) = \sum_{\forall A_i^1(\alpha) \leq x} \frac{1}{n} \text{ y } \hat{F}^1[x](\alpha) = \sum_{\forall A_i^2(\alpha) \leq x} \frac{1}{n}$$

Así, $\hat{F}[x]_{\alpha}$ no será un intervalo de confianza, ya que como se ha comentado, su dominio es discreto, $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}$ pero si se cumple que:

$$\hat{F}[x]_{\alpha} \subseteq [\hat{F}^1[x](\alpha), \hat{F}^2[x](\alpha)]$$

cumpliéndose asimismo que $\hat{F}[x]_{\alpha} \supseteq \hat{F}[x]_{\alpha'}$, $\forall \alpha \leq \alpha'$ ya que $A_{i\alpha} \supseteq A_{i\alpha'}$, $i=1, 2, \dots, n$

Por supuesto, podremos hallar la función de pertenencia de $\hat{F}[x]$ través de $\hat{F}[x]_\alpha$ como:

$$\mu_{\hat{F}[x]}(z) = \{\text{Max } \alpha \mid z \in \hat{F}[X]_\alpha\}, \text{ con } \alpha \in [0,1]$$

Por otra parte, para definir el concepto de cuantil borroso en una muestra donde las observaciones son borrosas, partiremos del concepto de cuantil en el caso en que la muestra sea un vector cierto $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ donde $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_i \leq \dots \leq x_n$

El cuantil de orden ε , $\hat{q}^\varepsilon$ es aquel valor x_{i+1} que presenta una frecuencia acumulada tal que:

$$\hat{q}^\varepsilon = x_{i+1} \mid \hat{F}[x_i] = \frac{i}{n} < \varepsilon \leq \hat{F}[x_{i+1}] = \frac{i+1}{n}$$

Si las observaciones de la muestra son borrosas, $\tilde{A}_i$, $i=1,2,\dots,n$, entonces, dicho cuantil será también un número borroso, que notamos como $\hat{Q}^\varepsilon$, donde la posibilidad de un valor del mismo $q^\varepsilon = x_{i+1}$ vendrá dado por:

$$\mu_{\hat{Q}^\varepsilon}(q) = \bigvee_{q=x_{i+1} \mid \hat{F}[x_i] < \varepsilon \leq \hat{F}[x_{i+1}]} \left(\bigwedge_{i=1}^n \mu_{\tilde{A}_i}(x_i) \right)$$

Como en el caso de las variables borroso aleatorias, los α -cortes del cuantil de orden ε pueden ser hallados a través de los α -cortes de las observaciones que componen la muestra estudiada. De esta forma, para hallar $\hat{Q}_\alpha^\varepsilon$, donde:

$$\hat{Q}_\alpha^\varepsilon = [\hat{Q}^{1\varepsilon}(\alpha), \hat{Q}^{2\varepsilon}(\alpha)]$$

deberemos hallar el valor inferior de su α -corte $\hat{Q}^{1\varepsilon}(\alpha)$ a través de los extremos inferiores de los α -cortes con dicho nivel de presunción de $\tilde{A}_i$, $i=1,2,\dots,n$, $A_i^1(\alpha)$, y el superior, $\hat{Q}^{2\varepsilon}(\alpha)$, a través de los superiores, $A_i^2(\alpha)$, $i=1,2,\dots,n$. Para ello ordenamos los extremos de los α -cortes de $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ para cada nivel en orden creciente, de forma que:

$$A_r^1(\alpha) \leq A_{r+1}^1(\alpha), i=0,1,\dots,n-1 \quad \forall \alpha$$

$$A_r^2(\alpha) \leq A_{r+1}^2(\alpha), i=0,1,\dots,n-1 \quad \forall \alpha$$

donde tras la ordenación efectuada, el i -ésimo extremo inferior que se obtiene no tiene por que pertenecer al mismo número borroso que el i -ésimo extremo superior.

Podemos finalmente obtener los extremos del α -corte del cuantil que pretendemos hallar de forma que $\hat{Q}^{1,\varepsilon}(\alpha)$ es aquel extremo $A_{i+1}^1(\alpha)$ y $\hat{Q}^{2,\varepsilon}(\alpha)$ es aquel extremo $A_{i+1}^2(\alpha)$ que cumplen respectivamente:

$$\hat{F}^2[A_i^1(\alpha)] = \frac{i}{n} < \varepsilon \leq \hat{F}^2[A_{i+1}^1(\alpha)] = \frac{i+1}{n} \text{ y } \hat{F}^1[A_i^2(\alpha)] = \frac{i}{n} < \varepsilon \leq \hat{F}^1[A_{i+1}^2(\alpha)] = \frac{i+1}{n}$$

3.7. VARIABLES ALEATORIAS NORMALES CON MEDIA Y VARIANZA BORROSAS

El concepto de variable normal borrosa ha sido utilizado, entre otros por Yager (1982) para realizar predicciones con una regresión lineal convencional cuando las variables independientes vienen dadas por números borrosos. En este caso, aunque el término de error asociado a la regresión es una variable aleatoria normal de media 0 y varianza constante, el valor de la predicción será una variable aleatoria normal, pero en este caso con media y varianza borrosa, ya que el valor de estos parámetros depende del valor de la media y varianza de la predicción, que vienen dados por cuantías difusas. Asimismo, en Wierzchon (1988) se utiliza dicho concepto en un contexto de programación lineal borroso aleatoria.

Por otra parte, también podríamos encontrarnos ante una cuantía aleatoria normal y borrosa a la vez cuando, por ejemplo, si conocemos que un determinado fenómeno se comporta según una variable aleatoria normal, pero su media y desviación estándar debe ser inferida a través de una muestra donde las observaciones son difusas. La estimación en este caso de la media y la desviación estándar muestral ha sido analizada en el apartado 3.6.4.1. Empecemos por definir en un ambiente de certeza las cuestiones que después analizaremos en borrosidad.

3.7.1. Función de distribución, cuantiles e intervalos de confianza para variables aleatorias normales

Para una variable aleatoria X , que se comporta según una normal de media m y desviación estándar σ , $X \sim N(m, \sigma)$, podemos hallar el valor de distribución de un valor x , $F[x] = p[X \leq x]$, tipificando dicho valor:

$$Z = \frac{x - m}{\sigma}$$

y como

$$Z = \frac{X - m}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

hallamos el valor de $F[x]$ a través de la función de distribución de la normal tipificada sin más que:

$$p[X \leq x] = p[Z \leq z] = \Phi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right)$$

asimismo como $\Phi(\cdot)$ notamos a la función de probabilidad acumulada de una variable aleatoria normal tipificada.

Por otra parte, dado que el cuantil de orden ε de X , q^ε , es aquél valor que acumula a su izquierda una probabilidad de ε , es decir: $F[q^\varepsilon] = \varepsilon$, o de forma equivalente, q^ε es un valor que cumple:

$$\Phi\left(\frac{q^\varepsilon - m}{\sigma}\right) = \varepsilon$$

podemos hallar el ε cuantil de X a través de la función inversa de la normal tipificada como:

$$q^\varepsilon = m + \sigma \Phi^{-1}(\varepsilon)$$

Por último, para una variable aleatoria normal, un intervalo de confianza con una probabilidad de ocurrencia δ , I^δ viene dado por aquéllos valores $x \in [a, b]$ que cumplen

$$P[a \leq x \leq b] = \delta$$

y:

$$a = m - \sigma \Phi^{-1}(\varepsilon) \text{ y } b = m + \sigma \Phi^{-1}(\varepsilon),$$

$$\text{siendo } \varepsilon = 1 - \frac{1 - \delta}{2}$$

3.7.2. Función de distribución, cuantiles e intervalos de confianza para variables aleatorias normales con media y desviación estándar borrosas

En el problema que analizamos a continuación, tanto la media y la desviación estándar de la variable aleatoria que analizamos no vienen dadas de forma nítida, (por ejemplo, $m=10$ y $\sigma=5$), sino que vienen cuantificadas mediante números borrosos (por ejemplo, m es aproximadamente 10 y σ es aproximadamente 5). De esta forma, el instrumento de que disponemos para hacer predicciones es una variable aleatoria normal con media y desviación estándar borrosas que

notaremos como $\tilde{X} \sim N(\tilde{m}, \tilde{\sigma})$. Al venir dadas tanto la media como la desviación estándar por números borrosos, podemos observar que:

$$\tilde{m} = \{x, \mu_{\tilde{m}}(x)\} = \{m_{\alpha} = [m^1(\alpha), m^2(\alpha)] \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

y

$$\tilde{\sigma} = \{x, \mu_{\tilde{\sigma}}(x)\} = \{\sigma_{\alpha} = [\sigma^1(\alpha), \sigma^2(\alpha)] \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

Así pues, $N(\tilde{m}, \tilde{\sigma})$ es un subconjunto borroso cuyo referencial es el de las variables aleatorias normales cuya función de pertenencia es:

$$\mu_{N(\tilde{m}, \tilde{\sigma})}(y) = \bigvee_{y=N(x_1, x_2)} (\mu_{\tilde{m}}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{\sigma}}(x_2))$$

donde y es una variable aleatoria normal.

Para hallar la probabilidad que acumula un valor x cierto, $\tilde{F}[x]$, hallaremos en primer lugar su valor tipificado, en este caso será un número borroso $\tilde{z}$. La función de pertenencia de dicho valor $\tilde{z}$ será pues:

$$\mu_{\tilde{z}}(u) = \bigvee_{u=\frac{x-x_1}{x_2}} (\mu_{\tilde{m}}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{\sigma}}(x_2))$$

y sus α -cortes:

$$z_{\alpha} = [z^1(\alpha), z^2(\alpha)]$$

donde:

$$z^1(\alpha) = \begin{cases} \frac{x - m^2(\alpha)}{\sigma^2(\alpha)} & \text{si } x - m^2(\alpha) \geq 0 \\ \frac{x - m^2(\alpha)}{\sigma^1(\alpha)} & \text{si } x - m^2(\alpha) < 0 \end{cases} \quad y \quad z^2(\alpha) = \begin{cases} \frac{x - m^1(\alpha)}{\sigma^1(\alpha)} & \text{si } x - m^1(\alpha) \geq 0 \\ \frac{x - m^1(\alpha)}{\sigma^2(\alpha)} & \text{si } x - m^1(\alpha) < 0 \end{cases}$$

Así, la función de distribución $\tilde{F}[x]$ que indicará la probabilidad $P[\tilde{X} \leq x]$, puede hallarse a través de la función de pertenencia del valor tipificado, $\tilde{z}$ como:

$$\mu_{\tilde{F}[x]}(v) = \bigvee_{v=\Phi(v)} \mu_{\tilde{z}}(u) = \bigvee_{v=\Phi\left(\frac{x-x_1}{x_2}\right)} (\mu_{\tilde{m}}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{\sigma}}(x_2))$$

Asimismo, sus α -cortes, $F[x]_{\alpha}$ se hallan fácilmente, ya que $\Phi(\cdot)$ es monótona creciente respecto de su argumento. De esta forma:

$$F[x]_{\alpha} = [F[x]^1(\alpha), F[x]^2(\alpha)] = [\Phi^{-1}[z^1(\alpha)], \Phi^{-1}[z^2(\alpha)]]$$

Por otra parte, a través del principio de extensión de Zadeh podemos definir, el cuantil de orden ε de $\tilde{X}$, que notaremos como $\tilde{Q}^{\varepsilon}$. Su función de pertenencia será:

$$\mu_{\tilde{Q}^{\varepsilon}}(q) = \bigvee_{q=x_1+x_2\Phi^{-1}(\varepsilon)} (\mu_{\tilde{m}}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{\sigma}}(x_2))$$

Y dado que la función q que evaluamos (el cuantil) es creciente respecto a la media y la varianza de la variable aleatoria, sus α -cortes son:

$$Q_{\alpha}^{\varepsilon} = [m^1(\alpha) - \sigma^1(\alpha)\Phi^{-1}(\varepsilon), m^2(\alpha) + \sigma^2(\alpha)\Phi^{-1}(\varepsilon)]$$

Por último, el intervalo de confianza con una probabilidad de ocurrencia δ , será un subconjunto borroso cuyo referencial son los intervalos de confianza, por tanto, no es un número borroso, y que notaremos como $\tilde{I}^{\delta}$. Su función de pertenencia se halla, como siempre, aplicando el principio de extensión, de forma que:

$$\mu_{\tilde{I}^{\delta}}(I) = \bigvee_{I=[x_1-x_2\Phi^{-1}(\varepsilon), x_1+x_2\Phi^{-1}(\varepsilon)]} (\mu_{\tilde{m}}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{\sigma}}(x_2))$$

siendo entonces sus α -cortes, I_{α}^{δ} :

$$I_{\alpha}^{\delta} = \{I = [x_1 - x_2\Phi^{-1}(\varepsilon), x_1 + x_2\Phi^{-1}(\varepsilon)] \subset \mathbb{R} \mid x_1 \in m_{\alpha} \text{ y } x_2 \in \sigma_{\alpha}\}$$

En cualquier caso, la relación entre ε y δ es, como ya expusimos:

$$\varepsilon = 1 - \frac{1-\delta}{2}$$

CAPÍTULO 4:

VALORACIÓN FINANCIERA CON INTERESES BORROSOS

4.1. INTRODUCCIÓN

Una de las aplicaciones de la valoración financiera es hallar el precio en un momento dado de cualquier derecho u obligación económico, por tanto traducibles a un devengo de cuantías monetarias con un diferimiento futuro, teniéndose en cuenta el grado de preferencia por la liquidez que exigirá el valorador hasta el devengo de dichas cuantías. El instrumento por excelencia de la valoración financiera es el interés compuesto, y será por tanto este instrumento de valoración el que analizaremos nosotros en este apartado, suponiéndose que el interés de valoración viene estimado por números borrosos.

Como ya comentamos en la introducción de la tesis, en el análisis económico en general y en el financiero en particular, resulta en muchas ocasiones imposible recoger con precisión y certeza los hechos y las variables que influyen en el fenómeno de estudio, surgiendo entonces la necesidad de trabajar con datos estimados de forma subjetiva por parte del decisor. Creemos que en estos casos, es mucho más realista modelizar las estimaciones subjetivas a través de números borrosos que a través de probabilidades subjetivas, que es lo que tradicionalmente se ha venido utilizando en estos casos. Abundando en esta afirmación y respecto al uso de la estadística en la matemática financiera para modelizar la incertidumbre, en Rodríguez (1984, p.20) se indica: *“El análisis de la incertidumbre financiera exige el uso de una metodología adecuada. Los métodos estadísticos suponen una importante colaboración a este respecto. No obstante, no parece que tales métodos hayan cubierto plenamente el reto metodológico planteado por la incertidumbre a las ciencias del comportamiento humano, entre las que se insertan las económicas”*.

En nuestro caso, el análisis se centrará en la valoración financiera de cuantías ciertas, que será el supuesto en el que nos encontraremos a lo largo de la tesis, cuando el decisor estima el grado de preferencia por la liquidez en el futuro a través de números borrosos. En todos los casos supondremos que el régimen financiero utilizado para realizar dicha valoración, tal como ya se ha comentado es el interés compuesto.

En la actualidad, existen numerosos trabajos que estudian la valoración financiera mediante interés compuesto, cuando varias de las magnitudes que intervienen en el proceso de valoración

vienen dadas a través de números borrosos. En Kaufmann (1986b), Kaufmann y Gil Aluja (1986) y Gil Aluja (1998) se analiza la valoración con interés compuesto aplicada a la selección de proyectos de inversión cuando una o varias de las variables asociadas a dicho proyecto o al ambiente económico en que se desarrollará (beneficios, coste de capital, inflación, etc.) vienen estimados subjetivamente a través de números borrosos. En Buckley (1987) se estudia la valoración financiera de cuantías y de rentas constantes, cuando las cuantías, el tipo de interés y/o los diferimientos de las primeras vienen dados por números borrosos. Jiménez (1996), adicionalmente analiza la valoración de rentas variables en progresión geométrica con datos borrosos, pero supone certeza en los vencimientos de los capitales. Por otra parte, Terceño (1995), sistematiza y analiza la valoración financiera no tan sólo con interés compuesto, sino también con otros regímenes típicos en la práctica como el descuento compuesto, interés simple vencido, y cuando cualquiera de las magnitudes que intervienen en la valoración es borrosa. Adicionalmente, en dicho trabajo se construye una teoría de valoración de rentas financieras con interés compuesto, que contempla la borrosidad en cualquiera de las variables características de las mismas (interés de valoración, número de términos, la razón de variación de la renta si los términos de la renta varían en progresión geométrica o aritmética, etc.). Finalmente, en Li Calzi (1990) se estudia, de forma más general, las propiedades de los factores de descuento y capitalización cuando estos son borrosos.

Ya en el campo financiero-actuarial, aunque de forma menos exhaustiva que en el campo estrictamente financiero, también diversos autores han introducido la incertidumbre en el interés de valoración modelizándolo mediante números borrosos. Entre ellos podemos mencionar a Lemaire (1990), Ostasiewski (1993), Terceño *et al.* (1996), Betzuen *et al.* (1997) o Bonet *et al.* (1999).

En este apartado, expondremos algunas cuestiones ya resueltas en los trabajos reseñados anteriormente sobre valoración estrictamente financiera. Éstos resultados serán utilizados posteriormente en las siguientes dos partes de la tesis. Dada la abundancia de trabajos producidos en este campo introduciendo la incertidumbre mediante los instrumentos de la teoría de los subconjuntos borrosos, no tan sólo creemos que la matemática financiera –no tanto la actuarial– ha dejado de ser un campo donde se debe estudiar la transposición de sus conceptos a un ambiente difuso, sino que lo que podríamos denominar como “matemática financiera borrosa” se ha convertido en un instrumento más de los que proporciona la Teoría de los Subconjuntos Borrosos, en este caso para modelizar fenómenos financieros. Es por esta razón por la que algunos de sus conceptos son expuestos en esta primera parte de la tesis, que es instrumental.

En concreto nosotros analizaremos las siguientes dos cuestiones, donde únicamente introduciremos la borrosidad en el interés de valoración:

- a) Análisis del factor de descuento con interés compuesto y difuso, y su aproximación triangular cuando los intereses de valoración vienen dados por números borrosos triangulares.
- b) El cálculo del valor actual de rentas y de forma más particular de rentas constantes y variables en progresión geométrica, cuando las cuantías sean ciertas pero sean valoradas con interés borroso. Debemos reseñar que es un supuesto muy habitual en la práctica financiera que las cuantías a descontar sean ciertas aunque el interés futuro no lo sea, y adicionalmente que la problemática que abordaremos contemplará únicamente esta circunstancia. También estudiaremos la conveniencia de la aproximación triangular del valor actual de dichas rentas cuando el interés de valoración sea triangular.

4.2. ANÁLISIS DEL FACTOR DE DESCUENTO CON INTERÉS BORROSO

4.2.1. Planteamiento general

Partiremos de que el decisor estima el interés a aplicar para los periodos de los que consta su horizonte planificador, que son t periodos enteros de duración P años, a través de un conjunto de tantos efectivos de la misma periodicidad y frecuencia que vienen dados por:

$$\tilde{i}_r = \{x, \mu_{\tilde{i}_r}(x)\} = \{i_{r\alpha} = [i_r^1(\alpha), i_r^2(\alpha)] \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}, r=1,2,\dots,t.$$

siendo $\tilde{i}_r$ el tanto efectivo a aplicar durante el periodo r -ésimo.

Así, en el caso en que $\tilde{i}_r = \tilde{i}_{r+1} = \tilde{i} \quad \forall r$, estaríamos suponiendo que el interés correspondiente a cada año se mantiene "constante", lo cual, por otra parte, es bastante habitual en la práctica financiera.

A partir de los intereses de cada uno de los diferentes períodos podemos expresar el factor de actualización correspondiente a una cuantía con vencimiento en t periodos, es decir, tP años, $\tilde{f}_t$ (o lo que es lo mismo, el valor actual de una unidad monetaria con vencimiento en el periodo t) como:

$$\tilde{f}_t = \prod_{r=1}^t (1 + \tilde{i}_r)^{-1}$$

De esta forma, la función de pertenencia del factor de actualización será:

$$\mu_{\tilde{f}_t}(x) = \bigvee_{x = \prod_{r=1}^t (1+i_r)^{-1}} \left(\bigwedge_{r=1}^t \mu_{i_r}(x_t) \right)$$

Es inmediato comprobar que los α -cortes del factor de actualización son, dada la relación monótona decreciente entre los intereses correspondientes a cada periodo y el factor de descuento:

$$f_{t\alpha} = [f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)] = \left[\prod_{r=1}^t (1+i_r^2(\hat{a}))^{-1}, \prod_{r=1}^t (1+i_r^1(\hat{a}))^{-1} \right]$$

En el caso en que el interés estimado sea el mismo número borroso para todos los años, podemos obtener el factor de actualización para una cuantía que venza dentro de t periodos como:

$$\tilde{f}_t = \prod_{r=1}^t (1 + \tilde{i}_r)^{-1} = (1 + \tilde{i})^{-t}$$

Su función de pertenencia se hallará inmediatamente sin más que plantear:

$$\mu_{\tilde{f}_t}(x) = \mu_{\tilde{i}} \left(x^{-\frac{1}{t}} - 1 \right)$$

y sus α -cortes son en este caso:

$$f_{t\alpha} = [f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)] = \left[(1 + i^2(\alpha))^{-t}, (1 + i^1(\alpha))^{-t} \right]$$

De esta forma, el valor actual de la cuantía que vence dentro de t periodos, C_t , se hallará fácilmente sin más que multiplicarla por el factor de actualización asociada al vencimiento de la misma. Si denominamos a dicho valor como $\tilde{Z}_t$, este se obtendrá como: $\tilde{Z}_t = C_t \tilde{f}_t$. Así, es fácil hallar su función de pertenencia a través de la función de pertenencia del factor de actualización, resultando:

$$\mu_{\tilde{Z}_t}(x) = \mu_{\tilde{f}_t} \left(\frac{x}{C_t} \right)$$

igualmente hallaremos sus α -cortes de la forma $Z_{t\alpha} = C_t f_{t\alpha}$, cuyo resultado es inmediato ya que se trata del producto de una constante positiva por un intervalo de confianza, cuyos valores son positivos.

4.2.2. Análisis del factor de descuento cuando el interés a aplicar viene estimado a través de números borrosos triangulares

En este caso, podemos representar el interés estimado para cada uno de los r periodos que comprenden el horizonte de valoración como un número borroso triangular variable $\tilde{i}_r = (i_r^1, i_r^2, i_r^3)$, $r=1,2,\dots,t$, siendo el valor de máxima presunción para el interés correspondiente al r -ésimo periodo i_r^2 , y los valores que como máximo y como mínimo consideramos que pueden tomar dicho interés i_r^3 e i_r^1 .

Si el interés es variable no podemos obtener la expresión analítica de la función de pertenencia de $\tilde{f}_t$. Sin embargo, si que podemos hallar sus α -cortes, sin más que sustituir $i_r^1 + (i_r^2 - i_r^1)\alpha$ y $i_r^3 - (i_r^3 - i_r^2)\alpha$, $r=1,2,\dots,t$ en los extremos superiores e inferiores del factor de actualización. Estos serán, pues:

$$f_{t\alpha} = [f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)] = \left[\prod_{r=1}^t (1 + i_r^3 - (i_r^3 - i_r^2)\alpha)^{-1}, \prod_{r=1}^t (1 + i_r^1 + (i_r^2 - i_r^1)\alpha)^{-1} \right]$$

En el caso en que supongamos que el interés correspondiente a cada período se mantiene "constante", es decir, éste es $\tilde{i} = (i^1, i^2, i^3)$ para todos los periodos, si que podemos obtener su función de pertenencia y sus α -cortes. La función de pertenencia es:

$$\mu_{\tilde{f}_t}(x) = \begin{cases} \frac{i^3 + 1 - x^{-1/t}}{i^3 - i^2} & (1 + i^3)^{-t} \leq x < (1 + i^2)^{-t} \\ \frac{x^{-1/t} - 1 - i^1}{i^2 - i^1} & (1 + i^2)^{-t} \leq x < (1 + i^1)^{-t} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y sus α -cortes:

$$f_{t\alpha} = [f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)] = \left[(1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-t}, (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-t} \right]$$

De esta forma, el valor actual de C_t unidades monetarias con vencimiento en t años, $\tilde{Z}_t$, podrá ser expresado únicamente a través de sus α -cortes si el interés es variable. Por otra parte, si dicho interés es constante, la obtención de su función de pertenencia y la expresión de sus α -cortes es inmediata.

4.2.3 Aproximación triangular del factor de actualización cuando los intereses futuros vienen dados por números borrosos triangulares

4.2.3.1. Aproximación triangular del factor de actualización cuando el interés triangular aplicado es variable a lo largo del tiempo

En muchas ocasiones será de gran utilidad poder aproximar el factor de descuento mediante un número borroso triangular, si los intereses correspondientes a cada periodo vienen dados por números borrosos triangulares. Por ejemplo, tanto el valor actual de una cuantía futura cierta como el valor actual de una renta cierta podrán ser fácilmente expresados como números borrosos triangulares, ya que los números borrosos resultantes del producto de un número borroso triangular por un número real y de la suma de números borrosos triangulares mantienen la naturaleza triangular de los números borrosos de los que partimos.

Para comprobar la calidad de la aproximación triangular, seguiremos la metodología expuesta en el apartado 1.4.2. De esta forma estamos aceptando, implícitamente, que las características representativas del número borroso que aproximamos por uno triangular son su soporte y su núcleo. Así el número borroso triangular que aproxime el factor de descuento deberá tener el mismo 0-corte y el mismo 1-corte que el original. Es decir, proponemos una aproximación triangular al factor de descuento que venga dada por la tripleta:

$$\tilde{f}_t \approx \tilde{f}_t' = \left(\prod_{r=1}^t (1 + i_r^3)^{-1}, \prod_{r=1}^t (1 + i_r^2)^{-1}, \prod_{r=1}^t (1 + i_r^1)^{-1} \right)$$

El error que cometemos al estimar los extremos de los α -cortes del factor de actualización tomando la aproximación triangular dependerá del nivel de presunción α que establezcamos para su cálculo. Así, la desviación que se produce a la izquierda por tomar f_t' , $D_{lt}(\alpha)$ y la que se produce a la derecha por tomar dicha aproximación, $D_{Dt}(\alpha)$ serán funciones de α cuya expresión es:

$$D_{lt}(\alpha) = \left| f_t^1(\alpha) - f_t'^1(\alpha) \right| = \prod_{r=1}^t (1 + i_r^3)^{-1} + \left[\prod_{r=1}^t (1 + i_r^2)^{-1} - \prod_{r=1}^t (1 + i_r^3)^{-1} \right] \alpha - \prod_{r=1}^t (1 + i_r^3 - (i_r^3 - i_r^2)\alpha)^{-1}$$

$$D_{Dt}(\alpha) = \left| f_t^2(\alpha) - f_t'^2(\alpha) \right| = \prod_{r=1}^t (1 + i_r^1)^{-1} - \left[\prod_{r=1}^t (1 + i_r^1)^{-1} - \prod_{r=1}^t (1 + i_r^2)^{-1} \right] \alpha - \prod_{r=1}^t (1 + i_r^1 + (i_r^2 - i_r^1)\alpha)^{-1}$$

Podemos observar que a pesar de eliminar el indicador de valor absoluto, las desviaciones definidas son siempre positivas para $\alpha \in (0,1)$. Notemos a los extremos de los α -cortes de $\tilde{f}_t$, $f_t^1(\alpha)$ o $f_t^2(\alpha)$ como $f_t(\alpha)$, y a los extremos de los α -cortes del número borroso triangular que los aproxima $\tilde{f}_t'$, $f_t^{1'}(\alpha)$ o $f_t^{2'}(\alpha)$ como $f_t'(\alpha)$. Podemos observar que los α cortes que se obtienen con la aproximación triangular son:

$$f_t(\alpha) = \alpha f_t(1) + (1-\alpha)f_t(0), 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Entonces, dado que $\frac{d^2 f_t(\alpha)}{d\alpha^2} \geq 0$, (son funciones conexas), se cumple que:

$$f_t(\alpha) = \alpha f_t(1) + (1-\alpha)f_t(0) = f_t(0) + \alpha[f_t(1) - f_t(0)] \geq f_t[1 \cdot \alpha + (1-\alpha) \cdot 0] = f_t(\alpha)$$

Demostremos ahora que $\frac{d^2 f_t^1(\alpha)}{d\alpha^2} \geq 0$ y $\frac{d^2 f_t^2(\alpha)}{d\alpha^2} \geq 0$.

Para $\frac{df_t^1(\alpha)}{d\alpha}$, se obtiene:

$$\frac{df_t^1(\alpha)}{d\alpha} = \sum_{r=1}^t (i_r^3 - i_r^2) \left(1 + i_r^3 - (i_r^3 - i_r^2)\alpha\right)^2 \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^t \left(1 + i_s^3 - (i_s^3 - i_s^2)\alpha\right)^1$$

y la derivada del r-ésimo sumando de $\frac{df_t^1(\alpha)}{d\alpha}$ es:

$$\begin{aligned} & 2(i_r^3 - i_r^2)^2 \left(1 + i_r^3 - (i_r^3 - i_r^2)\alpha\right)^3 \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^t \left(1 + i_s^3 - (i_s^3 - i_s^2)\alpha\right)^1 + \\ & + (i_r^3 - i_r^2) \left(1 + i_r^3 - (i_r^3 - i_r^2)\alpha\right)^2 \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^t (i_s^3 - i_s^2) \left(1 + i_s^3 - (i_s^3 - i_s^2)\alpha\right)^2 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq s \\ j \neq r}}^t \left(1 + i_j^3 - (i_j^3 - i_j^2)\alpha\right)^2 \end{aligned}$$

que es siempre positivo, por lo que la suma de los t sumandos que componen $\frac{d^2 f_t^1(\alpha)}{d\alpha^2}$ también es

positiva, es decir:

$$\frac{d^2 f_t^1(\alpha)}{d\alpha^2} \geq 0.$$

Para $\frac{df_t^2(\alpha)}{d\alpha}$ se obtiene:

$$\frac{df_t^2(\alpha)}{d\alpha} = -\sum_{r=1}^t (i_r^2 - i_r^1) \left(1 + i_r^1 + (i_r^2 - i_r^1)\alpha\right)^{-2} \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^t \left(1 + i_s^1 + (i_s^2 - i_s^1)\alpha\right)^{-1}$$

y la derivada del r -ésimo sumando de $\frac{df_t^2(\alpha)}{d\alpha}$ es:

$$\begin{aligned} & 2(i_r^2 - i_r^1)^2 \left(1 + i_r^1 + (i_r^2 - i_r^1)\alpha\right)^{-3} \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^t \left(1 + i_s^1 + (i_s^2 - i_s^1)\alpha\right)^{-1} + \\ & + (i_r^2 - i_r^1) \left(1 + i_r^1 + (i_r^2 - i_r^1)\alpha\right)^{-2} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^t (i_s^2 - i_s^1) \left(1 + i_s^1 + (i_s^2 - i_s^1)\alpha\right)^{-2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq s \\ j \neq r}}^t \left(1 + i_j^1 + (i_j^2 - i_j^1)\alpha\right)^{-1} \geq 0 \end{aligned}$$

es decir, es positivo, por lo que $\frac{d^2 f_t^2(\alpha)}{d\alpha^2} \geq 0$.

Para hallar el máximo error que en el nivel de pertenencia de un valor se comete por realizar la aproximación triangular, deberemos hallar el máximo global de $D_{It}(\alpha)$ y $D_{Dt}(\alpha)$, es decir, el nivel de presunción en el que se comete el máximo error en los extremos izquierdos de los α -cortes, $\alpha_I^* \in]0, 1[$, cuyo valor notaremos como $D_I^*(t) = D_{It}(\alpha_I^*)$ y el máximo de $D_{Dt}(\alpha)$, que se comete en α_D^* , siendo este máximo notado por $D_D^*(t) = D_{Dt}(\alpha_D^*)$.

Es inmediato comprobar que ambas funciones poseen un máximo local y global $\alpha_I^*, \alpha_D^* \in]0, 1[$. Lo demostraremos únicamente para la función $D_{It}(\alpha)$, ya que para la desviación a la derecha, $D_{Dt}(\alpha)$, la demostración es análoga.

1) Podemos comprobar que $D_{It}(0) = D_{It}(1) = 0$ y que dicha función cumple los requisitos de continuidad y derivabilidad exigidos por el teorema de Rolle. Así, podemos asegurar la existencia de un punto crítico $\alpha_I^* \in [0, 1]$, es decir $\frac{dD_{It}(\alpha)}{d\alpha}(\alpha_I^*) = 0$.

2) Dado que la función que analizamos es estrictamente cóncava, ya que $f_t^1(\alpha)$ es estrictamente convexa, por el teorema local-global, queda demostrado que α_I^* es un máximo global estricto de $D_{It}(\alpha)$, ya que el hecho de que sea estacionario es condición suficiente para su optimalidad.

Para hallar α_I^* y α_D^* deberemos resolver finalmente las siguientes ecuaciones

$$\prod_{r=1}^t (1 + i_r^2)^{-1} - \prod_{r=1}^t (1 + i_r^3)^{-1} - \sum_{r=1}^t (i_r^3 - i_r^2) (1 + i_r^3 - (i_r^3 - i_r^2) \hat{a}_I^*)^{-2} \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^t (1 + i_s^3 - (i_s^3 - i_s^2) \hat{a}_I^*)^{-1} = 0$$

$$\prod_{r=1}^t (1 + i_r^1)^{-1} - \prod_{r=1}^t (1 + i_r^2)^{-1} - \sum_{r=1}^t (i_r^2 - i_r^1) (1 + i_r^2 - (i_r^2 - i_r^1) \hat{a}_D^*)^{-2} \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^t (1 + i_s^2 - (i_s^2 - i_s^1) \hat{a}_D^*)^{-1} = 0$$

Así, el error que podemos cometer como máximo en el nivel de pertenencia por tomar como número borroso representativo del valor actual de 1 unidad monetaria con vencimiento en t a $\tilde{f}_t$ en lugar de $\tilde{f}_t$ vendrá acotado, tal como comprobamos en el apartado 1.4.2. por:

$$\left| \mu_{\tilde{f}_t}(x) - \mu_{\tilde{f}_t^*}(x) \right| \leq \text{Max} \left\{ \frac{D_I^*(t)}{f_t^1(1) - f_t^1(0)}, \frac{D_D^*(t)}{f_t^2(0) - f_t^2(1)} \right\} = \varepsilon_t \quad \forall x.$$

El problema que se nos presenta a continuación es que no es posible dar una expresión analítica a α_I^* y α_D^* . Para ello, deberíamos aplicar algún método numérico que nos permitiera aproximar la raíz de la función derivada que estudiamos, como por ejemplo el método de Newton-Rapson. La alternativa que proponemos nosotros es el análisis a través de polinomios interpolantes, y ya utilizada para un problema similar en Terceño *et al.* (1994). Para ello analizaremos la tabla de diferencias de los extremos de los α -cortes de los factores de actualización tomando valores de su argumento, α , equidistantes para intentar aproximar los α -cortes a través de un polinomio, de forma que a partir del orden de las diferencias en los que éstas sean constantes, nos indicará que grado del polinomio a aproximar es precisamente igual al orden donde esto ocurre.

A continuación realizamos una aplicaciones numéricas siguiendo esta metodología, donde $\Delta\alpha_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i = 0.1$, por lo que $i=0,1,\dots,10$ y $\alpha_0 = 0$. Asimismo analizamos el caso en que la periodicidad de valoración sea anual y que los intereses que el decisor estima vengan dados por los números borrosos triangulares $(0.015+0.005(r-1), 0.02+0.005(r-1), 0.025+0.005(r-1))$, $r=1,2,\dots,10$, siendo el interés a aplicar a partir del décimo año el número borroso triangular constante $(0.06, 0.065, 0.07)$. Posteriormente analizamos el comportamiento de los factores de actualización para cuantías con vencimiento a 3, 5, 15 y 50 años, y su aproximación triangular. En primer lugar calculamos las diferencias de los extremos de los α -cortes hasta un segundo orden. Para $\tilde{f}_3$ se obtiene:

α	$f_t^1(\alpha)$	$f_t^2(\alpha)$	$\Delta f_t^1(\alpha)$	$\Delta f_t^2(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^1(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^2(\alpha)$
0	0,915163	0,942345	0,001334	-0,001384	0,000003	0,000003

0'1	0,916497	0,940961	0,001337	-0,001382	0,000003	0,000003
0'2	0,917834	0,939579	0,001339	-0,001379	0,000003	0,000003
0'3	0,919173	0,938200	0,001342	-0,001376	0,000003	0,000003
0'4	0,920515	0,936823	0,001344	-0,001374	0,000003	0,000003
0'5	0,921860	0,935450	0,001347	-0,001371	0,000003	0,000003
0'6	0,923207	0,934079	0,001350	-0,001368	0,000003	0,000003
0'7	0,924556	0,932710	0,001352	-0,001366	0,000003	0,000003
0'8	0,925909	0,931345	0,001355	-0,001363	0,000003	0,000003
0'9	0,927264	0,929982	0,001358	-0,001360		
1	0,928622	0,928622				

Para el factor de actualización a cinco años, los resultados son:

α	$f_t^1(\alpha)$	$f_t^2(\alpha)$	$\Delta f_t^1(\alpha)$	$\Delta f_t^2(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^1(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^2(\alpha)$
0	0,842071	0,883959	0,002037	-0,002153	0,000006	0,000006
0'1	0,844108	0,881807	0,002043	-0,002147	0,000006	0,000006
0'2	0,846151	0,879660	0,002049	-0,002140	0,000006	0,000006
0'3	0,848200	0,877519	0,002055	-0,002134	0,000006	0,000006
0'4	0,850255	0,875385	0,002061	-0,002128	0,000006	0,000006
0'5	0,852316	0,873257	0,002067	-0,002122	0,000006	0,000006
0'6	0,854383	0,871136	0,002073	-0,002116	0,000006	0,000006
0'7	0,856456	0,869020	0,002079	-0,002109	0,000006	0,000006
0'8	0,858534	0,866911	0,002085	-0,002103	0,000006	0,000006
0'9	0,860619	0,864808	0,002091	-0,002097		
1	0,862710	0,862710				

Para el factor de actualización con vencimiento a 15 años los resultados de las primeras y segundas diferencias de los α -cortes son:

α	$f_t^1(\alpha)$	$f_t^2(\alpha)$	$\Delta f_t^1(\alpha)$	$\Delta f_t^2(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^1(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^2(\alpha)$
0	0,448693	0,517614	0,003203	-0,003702	0,000024	0,000028
0'1	0,451895	0,513912	0,003227	-0,003673	0,000025	0,000028
0'2	0,455122	0,510239	0,003252	-0,003645	0,000025	0,000028
0'3	0,458374	0,506593	0,003276	-0,003618	0,000025	0,000028
0'4	0,461650	0,502976	0,003301	-0,003590	0,000025	0,000027
0'5	0,464952	0,499386	0,003327	-0,003563	0,000025	0,000027
0'6	0,468278	0,495823	0,003352	-0,003536	0,000026	0,000027
0'7	0,471630	0,492287	0,003378	-0,003509	0,000026	0,000027
0'8	0,475008	0,488778	0,003403	-0,003482	0,000026	0,000026
0'9	0,478411	0,485296	0,003429	-0,003456		
1	0,481841	0,481841				

Y si el vencimiento son 50 años, se obtiene:

α	$f_t^1(\alpha)$	$f_t^2(\alpha)$	$\Delta f_t^1(\alpha)$	$\Delta f_t^2(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^1(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^2(\alpha)$
0	0,042026	0,067344	0,000998	-0,001576	0,000024	0,000038
0'1	0,043024	0,065768	0,001022	-0,001539	0,000025	0,000037
0'2	0,044046	0,064230	0,001047	-0,001502	0,000025	0,000036
0'3	0,045093	0,062728	0,001072	-0,001466	0,000026	0,000035
0'4	0,046166	0,061262	0,001098	-0,001431	0,000027	0,000034
0'5	0,047264	0,059831	0,001125	-0,001397	0,000027	0,000033

0'6	0,048389	0,058434	0,001152	-0,001364	0,000028	0,000032
0'7	0,049542	0,057070	0,001180	-0,001331	0,000029	0,000032
0'8	0,050722	0,055738	0,001209	-0,001300	0,000029	0,000031
0'9	0,051931	0,054439	0,001239	-0,001269		
1	0,053170	0,053170				

En cualquier caso, podemos comprobar que las segundas diferencias son constantes para los vencimientos más cercanos (3 y 5 años), y prácticamente constantes para los vencimientos más alejados, y, por tanto, las diferencias de orden superior en los vencimientos más alejados son prácticamente despreciables respecto a las de primer o segundo orden. Así podemos aproximar¹ los extremos de los α -cortes a partir de una expresión cuadrática de α de forma prácticamente perfecta, de tal forma que los extremos superior e inferior de los α -cortes son un polinomio de grado dos que toma idénticos valores en $\alpha=0$, $0'5$ y 1 que $f_t^i(\alpha)$, $i=1,2$. Así los α -cortes de $f_t^i(\alpha)$, $i=1,2$ quedan aproximados de forma prácticamente perfecta por:

$$f_t^i(\alpha) = f_t^i(0) + \frac{f_t^i(0'5) - f_t^i(0)}{1! \cdot 0'5} \alpha + \frac{f_t^i(1) - 2f_t^i(0'5) + f_t^i(0)}{2! \cdot 0'5^2} \alpha(\alpha - 0'5), i=1,2.$$

Tal como se demuestra en Terceño *et al.* (1995), las desviaciones máximas en los extremos de los α -cortes se producen, aproximadamente, ya que los α -cortes son casi cuadráticos, para unos niveles de presunción $\alpha_I^* = \alpha_D^* = 0'5$. En este caso, las desviaciones máximas a la izquierda y a la derecha son:

$$D_I^*(t) \approx D_{It}(0'5) = \frac{1}{2} |f_t^1(1) - 2f_t^1(0'5) + f_t^1(0)| \text{ y } D_D^*(t) \approx D_{Dt}(0'5) = \frac{1}{2} |f_t^2(1) - 2f_t^2(0'5) + f_t^2(0)|$$

De esta forma, los errores que pueden cometerse como máximo se cometen en el nivel de presunción $0'5$ por tomar la función de pertenencia de $\tilde{f}_t$ definida a través de la del número borroso triangular $\tilde{f}_t'$ son:

t	ϵ_t
3	0,002
5	0,004
15	0,010
50	0,030

Si tomamos como referencia de los valores de verdad que puede tomar un valor en una escala endecadaria, observamos que, en todos los casos, el error que podemos cometer por aproximar triangularmente el factor de actualización están por debajo de $0'1$, por lo que podemos aceptar como válida la aproximación triangular.

¹ Sobre polinomios interpolantes, puede consultarse a Burden y Faires (1985, p. 94-147).

A continuación analizamos el caso en que la periodicidad de valoración sea anual y que los intereses que el decisor estima vengan dados por los números borrosos triangulares $(0'01+0'005(r-1), 0'03+0'005(r-1), 0'05+0'005(r-1))$, $r=1,2,\dots,10$, siendo el interés a aplicar a partir de $r=10$ el número borroso triangular $(0'055, 0'075, 0'095)$. Asimismo, analizamos el comportamiento de los factores de actualización para cuantías con vencimientos dentro de 3, 5, 15 y 50 años, como en el caso anterior y posteriormente su aproximación triangular. Calculamos en primer lugar las diferencias de los extremos de los α -cortes hasta un segundo orden para los extremos de los α -cortes de $\tilde{f}_3$ y obtenemos:

α	$f_t^1(\alpha)$	$f_t^2(\alpha)$	$\Delta f_t^1(\alpha)$	$\Delta f_t^2(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^1(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^2(\alpha)$
0	0,851633	0,956340	0,004862	-0,005631	0,000037	0,000044
0'1	0,856495	0,950709	0,004899	-0,005587	0,000037	0,000044
0'2	0,861394	0,945122	0,004936	-0,005543	0,000038	0,000043
0'3	0,866330	0,939579	0,004974	-0,005500	0,000038	0,000043
0'4	0,871304	0,934079	0,005012	-0,005457	0,000039	0,000042
0'5	0,876317	0,928622	0,005051	-0,005415	0,000039	0,000042
0'6	0,881368	0,923207	0,005090	-0,005373	0,000039	0,000042
0'7	0,886457	0,917834	0,005129	-0,005331	0,000040	0,000041
0'8	0,891586	0,912503	0,005169	-0,005290	0,000040	0,000041
0'9	0,896755	0,907213	0,005209	-0,005249		
1	0,901964	0,901964				

Para el factor de actualización a cinco años, los resultados son:

α	$f_t^1(\alpha)$	$f_t^2(\alpha)$	$\Delta f_t^1(\alpha)$	$\Delta f_t^2(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^1(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^2(\alpha)$
0	0,747341	0,905840	0,007091	-0,008829	0,000081	0,000103
0'1	0,754432	0,897010	0,007172	-0,008726	0,000082	0,000102
0'2	0,761604	0,888284	0,007254	-0,008624	0,000083	0,000100
0'3	0,768857	0,879660	0,007337	-0,008524	0,000084	0,000099
0'4	0,776194	0,871136	0,007421	-0,008425	0,000085	0,000098
0'5	0,783615	0,862710	0,007506	-0,008328	0,000086	0,000096
0'6	0,791121	0,854383	0,007593	-0,008231	0,000088	0,000095
0'7	0,798714	0,846151	0,007680	-0,008136	0,000089	0,000094
0'8	0,806394	0,838015	0,007769	-0,008043	0,000090	0,000092
0'9	0,814163	0,829972	0,007859	-0,007950		
1	0,822022	0,822022				

Para el factor de actualización con vencimiento a 15 años los resultados de las primeras y segundas diferencias de los α -cortes son:

α	$f_t^1(\alpha)$	$f_t^2(\alpha)$	$\Delta f_t^1(\alpha)$	$\Delta f_t^2(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^1(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^2(\alpha)$
0	0,315752	0,556234	0,008904	-0,015805	0,000268	0,000478
0'1	0,324656	0,540429	0,009172	-0,015327	0,000277	0,000463
0'2	0,333828	0,525102	0,009449	-0,014864	0,000286	0,000448
0'3	0,343278	0,510239	0,009735	-0,014416	0,000295	0,000434
0'4	0,353013	0,495823	0,010030	-0,013982	0,000305	0,000420

0'5	0,363044	0,481841	0,010335	-0,013562	0,000314	0,000406
0'6	0,373378	0,468278	0,010649	-0,013156	0,000325	0,000394
0'7	0,384028	0,455122	0,010974	-0,012762	0,000335	0,000381
0'8	0,395002	0,442360	0,011309	-0,012381	0,000346	0,000369
0'9	0,406311	0,429978	0,011655	-0,012012		
1	0,417966	0,417966				

Y si el vencimiento son 50 años, se obtiene:

α	$f_t^1(\alpha)$	$f_t^2(\alpha)$	$\Delta f_t^1(\alpha)$	$\Delta f_t^2(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^1(\alpha)$	$\Delta^2 f_t^2(\alpha)$
0	0,013178	0,085393	0,001267	-0,007748	0,000124	0,000716
0'1	0,014445	0,077645	0,001391	-0,007032	0,000137	0,000648
0'2	0,015836	0,070613	0,001528	-0,006384	0,000151	0,000588
0'3	0,017365	0,064230	0,001679	-0,005796	0,000166	0,000533
0'4	0,019044	0,058434	0,001845	-0,005263	0,000183	0,000483
0'5	0,020889	0,053170	0,002028	-0,004781	0,000201	0,000438
0'6	0,022917	0,048389	0,002229	-0,004343	0,000222	0,000397
0'7	0,025146	0,044046	0,002450	-0,003946	0,000244	0,000360
0'8	0,027596	0,040100	0,002695	-0,003586	0,000269	0,000327
0'9	0,030291	0,036514	0,002963	-0,003260		
1	0,033254	0,033254				

Si bien, las segundas diferencias dejan de ser constantes, son prácticamente constantes en $\tilde{f}_3$ y $\tilde{f}_5$ aunque no podemos ser tan categóricos si consideramos los factores de actualización con vencimiento a 15 y 50 años. Sin embargo, en este último supuesto y también en los anteriores, las diferencias de orden superior a 2 son prácticamente despreciables respecto a las dos primeras. Por ello volvemos a aceptar que el ajuste de $f_t^i(\alpha)$, $i=1,2$, por un polinomio de segundo grado que tome los mismo valores en $\alpha=0$, $0'5$ y 1 es casi perfecto.

De esta forma, el máximo global de $D_{It}(\alpha)$ y $D_{Dt}(\alpha)$ vuelve a estar aproximadamente en los niveles de presunción $\alpha_t^* = \alpha_D^* = 0'5$. Las máximas desviaciones de los α -cortes a la izquierda y a la derecha que se producen por tomar $\tilde{f}_t'$ en lugar de $\tilde{f}_t$ vuelven a ser pues $D_{It}(0'5)$ y $D_{Dt}(0'5)$. De esta forma, el error que como máximo se puede cometer por tomar la aproximación triangular a $\tilde{f}_t$, $\tilde{f}_t'$ es:

t	ε_t
3	0,010
5	0,015
15	0,038
50	0,118

Como conclusiones sobre los ejemplos numéricos expuestos, podemos comprobar que casi siempre, pero no siempre, la aproximación triangular al factor de descuento es aceptable si tomamos como referencia la escala endecadaria, escala que por otra parte es la más “exigente” de

entre las que habitualmente se utilizan. Sin embargo, la validez del ajuste triangular va disminuyendo conforme aumenta el radio de los intereses futuros o el vencimiento asociado al factor de descuento que aproximamos. Así, puede darse el caso, si los intereses de valoración son relativamente inciertos (el segundo caso) y los vencimientos largos, (50 años, vencimiento que puede darse en un seguro de vida) que el ajuste triangular no sea válido.

En el caso en que sea razonable aproximar al factor de descuento para un vencimiento t , $\tilde{f}_t$, por un número borroso triangular, $\tilde{f}_t$ la aproximación triangular del valor actual de una cuantía crisp con vencimiento en t , C_t que se halla como producto de dicha cuantía por un número borroso triangular, es decir, $\tilde{Z}_t = C_t \tilde{f}_t$ también debe ser aceptada. Es fácil comprobar que el error relativo que como máximo podemos cometer en el nivel de pertenencia de un valor, al tomar $\tilde{Z}_t$ como un números borroso triangular, $\tilde{Z}_t'$ es exactamente el mismo que el que se comete al aproximar triangularmente el factor de descuento con el que fue obtenido. De esta forma, si aceptamos que:

$$\tilde{f}_t \approx \tilde{f}_t' = \left(\prod_{r=1}^t (1 + i_r^3)^{-1}, \prod_{r=1}^t (1 + i_r^2)^{-1}, \prod_{r=1}^t (1 + i_r^1)^{-1} \right)$$

debe ser aceptado que:

$$\tilde{Z}_t \approx \tilde{Z}_t' = \left(C_t \prod_{r=1}^t (1 + i_r^3)^{-1}, C_t \prod_{r=1}^t (1 + i_r^2)^{-1}, C_t \prod_{r=1}^t (1 + i_r^1)^{-1} \right)$$

4.2.3.2. Aproximación triangular al factor de actualización cuando el interés triangular aplicado es constante a lo largo del tiempo

Si bien, las cuestiones comentadas en el punto 4.2.3.1. pueden hacerse extensibles a este epígrafe, dado que el supuesto de interés constante y triangular tiene especial relevancia desde el punto de vista de la valoración financiera –y también en la valoración financiero-actuarial-, creemos que debemos dedicar a este supuesto un punto aparte.

En este caso, y continuando con la metodología expuesta en el apartado 1.4.2., en este caso el problema se reduce a aproximar un número borroso triangular a $\tilde{A}^n$ con n negativo (en concreto, $-t$) y siendo $\tilde{A}$ un número borroso triangular, ya que $\tilde{A} = (1 + \tilde{i})$. De esta forma, el número borroso triangular que pretendemos aproximar a través de un número borroso triangular es:

$$\tilde{f}_t = (1 + \tilde{i})^{-t}$$

donde $\tilde{i} = (i^1, i^2, i^3)$ es:

$$\tilde{f}_t \approx \tilde{f}_t' = \left((1+i^3)^{-t}, (1+i^2)^{-t}, (1+i^1)^{-t} \right)$$

En este caso, las desviaciones que se cometen a la derecha y a la izquierda de los α -cortes por el hecho de aproximarlos linealmente son respectivamente, $D_{It}(\alpha)$ y $D_{Dt}(\alpha)$:

$$D_{It}(\alpha) = (1+i^3)^{-t} + \left[(1+i^2)^{-t} - (1+i^3)^{-t} \right] \alpha - (1+i^3 - (i^3 - i^2)) \alpha^{-t}$$

$$D_{Dt}(\alpha) = (1+i^1)^{-t} - \left[(1+i^1)^{-t} - (1+i^2)^{-t} \right] \alpha - (1+i^1 + (i^2 - i^1)) \alpha^{-t}$$

y a partir de los resultados expuestos en el apartado 1.4.2., es inmediato comprobar que las desviaciones máximas que se producen en los extremos de los α -cortes por tomar una aproximación triangular con el mismo centro y radio deberían hallarse a través de los niveles de presunción en los cuales se produce la mayor desviación a la izquierda, α_I^* y a la derecha, α_D^* . Éstos se obtendrán igualando la primera derivada de $D_{It}(\alpha)$ y $D_{Dt}(\alpha)$ a cero. Concretamente obtendremos que:

$$\alpha_I^* = \frac{1+i^3}{i^3-i^2} - \left(\frac{\left[(1+i^2)^{-t} - (1+i^3)^{-t} \right]}{t(i^3-i^2)^{-t}} \right)^{-\frac{1}{t+1}}$$

$$\alpha_D^* = \left(\frac{\left[(1+i^1)^{-t} - (1+i^2)^{-t} \right]}{t(i^2-i^1)^{-t}} \right)^{-\frac{1}{t+1}} - \frac{1+i^1}{i^2-i^1}$$

Así, las máximas desviaciones a la izquierda, $D_I^*(t)$, y a la derecha, $D_D^*(t)$ son:

$$D_I^*(t) = (1+i^3)^{-t} + \left[(1+i^2)^{-t} - (1+i^3)^{-t} \right] \alpha_I^* - (1+i^3 - (i^3 - i^2)) \alpha_I^{*-t}$$

$$D_D^*(t) = (1+i^1)^{-t} - \left[(1+i^1)^{-t} - (1+i^2)^{-t} \right] \alpha_D^* - (1+i^1 + (i^2 - i^1)) \alpha_D^{*-t}$$

El error máximo que puede ser cometido en el nivel de presunción de un valor x , ε_t , por tomarse $\tilde{f}_t'$, se calculará en este caso como:

$$\left| \mu_{\tilde{f}_t'}(x) - \mu_{\tilde{f}_t}(x) \right| \leq \text{Max} \left\{ \frac{D_I^*(t)}{(1+i^2)^{-t} - (1+i^3)^{-t}}, \frac{D_D^*(t)}{(1+i^1)^{-t} - (1+i^2)^{-t}} \right\} = \varepsilon_t$$

A continuación presentamos los resultados de los errores que cometemos realizando una aproximación triangular del factor de actualización definidos por intereses triangulares simétricos con diferentes radios –diferentes niveles de incertidumbre- y para diversos vencimientos. En concreto, los centros de los tipos de interés que consideraremos son {2%, 3%, 4%, 5%, 6%, 7%, 8%, 9%} siendo los radios del 0'5% y del 2%. Para un radio del 0'5%, el valor de ε_t para $t=3,5,15$ y 50 es:

Radio=0,005								
t/centros	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
3	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
5	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,003	0,003
15	0,010	0,010	0,010	0,010	0,009	0,009	0,009	0,009
50	0,031	0,031	0,031	0,030	0,030	0,030	0,030	0,029

Y si el radio del interés borroso es del 2%, entonces obtenemos:

Radio=0,02								
t/centros	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
3	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,009	0,009	0,009
5	0,015	0,015	0,015	0,014	0,014	0,014	0,014	0,014
15	0,040	0,039	0,039	0,038	0,038	0,038	0,037	0,037
50	0,125	0,123	0,122	0,121	0,120	0,119	0,118	0,117

En cualquier caso, podemos observar que:

- a) A medida que aumenta el radio y/o el vencimiento del factor de descuento la aproximación triangular es cada vez peor. Aunque en la mayor parte de casos aceptaríamos, la aproximación triangular si adoptáramos una escala endecadaria o una menos detallada, podemos comprobar que para un vencimiento de 50 años y un radio del 2% la aproximación triangular no puede ser aceptada con dicha escala.
- b) A medida que aumenta la magnitud del interés de valoración, si entendemos como medida de dicha magnitud su centro, y para un radio y vencimiento dados, aumenta la validez de la aproximación de $\tilde{f}_t$ mediante un número borroso triangular, esto es, disminuye el error que se comete en el nivel de presunción de un valor por el hecho de tomar como factor de descuento su número borroso triangular aproximado.

4.3. VALORACIÓN DE RENTAS FINANCIERAS CON CUANTÍAS Y NÚMERO DE TÉRMINOS CIERTOS CON INTERESES ESTIMADOS A TRAVÉS DE NÚMEROS BORROSOS

4.3.1. Planteamiento general

Definimos como renta a un conjunto de capitales financieros que devengan según una periodicidad predeterminada, P , expresada en años. En este epígrafe, aunque supondremos que el interés o intereses de valoración son borrosos, consideraremos que las cuantías serán ciertas y que las rentas serán, en cualquier caso, temporales y con un número conocido de términos.

Podemos notar al conjunto de capitales financieros que conforman una renta como $\{(C_r, t_r)\}_{r=1,2,\dots,n}$ donde $t_{r+1}-t_r = P \ \forall r=1,2,\dots,n-1$, siendo n el número de términos de la renta. Si descomponemos el diferimiento del r -ésimo capital que conforma la renta como $t_r = d+(r-1)P$, denotamos como dP al “diferimiento de la renta”. Obsérvese que hemos supuesto, en cualquier caso, que las rentas son de naturaleza, prepagables, ya que este es el supuesto más usual en las rentas actuariales. Asimismo, ello nos permitirá no distinguir entre rentas anticipadas y vencidas. Así, si la renta es inmediata y anticipada tomamos $d=0$ y si es inmediata y vencida, basta con tomar $d=1$. Asimismo, cualquier renta diferida, pueden tratarse con un diferimiento determinado. Para un diferimiento de d periodos, con $d>1$, una renta puede ser, desde el punto de vista clásico, diferida d periodos anticipada o bien diferida $d-1$ periodos y vencida.

A la hora de determinar las expresiones correspondientes al valor actual de las rentas, supondremos que el diferimiento de ésta es un número entero de periodos. Si bien es cierto que

no habría problema en considerar el diferimiento de la renta como un número no entero de periodos, creemos que lo único que conseguiríamos es cargar más la notación sin aportar ningún aspecto relevante desde el punto de vista metodológico y conceptual..

De esta forma, como el interés o los intereses de valoración serán borrosos, el valor actual de una renta será un número borroso el cual simbolizaremos como ${}_{dl}\tilde{V}_0^n$ donde d indica el diferimiento en periodos de la renta y n su número de términos. Dicho valor se hallará como la suma del valor actual de los n capitales que conforman la misma. Así, si el interés estimado a través de un tanto efectivo de la misma periodicidad y frecuencia para cada uno de los periodos de los que consta el horizonte planificador es:

$$\tilde{i}_r = \{x, \mu_{\tilde{i}_r}(x)\} = \{i_{r_\alpha} = [i_r^1(\alpha), i_r^2(\alpha)], 0 \leq \alpha \leq 1\}, r=1,2,\dots,d+n-1.$$

el valor actual de la renta se obtiene como:

$${}_{dl}\tilde{V}_0^n = \sum_{r=1}^n \tilde{Z}_r = \sum_{r=1}^n C_r \tilde{f}_{d+(r-1)} = \sum_{r=1}^n C_r \prod_{s=1}^{d+(r-1)} (1 + \tilde{i}_s)$$

Siendo entonces la función de pertenencia del valor actual, $\mu_{{}_{dl}\tilde{V}_0^n}(x)$:

$$\mu_{\tilde{i}_t}(x) = \bigvee_{x = \prod_{r=1}^t (1+x_r)^{-1}} \left(\bigwedge_{r=1}^t \mu_{i_r}(x_r) \right)$$

y sus α -cortes, ${}_{dl}V_{0_\alpha}^n$:

$$\begin{aligned} {}_{dl}V_{0_\alpha}^n &= [{}_{dl}V_{0_\alpha}^{1,n}(\alpha), {}_{dl}V_{0_\alpha}^{2,n}(\alpha)] = \left[\sum_{r=1}^n C_r f_{d+r-1}^1(\alpha), \sum_{r=1}^n C_r f_{d+r-1}^2(\alpha) \right] = \left[\sum_{r=1}^n C_r \prod_{s=1}^{d+r-1} (1 + i_s^2(\alpha))^{-1} \right. \\ &\quad \left. \sum_{r=1}^n C_r \prod_{s=1}^{d+r-1} (1 + i_s^1(\alpha))^{-1} \right] = \left[\prod_{s=1}^d (1 + i_s^2(\alpha))^{-1} \sum_{r=1}^n C_r \prod_{s=d+1}^{d+r-1} (1 + i_s^2(\alpha))^{-1}, \prod_{s=1}^d (1 + i_s^1(\alpha))^{-1} \sum_{r=1}^n C_r \prod_{s=d+1}^{d+r-1} (1 + i_s^1(\alpha))^{-1} \right] \end{aligned}$$

donde $\prod_{r=m}^n a_r = 1$ si $n < m$.

En el caso particular de una renta unitaria, es decir, $C_r = 1 \forall r$, notaremos al valor de una renta de n términos como ${}_{dl}\tilde{a}_{n|}$, siendo entonces sus α -cortes, ${}_{dl}\tilde{a}_{n|\alpha}$:

$${}_{dl}\tilde{a}_{n|\alpha} = [{}_{dl}\tilde{a}_{n|}^1(\alpha), {}_{dl}\tilde{a}_{n|}^2(\alpha)] = \left[\prod_{s=1}^d (1 + i_s^2(\alpha))^{-1} \sum_{r=1}^n \prod_{s=d+1}^{d+r-1} (1 + i_s^2(\alpha))^{-1}, \prod_{s=1}^d (1 + i_s^1(\alpha))^{-1} \sum_{r=1}^n \prod_{s=d+1}^{d+r-1} (1 + i_s^1(\alpha))^{-1} \right]$$

Asimismo, si la renta presenta un diferimiento $d=1$ –que en el estudio clásico de rentas calificaríamos de inmediata y vencida-, notamos a su valor actual como $\tilde{a}_{n|}^-$, siendo sus α -cortes,

$a_{n| \alpha}^- :$

$$a_{n| \alpha}^- = [a_{n|}^1(\alpha), a_{n|}^2(\alpha)] = \left[\sum_{r=1}^n \prod_{s=1}^r (1+i_s^2(\alpha))^{-1}, \sum_{r=1}^n \prod_{s=1}^r (1+i_s^1(\alpha))^{-1} \right]$$

y si es inmediata y anticipada ($d=0$), notamos al valor actual de dicha renta como $\tilde{\ddot{a}}_{n|}^-$, siendo entonces sus α cortes, $\ddot{a}_{n| \alpha}^- :$

$$\ddot{a}_{n| \alpha}^- = [\ddot{a}_{n|}^1(\alpha), \ddot{a}_{n|}^2(\alpha)] = \left[(1+i_1^2(\alpha)) \sum_{r=1}^n \prod_{s=1}^r (1+i_s^2(\alpha))^{-1}, (1+i_1^1(\alpha)) \sum_{r=1}^n \prod_{s=1}^r (1+i_s^1(\alpha))^{-1} \right]$$

Por supuesto, si se trata de una renta constante, $C_r=C \forall r$, supuesto muy usual en la práctica financiero, para hallar ${}_d\tilde{V}_0^n$ bastará con multiplicar la cuantía de la renta por el valor actual de la renta unitaria, es decir, $C {}_d\tilde{a}_{n|}^-$.

4.3.2. Valor actual de rentas temporales valoradas a través de números borrosos constantes a lo largo de todo el periodo de valoración

A continuación presentamos las expresiones del valor actual de aquellas rentas para las cuales el número borroso que cuantifica el interés correspondiente a cada año se mantiene constante, es decir, $\tilde{i}_t = \tilde{i}_{t+1} = \tilde{i} \forall r$. De forma más particular, estudiaremos las expresiones del valor actual correspondientes a las rentas constantes ($C_{r+1}=C_r \forall r$) y a las que sus cuantías son variables en progresión geométrica ($C_{r+1}=C_r q \forall r$).

De forma general, la expresión de ${}_d\tilde{V}_0^n$ para un interés constante y borroso:

$${}_d\tilde{V}_0^n = \sum_{r=1}^n \tilde{Z}_r = \sum_{r=1}^n C_r \tilde{f}_{d+(r-1)} = \sum_{r=1}^n C_r (1+\tilde{i})^{-d-r+1}$$

siendo entonces sus α -cortes, ${}_dV_{0 \alpha}^n :$

$$\begin{aligned} {}_{d|}\tilde{V}_{0\alpha}^n &= \left[{}_{d|}\tilde{V}_0^{1,n}(\alpha), {}_{d|}\tilde{V}_0^{2,n}(\alpha) \right] = \left[\sum_{r=1}^n C_r f_{d+r-1}^1(\alpha), \sum_{r=1}^n C_r f_{d+r-1}^2(\alpha) \right] = \left[\sum_{r=1}^n C_r (1+i^2(\alpha))^{-d-r+1}, \sum_{r=1}^n C_r (1+i^1(\alpha))^{-d-r+1} \right] = \\ &= \left[(1+i^2(\alpha))^{-d+1} \sum_{r=1}^n C_r (1+i^2(\alpha))^{-r}, (1+i^1(\alpha))^{-d+1} \sum_{r=1}^n C_r (1+i^1(\alpha))^{-r} \right] \end{aligned}$$

De esta forma, para una renta constante y unitaria, su valor actual, ${}_{d|}\tilde{a}_{n|}$, vendrá dado a través de sus α -cortes como:

$$\begin{aligned} {}_{d|}\tilde{a}_{n|\alpha} &= \left[{}_{d|}\tilde{a}_{n|}^1(\alpha), {}_{d|}\tilde{a}_{n|}^2(\alpha) \right] = \left[{}_{d|}\tilde{a}_{n|i^2(\alpha)}^1, {}_{d|}\tilde{a}_{n|i^1(\alpha)}^2 \right] = \left[(1+i^2(\alpha))^{-d+1} \sum_{r=1}^n (1+i^2(\alpha))^{-r}, (1+i^1(\alpha))^{-d+1} \sum_{r=1}^n (1+i^1(\alpha))^{-r} \right] = \\ &= \left[(1+i^2(\alpha))^{-d+1} \frac{1-(1+i^2(\alpha))^{-n}}{i^2(\alpha)}, (1+i^1(\alpha))^{-d+1} \frac{1-(1+i^1(\alpha))^{-n}}{i^1(\alpha)} \right] = \left[a_{n|i^2(\alpha)}^1 (1+i^2(\alpha))^{-d+1}, a_{n|i^1(\alpha)}^2 (1+i^1(\alpha))^{-d+1} \right] \end{aligned}$$

Si dicha renta unitaria es inmediata y vencida, entonces los α -cortes de $\tilde{a}_{n|}$, $\tilde{a}_{n|\alpha}$ vendrán dados por:

$$\begin{aligned} a_{n|\alpha}^- &= \left[a_{n|}^1(\alpha), a_{n|}^2(\alpha) \right] = \left[a_{n|i^2(\alpha)}^-, a_{n|i^1(\alpha)}^- \right] = \left[\sum_{r=1}^n (1+i^2(\alpha))^{-r}, \sum_{r=1}^n (1+i^1(\alpha))^{-r} \right] = \\ &= \left[\frac{1-(1+i^2(\alpha))^{-n}}{i^2(\alpha)}, \frac{1-(1+i^1(\alpha))^{-n}}{i^1(\alpha)} \right] \end{aligned}$$

y si es inmediata y anticipada, entonces los α -cortes de $\tilde{a}_{n|}$, $\tilde{a}_{n|\alpha}$ vendrán dados por:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{n|\alpha} &= \left[\tilde{a}_{n|}^1(\alpha), \tilde{a}_{n|}^2(\alpha) \right] = \left[\tilde{a}_{n|i^2(\alpha)}^-, \tilde{a}_{n|i^1(\alpha)}^- \right] = \left[(1+i^2(\alpha)) \sum_{r=1}^n (1+i^2(\alpha))^{-r}, (1+i^1(\alpha)) \sum_{r=1}^n (1+i^1(\alpha))^{-r} \right] = \\ &= \left[(1+i^2(\alpha)) \frac{1-(1+i^2(\alpha))^{-n}}{i^2(\alpha)}, (1+i^1(\alpha)) \frac{1-(1+i^1(\alpha))^{-n}}{i^1(\alpha)} \right] = \left[(1+i^2(\alpha)) a_{n|i^2(\alpha)}^-, (1+i^1(\alpha)) a_{n|i^1(\alpha)}^- \right] \end{aligned}$$

Por supuesto, para hallar el valor actual de una renta constante, bastará con multiplicar la cuantía constante de la renta por el valor actual de la renta unitaria con la misma duración y diferimiento.

De forma general, se obtiene:

$${}_{d|}\tilde{V}_0^n = C {}_{d|}\tilde{a}_{n|}$$

y si es inmediata y vencida o inmediata y anticipada, obtenemos, respectivamente:

$${}_{l|}\tilde{V}_0^n = C \tilde{a}_{n|}$$

$${}_{0|}\tilde{V}_0^n = C \tilde{a}_{n|}$$

siendo por tanto la determinación de los α -cortes de ${}_{d|}\tilde{V}_0^n$, ${}_{1|}\tilde{V}_0^n$ o ${}_{0|}\tilde{V}_0^n$ inmediata.

En el caso de rentas variables en progresión geométrica, las cuantías de la renta, al ser ciertas, varía según una progresión geométrica de razón $q > 0$ cierta. Así, el r -ésimo término de la renta, C_r , puede ser escrito a través del primero, C_1 , como $C_r = C_1 q^{r-1}$. Entonces, el conjunto de capitales financieros que conforman la renta es $\{C_1 q^{r-1}, [d + (r-1)]P\}_{r=1,2,\dots,n}$, siendo por tanto su valor actual:

$${}_{d|}\tilde{V}_0^n = \sum_{r=1}^n \tilde{Z}_r = \sum_{r=1}^n C_1 q^{r-1} \tilde{f}_{d+(r-1)} = \sum_{r=1}^n C_1 q^{r-1} (1 + \tilde{i})^{-d-r+1}$$

Entonces los α -cortes de ${}_{d|}\tilde{V}_0^n$, ${}_{d|}V_{0\alpha}^n$ son:

$${}_{d|}V_{0\alpha}^n = [{}_{d|}V_{0\alpha}^{1,n}(\alpha), {}_{d|}V_{0\alpha}^{2,n}(\alpha)] = \left[(1 + i^2(\alpha))^{-d+1} \sum_{r=1}^n C_1 q^{r-1} (1 + i^2(\alpha))^{-r}, (1 + i^1(\alpha))^{-d+1} \sum_{r=1}^n C_1 q^{r-1} (1 + i^1(\alpha))^{-r} \right]$$

obteniéndose finalmente:

$${}_{d|}V_{0\alpha}^n = \begin{cases} \left[C_1 \frac{1 - q^n (1 + i^2(\alpha))^{-n}}{1 + i^2(\alpha) - q} (1 + i^2(\alpha))^{-d+1}, C_1 \frac{1 - q^n (1 + i^1(\alpha))^{-n}}{1 + i^1(\alpha) - q} (1 + i^1(\alpha))^{-d+1} \right] & q \neq 1 + i^1(\alpha), 1 + i^2(\alpha) \\ \left[C_1 \frac{n}{1 + i^2(\alpha)} (1 + i^2(\alpha))^{-d+1}, C_1 \frac{1 - q^n (1 + i^1(\alpha))^{-n}}{1 + i^1(\alpha) - q} (1 + i^1(\alpha))^{-d+1} \right] & q = 1 + i^2(\alpha) \\ \left[C_1 \frac{1 - q^n (1 + i^2(\alpha))^{-n}}{1 + i^2(\alpha) - q} (1 + i^2(\alpha))^{-d+1}, C_1 \frac{n}{1 + i^1(\alpha)} (1 + i^1(\alpha))^{-d+1} \right] & q = 1 + i^1(\alpha) \\ \left[C_1 \frac{n}{1 + i^2(\alpha)} (1 + i^2(\alpha))^{-d+1}, C_1 \frac{n}{1 + i^1(\alpha)} (1 + i^1(\alpha))^{-d+1} \right] = C_1 \frac{n}{1 + i^1(\alpha)} (1 + i^1(\alpha))^{-d+1} & q = 1 + i^1(\alpha) = 1 + i^2(\alpha) \end{cases}$$

En el caso particular, en que la renta sea inmediata y vencida, ($d=1$) el resultado que obtenemos para sus α -cortes es:

$${}_{1|}V_{0\alpha}^n = \begin{cases} \left[C_1 \frac{1 - q^n (1 + i^2(\alpha))^{-n}}{1 + i^2(\alpha) - q}, C_1 \frac{1 - q^n (1 + i^1(\alpha))^{-n}}{1 + i^1(\alpha) - q} \right] & q \neq 1 + i^1(\alpha), 1 + i^2(\alpha) \\ \left[C_1 \frac{n}{1 + i^2(\alpha)}, C_1 \frac{1 - q^n (1 + i^1(\alpha))^{-n}}{1 + i^1(\alpha) - q} \right] & q = 1 + i^2(\alpha) \\ \left[C_1 \frac{1 - q^n (1 + i^2(\alpha))^{-n}}{1 + i^2(\alpha) - q}, C_1 \frac{n}{1 + i^1(\alpha)} \right] & q = 1 + i^1(\alpha) \\ \left[C_1 \frac{n}{1 + i^2(\alpha)}, C_1 \frac{n}{1 + i^1(\alpha)} \right] = C_1 \frac{n}{1 + i^2(\alpha)} & q = 1 + i^1(\alpha) = 1 + i^2(\alpha) \end{cases}$$

Y si es inmediata y anticipada, entonces los α -cortes son:

$${}_0V_{0\alpha}^n = \begin{cases} \left[C_1 \frac{1-q^n(1+i^2(\alpha))^{-n}}{1+i^2(\alpha)-q} (1+i^2(\alpha)), C_1 \frac{1-q^n(1+i^1(\alpha))^{-n}}{1+i^1(\alpha)-q} (1+i^1(\alpha)) \right] & q \neq 1+i^1(\alpha), 1+i^2(\alpha) \\ \left[C_1 n, C_1 \frac{1-q^n(1+i^1(\alpha))^{-n}}{1+i^1(\alpha)-q} (1+i^1(\alpha)) \right] & q = 1+i^2(\alpha) \\ \left[C_1 \frac{1-q^n(1+i^2(\alpha))^{-n}}{1+i^2(\alpha)-q} (1+i^2(\alpha)), C_1 n \right] & q = 1+i^1(\alpha) \\ [C_1 n, C_1 n] = C_1 n & q = 1+i^1(\alpha) = 1+i^2(\alpha) \end{cases}$$

4.3.3. Valor actual de rentas temporales con intereses de valoración estimados a través de números borrosos triangulares

En este apartado supondremos que los intereses a aplicar durante los $d+n-1$ periodos de los que consta el horizonte de valoración vienen dados a través de un tanto efectivo de la misma periodicidad de la renta, P , que expresamos como:

$$\tilde{i}_r = (i_r^1, i_r^2, i_r^3), r=1, 2, \dots, d+n-1$$

Para hallar los α -cortes de las expresiones del valor actual de las rentas con número de términos y cuantías ciertas, bastará con sustituir la expresión correspondiente a los extremos inferior y superior de los α -cortes correspondientes al tanto efectivo de periodicidad P de cada periodo, $\tilde{i}_r$, $r=1, 2, \dots, d+n-1$ en los extremos superior e inferior de los α -cortes del valor actual, respectivamente. De forma general, la expresión de los α -cortes del valor actual de una renta son, bajo la hipótesis de triangularidad en el interés de valoración:

$${}_dV_{0\alpha}^n = [{}_dV_{0\alpha}^{1,n}(\alpha), {}_dV_{0\alpha}^{2,n}(\alpha)] = \left[\prod_{s=1}^d (1+i_s^3 - (i_s^3 - i_s^2)\alpha)^{-1} \sum_{r=1}^n C_r \prod_{s=d+1}^{d+r-1} (1+i_s^3 - (i_s^3 - i_s^2)\alpha)^{-1}, \right. \\ \left. \prod_{s=1}^d (1+i_s^1 + (i_s^2 - i_s^1)\alpha)^{-1} \sum_{r=1}^n C_r \prod_{s=d+1}^{d+r-1} (1+i_r^1 + (i_s^2 - i_s^1)\alpha)^{-1} \right]$$

Asimismo, en el caso en que las rentas sean valoradas mediante intereses estimados como números borrosos triangulares constantes, es decir, $\tilde{i}_r = \tilde{i} = (i^1, i^2, i^3) \forall r$, las expresiones de los α -cortes del valor actual son:

$${}_{d|}V_{0\alpha}^n = \left[{}_{d|}V_{0\alpha}^{1,n}(\alpha), {}_{d|}V_{0\alpha}^{2,n}(\alpha) \right] = \left[\left(1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha \right)^{-d+1} \sum_{r=1}^n C_r \left(1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha \right)^{-r}, \right. \\ \left. \left(1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha \right)^{-d+1} \sum_{r=1}^n C_r \left(1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha \right)^{-r} \right]$$

De esta forma, para una renta constante, sus α -cortes toman la siguiente expresión:

$${}_{d|}V_{0\alpha}^n = \left[C_{d|} \ddot{a}_{n|}^1(\alpha), C_{d|} \ddot{a}_{n|}^2(\alpha) \right] = \left[C \left(1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha \right)^{-d+1} a_{n|i^3 - (i^3 - i^2)\alpha}^-, C \left(1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha \right)^{-d+1} a_{n|i^1 + (i^2 - i^1)\alpha}^- \right]$$

Si esta es inmediata y vencida, entonces sus α -cortes se hallan como:

$${}_1|V_{0\alpha}^n = \left[Ca_{n|}^1(\alpha), Ca_{n|}^2(\alpha) \right] = \left[Ca_{n|i^3 - (i^3 - i^2)\alpha}^-, Ca_{n|i^1 + (i^2 - i^1)\alpha}^- \right]$$

Y si es inmediata y anticipada, entonces el resultado que obtenemos es:

$${}_0|V_{0\alpha}^n = \left[C\ddot{a}_{n|}^1(\alpha), C\ddot{a}_{n|}^2(\alpha) \right] = \left[C \left(1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha \right) a_{n|i^3 - (i^3 - i^2)\alpha}^-, C \left(1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha \right) a_{n|i^1 + (i^2 - i^1)\alpha}^- \right]$$

Para rentas cuyas cuantías son ciertas y varían según una progresión geométrica de razón q , que también suponemos cierta, la expresión de los α -cortes del valor actual para cualquier diferimiento d es:

$${}_{d|}V_{0\alpha}^n = \begin{cases} \left[C_1 \frac{1-q^n(1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-n}}{1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha - q} (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-d+1}, C_1 \frac{1-q^n(1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-n}}{1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha - q} (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-d+1} \right] & q \neq 1+i^1(\alpha), 1+i^2(\alpha) \\ \left[C_1 \frac{n}{1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha} (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-d+1}, C_1 \frac{1-q^n(1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-n}}{1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha - q} (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-d+1} \right] & q = 1+i^2(\alpha) \\ \left[C_1 \frac{1-q^n(1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-n}}{1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha - q} (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-d+1}, C_1 \frac{n}{1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha} (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-d+1} \right] & q = 1+i^1(\alpha) \\ \left[C_1 \frac{n}{1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha} (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-d+1}, C_1 \frac{n}{1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha} (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-d+1} \right] = & q = 1+i^2(\alpha) = 1+i^1(\alpha) \\ & = C_1 \frac{n}{1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha} (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-d+1} \end{cases}$$

Si la renta es inmediata y vencida ($d=1$), entonces los α -cortes de $\widetilde{V}_0^n$, ${}_{d|}V_{0\alpha}^n$ son:

$${}_1|V_{0\alpha}^n = \begin{cases} \left[C_1 \frac{1-q^n(1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-n}}{1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha - q}, C_1 \frac{1-q^n(1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-n}}{1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha - q} \right] & q \neq 1+i^1(\alpha), 1+i^2(\alpha) \\ \left[C_1 \frac{n}{1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha}, C_1 \frac{1-q^n(1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-n}}{1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha - q} \right] & q = 1+i^2(\alpha) \\ \left[C_1 \frac{1-q^n(1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-n}}{1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha - q}, C_1 \frac{n}{1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha} \right] & q = 1+i^1(\alpha) \\ \left[C_1 \frac{n}{1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha}, C_1 \frac{n}{1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha} \right] = C_1 \frac{n}{1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha} & q = 1+i^2(\alpha) = 1+i^1(\alpha) \end{cases}$$

Si la renta es inmediata y anticipada ($d=0$), entonces el resultado que obtenemos para los α -cortes del valor actual es:

$${}_0V_{0\alpha}^n = \begin{cases} \left[C_1 \frac{1-q^n(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-n}}{1+i^3-(i^3-i^2)\alpha-q} (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha), C_1 \frac{1-q^n(1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-n}}{1+i^1+(i^2-i^1)\alpha-q} (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha) \right] & q \neq 1+i^1(\alpha), 1+i^2(\alpha) \\ \left[C_1 n, C_1 \frac{1-q^n(1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-n}}{1+i^1+(i^2-i^1)\alpha-q} (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha) \right] & q = 1+i^2(\alpha) \\ \left[C_1 \frac{1-q^n(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-n}}{1+i^3-(i^3-i^2)\alpha-q} (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha), C_1 n \right] & q = 1+i^1(\alpha) \\ [C_1 n, C_1 n] = C_1 n & q = 1+i^2(\alpha) = 1+i^1(\alpha) \end{cases}$$

4.3.4. Aproximación triangular del valor actual de una renta valorada con intereses estimados por números borrosos triangulares

Ya comprobamos al analizar los valores actuales de los capitales financieros valorados con intereses cuantificados por números borrosos triangulares, que el resultado que obtenemos para su valor actual no es un número borroso triangular. Por tanto, tampoco lo será si valoramos rentas financieras. Sin embargo, si aceptamos que el valor actual del r -ésimo capital financiero que forma parte de la renta puede ser aproximado mediante un número borroso triangular, es decir:

$$\tilde{Z}_r \approx (C_r f_{d+r-1}^1(0), C_r f_{d+r-1}^1(1) = C_r f_{d+r-1}^2(1), C_r f_{d+r-1}^2(0))$$

como de la suma de números borrosos triangulares se obtiene un número borroso triangular de la misma naturaleza, si utilizamos la aproximación triangular de cada uno de los sumandos, obtendremos que el valor actual de la renta es aproximadamente un número borroso triangular, ${}_d\tilde{V}_0^n$, cuyo valor es:

$$\begin{aligned} {}_dV_0^n &\approx {}_dV_0^{n'} = ({}_dV_0^{1,n}(0), {}_dV_0^{1,n}(1) = {}_dV_0^{2,n}(1), {}_dV_0^{2,n}(0)) = \\ &= \left(\sum_{r=1}^n C_r f_{d+r-1}^1(0), \sum_{r=1}^n C_r f_{d+r-1}^1(1) = \sum_{r=1}^n C_r f_{d+r-1}^2(1), \sum_{r=1}^n C_r f_{d+r-1}^2(0) \right) \end{aligned}$$

De esta forma, las aproximaciones triangulares propuestas son, de forma general:

$${}_d\tilde{V}_0^n \approx {}_dV_0^{n'} = \left(\prod_{s=1}^d (1+i_r^3)^{-1} \sum_{r=1}^n C_r \prod_{s=d+1}^{d+r-1} (1+i_r^3)^{-1}, \prod_{s=1}^d (1+i_r^2)^{-1} \sum_{r=1}^n C_r \prod_{s=d+1}^{d+r-1} (1+i_r^2)^{-1}, \prod_{s=1}^d (1+i_r^1)^{-1} \sum_{r=1}^n C_r \prod_{s=d+1}^{d+r-1} (1+i_r^1)^{-1} \right)$$

Si el interés a aplicar durante todos los periodos es un número borroso triangular constante, entonces proponemos:

$${}_d\tilde{V}_0^n \approx {}_dV_0^{n'} = \left((1+i^3)^{-d+1} \sum_{r=1}^n C_r (1+i^3)^{-r}, (1+i^2)^{-d+1} \sum_{r=1}^n C_r (1+i^2)^{-r}, (1+i^1)^{-d+1} \sum_{r=1}^n C_r (1+i^1)^{-r} \right)$$

Por otra parte, si la renta es contante y el interés es también constante y triangular, la aproximación de la misma naturaleza propuesta es:

$${}_d\tilde{V}_0^n \approx {}_dV_0^n = \left(C(1+i^3)^{-d+1} a_{\overline{n}|i^3}, C(1+i^2)^{-d+1} a_{\overline{n}|i^2}, C(1+i^1)^{-d+1} a_{\overline{n}|i^1} \right)$$

y si la renta fuera constante, inmediata y vencida, entonces la aproximación propuesta sería:

$${}_0\tilde{V}_0^n \approx {}_0V_0^n = \left(Ca_{\overline{n}|i^3}, Ca_{\overline{n}|i^2}, Ca_{\overline{n}|i^1} \right)$$

Asimismo si la renta fuera constante, inmediata y anticipada, la aproximación que se propone es:

$${}_0\tilde{V}_0^n \approx \left(C(1+i^3) a_{\overline{n}|i^3}, C(1+i^2) a_{\overline{n}|i^2}, C(1+i^1) a_{\overline{n}|i^1} \right)$$

Por otra parte, para rentas variables en progresión geométrica, la aproximación triangular propuesta para cualquier diferimiento y suponiéndose interés constante y triangular es:

$${}_d\tilde{V}_0^n \approx \begin{cases} \left(C_1 \frac{1-q^n(1+i^3)^{-n}}{1+i^3-q} (1+i^3)^{-d+1}, C_1 \frac{1-q^n(1+i^2)^{-n}}{1+i^2-q} (1+i^2)^{-d+1}, C_1 \frac{1-q^n(1+i^1)^{-n}}{1+i^1-q} (1+i^1)^{-d+1} \right) & \text{si } q \neq 1+i^1, 1+i^2, 1+i^3 \\ \left(C_1 \frac{n}{1+i^3} (1+i^3)^{-d+1}, C_1 \frac{1-q^n(1+i^2)^{-n}}{1+i^2-q} (1+i^2)^{-d+1}, C_1 \frac{1-q^n(1+i^1)^{-n}}{1+i^1-q} (1+i^1)^{-d+1} \right) & \text{si } q = 1+i^3 \\ \left(C_1 \frac{1-q^n(1+i^3)^{-n}}{1+i^3-q} (1+i^3)^{-d+1}, C_1 \frac{n}{1+i^2} (1+i^2)^{-d+1}, C_1 \frac{1-q^n(1+i^1)^{-n}}{1+i^1-q} (1+i^1)^{-d+1} \right) & \text{si } q = 1+i^2 \\ \left(C_1 \frac{1-q^n(1+i^3)^{-n}}{1+i^3-q} (1+i^3)^{-d+1}, C_1 \frac{1-q^n(1+i^2)^{-n}}{1+i^2-q} (1+i^2)^{-d+1}, C_1 \frac{n}{1+i^1} (1+i^1)^{-d+1} \right) & \text{si } q = 1+i^1 \end{cases}$$

Hemos supuesto, en cualquier caso, que el interés aplicado corresponde, como es lo más habitual, a un número borroso triangular para el cual se da la relación estricta $i^1 < i^2 < i^3$.

Por supuesto, para explicitar la aproximación triangular al valor actual de rentas variables en progresión geométrica inmediatas, sean vencidas o anticipadas, bastará con sustituir en la expresión anterior $d=0$ ó $d=1$ respectivamente.

Respecto a la calidad del ajuste triangular del valor actual de la renta, debemos remarcar, tal como se ha comentado en anteriores epígrafes, que aunque en su cálculo sean empleados números borrosos aproximados –los que cuantifican el valor actual de cada una de las cuantías que forman parte de la renta-, debido a las características de los operadores máximo y mínimo, el error que podemos cometer como máximo en el nivel de presunción de un valor no será superior al error que se comete en la aproximación triangular del factor de descuento sobre el que producen mayores errores.

Por otra parte, y si seguimos la metodología de evaluación de la aproximación triangular expuesta en el apartado 1.4.2., deberemos conocer las desviaciones máximas que se cometen en los extremos de los α -cortes por tomar la aproximación triangular de ${}_{dl}\tilde{V}_0^n, {}_{dl}\tilde{V}_0^n'$ para conocer los errores que podemos cometer en las funciones de pertenencia. Dichas desviaciones máximas las denotaremos como D_I^* para los extremos inferiores –a la izquierda- y como D_D^* si se cometen en los extremos superiores –a la derecha-. Para su determinación será necesario conocer los niveles de presunción α_I^* y α_D^* en los que se producen. Estos serán los valores que minimicen las funciones del argumento α desviación a la izquierda de los α -cortes $D_I(\alpha)$ y desviación a la derecha $D_D(\alpha)$, la cuales pueden hallarse como combinación lineal convexa de las desviaciones a la izquierda y a la derecha de los factores de actualización que intervienen en la determinación del valor actual de las rentas, que fueron hallados en el apartados 4.2.3.1. si el interés triangular era variable a lo largo de toda la duración de la renta y en el apartado 4.2.3.2. si dicho interés era constante. Las desviaciones asociadas al r -ésimo capital –de diferimiento $d+r-1$ – las notamos como $D_{Ir}(\alpha)$ para la desviación a la izquierda y $D_{Dr}(\alpha)$ para la desviación a la derecha.

De esta forma, las desviaciones a la izquierda y a la derecha de los α -cortes por tomarse una aproximación triangular al valor actual de $(C_r, (d+r-1)P)$ vendrán dadas por $C_r D_{Ir}(\alpha)$ y $C_r D_{Dr}(\alpha)$. Así, las desviaciones que se producen en un determinado α -corte del valor actual de una renta en su extremo inferior y el superior por tomar su aproximación triangular será la suma de las desviaciones correspondientes a cada uno de los valores actuales de los capitales que la componen. Dichos errores son, respectivamente:

$$D_I(\alpha) = \sum_{r=1}^n C_r D_{Ir}(\alpha) \text{ y } D_D(\alpha) = \sum_{r=1}^n C_r D_{Dr}(\alpha)$$

De esta forma, la expresión general de los errores a la izquierda y a la derecha son:

$$D_I(\alpha) = \prod_{s=1}^d (1 + i_s^3)^{-1} \sum_{r=1}^n C_r \prod_{s=d+1}^{d+r-1} (1 + i_r^3)^{-1} + \left[\prod_{s=1}^d (1 + i_s^2)^{-1} \sum_{r=1}^n C_r \prod_{s=d+1}^{d+r-1} (1 + i_r^2)^{-1} - \prod_{s=1}^d (1 + i_s^3)^{-1} \sum_{r=1}^n C_r \prod_{s=d+1}^{d+r-1} (1 + i_r^3)^{-1} \right] \alpha - \prod_{s=1}^d (1 + i_s^3 - (i_s^3 - i_s^2)\hat{a})^{-1} \sum_{r=1}^n C_r \prod_{s=d+1}^{d+r-1} (1 + i_s^3 - (i_s^3 - i_s^2)\hat{a})^{-1}$$

$$D_D(\alpha) = \prod_{s=1}^d (1 + i_s^1)^{-1} \sum_{r=1}^n C_r \prod_{s=d+1}^{d+r-1} (1 + i_r^1)^{-1} - \left[\prod_{s=1}^d (1 + i_s^1)^{-1} \sum_{r=1}^n C_r \prod_{s=d+1}^{d+r-1} (1 + i_r^1)^{-1} - \prod_{s=1}^d (1 + i_s^2)^{-1} \sum_{r=1}^n C_r \prod_{s=d+1}^{d+r-1} (1 + i_r^2)^{-1} \right] \alpha - \prod_{s=1}^d (1 + i_s^1 + (i_s^2 - i_s^1)\alpha)^{-1} \sum_{r=1}^n C_r \prod_{s=d+1}^{d+r-1} (1 + i_s^1 - (i_s^2 - i_s^1)\alpha)^{-1}$$

Tanto si el interés de valoración es el mismo número borroso triangular para todos los periodos, como si es variable a lo largo del horizonte temporal que comprende la valoración, podemos comprobar que no podemos hallar una expresión analítica de α_I^* y α_D^* igualando las primeras derivadas de $D_I(\alpha)$ y $D_D(\alpha)$ a cero y por tanto, no podemos hallar D_I^* y D_D^* . Así pues, deberíamos implementar la solución en cada caso mediante algún método numérico al efecto. Sin embargo, y siguiendo un razonamiento análogo al del apartado 4.2.3.1., si que podemos asegurar la existencia de máximos locales y globales α_I^* y α_D^* en $]0, 1[$. En concreto, podemos comprobar que:

- $D_I(0) = D_I(1) = D_D(0) = D_D(1) = 0$. Dado que tanto $D_I(\alpha)$ y $D_D(\alpha)$ cumplen las condiciones de continuidad y derivabilidad exigidos por el teorema de Rolle –son continuas en $[0,1]$ y derivables en $]0,1[$ -, podemos asegurar la existencia de un punto estacionario para ambas en $]0,1[$.
- Podemos comprobar que tanto $D_I(\alpha)$ como $D_D(\alpha)$ son funciones estrictamente cóncavas (segunda derivada negativa), ya que $D_I(\alpha)$ y $D_D(\alpha)$ se obtienen como combinación lineal no negativa de las funciones de desviación a la izquierda y derecha de los factores de descuento que intervienen en la valoración de la renta, $D_{Ir}(\alpha)$, $r=1,2,\dots,n$ y $D_{Dr}(\alpha)$, $r=1,2,\dots,n$, respectivamente, que son cóncavas. Así, el coeficiente ponderador de $D_{Ir}(\alpha)$ y $D_{Dr}(\alpha)$, $r=1,2,\dots,n$ es la cuantía con diferimiento en $d+r-1$, C_r , la cual es siempre positiva. Asimismo, los valores α_I^* y α_D^* serán entonces los valores estacionarios de $D_{Ir}(\alpha)$ y $D_{Dr}(\alpha)$ que asimismo serán máximos locales estrictos y únicos en virtud del teorema local global.

A pesar de que no es posible obtener la expresión analítica de α_I^* y α_D^* , y por tanto, no es posible conocer $D_I^* = D_I(\alpha_I^*)$ y $D_D^* = D_D(\alpha_D^*)$, si que podemos proponer varias alternativas para su aproximación, sin que sea necesario recurrir a la utilización de métodos numéricos en su cálculo.

La primera de ellas, se basa en el análisis de las diferencias de ${}_dV_0^{1,n}(\alpha)$ y ${}_dV_0^{2,n}(\alpha)$, para valores de α equidistantes, tal como fue propuesto en el apartado 4.2.4.1. Comprobaremos que normalmente la magnitud de las diferencias de un orden más allá de dos no son significativas, por lo que ${}_dV_0^{1,n}(\alpha)$ y ${}_dV_0^{2,n}(\alpha)$ quedan ajustados de forma “perfecta” por una función cuadrática que

tome sus valores en $\alpha=0, 0'5$ y 1 . Si tomamos una aproximación triangular a $_{d|}\widetilde{V}_0^n, _{d|}\widetilde{V}_0^{n'}$, los extremos inferiores y superiores de sus α -cortes $_{d|}V_0^{1,n}(\alpha)$ y $_{d|}V_0^{2,n}(\alpha)$ son funciones lineales que, tal como hemos definido dicha aproximación triangular, toman los mismos valores que $_{d|}V_0^{1,n}(\alpha)$ y $_{d|}V_0^{2,n}(\alpha)$ en $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$. De esta forma, las desviaciones máximas a la derecha y a la izquierda deben producirse, aproximadamente, en los niveles de presunción $\alpha_I^* = \alpha_D^* = 0'5$, y por tanto $D_I^* \approx D_I(0'5)$ y $D_D^* \approx D_D(0'5)$. La relación entre los valores reales de D_I^* y D_D^* , que son los máximos globales $D_I(\alpha)$ y $D_D(\alpha)$ con su aproximación son evidentemente:

$$D_I^* \geq D_I(0'5) \text{ y } D_D^* \geq D_D(0'5)$$

Es decir, en este caso hemos acotado inferiormente las desviaciones que se producen en los extremos de $_{d|}\widetilde{V}_0^{n'}$ por tomar su aproximación triangular.

En este caso, las aproximaciones a las expresiones de D_I^* y D_D^* vienen dadas, tal como se demuestra en el ya mencionado trabajo de Terceño *et al.* (1995) por:

$$D_I^* \approx \frac{1}{2} \left| _{d|}V_0^{1,n}(1) - 2_{d|}V_0^{1,n}(0'5) + _{d|}V_0^{1,n}(0) \right| \text{ y } D_D^* \approx \frac{1}{2} \left| _{d|}V_0^{2,n}(1) - 2_{d|}V_0^{2,n}(0'5) + _{d|}V_0^{2,n}(0) \right|$$

Reseñamos que utilizando también una metodología, que aunque no idéntica, se basa en el análisis de la tabla de diferencias de los extremos de los α -cortes del número borroso que queremos aproximar, Terceño *et al.* (1997) proponen un método para la evaluación del ajuste triangular de los valores actuales y finales de rentas unitarias inmediatas y vencidas cuando el interés de valoración es un único número borroso triangular.

La segunda alternativa consiste en obtener una expresión analítica de la cota superior de las desviaciones máximas en los α -cortes del valor actual de la renta a través de las desviaciones máximas correspondientes a los factores de actualización de cada uno de los capitales que forman parte de la renta. Sólo realizaremos la demostración para la desviación a la izquierda, ya que para la desviación a la derecha sería análoga. Para ello, partiremos de que la desviación máxima a la izquierda en el valor actual de la renta, se produce en un nivel de presunción dado α_I^* , de forma que:

$$D_I^* = \sum_{r=1}^n C_r D_{Ir}(\alpha_I^*)$$

Entonces, como se cumple que para la desviación que se comete a la izquierda del r -ésimo factor de descuento en α_I^* es inferior o igual la desviación máxima que se produce por tomarse su aproximación triangular, la cual notamos como $D_I^*(r)$, se debe cumplir que:

$$C_r D_I^*(r) \geq C_r D_{Ir}(\alpha_I^*)$$

Y de esta forma:

$$D_I^* \leq \sum_{r=1}^n C_r D_I^*(r)$$

Con un razonamiento análogo podremos acotar superiormente la desviación que se comete en los extremos superiores de los α -cortes por tomar para $_{dl}\tilde{V}_0^n, _{dl}\tilde{V}_0^n'$. Dicha acotación vendrá dada por:

$$D_D^* \leq \sum_{r=1}^n C_r D_D^*(r)$$

De esta forma, y partiendo de los resultados expuestos en el apartado 1.4.2., el error máximo que se puede cometer en el nivel de presunción de un valor por tomar la aproximación triangular del valor actual de la renta vendrá dado por:

$$\left| \mu_{_{dl}\tilde{V}_0^n}(x) - \mu_{_{dl}\tilde{V}_0^n'}(x) \right| \leq \text{Max} \left\{ \frac{D_I^*}{_{dl}V_0^{1,n}(1) - _{dl}V_0^{1,n}(0)}, \frac{D_D^*}{_{dl}V_0^{2,n}(0) - _{dl}V_0^{2,n}(1)} \right\} = \varepsilon$$

Donde asimismo, dicha acotación, ε , está limitada superior e inferiormente por:

$$\text{Max} \left\{ \frac{D_I(0'5)}{_{dl}V_0^{1,n}(1) - _{dl}V_0^{1,n}(0)}, \frac{D_D(0'5)}{_{dl}V_0^{2,n}(0) - _{dl}V_0^{2,n}(1)} \right\} \leq \varepsilon \leq \text{Max} \left\{ \frac{\sum_{r=1}^n C_r D_I^*(r)}{_{dl}V_0^{1,n}(1) - _{dl}V_0^{1,n}(0)}, \frac{\sum_{r=1}^n C_r D_D^*(r)}{_{dl}V_0^{2,n}(0) - _{dl}V_0^{2,n}(1)} \right\}$$

A continuación presentamos los resultados obtenidos aplicando ambas formas de aproximación de la acotación del error en el nivel de pertenencia de un valor, ε por tomarse la aproximación triangular al valor actual de la renta, $_{dl}\tilde{V}_0^n'$. En la aplicación que presentamos se ha supuesto las rentas anuales con 3, 5, 15 y 50 términos, y que pueden ser constantes o variables en progresión geométrica con una razón $q=1'1$ y $q=0'9$. Los diferimientos posibles de éstas son $d=0,1,10$ y 20 años y los tantos efectivos anuales de valoración son los números borrosos triangulares $\tilde{i} =$

$(0'025, 0'03, 0'035)$, $\tilde{i} = (0'01, 0'03, 0'05)$, $\tilde{i} = (0'065, 0'07, 0'075)$ e $\tilde{i} = (0'05, 0'07, 0'09)$.

Respecto a las rentas constantes, los resultados que obtenemos son:

$\tilde{i} = (0'025, 0'03, 0'035)$								
Acotación inferior					Acotación superior			
d\n	3	5	15	50	3	5	15	50
3	0,002	0,002	0,006	0,018	0,002	0,002	0,006	0,018
5	0,002	0,003	0,007	0,019	0,002	0,003	0,007	0,019
15	0,007	0,008	0,011	0,022	0,007	0,008	0,011	0,022
50	0,013	0,014	0,017	0,027	0,013	0,014	0,017	0,027
$\tilde{i} = (0'01, 0'03, 0'05)$								
Acotación inferior					Acotación superior			
d\n	3	5	15	50	3	5	15	50
3	0,007	0,010	0,026	0,076	0,007	0,010	0,026	0,076
5	0,008	0,011	0,027	0,077	0,008	0,011	0,027	0,077
15	0,029	0,032	0,046	0,092	0,030	0,032	0,046	0,093
50	0,054	0,056	0,069	0,112	0,054	0,056	0,069	0,113
$\tilde{i} = (0'065, 0'07, 0'075)$								
Acotación inferior					Acotación superior			
d\n	3	5	15	50	3	5	15	50
3	0,002	0,002	0,006	0,014	0,002	0,002	0,006	0,014
5	0,002	0,003	0,006	0,014	0,002	0,003	0,006	0,014
15	0,007	0,008	0,010	0,017	0,007	0,008	0,010	0,017
50	0,013	0,013	0,016	0,022	0,013	0,013	0,016	0,022
$\tilde{i} = (0'05, 0'07, 0'09)$								
Acotación inferior					Acotación superior			
d\n	3	5	15	50	3	5	15	50
3	0,006	0,009	0,023	0,059	0,006	0,009	0,023	0,059
5	0,008	0,011	0,025	0,060	0,008	0,011	0,025	0,060
15	0,028	0,031	0,042	0,072	0,028	0,031	0,043	0,073
50	0,052	0,054	0,065	0,091	0,052	0,054	0,065	0,092

Los resultados que obtenemos si las rentas varían en progresión geométrica según una razón $q=1'1$ son:

$\tilde{i} = (0'025, 0'03, 0'035)$								
Acotación inferior					Acotación superior			
d\n	3	5	15	50	3	5	15	50
3	0,002	0,002	0,007	0,025	0,002	0,002	0,007	0,025
5	0,002	0,003	0,007	0,025	0,002	0,003	0,007	0,025
15	0,007	0,008	0,012	0,031	0,007	0,008	0,012	0,031
50	0,013	0,014	0,018	0,036	0,013	0,014	0,018	0,036
$\tilde{i} = (0'01, 0'03, 0'05)$								
Acotación inferior					Acotación superior			
d\n	3	5	15	50	3	5	15	50
3	0,007	0,010	0,028	0,100	0,007	0,010	0,028	0,101
5	0,008	0,012	0,030	0,103	0,008	0,012	0,030	0,103
15	0,030	0,033	0,050	0,122	0,030	0,033	0,050	0,123
50	0,054	0,057	0,073	0,144	0,054	0,057	0,073	0,146

$\tilde{i} = (0'065, 0'07, 0'075)$								
Acotación inferior					Acotación superior			
d\n	3	5	15	50	3	5	15	50
3	0,002	0,002	0,006	0,022	0,002	0,002	0,006	0,022
5	0,002	0,003	0,007	0,022	0,002	0,003	0,007	0,023
15	0,007	0,008	0,011	0,027	0,007	0,008	0,011	0,027
50	0,013	0,014	0,017	0,032	0,013	0,014	0,017	0,032
$\tilde{i} = (0'05, 0'07, 0'09)$								
Acotación inferior					Acotación superior			
d\n	3	5	15	50	3	5	15	50
3	0,006	0,010	0,026	0,090	0,006	0,010	0,026	0,090
5	0,008	0,011	0,028	0,091	0,008	0,011	0,028	0,092
15	0,028	0,031	0,046	0,109	0,028	0,031	0,046	0,110
50	0,052	0,054	0,069	0,130	0,052	0,055	0,069	0,131

Por otra parte, los resultados que obtenemos si la renta es variable en progresión geométrica con una razón de variación $q=0'9$:

$\tilde{i} = (0'025, 0'03, 0'035)$								
Acotación inferior					Acotación superior			
d\n	3	5	15	50	3	5	15	50
3	0,002	0,002	0,005	0,010	0,002	0,002	0,005	0,010
5	0,002	0,003	0,006	0,010	0,002	0,003	0,006	0,010
15	0,007	0,008	0,010	0,013	0,007	0,008	0,010	0,013
50	0,013	0,014	0,016	0,018	0,013	0,014	0,016	0,018
$\tilde{i} = (0'01, 0'03, 0'05)$								
Acotación inferior					Acotación superior			
d\n	3	5	15	50	3	5	15	50
3	0,006	0,009	0,022	0,040	0,006	0,009	0,022	0,040
5	0,008	0,011	0,023	0,040	0,008	0,011	0,023	0,040
15	0,029	0,032	0,041	0,053	0,029	0,032	0,041	0,053
50	0,054	0,056	0,064	0,074	0,054	0,056	0,065	0,075
$\tilde{i} = (0'065, 0'07, 0'075)$								
Acotación inferior					Acotación superior			
d\n	3	5	15	50	3	5	15	50
3	0,002	0,002	0,005	0,007	0,002	0,002	0,005	0,007
5	0,002	0,003	0,005	0,007	0,002	0,003	0,005	0,007
15	0,007	0,008	0,009	0,011	0,007	0,008	0,009	0,011
50	0,013	0,013	0,015	0,016	0,013	0,013	0,015	0,016
$\tilde{i} = (0'05, 0'07, 0'09)$								
Acotación inferior					Acotación superior			
d\n	3	5	15	50	3	5	15	50
3	0,006	0,009	0,020	0,031	0,006	0,009	0,020	0,031
5	0,008	0,010	0,021	0,031	0,008	0,010	0,021	0,031
15	0,028	0,030	0,038	0,045	0,028	0,030	0,038	0,045
50	0,052	0,053	0,061	0,066	0,052	0,054	0,061	0,066

Podemos realizar las siguientes apreciaciones sobre los resultados obtenidos:

- a) A medida que aumenta la duración, el diferimiento o ambas magnitudes en una renta, la validez de la aproximación triangular empeora, pudiendo darse el caso, si la duración de la renta y/o el diferimiento es muy alejado, que para una escala endecadaria, la aproximación triangular a ${}_d\tilde{V}_0^n$ debe ser rechazada. Ello es debido a que a medida que aumentamos la duración de la renta, el diferimiento, o ambas magnitudes se incorporan en la valoración factores de actualización más alejados, para los cuales, la aproximación triangular proporciona mayor error en el nivel de presunción.
- b) Si el interés de actualización es más incierto –tiene mayor radio-, el error que se comete por aproximar triangularmente el valor actual de una renta es también superior, ya que los errores que se cometen en los factores de actualización que intervienen en el cálculo del valor actual de la renta aumentan. Asimismo, a medida que aumenta la magnitud del interés de valoración, entendiéndose por magnitud su centro, el error cometido disminuye. Ello es debido a que el error cometido en los factores de descuento de cada uno de los capitales que conforman la renta también disminuye.
- c) Si comparamos el error cometido en las rentas inmediatas y vencidas ($d=1$), que en nuestro caso finalizan, respectivamente dentro de 3, 5, 15 y 50 años y para un tipo de interés de valoración dado, con el error cometido en un capital financiero con dicho vencimiento –los resultados fueron obtenidos en el apartado 4.2.3.2.-, podemos comprobar que el error que se comete en la aproximación triangular del valor actual del capital es superior. Ello es debido a que en una renta el error viene dado como una media ponderada de los errores que se cometen en los factores de actualización que intervienen en el cálculo de su valor actual, y por tanto, el error cometido para aquéllos capitales con vencimientos más alejados –que es más elevado- queda contrarrestado por el bajo error cometido en la aproximación triangular del valor actual de los capitales con vencimiento más cercano.
- d) Podemos ver que, a igualdad de intereses de valoración, diferimientos y número de términos, el error que se comete al aproximar triangularmente el valor actual variable en progresión geométrica de razón $q>1$ –las cuantías son crecientes-, es superior al que se comete al aproximar triangularmente el valor actual de una renta constante, y, asimismo, dicho error en la función de pertenencia es superior al error que se comete al aproximar triangularmente el valor actual de la renta variable en progresión geométrica con cuantías decrecientes. Ello es debido a que en el caso de que las cuantías sean crecientes, los factores de actualización con vencimientos más alejados tienen mayor peso en el cálculo del valor actual de la renta, ya que las cuantías que les multiplican son superiores. Por tanto, si aceptamos que el error que podemos cometer como máximo en el nivel de pertenencia de un valor al aproximar triangularmente el valor actual de una renta viene dado por una media ponderada de dichos errores para los factores de actualización que intervienen en su valoración, en las rentas con

términos crecientes el error que se comete en los factores de actualización con vencimientos más alejados toma mayor importancia frente a los errores cometidos por la aproximación triangular de los factores de actualización con vencimientos menos alejados. Por supuesto, si las cuantías son decrecientes, en la determinación del error máximo que se comete en el nivel de pertenencia de un valor por la aproximación triangular del valor actual de la renta, toman mayor peso los errores cometidos por la aproximación de los factores de descuento más cercanos en el tiempo, que son los errores más pequeños, ya que los coeficientes ponderadores de dichas cuantías –los capitales- asociados a vencimientos cercanos toman mayores valores que las cuantías de los capitales más alejados.

**PARTE II: ESTIMACIÓN DE LA ESTRUCTURA
TEMPORAL DE LOS TIPOS DE INTERÉS A TRAVÉS
DE SUBCONJUNTOS BORROSOS Y ESTIMACIÓN DE
LOS TIPOS DE INTERÉS FUTUROS**

CAPÍTULO 1:

ESTIMACIÓN DE LOS INTERESES FUTUROS MEDIANTE NÚMEROS BORROSOS

Para realizar la valoración financiera de cualquier activo (acciones, bonos, proyectos de inversión etc.) debemos actualizar los flujos monetarios que la posesión de dicho activos procura a lo largo del tiempo. Para ello es necesario conocer los tipos de actualización que en cada instante deben aplicarse a dicho activo, los cuales surgen como la adición de los tipos de interés libre de riesgo de insolvencia (tipos de la deuda pública) y una prima de riesgo inherente a la naturaleza del activo que valoremos. Evidentemente, si el activo financiero no conlleva ningún tipo de riesgo de insolvencia, los intereses que se utilizarán para valorar los mismos no incluirán una prima de riesgo.

En el capítulo anterior hemos analizado como valorar financieramente un conjunto de capitales cuando éstos y los intereses de valoración vienen dados a través de números borrosos, lo cual, numerosos autores, consideran una forma de estimación que en la mayor parte de situaciones resulta más realista. Sin embargo, aunque este problema ha sido analizado y resuelto con éxito en muchos trabajos, la estimación de los tipos futuros como números borrosos ha sido objeto de poca atención, suponiéndose que vienen dados por estimaciones subjetivas de expertos. Nosotros pretendemos, en la medida de lo posible, dar una solución a este problema, basada en la estimación de una estructura temporal de los tipos de interés borrosa, ya que ésta recoge implícitamente las expectativas de los agentes que actúan en los mercados de renta fija – asimilables a los “expertos”- sobre la evolución de los tipos de interés futuros.

Así, en este capítulo analizaremos brevemente, y en un ambiente de certeza, los diferentes tipos de interés que rigen en los mercados de renta fija. Dentro de estos tipos, serán de especial importancia para nuestro objetivo los denominados tipos forward, o tipos que implícitamente anticipa el mercado para el futuro en los precios y rentabilidades de los instrumentos que se negocian en dicho mercado. Después analizaremos las distintas teorías explicativas sobre el proceso de formación de los tipos que rigen en los mercados de renta fija, de forma que quedará explicado el marco conceptual que se asume al identificar a los tipos forward con los tipos estimados para el futuro así como las debilidades de dicha hipótesis. Posteriormente realizaremos unos breves comentarios sobre los métodos que son habitualmente utilizados en la estimación de la ETTI. Nuestras propuestas se inspiraran en un grupo de métodos que podemos etiquetar de econométricos. Por último justifiaremos y motivaremos la necesidad de la estimación de la ETTI

a través de subconjuntos borrosos. Analizaremos que aspectos, a nuestro entender, puede aportar este instrumento matemático a los métodos de estimación de la ETTI ya existentes y en que puede ser de ayuda una estimación borrosa de la ETTI a la valoración financiera en condiciones de incertidumbre.

1.1. ANÁLISIS DE LAS TASAS DE INTERÉS QUE RIGEN EN LOS MERCADOS DE DEUDA PÚBLICA

Es conocido que el interés es la cuantificación del nivel de preferencia por la liquidez en una economía, y se trata de la compensación que reciben los oferentes de fondos por renunciar al consumo presente para posponer el mismo a momentos futuros. Asimismo, el interés que en un momento concreto rija en la economía será determinado por el necesario equilibrio entre oferta de fondos y la demanda de liquidez, viniendo esta última determinada por las oportunidades de inversión productivas de las empresas y los gastos e inversiones del estado.

La demanda de fondos es realizada por los prestatarios en gran medida mediante la emisión de activos financieros en los mercados financieros, quedando completado el trasvase de liquidez de los oferentes de fondos hacia los demandantes cuando los oferentes adquieren los títulos en dichos mercados. El equilibrio de la oferta y demanda determinará el precio de los instrumentos financieros emitidos por las empresas y el estado y no directamente la rentabilidad de los mismos. Por supuesto, podemos inferir a través de dichos precios la rentabilidad de los instrumentos emitidos, que obviamente, será un reflejo del grado de preferencia por la liquidez que impera en la economía.

A continuación analizamos distintos tipos de tasas de interés que habitualmente se manejan en los mercados de renta fija, esto es, el rendimiento interno (TIR) de un título de renta fija, los tipos al contado y los tipos spot, explicando su forma de cálculo, su significado económico, y su forma de aplicación en la valoración financiera. Para la determinación de todas estas tasas de interés deberemos partir del conocimiento de aquella que es directamente observable: la rentabilidad de los instrumentos financieros que emiten los demandantes de fondos y cuya contraprestación sean capitales ciertos, es decir, deberemos hallar la rentabilidad de los instrumentos de renta fija.

1.1.1. Rendimiento interno de un título de renta fija

Definimos como rendimiento interno de un título de renta fija, rentabilidad interna o TIR al interés que equilibra el precio y el valor de la corriente de cobros que genera dicho título.

Veamos como hallar la TIR de un título de renta fija, diferenciando dos tipos de títulos:

Bonos cupón cero

Son títulos que se emiten al descuento. La posesión de un activo de este tipo por parte del comprador o prestamista implica la obtención de un único pago futuro, el nominal o principal del título que notaremos como C , en un vencimiento t prefijado, es decir, la obtención del capital financiero (C, t) . En el mercado español, sin ánimo de ser exhaustivos, podemos identificar como instrumentos u operaciones más habituales con estructura cupón cero:

Si el prestatario es el estado:

- a) Letras del Tesoro, cuyos vencimientos oscilan, en el momento de la emisión, entre tres meses y un año y medio.
- b) Repos sobre instrumentos de deuda pública.
- c) Strips sobre bonos y obligaciones del estado. Son títulos que se obtienen como segregación en títulos independientes de la corriente de capitales que generan bonos y obligaciones del estado. Los vencimientos negociables abarcan en la actualidad hasta treinta años.

Estos activos suelen negociarse en el mercado de deuda pública anotada (MDPA).

Si el emisor es un ente privado, los activos más comunes son:

- a) Pagarés de empresa. Al igual que para las letras, sus vencimientos oscilan en el momento de la emisión, entre tres meses y un año y medio.
- b) Bonos cupón cero. Su emisión es a más de un año y medio y son poco frecuentes en el mercado español.
- c) Repos sobre instrumentos de renta fija privada, generalmente, sobre pagarés de empresa.

El mercado en que normalmente se negocian estos instrumentos es el mercado de los intermediarios de activos financieros (MAIAF) y, en menor grado, las bolsas de valores.

Cualquiera de estas operaciones financieras tiene una estructura temporal que podemos representar como:



donde P es el precio del activo, C el nominal y t el vencimiento. Así, la tasa interna de rendimiento (TIR), I , de un título con vencimiento en t , vendrá determinada por la ecuación:

$$P = C(1+I)^{-t} \Rightarrow I = \left(\frac{C}{P} \right)^{1/t} - 1$$

Obsérvese que hemos supuesto que la rentabilidad se mide según un tanto efectivo anual de interés compuesto. En el mercado, para los títulos cupón cero con vencimiento a menos de un año, que son los más negociados, la TIR de los mismos suele expresarse como un tanto r de interés simple vencido. En este caso, esta tasa se obtiene como:

$$C = P \left(1 + r \frac{d}{B} \right) \Rightarrow r = \left(\frac{C - P}{P} \right) \frac{B}{d}$$

donde B es la base que utiliza el mercado –por ejemplo, en el MDPA es de 360 días y en el MAIAF de 365-, y d , el número de días que faltan para el vencimiento del activo en el momento de realizarse la transacción. Si queremos expresar esta tasa como un tanto efectivo anual de interés compuesto, I , con una base del año natural, dicho tanto será obtenido a través de la expresión:

$$I = \left(1 + r \frac{d}{B} \right)^{\frac{365}{d}} - 1$$

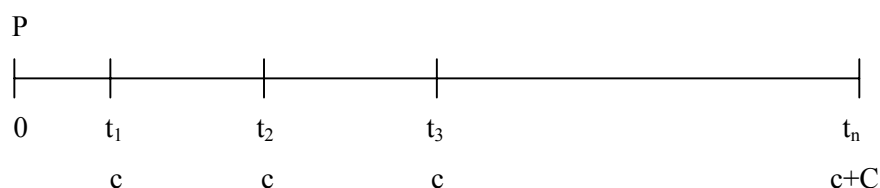
Bonos americanos

Estos activos procuran a su comprador un conjunto de cobros periódicos (cupones) vencidos y el reembolso, en el momento de su vencimiento, del nominal o principal del título. Podemos notar la corriente de flujos que genera un bono americano como un conjunto de capitales financieros $\{(c, t_1), (c, t_1), \dots, (c, t_n); (C, t_n)\}$, donde c es el cupón, y C el valor nominal del título. Este tipo de títulos se suele emitir a plazos superiores a dos años por empresas y el estado para obtener financiación a largo plazo. En el caso de emisiones privadas, es relativamente común que estos títulos incorporen algún derecho adicional como una opción de convertibilidad en acciones, warrants sobre acciones de la empresa, la opción de amortización anticipada por parte del emisor, etc. para hacer la adquisición de dichos títulos más atractiva al prestamista y reducir así el coste de la financiación. En cualquier caso, éstas son cuestiones que no analizaremos, entre otras razones, porque nuestro interés va a estar centrado en la formación de precios en el mercado de deuda pública. Asimismo, lo más frecuente es que los cupones, que corresponden al pago de los intereses del emisor, estén prefijados de antemano. De esta forma, un cambio en el interés que rijan en el mercado afectará al precio de los títulos, no a los cupones que éstos proporcionan. Sin

embargo, bien es cierto que existen emisiones privadas donde los cupones de los bonos están indexados, de forma que los cambios que se produzcan en el interés de mercado quedan reflejados en el cupón que ofrezcan los títulos, y no tanto en su precio.

En el contexto del mercado español, los bonos americanos emitidos por el estado se denominan bonos del estado si el vencimiento del título en el momento de la emisión es 3 o 5 años, y obligaciones del estado, si el vencimiento en el momento de la emisión es 10, 15 y 30 años. Estos títulos se negocian en el MDPA, y el cupón que ofrecen en casi la totalidad de las emisiones es anual. Respecto a las emisiones privadas, suelen también denominarse bonos si su maduración es hasta 5 años, y obligaciones para maduraciones superiores. Sin embargo, la periodicidad del devengo de cupones en estos títulos no necesariamente es anual, aunque en cualquier caso, si que es inferior o igual al año. El mercado en que suelen negociarse estos títulos es el MAIAF, y en menor grado, las bolsas de valores, tal como ocurría con los títulos cupón cero.

Así, la adquisición de un bono americano implica una operación financiera con la siguiente estructura temporal:



donde $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = t_n - t_{n-1} = P$, con P la periodicidad del devengo de cupones. Para los títulos de deuda pública, $P=1$ generalmente, tal como ha sido comentado.

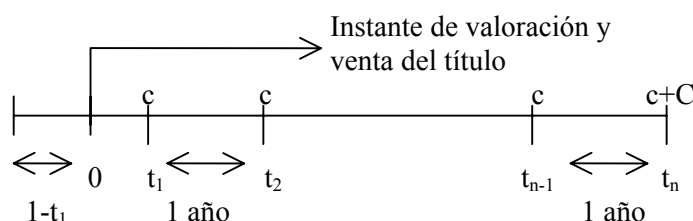
El rendimiento interno del mismo (TIR) de un bono con vencimiento en t_n , I , se hallará planteando:

$$P = \sum_{t=t_1}^{t_n} \frac{c}{(1+I)^t} + \frac{C}{(1+I)^{t_n}}$$

Evidentemente, no existe solución analítica para la TIR en esta ecuación, debiendo ser hallada a través de algún método numérico, como por ejemplo, Newton-Raphson. Sin embargo, dicha TIR, por la estructura de la operación financiera que tratamos, siempre existe y es única¹.

¹ Matemáticamente, la TIR es la raíz de la función polinómica $f(x) = -P + cx^{t_1} + cx^{t_2} + \dots + cx^{t_n} + Cx^{t_n}$, donde $x=(1+I)^{-1}$. Dado que sólo existe un cambio de signo en los coeficientes, existe una única raíz tal que $x>0$, y por tanto, existe una única tasa $I>-1$.

Una cuestión a reseñar es que en este caso, hemos tomado como precio del título, el precio con el cupón corrido. Sin embargo, en el mercado español el precio que se publica es el precio ex-cupón o sin el cupón corrido. En este caso, P se halla añadiendo al precio ex-cupón el cupón corrido, que no es más que la parte proporcional del cupón correspondiente al tiempo que ha transcurrido desde el cobro del último hasta el momento de la compraventa del título. La relación existente entre el precio ex-cupón, el precio con el cupón corrido, P y dicho cupón corrido, puede representarse a través de la siguiente gráfica, donde hemos supuesto cupones anuales:



Podemos comprobar que según el gráfico, en el momento de valoración del título, existe una parte del cupón que ya ha devengado o corrido, exactamente la proporción $(1-t_1)$, por lo que el cupón corrido es $c(1-t_1)$. Si se pretendiera vender el título, dicha parte del cupón debería ser exigida por el vendedor, ya que son los intereses correspondientes a la tenencia del título durante dicha proporción de tiempo. Así, el precio de compraventa del título puede desglosarse en dos partes. La primera es el cupón corrido, siendo el resto lo que se denomina como precio ex-cupón, es decir, el precio de compraventa que no incluye la parte del primer cupón a cobrar que ya ha devengado.

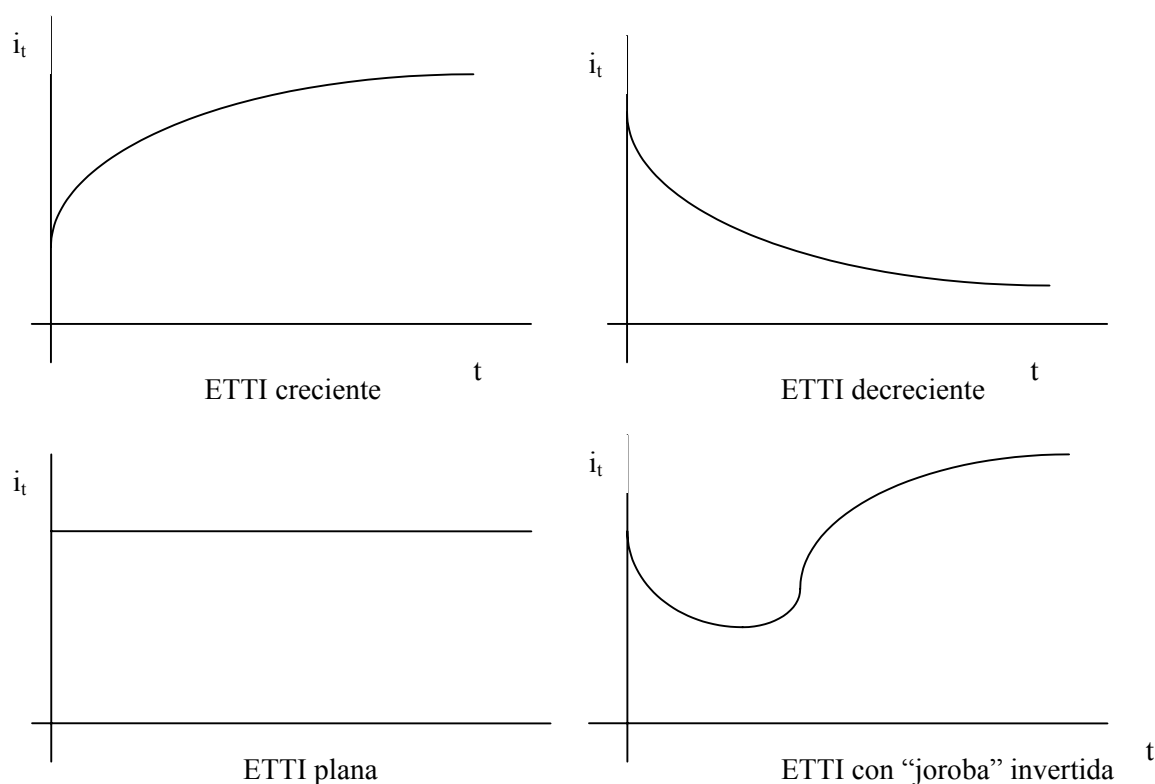
De la siguiente sección en adelante, cuando hagamos referencia a los distintos tipos de interés que se utilizan en los mercados de renta fija, estaremos refiriéndonos a los mercados de deuda pública. En primer lugar, porque son los que tienen mayor negociación y liquidez y porque los tipos que en ellos se negocian son los que inmediatamente se trasladan al resto de mercados. En segundo lugar, porque los títulos del estado se negocian sin ningún tipo de prima de riesgo, siendo la rentabilidad de éstos la que sirve de base para fijar el interés del resto de emisiones. A estas últimas, se les exigirá el interés de la deuda pública más una prima de riesgo², que dependerá de la capacidad del emisor de hacer frente a compromisos futuros. La solvencia de los emisores suele publicitarse en el mercado a través de un rating que de dicho emisor ha realizado una empresa de rating –Standard & Poors, Moody's, etc.-.

² Obsérvese que identificamos prima de riesgo con prima de insolvencia. Evidentemente, el concepto de prima de riesgo es mucho más amplio que el de prima de insolvencia. Por ejemplo, las emisiones de deuda pública de España y Alemania, tienen el mismo riesgo de insolvencia, que es nulo. El hecho de que la deuda alemana rinda menos interés es debido a que a la deuda española se le exige una prima por riesgo, en este caso soberano, que viene dado por el valor de las variables macroeconómicas.

1.1.2. Los tipos spot y la estructura temporal de los tipos de interés (ETTI)

Es evidente que en una economía no existe, aún para el mismo emisor, un único tipo de interés con independencia del plazo al que dicho emisor se endeuda. Para cada plazo el mercado descuenta una unidad monetaria con un interés distinto. Así, el coste de oportunidad del dinero en una economía no es, en términos relativos, el mismo con independencia del plazo. A dicho interés para un plazo t dado se le denomina interés al contado o interés spot para t , y lo notaremos como i_t . Por otra parte, al valor actual de una unidad monetaria con vencimiento a t años, $f_t = (1+i_t)^{-t}$, la denominaremos como factor de actualización spot.

Así, definiremos como estructura temporal de los tipos de interés (ETTI) en un mercado concreto –entendemos por mercado a un conjunto de títulos con idéntica calificación crediticia y nominados en una misma moneda- y en una fecha concreta, a la relación funcional entre los tipos al contado en vigor y el vencimiento de dichos tipos. Así, la ETTI vendrá dada por una función $i_t = f(t)$. La ETTI que se construye con los títulos cuyo emisor es el estado es la que sirve de referencia para fijar el interés de las emisiones privadas, de forma que, deberían situarse por encima de la ETTI sin riesgo de insolvencia las ETTIs correspondientes a emisores con niveles de riesgo superiores. Asimismo, las formas más habituales de ETTIs son:



A continuación relacionamos las TIRs que se obtienen en los dos tipos de títulos analizados (cupón cero y bonos americanos) y con un vencimiento dado, con los tipos spot que rigen en el mercado donde se negocian y que tienen asociados el mismo vencimiento.

Para un título cupón cero, dado que la relación entre el precio y TIR de un título es:

$$P = C(1+I)^{-t}$$

y que el precio de un título podría hallarse a través de los tipos spot como:

$$P = C(1+i_t)^{-t}$$

podemos identificar el rendimiento (TIR) de un título cupón cero con vencimiento en t años, con el tipo spot a dicho vencimiento, es decir: $i_t \equiv I$.

En cambio, si el título que analizamos es un bono americano, podemos observar que su precio se obtiene como función de la TIR de la forma:

$$P = \sum_{t=t_1}^{t_n} \frac{c}{(1+I)^t} + \frac{C}{(1+I)^{t_n}}$$

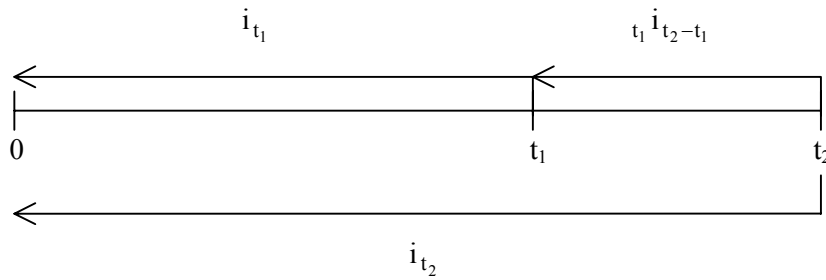
En cambio, si expresamos su precio en función de los tipos spot, éste se obtendrá como:

$$P = \sum_{t=t_1}^{t_n} \frac{c}{(1+i_t)^t} + \frac{C}{(1+i_{t_n})^{t_n}}$$

La conclusión es clara: el rendimiento interno de un título con vencimiento en t_n años no coincidirá, en general, con el tipo al contado para dicho plazo i_{t_n} , únicamente coincidirá si la ETTI es plana. Ello es debido a que estos títulos incorporan pagos intermedios (los cupones), de forma que su precio contiene información, no tan sólo sobre el tipo al contado al vencimiento del título, t_n , sino sobre tipos spot para plazos intermedios –los vencimientos de los cupones-. Así, el rendimiento de estos títulos (la TIR) será una “media” de los tipos spot que intervienen en la formación del precio del título. Así, a medida que se incremente el cupón de un título, el peso que toman los tipos spot en la determinación de su rentabilidad interna aumenta. De esta forma, la TIR bono americano se alejará más del tipo spot correspondiente al vencimiento del mismo si ofrece un mayor cupón. A este fenómeno, analizado con detenimiento en Buse (1970) y Caks (1977) se le denomina como sesgo de cupón. Evidentemente, con una ETTI de mercado creciente, a mayor cupón el diferencial tipo al contado-rentabilidad de un título aumentará, situándose en un nivel más bajo la rentabilidad de un título. Por supuesto, si la ETTI es decreciente, el sesgo de cupón también aumentará si aumentamos el cupón que ofrece un título. En este caso, la TIR del título tomará valores cada vez más elevados respecto al tipo spot con el mismo plazo.

1.1.3. Tipos de interés implícitos a plazo o tipos forward

A partir de la ETTI, podemos inferir los denominados tipos de interés forward o implícitos, que pueden ser interpretados como los tipos spot que, según la estructura actual de los tipos de interés, el mercado anticipa para el futuro, tal como comentaremos en epígrafes posteriores. Se puede observar que el tipo al contado aplicable a una unidad monetaria con vencimiento en t_1 y el tipo spot asociado a un vencimiento t_2 , con $t_2 > t_1$, definen un tipo forward ${}_t i_{t_2-t_1}$, que puede ser interpretado como el tipo spot que regirá para un plazo t_2-t_1 dentro de t_1 años. Gráficamente los podemos representar como:



Dado que el valor actual de una unidad monetaria con vencimiento dentro de t_2 años debe coincidir si la actualizamos directamente con el tipo al contado para el vencimiento t_2 como si la actualizamos t_2-t_1 años con el tipo implícito correspondiente, y después t_1 años con i_{t_1} , planteando³:

$$\left(\frac{1}{1+i_{t_1}} \right)^{t_1} \left(\frac{1}{1+{}_t i_{t_2-t_1}} \right)^{t_2-t_1} = \left(\frac{1}{1+i_{t_2}} \right)^{t_2}$$

obtenemos que el tipo implícito a t_2-t_1 años dentro de t_1 años es:

$${}_t i_{t_2-t_1} = \left[\frac{(1+i_{t_2})^{t_2}}{(1+i_{t_1})^{t_1}} \right]^{\frac{1}{t_2-t_1}} - 1$$

Por comodidad para los desarrollos que realizaremos en apartados posteriores, expresaremos los tipos forward en función de los factores de actualización spot. Así, podremos plantear y obtener:

$$f_{t_1} f_{t_2-t_1} = f_{t_2} \Rightarrow {}_t f_{t_2-t_1} = \frac{f_{t_1}}{f_{t_2}}$$

siendo ${}_t f_{t_2-t_1}$ el factor de actualización que define el tipo de interés forward que estamos hallando. Así,

$${}_t i_{t_2-t_1} = \left[\frac{f_{t_1}}{f_{t_2}} \right]^{\frac{1}{t_2-t_1}} - 1$$

Normalmente, tal como afirman Babbell y Merrill (1996, p.2), los tipos forward suelen ser calculados en intervalos de igual periodicidad. Así, cuando analizamos la ETTI en el largo plazo, se suelen calcular únicamente los tipos forward a un año o tipos futuros al contado para un año. Así, el tipo forward a un año para dentro de $t-1$ años, ${}_{t-1}i_1$ quedará definido por el tipo spot a $t-1$ años y el tipo spot a t años de la forma:

$${}_{t-1}i_1 = \left[\frac{(1+i_t)^t}{(1+i_{t-1})^{t-1}} \right] - 1 \quad \text{ó} \quad {}_{t-1}i_1 = \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1$$

y el factor de actualización que dicho tipo implícito determina, ${}_{t-1}f_1$:

$${}_{t-1}f_1 = \frac{f_t}{f_{t-1}}$$

Por supuesto, podemos relacionar los tipos implícitos o forward que define la ETTI con los tipos spot y con las TIRs de los títulos. Sobre la base de las relaciones expuestas en el presente apartado, no es difícil descomponer el tipo al contado a t años –supongamos años enteros- en los tipos forward a un año que lo componen. Así, dado que⁴:

$$(1+i_t)^t = \prod_{r=1}^t (1+{}_{r-1}i_1)$$

obtenemos:

$$i_t = \sqrt[t]{\prod_{r=1}^t (1+{}_{r-1}i_1)} - 1$$

Así pues, el tipo de interés spot se halla como una "media geométrica" de los tipos de interés forward que el mercado anticipa para cada uno de los t años⁵.

³ Obsérvese que, desde el punto de vista de la matemática de las operaciones financieras, lo que estamos utilizando para la deducción de los tipos forward es la propiedad de escindibilidad del factor financiero.

⁴ Nótese nuevamente, que desde el punto de vista de las matemáticas financieras, el hecho de que realicemos la descomposición del tipo spot en un conjunto de tipos implícitos a un año es consecuencia de la escindibilidad del factor financiero.

⁵ Es fácil comprobar que si utilizáramos la capitalización instantánea, el tipo al contado instantáneo es la media aritmética de los tipos forward instantáneos. Sin embargo, aunque la capitalización instantánea es muy utilizada en estudios académicos, nosotros no la contemplamos porque el régimen financiero utilizado en el mercado para el largo plazo es, generalmente, el interés compuesto de capitalización anual.

Por otra parte, a partir del interés forward podemos también expresar el precio de un instrumento de renta fija con cupones periódicos (suponemos que son anuales y con vencimientos enteros) como:

$$P = \sum_{j=1}^t \frac{c}{\prod_{r=1}^j (1 + r_{-1} i_1)} + \frac{C}{\prod_{r=1}^t (1 + r_{-1} i_1)}$$

Si interpretamos los tipos implícitos como tipos anticipados por el mercado, podemos comprobar que los precios de la renta fija incorporan las expectativas que tienen los agentes que intervienen en el mercado sobre la evolución futura de los tipos de interés, de forma que la TIR de un título que vence en t es una suerte de media de los tipos futuros hasta dicho vencimiento anticipados por en el mercado. Ello era previsible, ya que hemos comprobado que la TIR es una “media” de los tipos al contado de los vencimientos en los que existe pago de cupones o de principal, y estos últimos tipos, una media de los intereses forward a un año.

1.2. TEORÍAS EXPLICATIVAS DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE LOS TIPOS DE INTERÉS

En este epígrafe analizaremos las teorías más relevantes acerca del proceso de formación de precios e intereses en los mercados financieros de renta fija, esto es, las teorías explicativas de la ETTI. Este breve análisis es necesario para justificar en cual de ellas basaremos nuestra propuesta de estimación de tipos futuros a través de números borrosos. Éstas son:

- a) La teoría de las expectativas racionales
- b) La teoría de la preferencia por la liquidez
- c) La teoría de la segmentación de mercados
- d) La teoría del hábitat preferido

Antes de dar unos breves apuntes sobre estas teorías, debemos puntualizar que todas ellas se fundamentan en dos ideas financieras. La primera de ellas es la del arbitraje y el comportamiento racional de los inversores. La asunción de la misma nos llevará a considerar que los tipos forward son los tipos que los inversores anticipan sobre los tipos al contado en momentos venideros del tiempo. La segunda idea está relacionada con el riesgo de interés asociado a cualquier título de renta fija. Dentro de este riesgo, debemos distinguir dos vertientes:

- a) El riesgo de precio o riesgo de que un título de renta fija pierda valor ante subidas de tipos de interés. En este caso hay que tener en cuenta que son más sensibles a variaciones del interés los títulos que presentan mayor vencimiento.

- b) Sin embargo, debemos reseñar que el riesgo de un título de renta fija no viene dado por su vencimiento únicamente, sino por el vencimiento de los pasivos del inversor. Para carteras de renta fija, como por ejemplo, fondos de pensiones, que lleven asociadas pasivos de larga maduración, es más arriesgada una inversión en títulos a corto plazo que a largo plazo, porque dicha cartera se expone a que las sucesivas renovaciones de las inversiones deban ser realizadas a tipos de interés cada vez más pequeños, con el consiguiente riesgo de quiebra. En este caso, el riesgo de interés queda minimizado si el vencimiento de la cartera de inversiones se iguala con el de los pasivos, de forma que, es menos arriesgada la inversión en títulos de larga maduración.

Analicemos a continuación los principales postulados y conclusiones de cada una de las teorías.

1.2.1. La teoría pura de las expectativas racionales

Formulada por Lutz (1940), la idea básica de esta teoría es que los tipos al contado a un determinado plazo contienen información sobre las expectativas de los inversores sobre los tipos al contado que regirán en el futuro.

Esta teoría es desarrollada sobre la base de unas hipótesis excesivamente restrictivas, básicamente sobre la idea de que la actividad económica se desarrolla en un ambiente de absoluta certeza, y que los títulos de renta fija con diferentes vencimientos son perfectamente sustitutivos, de forma que, por ejemplo, invertir en un bono cupón cero con vencimiento a dos años es equivalente a invertir en un bono sin cupón con vencimiento a un año y volver a renovar dicha inversión. Bajo estas hipótesis, y aplicando un argumento de inexistencia de oportunidades de arbitraje, se llega a la conclusión de que los tipos spot son la media geométrica –si utilizamos el régimen financiero de interés compuesto- de los tipos que regirán en el futuro, de forma, que los tipos forward son un estimador perfecto de los tipos al contado futuro. Una demostración analítica de esta afirmación puede encontrarse en Meneu *et al.* (1992).

De esta forma, el rendimiento de una inversión para una maduración dada es igual con indiferencia de cómo se halla realizado, esto es, adquiriendo títulos cuyo vencimiento sea dicha maduración o invirtiendo en títulos de un menor vencimiento y renovando la inversión periódicamente.

Asimismo, con esta teoría, una ETTI creciente sería debida a una expectativa en el mercado alcista de los tipos de interés a corto plazo, una ETTI decreciente indicaría una expectativa bajista

sobre los mismos. Una ETTI horizontal, por supuesto, indicaría que no existen expectativas para el futuro de variación de los tipos de interés.

Somos conscientes de que es evidente que los tipos de interés que regirán para periodos venideros en una economía son por naturaleza desconocidos, no vienen predeterminados. Dado que tradicionalmente se ha venido considerando que las magnitudes inciertas se comportan como variables aleatorias, según la teoría de las expectativas racionales podríamos interpretar al interés forward como un estimador insesgado de la esperanza matemática de los tipos al contado futuros. De esta forma, se asume implícitamente la indiferencia al riesgo de los agentes económicos que intervienen en el mercado. Como críticas o como ampliaciones de esta teoría, han surgido el resto de teorías que se analizan a continuación, las cuales incorporan la aversión al riesgo de los agentes económicos para explicar las diferentes formas que puede tomar la ETTI.

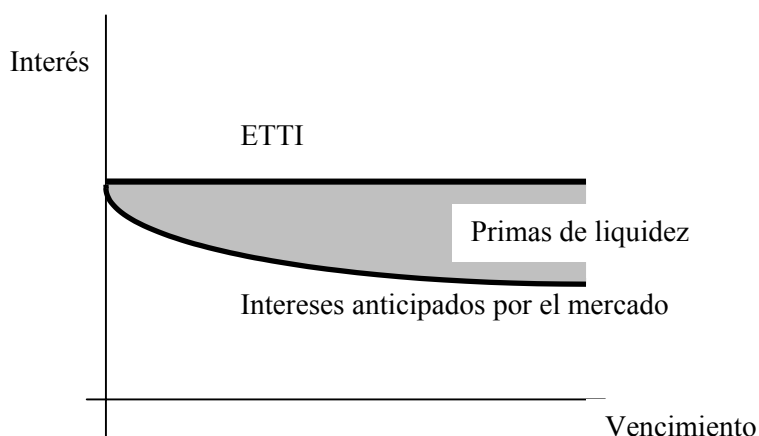
1.2.2. La teoría de la preferencia por la liquidez

Esta teoría, si bien acepta que los tipos de interés al contado a largo plazo contienen información sobre los tipos futuros a corto plazo, no acepta que los títulos de renta fija sean perfectamente sustitutivos entre sí con independencia de su vencimiento. Ello es debido a que ante un aumento dado en el interés imperante en una economía, los precios de los títulos con mayor vencimiento, al ser más sensibles ante cambios del tipo de interés, sufrirán mayores disminuciones en su precio. Si aceptamos que los inversores son, en general, adversos al riesgo, preferirán invertir en títulos a corto plazo y realizar sucesivas renovaciones si fuera preciso antes que invertir en títulos a largo plazo. De esta forma, para invertir en títulos a largo plazo, los inversores exigirán mayor interés al que realmente esperan obtener renovando inversiones de corto vencimiento para compensar el riesgo (de precio) más elevado que incorporan los títulos con mayor vencimiento. Por otra parte, los prestatarios aceptarán pagar un interés superior por endeudarse a largo plazo, con el fin de asegurarse un coste determinado para su deuda y evitar el riesgo de refinanciación, esto es, el riesgo de renovar préstamos cortos a tipos cada vez más elevados. Ello explicaría porque en condiciones normales la rentabilidad de la deuda emitida a largo plazo es más elevada, y por tanto, porque, con mayor frecuencia, se da en el mercado una ETTI creciente.

Por ejemplo, en el mercado español, en las sucesivas subastas de deuda pública realizadas durante 1998, las letras del tesoro a lo largo del año rindieron menos que los bonos y las obligaciones (la ETTI era creciente), cuando, las expectativas sobre los tipos futuros eran claramente bajistas, por la necesaria convergencia de los tipos de interés de los países que iban a entrar en la Unión Monetaria Europea. Sin embargo, dichas expectativas se pusieron de manifiesto en la progresiva disminución de las rentabilidades de todos los instrumentos de deuda pública, de forma que lo

que realmente se observó fue un desplazamiento hacia abajo de una ETTI creciente, más que una ETTI decreciente.

Por tanto, los tipos forward incorporarán información sobre los tipos futuros al contado, pero una información sesgada, ya que contienen una prima por el mayor riesgo de interés que soportan los títulos de mayor vencimiento. Es decir, los tipos forward serán los tipos al contado futuros anticipados por los agentes económicos más una prima debida al riesgo de precio asociado al vencimiento que estemos contemplando. Por supuesto, esta prima deberá ir creciendo a medida que aumente el vencimiento. Por ejemplo, una ETTI plana indicaría la existencia de una perspectiva bajista sobre el comportamiento futuro de los tipos de interés, de forma que gráficamente observaríamos:



De esta forma, el tipo de interés al contado que rige para un determinado momento del tiempo estaría formada como la resultante de la media geométrica de los tipos que el mercado anticipa en el futuro más una prima por la incertidumbre sobre los mismos. Evidentemente, dicha prima debe aumentar con el tiempo, ya que existe mayor incertidumbre sobre los tipos futuros y porque los títulos con mayor vencimiento presentan mayor riesgo de precio.

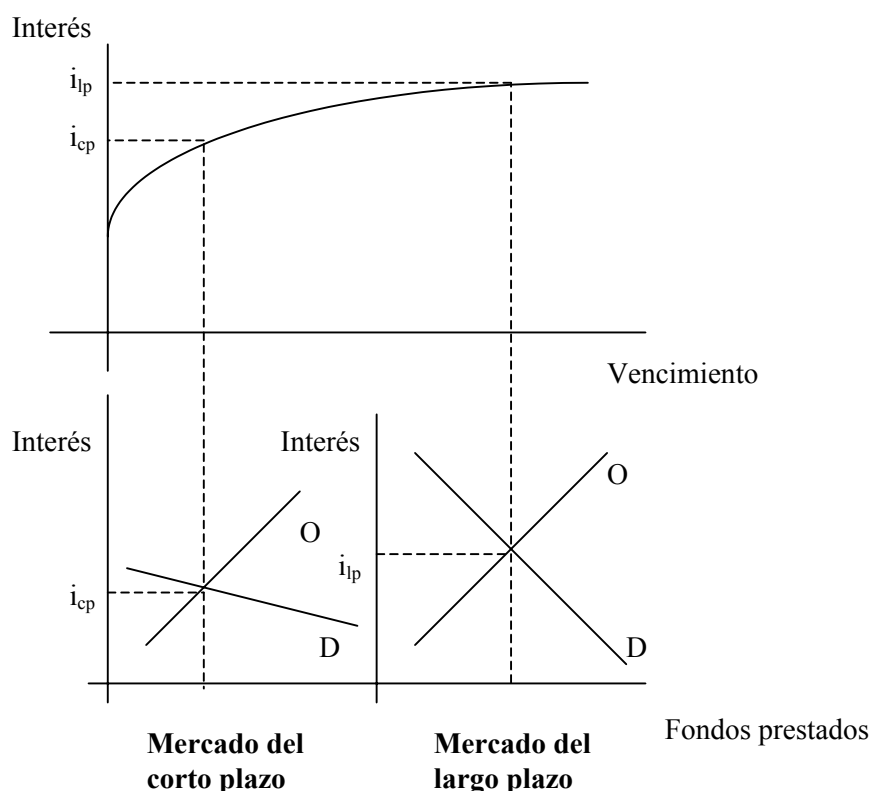
1.2.3. La teoría de la segmentación de mercados

Esta teoría fue formulada por Culbertson (1957) supone que los prestamistas y prestatarios son extremadamente adversos al riesgo, y que, por tanto, para no incurrir en el riesgo de precio y reinversión los primeros y en el de refinanciación los segundos, ajustan perfectamente su inversión o demanda de fondos a su horizonte planificador o hábitat. Asimismo, también considera que no solamente la aversión al riesgo de interés limita la movilidad de los inversores entre segmentos; otras restricciones, de tipo legal (como los coeficientes de inversión obligatorios de las entidades financieras en activos líquidos), el alto coste de la información que hace a los

agentes especializarse en un solo segmento o la rígida estructura de vencimientos de la cartera pasiva de planes de pensiones o aseguradoras son también factores que reafirman la existencia de hábitats independientes dentro del mercado de renta fija. De esta forma, no existe un único mercado de renta fija, sino diferentes mercados en función del vencimiento de los títulos que se negocien. Así, cada uno de los mercados determina los tipos de interés que equilibran oferta y demanda de fondos con independencia del resto de segmentos y de las expectativas sobre los tipos de interés futuros de los inversores.

De esta forma, el análisis que de la ETTI se haga no es relevante, ya que no refleja en ningún caso expectativas de los inversores. Sobre la base de esta teoría, deberemos concluir que los tipos forward no son indicativos de ningún tipo de expectativas, sino un mero artificio aritmético sin ningún sentido económico.

Si suponemos, por comodidad, que sólo existen dos segmentos, el mercado de deuda a corto plazo y el mercado de deuda a largo plazo, podremos observar que la ETTI quedaría determinada de la forma que se muestra en el gráfico:



1.2.4. La teoría del hábitat preferido

Formulada por Modigliani y Such (1966) y (1967), esta teoría combina los postulados e hipótesis del resto de teorías, de forma que, en su formulación tiene en cuenta expectativas por una parte, y por otra, el riesgo de interés de los títulos de renta fija en todas sus facetas.

Estos autores aceptan la hipótesis de que existen diferentes hábitats en los mercados de renta fija, y que los prestamistas y prestatarios son adversos al riesgo, de forma que, tal como postula Culbertson, su horizonte planificador será el determinante básico en sus decisiones de inversión o financiación. Así, en principio se acepta que existe una estructura de tipos diferente para cada uno de los hábitats, que vendrá dada por el necesario equilibrio entre oferta y demanda de fondos para dichos segmentos. Sin embargo, una oferta de fondos insuficiente en un determinado hábitat puede provocar que los emisores de activos deban primar la rentabilidad que ofrecen. De esta forma, los títulos de este submercado deberán ofrecer rendimientos superiores a las expectativas que sobre dicho plazo existen. En este caso, los oferentes de fondos que actúan en otros segmentos pueden encontrar compensaciones suficientes por el riesgo que les supone vender títulos de su hábitat y adquirir títulos de otros hábitats donde el interés ofrecido es más elevado que el de sus expectativas. Asimismo, si la oferta de fondos supera a la demanda de los mismos en un determinado hábitat, el efecto será el contrario: los emisores podrán emitir títulos con una rentabilidad inferior al de las expectativas sobre dicho segmento, existiendo en este caso una prima negativa sobre las expectativas.

De esta forma, algunos autores como Ezquiaga (1992) consideran que la teoría de la preferencia por la liquidez no sería más que un caso particular de la misma, donde únicamente existen primas positivas en los tipos al contado actuales, respecto a los tipos futuros anticipados.

Según la teoría del hábitat, para la interpretación de la ETTI, además de las expectativas, y de la aversión al riesgo de los inversores, contemplándose el mismo tanto en su vertiente de precio como en la vertiente del riesgo de reinversión, también deberemos considerar como se estructura la oferta y la demanda de fondos a lo largo de todos los vencimientos que definen a la curva de tipos cero. De esta forma, pueden existir primas positivas o negativas respecto los tipos al contado futuros que se anticipan el mercado, las cuales vendrán dadas por la interacción de todos los factores mencionados.

Como conclusión al apartado 1.2, debemos señalar que, en nuestra opinión, la teoría que mejor refleja el comportamiento real de la formación de precios e intereses en los mercados de renta fija es la teoría del hábitat preferido, ya que tiene en cuenta en su formulación más aspectos sobre la

toma de decisiones en los mercados de renta fija que el resto de teorías. Los inversores y prestatarios toman decisiones sobre la base de expectativas, ciertamente, pero también se enfrentan al problema del riesgo e incertidumbre sobre el comportamiento del interés futuro y la repercusión que sobre el valor de sus títulos tienen variaciones anticipadas del interés; y generalmente los agentes económicos son adversos al riesgo. Sin embargo, dado que la teoría de las expectativas racionales ofrece un marco operacional sencillo en el proceso de inferencia de los tipos de interés, a la vez que éste es suficientemente razonable, es frecuente considerar para posteriores aplicaciones de la ETTI que los tipos forward que en un momento dado se deducen de una ETTI reflejan las variaciones futuras de los tipos de interés que el mercado anticipa en un momento concreto, según la información disponible en dicho instante. A medida que al mercado llegue nueva información –lo cual nunca se puede prever-, los agentes en base a la misma, anticiparán un nuevo comportamiento de los tipos de interés futuros, cambiando así la forma de la ETTI. Sobre la base de esta premisa realizaremos nuestra propuesta de estimación del interés futuro a través de números borrosos.

1.3. APLICACIONES DE LA ESTIMACIÓN DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE LOS TIPOS DE INTERÉS

Es indudable la utilidad que presta a la economía financiera la estimación e interpretación de la ETTI. En concreto, la posibilidad de interpretar los tipos al contado que de ella se deducen en términos de expectativas sobre los intereses futuros – lo cual implica la asunción implícita de la teoría de las expectativas racionales-, ha permitido analizar y dar luz sobre diferentes cuestiones y problemas. Sin ánimo de ser exhaustivos, y recogiendo algunas posibles aplicaciones de la ETTI formuladas por diversos autores como Carleton y Cooper (1976), Mauleón (1990), Meneu *et al.* (1992) y Lamothe *et al.* (1995), podemos mencionar:

- a) La gestión de carteras de renta fija cuando en dicha gestión se aplican técnicas basadas en la duración y la convexidad.
- b) Instrumento para la contrastación de modelos sobre el comportamiento de la ETTI.
- c) Para detectar posibles ineficiencias en el mercado y oportunidades de arbitraje.
- d) Para cuantificar las primas de insolvencia en las rentabilidades de instrumentos de renta fija privada o primas de liquidez en los rendimientos de determinados instrumentos de renta fija pública –por ejemplo, en los Strips-.
- e) Como metodología para cuantificar el efecto de la fiscalidad en determinados activos financieros.

- f) Por las autoridades monetarias, como instrumento de análisis del efecto sobre el interés a largo plazo de su intervención en el tipo a corto plazo.
- g) Como herramienta para la correcta valoración de activos derivados como los Swaps, futuros, opciones, etc.
- h) Herramienta para la valoración financiera de activos reales o financieros.

Por otra parte, nuestro interés se basa en la utilización de la ETTI como herramienta para la predicción de los tipos de interés futuros, asumiéndose de esta forma la veracidad de la Teoría de las Expectativas Racionales. Así, la ETTI será un instrumento que nos permitirá obtener información sobre el consenso de los agentes del mercado en relación a la evolución futura de los tipos de interés. Esta interpretación y utilización es la base de la mayor parte de las aplicaciones de la ETTI ya comentadas. Para nuestros propósitos, esta utilización de la ETTI nos servirá, tal como se ha propuesto en el punto h), para valorar activos reales o financieros, en concreto, como propondremos en el último capítulo de la tesis, para fijar las primas en los seguros de vida. De esta forma, el valor actual, V_A , de un activo real o financiero: un bono, una acción o por extensión incluso una empresa, etc., si podemos reducirlo a un conjunto de capitales financieros $\{(C_1, 1); (C_2, 2); \dots; (C_t, t)\}$ se halla como:

$$V_A = \sum_{j=1}^t \frac{C_j}{\prod_{r=1}^j (1 + r_{r-1} r_1)}$$

Debemos hacer varias apreciaciones sobre la fórmula anterior, relativas al valor de los flujos y de los tipos de interés que se utilizan en el cálculo del valor actual del activo:

- a) Si los flujos son absolutamente ciertos, circunstancia que únicamente se dará en la deuda pública, las cuantías de los capitales financieros son los cupones –si es un bono americano- y el principal del instrumento analizado. El tipo de actualización correspondiente a cada periodo es el tipo de interés anticipado o tipo forward del mercado de deuda pública, que evidentemente, no contiene ninguna prima de riesgo. De esta forma $r_{-1} r_1 \equiv r_{-1} i_1$
- b) Pero en la mayor parte de supuestos se pretende valorar activos financieros emitidos por agentes privados. Si se trata de instrumentos de renta fija, el principal y los cupones no son cobros ciertos, ya que existe el riesgo de insolvencia del emisor. Por supuesto, si se realiza la valoración de otro tipo de activos como las acciones, los flujos son los dividendos, inciertos por naturaleza. La misma apreciación cabe hacer si realizamos la valoración de una empresa mediante la fórmula anterior. Dado que tradicionalmente la incertidumbre sobre las

magnitudes financieras se ha plasmado modelizando éstas como variables aleatorias, los flujos correspondientes a un momento j -ésimo serían una cuantía estocástica que notamos como C_j . A partir de dichas estimaciones a través de variables aleatorias, se ha realizado la correspondiente valoración financiera de dos formas:

- b.1) Tomar para C_j el denominado “equivalente cierto”, que se halla a través de la esperanza matemática de los flujos, $E[C_j] \forall j$ corregida con unos coeficientes que reflejan la aversión al riesgo del decisor, α_j . De esta forma $C_j = \alpha_j E[C_j]$, donde $\alpha_{j+1} \leq \alpha_j \leq 1 \forall j$. Dado que la introducción del riesgo se ha realizado en las cuantías de los capitales financieros, no hace falta realizar ninguna corrección en el interés calculatorio, de forma que podemos considerar a ${}_{r-1}r_1$ como el interés a un año libre de riesgo anticipado por el mercado para dentro de $r-1$ años, ${}_{r-1}i_1$.
- b.2) No corregir la esperanza matemática de los capitales que actualizamos, de forma que $C_j = E[C_j] \forall j$. Para introducir la aversión al riesgo del decisor deberemos corregir los intereses que son anticipados para el futuro en el mercado de deuda pública con una prima de riesgo. De esta forma hallaremos los tipos ${}_{r-1}r_1$ añadiendo a los tipos libres de riesgo ${}_{r-1}i_1$, la prima de riesgo correspondiente al riesgo del activo, empresa, etc. que estemos valorando.

1.4. MODELOS ESTIMATIVOS DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE LOS TIPOS DE INTERÉS

La estimación de la ETTI en una fecha concreta y para un mercado determinado será bastante sencilla si existe un número de títulos cupón cero negociados elevado, tanto en sus vencimientos como en su volumen, y si su precio es observable sin perturbaciones. Ellos es debido a que, como ya hemos comentado, la rentabilidad de estos instrumentos coincide con el tipo al contado para el vencimiento de los mismos. Bastará con inferir una relación funcional entre su rentabilidad y su vencimiento a partir de las observaciones de las que disponemos -que bajo las hipótesis expuestas deberán ser muy elevadas-. Ello se cumple en determinados mercados, como el mercado de depósitos interbancarios, pero no en otros, como el de deuda pública, que es el que nos ocupa lo que hará que la obtención de la misma no sea tan sencilla.

En primer lugar, en la mayoría de países no se emiten títulos cupón cero estatales con vencimientos superiores a dos años. Pero aún en el caso de existir dichos títulos –en el mercado español, como ya hemos comentado, se negocian los STRIPS, existiendo actualmente una disponibilidad de vencimientos negociables de hasta 30 años- el número de vencimientos

negociados en una sesión y su liquidez es absolutamente insuficiente, de forma que a partir de los precios (o rentabilidades) de dichos títulos es prácticamente imposible construir una relación tipos al contado-tiempo. Así, sólo es posible inferir directamente la curva de tipos cupón cero para plazos poco elevados –no más de dos años-. De esta forma, para construir una ETTI que abarque plazos elevados será necesario partir de los precios y rentabilidades de los instrumentos con cupones (bonos y obligaciones), sin duda los instrumentos de renta fija a largo plazo más líquidos y negociados.

En este contexto, diferenciamos tres tipos de modelizaciones distintas en la estimación de la ETTI, que analizaremos brevemente.

1.4.1. Modelos empíricos

Son los más sencillos de implementar y, en cualquier caso, no recogen ningún tipo de incertidumbre sobre la ETTI. A través de estos métodos únicamente podemos obtener la ETTI como una relación discreta del tipo spot-vencimiento, debiéndose realizar una interpolación lineal si se desea obtener valores de los tipos al contado para vencimientos que estén entre los vértices para los cuales se obtiene la ETTI. Dentro de estos métodos podemos reseñar:

- a) *El método del bono a par.* Se trata de un método de difícil implementación en su forma pura, ya que se necesita disponer de observaciones de bonos cuyos precios se negocien a la par y que presenten vencimientos enteros, lo cual en el mercado español es prácticamente imposible. Sin embargo, es muy utilizado como complemento a otros que reseñaremos a continuación. Una exposición de este método puede encontrarse en Ezquiaga (1992).
- b) *El método de los SWAPS.* En este caso la ETTI se infiere a través de los tipos de interés negociados para las ramas fijas de los IRS. De entre los problemas que supone aplicar esta metodología, podemos mencionar la poca liquidez del mercado de SWAPS para determinados plazos, el hecho de que en el interés negociado suelen incorporarse primas de riesgo, liquidez y contrapartida, etc. Un análisis de esta metodología puede encontrarse en Ezquiaga *et al.* (1994).
- c) *Mediante la interpolación lineal de las TIRs de los bonos y obligaciones.* Dado que rara vez se negocian en un mercado bonos con vencimientos enteros este método propone estimar la TIR para los títulos cuyos vencimientos son los que queremos estimar los tipos al contado, interpolando la TIR de dos bonos que tengan vencimientos cercanos. Posteriormente se asimila dicha TIR a la de un bono par y se aplica la metodología a). Este método también genera numerosos problemas, ya que se supone que la TIR de un bono es función únicamente de su plazo y no también del valor de su cupón, lo cual no es cierto, tal como se

comentó en el apartado 1.1.2., de forma que existirá un cierto sesgo de cupón en las estimaciones que así se realicen.

1.4.2. Modelos de equilibrio dinámico

Se trata de modelos derivados de la teoría de la valoración de opciones. Éstos se fundamentan, por una parte, en la modelización estocástica de la dinámica de los intereses futuros, de forma que el comportamiento de ésta se supone que puede ser descrita a través de un conjunto de variables estado, y por otra se supone la inexistencia de arbitraje. Los trabajos ya clásicos como el de Vasicek (1977) y Cox, Ingersoll y Ross (1985) parten únicamente de la modelización estocástica del interés instantáneo a corto plazo –un tipo spot a largo plazo no es más que una sucesión de tipos al contado futuros a corto plazo–, el cual, de forma genérica, se supone que sigue la siguiente ecuación diferencial estocástica^{6,7}:

$$dr = \mu(r,t)dt + \gamma(r,t)dZ$$

donde:

r : Valor que toma en t el tipo de interés instantáneo a corto plazo

$\mu(r,t)$: Indica la tendencia de la evolución del interés instantáneo a corto plazo, y depende del nivel tipo de interés, r , y del instante, t .

$\gamma(r,t)$: Indica la desviación estándar de la evolución del interés a corto plazo y también es función de r y t .

dZ : Proceso estándar de Wiener, de media 0 y varianza dt .

Aplicando el lema de Itô se puede obtener de la ecuación diferencial anterior, la ecuación diferencial estocástica que describe la dinámica del precio de un título cupón cero, que paga una unidad monetaria a su vencimiento a su vencimiento, T , en un momento cualquiera, t , siendo el precio en un instante t , $P(r,t,T)$:

$$\frac{dP(r, t, T)}{P(r, t, T)} = \rho(r, t, T)dt + \sigma(r, t, T)dZ$$

Donde:

$$\rho(r, t, T)P(r, t, T) = \frac{1}{2} \mu^2(r, t)P_{rr}(r, t, T) + \gamma(r, t)P_r(r, t, T) + P_t(r, t, T)$$

⁶ Para una exposición de estos modelos, en nuestra opinión muy clara, y la vez mucho más detallada, puede encontrarse en Babbell y Merrill (1996, p. 59-72).

⁷ Un survey en el que se recogen los modelos unifactoriales más extendidos es Stapleton (1999), donde asimismo se detalla en cada caso la ecuación diferencial estocástica que modeliza al interés a corto plazo.

$$\sigma(r, t, T)P(r, t, T) = \mu(r, t)P_t(r, t, T)$$

denotándose con un subíndice la derivada parcial.

En la ecuación diferencial estocástica que define el precio de un título, y utilizando un argumento de no existencia de arbitraje, es decir, suponiéndose que el hipotético comprador de del bono cupón cero al descubierto -por tanto, con una inversión inicial real cero- debe obtener un rendimiento nulo, la ecuación diferencial anterior se convertirá en una ecuación diferencial cierta, para la cual, aplicando la condición de contorno $P(r, T, T)=1$ se obtiene la solución. De esta forma, el valor en el momento actual de valoración, $t=0$, del título, $P(r, 0, T)$ tomará un valor cierto.

Una vez hallado, $P(r, 0, T)$, la determinación de la tasa interna de dicho título, y por tanto, el tipo spot para un vencimiento T es inmediata. Obteniendo estos rendimientos para diferentes valores de T , hallaremos la ETTI que rige en el momento actual.

Por supuesto, los modelos unifactoriales son muy restrictivos ya que la ETTI únicamente depende del tipo de interés que rija a corto plazo, r , permitiéndose por tanto, únicamente desplazamientos paralelos de la misma, lo cual implica que los movimientos de los títulos están perfectamente correlacionados. Por ello, diversos autores incluyen un estado más -son modelos, pues, bifactoriales-, como por ejemplo, la diferencia entre el interés al contado a corto plazo y el tipo de interés al contado a largo plazo, el interés a largo plazo, la volatilidad del interés a corto plazo, etc. Un ejemplo son los modelos de Shaefer y Schwarz (1984) o Heath, Jarrow y Morton (1992). Si bien, más realistas, estos modelos no admiten una fórmula cerrada para el precio de los títulos que se pretende valorar, es decir, la ecuación diferencial a resolver para hallar el valor de un título no tiene solución analítica, por lo que deberá ser resuelta por métodos numéricos.

Respecto a los modelos estocásticos sobre el comportamiento del interés, y a pesar de su elegancia analítica, tal como indica Gerber (1995), sólo funcionan razonablemente bien en el corto plazo, pero la explicación sobre el comportamiento del interés a largo plazo, que es el que nos interesa a nosotros, es muy deficiente. Asimismo, muchos de ellos presentan limitaciones no ya tan sólo en el reflejo de la evolución de la ETTI, sino en la valoración de los activos que, como los bonos y las obligaciones, vencen a medio y largo plazo, una vez han sido ajustados los parámetros que definen las ecuaciones diferenciales estocásticas de los factores que determinan la ETTI -ver por ejemplo Fernández Navas (1997a) y (1997b)-. Así pues, y tal como afirma Fernández Navas (1997a) refiriéndose al modelo de Cox, Ingersoll y Ross (1985), el interés de estos modelos puede circunscribirse a la fijación de un marco analítico que permita valorar derivados sobre tipos de interés a corto plazo, ya que para realizar valoraciones sobre activos

financieros no derivados, basta y son más precisos modelos de la ETTI que dicho autor denomina como “estáticos”, que son los mencionados en el apartado 1.4.1. y los que describiremos en el punto 1.4.3.

1.4.3. Modelos econométricos

Se trata de la línea que posiblemente mejores resultados prácticos ha dado, al menos en un contexto de valoración de activos financieros no derivados, e inspirándonos en esta, nosotros realizaremos nuestras propuestas utilizando la teoría de los subconjuntos borrosos. Estas metodologías, se basan en métodos convencionales de regresión, y al igual que en los modelos de equilibrio dinámico, incorporan la incertidumbre en la formación de expectativas sobre los intereses ya que en los modelos a estimar se incorpora un término de error. La introducción de este término de error queda justificada por la existencia de factores que enturbian la formación de los precios de los títulos de renta fija y la formación de las expectativas. Entre estos factores, según Chambers *et al.* (1984) podemos destacar:

- Los precios de los bonos americanos contienen información sobre factores de descuento referidos a más de un vencimiento, amén de su diferente tributación respecto a los títulos cupón cero.
- El hecho de que las carteras de bonos no se revisan continuamente, lo cual justificaría que, para determinados plazos, pueda existir poca liquidez y los tipos de interés incorporen entonces algún tipo de prima por liquidez.
- La existencia de un diferencial entre el precio de compra y el precio de venta sobre los precios negociados debido a la existencia de intermediarios, y por tanto, la existencia de costes de transacción.

Dentro de este grupo de metodologías debemos diferenciar dos líneas diferentes:

a) *Métodos que estiman una curva teórica a la par*

Estos métodos consisten en realizar una regresión lineal TIR-vencimiento de los títulos. Así, queda estimada la TIR como una función continua del tiempo una vez hayan sido ajustados los parámetros de la regresión. Respecto a las formas funcionales que diversos autores proponen ajustar, no debemos buscar en ellas un sólido fundamento teórico. En la mayor parte de casos únicamente se propone combinar linealmente un conjunto de funciones del vencimiento de los títulos que capten todos los perfiles que puede tomar la curva de rentabilidades, la cual no es más que una aproximación de la ETTI. Algunas de las formas de ésta última han sido representadas en el apartado 1.1.2. De esta forma, la significación de una determinada variable independiente, que

se mide con la *t* de student, pasa a tener una importancia relativa, debiéndose juzgar la bondad del ajuste básicamente por la capacidad global de la forma funcional propuesta para representar fidedignamente la relación rendimiento-vencimiento de los títulos negociados en el mercado en una sesión concreta, siendo el indicador para tal fin por excelencia, el coeficiente de determinación (R^2).

Para calcular los tipos al contado, se aplica posteriormente el método del bono par. En este caso puede observarse la analogía de este método con la interpolación lineal de las TIRs, y por tanto, podemos achacarle los mismos problemas que a los de interpolación lineal. En concreto, si bien se diferencia “títulos con cupón” y “títulos cupón cero”, se supone que la TIR de un título es únicamente función del vencimiento, ignorándose de esta forma que la TIR de un título depende, no tan sólo de si el título ofrece cupón, sino, si existe, del valor de éste. Por otra parte, los tipos spot no quedan determinados como una función continua del tiempo, aunque la TIR sí lo sea.

b) *Métodos que estiman directamente la función de descuento*

Estos métodos buscan estimar, no directamente los tipos spot, sino la función de descuento que éstos definen, ya que la relación entre precio y función de descuento es lineal, y no así la relación precio-interés. Dentro de este grupo de metodologías podemos diferenciar, en primer lugar, aquéllas basadas en la cuantificación del factor de descuento como funciones a trozos del tiempo o splines. Un resumen de los modelos más utilizados puede ser encontrado en Anderson *et al.* (1996). Otro grupo de métodos es el basado en el ajuste “parsimonioso” de la función de descuento, y se basan en la formulación de los factores de descuento mediante formas monofuncionales no lineales, que provocan que la ETTI deba ser estimada a través de modelos de regresión máximo-verosímiles. Como modelos más representativos de esta línea mencionamos el de Nelson y Siegel (1987) y Svensson (1994). En cualquier caso, con todos estos métodos si que queda ajustada una relación funcional tipo al contado-tiempo continua.

En cualquier caso, debemos reseñar que los tipos de interés que obtenemos con las estimaciones econométricas (TIRs, tipos al contado, etc.) no son números ciertos, sino variables aleatorias, ya que en la regresión que se realice se incorpora un término de error. Sin embargo, la incertidumbre que se introduce en estos métodos sobre el interés estimado no suele quedar reflejada finalmente, ya que se trabaja con el valor esperado de las estimaciones que se deducen de la regresión. Ello es debido a la dificultad y, en ocasiones, a la imposibilidad de obtener expresiones analíticas de las magnitudes que se estimen partiendo de la regresión efectuada por la consabida dificultad de operar con variables aleatorias.

1.5. ESTIMACIÓN DE LOS INTERESES FUTUROS A TRAVÉS DE NÚMEROS BORROSOS MEDIANTE UNA ESTIMACIÓN FUZZY DE LA ETTI

En este apartado realizamos unas reflexiones que creemos que justifican la modelización de la ETTI mediante números borrosos. Éstas se basarán en dos ideas:

- a) Analizaremos que puede aportar la teoría de los subconjuntos borrosos a la literatura ya existente sobre la modelización de la ETTI.
- b) Comentaremos que aportará la estimación de una ETTI borrosa a los ya numerosos trabajos relacionados con la valoración financiera con magnitudes estimadas a través de números borrosos.

Todos los métodos de estimación de la ETTI comentados parten de que el precio que se negocia para una referencia en un momento concreto (por ejemplo, un día) es único. Sin embargo, el precio que se negocia durante una determinada sesión para un título no suele ser único, sino que oscila entre uno máximo y uno mínimo, de forma que la rentabilidad interna de dicho título está también dentro de un intervalo. Por ejemplo, la referencia O-6% con vencimiento a 10 años se negoció el 22/1/1999 en el mercado de deuda pública español a un precio que osciló entre 116,070 y 116,470 (ex-cupón), siendo las TIR asociadas, respectivamente, del 3'853% y el 3'804%. Este fenómeno también se produce en el mercado primario, en la formación de precios en una subasta de deuda pública, intervienen una multiplicidad de precios que ofrecen los participantes en la subasta y que son consecuencia de una estimación subjetiva de dichos participantes sobre el comportamiento futuro de los tipos de interés, de la inflación etc. De esta forma, la adjudicación de dicha deuda no se realiza sobre la base de un único precio, sino sobre precios que oscilan entre un precio denominado medio y el precio marginal⁸.

Tras lo expuesto, consideramos que el precio de una referencia (o su TIR asociada) no puede considerarse una magnitud cierta, sino que se trata de una magnitud que se manifiesta de forma difusa, siendo más adecuado, a nuestro entender, cuantificarla a través de un número borroso. En primer lugar, porque la reducción de los precios negociados a un único valor creemos que implican la pérdida de la información que dichos precios contienen, relacionada con las expectativas de los agentes que intervienen en el mercado sobre el comportamiento de los intereses futuros. Así, podemos reinterpretar la no unicidad de los precios que se negocian desde el punto de vista de la teoría de las expectativas racionales. Se puede entender que los agentes que

⁸ El precio medio se define como la media ponderada de los precios aceptados por el volumen adjudicado. El precio marginal, es el precio más pequeño aceptado para la adjudicación de deuda en la subasta. En una subasta de deuda pública, si el precio ofrecido por una entidad está por encima del precio medio, la adjudicación de la deuda para la misma se realiza por el precio medio. Si fuera inferior al precio medio, se realizará por el precio demandado; siempre que éste esté por encima del marginal.

intervienen en el mercado no tienen las mismas expectativas sobre los tipos de interés que regirán en el futuro, lo cual se ajusta a la realidad, ya que no todos tienen la misma información; pero aún en el caso de que la tuvieran, no sería interpretada de idéntica manera, dado el fuerte componente subjetivo que tiene el proceso de toma de decisiones. De esta forma, es lógico que no exista un único precio para cada referencia negociada en el mercado a no ser que sobre esta se haya cruzado una única operación. A este respecto, Ezquiaga (1992) considera que la amplitud de los precios negociados refleja en cierta forma la incertidumbre que los agentes tienen sobre la evolución de los tipos futuros. A mayor incertidumbre, la horquilla de precios para los activos negociados deberá ser mayor. Este último apunte, creemos que refuerza nuestra opinión de que reducir este intervalo a un único valor implica una pérdida de información importante.

De esta forma, consideraremos que los precios con cupón corrido que para cada título se negocian durante una determinada sesión se pueden expresar a través de un número borroso $\tilde{P}$, que podemos definir a través de su función de pertenencia o de sus α -cortes como:

$$\tilde{P} = \{x / \mu_{\tilde{P}}(x)\} = \{P_{\alpha} = [P^1(\alpha), P^2(\alpha)], 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

De esta forma, el rendimiento de un bono cupón cero, si denominamos a t su vencimiento y C su valor nominal, que siempre coincide en los títulos públicos con el precio de amortización, será un número borroso $\tilde{I}$ que se obtendrá como:

$$\tilde{I} = \left(\frac{C}{\tilde{P}} \right)^{1/t} - 1$$

De esta forma, su función de pertenencia se hallará como:

$$\mu_{\tilde{I}}(y) = \bigvee_{y = \left(\frac{C}{x} \right)^{1/t} - 1} \mu_{\tilde{P}}(x) = \mu_{\tilde{P}} \left(\frac{C}{(1+y)^t} \right)$$

y por tanto, sus α -cortes son:

$$I_{\alpha} = [I^1(\alpha), I^2(\alpha)] = \left[C \frac{1}{[P^1(\alpha), P^2(\alpha)]} \right]^{1/t} - 1 = \left[\left(\frac{C}{P^2(\alpha)} \right)^{1/t} - 1, \left(\frac{C}{P^1(\alpha)} \right)^{1/t} - 1 \right]$$

Sin embargo, para bonos americanos, la solución de la ecuación que debemos solucionar no es inmediata, ya que el número borroso TIR, $\tilde{I}$, deberemos despejarlo de la ecuación borrosa:

$$\tilde{P} = \sum_{t=t_1}^{t_n} \frac{c}{(1+\tilde{I})^t} + \frac{C}{(1+\tilde{I})^{t_n}}$$

ecuación que queda reexpresada a través de los α -cortes como:

$$[P^1(\alpha), P^2(\alpha)] = \sum_{t=t_1}^{t_n} \frac{c}{(1 + [I^1(\alpha), I^2(\alpha)])^t} + \frac{C}{(1 + [I^1(\alpha), I^2(\alpha)])^{t_n}}$$

siendo entonces I_α un intervalo de confianza que podemos notar como:

$$I_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R}^+ / y = \sum_{t=t_1}^{t_n} \frac{c}{(1+x)^t} + \frac{C}{(1+x)^{t_n}}, y \in P_\alpha = [P^1(\alpha), P^2(\alpha)] \right\}$$

Esta ecuación se soluciona planteando para el extremo superior e inferior de I_α las siguientes dos ecuaciones:

$$P^1(\alpha) = \sum_{t=t_1}^{t_n} \frac{c}{(1 + I^2(\alpha))^t} + \frac{C}{(1 + I^2(\alpha))^{t_n}} \quad y \quad P^2(\alpha) = \sum_{t=t_1}^{t_n} \frac{c}{(1 + I^1(\alpha))^t} + \frac{C}{(1 + I^1(\alpha))^{t_n}}$$

donde siempre obtendremos $I^1(\alpha) \leq I^2(\alpha)$, dado que la rentabilidad interna de un título es siempre monótona decreciente respecto a su precio, lo cual es fácil de comprobar. Si tomamos la función implícita $F(x,y)=0$ siguiente:

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} \frac{c}{(1+x)^t} + \frac{C}{(1+x)^{t_n}} - y = 0$$

podemos realizar la derivada de la TIR respecto al precio como:

$$\frac{dx}{dy} = - \frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}} = \frac{-1}{\sum_{t=t_1}^{t_n} t \frac{c}{(1+x)^{t+1}} + t_n \frac{C}{(1+x)^{t_n+1}}} \leq 0$$

es decir, la TIR de un título es una función monótona decreciente de su precio.

Por otra parte, hay numerosos trabajos como Delgado y Moral (1987), Gupta (1993), Zadeh (1978) o Chanas y Nowakowski (1988) que analizan la transformación de variables aleatorias como números borrosos y viceversa. Aunque, conceptualmente, como explican Kaufmann y Gil Aluja (1990, p. 3-5), es un error confundir ambos instrumentos de modelización de la incertidumbre, el objetivo buscado cuando se realiza la transformación de una variable aleatoria en un número borroso equivalente es aprovechar la mayor facilidad y flexibilidad de los números borrosos respecto a la operatividad de las variables sobre las que debemos realizar operaciones aritméticas. Como ya hemos comentado, una vez hemos estimado la ETTI mediante métodos

econométricos, no utilizamos toda la información que nos proporciona la regresión efectuada, sino sólo una pequeña parte: la esperanza matemática de las estimaciones que obtenemos. Ello es debido a la dificultad que entraña efectuar operaciones aritméticas con variables aleatorias. En este sentido, con la aritmética borrosa, muy similar a la aritmética con números ciertos, podemos “arrastrar” toda la información que se obtiene con la regresión borrosa en las posteriores estimaciones, valoraciones financieras, etc. que realicemos, es decir, podemos operar con todo el número borroso y no es necesario reducirlo a una medida de posición representativa del mismo.

Por otra parte, y respecto a los tipos de interés que regirán en periodos venideros, podemos afirmar que son magnitudes inciertas y que difícilmente pueden ser modelizadas como variables aleatorias, tal como ya se ha comentado anteriormente en el apartado 1.4.2., sobre todo en un entorno económico como el actual, cada vez más turbulento y cambiante. Dado que para llegar a inferirlos sólo disponemos de datos vagos, como los precios actuales de renta fija negociados, un camino más adecuado para su predicción, debido a la naturaleza de las variables de partida, creemos que es la utilización de los instrumentos que nos proporciona la teoría de los subconjuntos borrosos, más adecuada que la econometría en situaciones en que la información vienen dada de forma difusa e imprecisa. Mediante los subconjuntos borrosos podremos procesar esta información de forma más adecuada mediante la utilización de operadores “blandos” como el máximo y el mínimo, incurriéndose de esta forma en una menor pérdida de información durante todo el proceso de inferencia que utilizando operadores “duros” como la suma y el producto, operadores asociados a la inferencia de variables mediante la estadística y la econometría.

Por otra parte, bien es cierto que hay numerosos trabajos que analizan aspectos relacionados con la valoración financiera en condiciones de incertidumbre, y que cuantifican los parámetros que en dicha valoración intervienen a través de los instrumentos que proporciona la teoría de los subconjuntos borrosos. Éstos parten de que el interés de valoración para los sucesivos periodos viene estimado a partir de números borrosos, tal como ha sido explicado en la primera parte de la tesis, pero el problema inicial radica en como realizar dicha estimación. En este capítulo se aborda dicho problema, proponiéndose a tal fin varias metodologías, inspiradas todas ellas en los métodos comentados en el apartado 1.4.3. y que en todos los casos se basan en la utilización de técnicas de regresión borrosa –ya utilizadas en el campo financiero, por ejemplo, por Castro *et al.* (1994) en el problema de selección de carteras- para ajustar la estructura temporal de los tipos de interés y en el marco conceptual de la teoría de las expectativas racionales.

Así, el procedimiento que propondremos para la estimación de los tipos futuros a través de números borrosos se basará en la estimación borrosa y no econométrica de la ETTI. Para ello, en primer lugar, repasaremos en el siguiente apartado los métodos econométricos más utilizados en

la estimación de la ETTI, basados todos ellos en la técnicas convencionales de regresión. A continuación, en el apartado 3, adaptaremos las metodologías expuestas a la circunstancia de que los datos de partida son borrosos, de forma que los tipos al contado que deduciremos de los métodos expuestos serán también números borrosos. Posteriormente, en el apartado 4, analizaremos como hallar los tipos implícitos que define la ETTI, que también serán números borrosos. Aceptando como marco de referencia válido la teoría de las expectativas racionales, éstos deberán ser los tipos que el mercado anticipa, en un momento dado, para el futuro. Su determinación, si bien partiendo de datos ciertos ya hemos comprobado que es inmediata, no lo será así si partimos de una ETTI borrosa, ya que nos enfrentamos a un problema de resolución de ecuaciones borrosas. Nosotros, en este contexto y siempre que se pueda, propondremos como solución de las mismas aquella que produzca la menor incertidumbre posible en los tipos estimados, es decir, la que se conoce como “solución clásica” para las ecuaciones borrosas. Por otra parte, dado que lo que realmente pretendemos es estimar los intereses a aplicar en un momento concreto cuando se pretende realizar una valoración financiera, dedicaremos una especial atención a la determinación de los tipos del mercado –tipos al contado y tipos implícitos– a través de números borrosos triangulares, ya que se trata de un tipo de números borrosos con una fácil e intuitiva interpretación a la vez que se adecuan en gran medida al proceso de realización de estimaciones subjetivas. Asimismo, en posteriores aplicaciones de dichas estimaciones –en nuestro caso concreto, el cálculo de valores actuales– permiten una fácil operatoria y computación para las mismas.

CAPÍTULO 2:

MÉTODOS ECONOMÉTRICOS DE ESTIMACIÓN DE LA ETTI EN CERTEZA

2.1. ESTIMACIÓN DE LA ETTI A TRAVÉS DE LA CURVA DE RENTABILIDADES

Definimos como curva de rentabilidades de un mercado de bonos –en nuestro caso, el mercado de deuda pública- a la relación existente entre el rendimiento interno de los títulos negociados en dicho mercado (variable dependiente) y su vencimiento (variable independiente). Así, la curva de rentabilidades no es, en general, lo mismo que la ETTI. La ETTI, como ya hemos comentado, es la relación entre la variable independiente vencimiento y la dependiente tipo al que el mercado descuenta una unidad monetaria en dicho vencimiento. En el MDPA, que es en el cual analizaremos los diversos métodos de estimación de la ETTI, al no ser posible la construcción de la ETTI para plazos superiores al año y medio con títulos cupón cero, ya que no existe prácticamente negociación de este tipo de títulos con vencimientos superiores, la curva de rentabilidades indicará una relación entre rentabilidad del título y vencimiento de éste. Como las estimaciones que se realizan parten de rentabilidades observadas sobre bonos americanos, los rendimientos de partida -las TIRs de los títulos- no serán más que una “media” de los tipos que rigen para cada uno de los vencimientos en los que los títulos ofrecen pagos, y por tanto sólo podrá ser ajustada, a priori, una curva tiempo-rendimiento para bonos americanos, pero no sobre los tipos al contado. Así pues, sólo coincidirán ETTI y curva de rentabilidades si la curva de tipos cupón cero hubiera sido estimada a partir de un conjunto de bonos que no ofrecieran cupones.

2.1.1. Algunos modelos para ajustar la curva de rentabilidades

A continuación exponemos algunos de los modelos más utilizados en el ajuste de la curva de rentabilidades. Casi todos ellos tienen como denominador común su linealidad, y que la estimación de los parámetros que definen el modelo se realiza mediante mínimos cuadrados ordinarios, excepto el primero de los que analizaremos, expuesto en Lamothe *et al.* (1995).

2.1.1.1. Interpolación lineal de las TIRs de los títulos

De los k bonos que se negocian en un mercado, denominamos como I_r a la TIR de la r -ésima referencia de las que componen la muestra, medida como tanto efectivo anual. Supongamos que estas referencias están ordenadas en orden ascendente según el vencimiento y con $r=1,2,\dots,k$, de

forma que si denominamos como t_r al vencimiento del bono número r , $t_r \leq t_{r+1}$. Si queremos hallar la rentabilidad que debe ofrecer un bono con un vencimiento t , I_t , interpolaremos linealmente la TIR de los bonos con el vencimiento inferior más cercano, t_r , y el superior más cercano, t_{r+1} , de forma que:

$$I_t = \frac{t_{r+1} - t}{t_{r+1} - t_r} I_r + \frac{t - t_r}{t_{r+1} - t_r} I_{r+1}$$

Para ejemplificar los métodos de estimación de la ETTI analizados, estimaremos ésta el 22-1-1999 en el mercado de deuda pública anotada. Las cotizaciones de los bonos y obligaciones negociados en dicha sesión fueron:

Precio Mínimo	Precio Máximo	Precio Medio Ponderado	TIR Mínima	TIR Máxima	TIR Media	Vencimiento	Cupón
110.390	110.390	110.390	2.955	2.955	2.955	23/03/00	12,25%
104.500	104.500	104.500	2.890	2.890	2.890	12/04/00	6,75%
104.050	104.140	104.095	2.848	2.895	2.872	26/01/01	5,00%
114.250	114.280	114.265	2.938	2.943	2.941	22/02/01	10,10%
122.950	123.030	122.990	3.057	3.082	3.070	10/01/02	11,30%
113.940	114.055	113.998	3.055	3.095	3.075	23/02/02	7,90%
122.750	122.750	122.750	3.090	3.090	3.090	12/06/02	10,30%
101.700	101.800	101.750	3.058	3.085	3.072	25/07/02	4,25%
107.880	107.970	107.925	3.103	3.126	3.115	26/01/03	5,25%
132.030	132.080	132.055	3.246	3.256	3.251	27/08/03	10,90%
131.320	131.450	131.385	3.247	3.272	3.260	25/10/03	10,50%
122.240	122.500	122.370	3.319	3.368	3.344	27/05/04	8,00%
103.550	103.670	103.610	3.310	3.331	3.321	25/07/04	4,50%
135.020	135.100	135.060	3.493	3.505	3.499	23/02/05	10,00%
132.410	132.460	132.435	3.622	3.629	3.626	26/04/06	8,80%
125.080	125.329	125.205	3.695	3.725	3.710	28/03/07	7,35%
116.070	116.470	116.270	3.804	3.853	3.829	26/01/08	6,00%
135.700	135.700	135.700	3.858	3.858	3.858	02/03/09	8,20%
108.280	108.490	108.385	3.852	3.875	3.864	25/07/09	5,15%
120.150	120.375	120.263	4.193	4.213	4.203	26/01/13	6,15%
103.350	103.550	103.450	4.223	4.240	4.232	25/07/14	4,75%
119.500	119.800	119.650	4.742	4.758	4.750	27/01/29	6,00%

Y las rentabilidades que deben ofrecer bonos con vencimientos enteros de hasta 10 años son, según los datos expuestos:

t	I_t
1	0,02912
2	0,02831
3	0,03025
4	0,03066
5	0,03241
6	0,03412

7	0,03534
8	0,03627
9	0,03755
10	0,03782

Debemos señalar que se ha tomado como TIR de los bonos, la media de la TIR inferior y la TIR superior que se ha registrado en las operaciones realizadas sobre cada uno de los títulos y que así hemos procedido el resto de apartados. Asimismo, la muestra tomada esta formada por referencias negociadas con vencimientos de hasta 15 años, por lo que la ETTI podría ser estimada para vencimientos, también, de hasta 15 años. Si bien, en la fecha en la que realizaremos la estimación se negociaba la referencia O-6% a 30 años, no ha sido incluida ya que no existen bonos con vencimientos entre 15 y 30 años, lo cual provocaría que la ETTI estimada para dicho espectro de vencimientos fuera poco fiable. Por otra parte, debemos señalar que los únicos títulos que han sido tomados en consideración han sido bonos y obligaciones del estado, y no las letras del tesoro. Las divergencias en la fiscalidad de los rendimientos de estos últimos títulos pueden provocar distorsiones en los resultados que se obtengan.

2.1.1.2. Ajuste polinómico de la TIR de los títulos

En este caso, se supone que la rentabilidad interna de un título r , I_r , con $r=1,2,...,k$, puede ser ajustada por un polinomio de grado m de su vencimiento, t_r . Un ejemplo de su utilización puede ser encontrado en Mascareñas (1997). Así:

$$I_r = a_0 + a_1 t_r + a_2 (t_r)^2 + \dots + a_m (t_r)^m + \varepsilon_r$$

Siendo ε_r el término de error, que se supone que presenta las propiedades convencionales. Asimismo, la determinación del grado del polinomio debería realizarse de forma que se consiguiera un equilibrio entre el mínimo grado del polinomio elegido con el mejor ajuste, medido este a través del coeficiente de determinación.

A continuación exponemos los resultados que se obtienen para la sesión del 22/1/99, considerando un polinomio de 4º grado para el ajuste de la ETTI. Se ha tomando como variable dependiente, la TIR que se obtiene como media aritmética de la TIR máxima y mínima para cada referencia durante la sesión que analizamos. Debajo del coeficiente estimado para las variables independientes aparece el estadístico t de student que indica la relevancia que tiene estadísticamente cada una de las variables independientes. En general, si el valor absoluto de la t de student es mayor o igual a dos, podemos aceptar dicha variable como relevante en el modelo, pero tal como hemos comentado lo importante es el ajuste global de proporciona el modelo, el

cual que se mide a través del coeficiente de determinación, y no tanto la relevancia de cada variable tomada individualmente.

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
	0,02914091	-0,00055919	0,00042497	-0,00003761	0,00000104
t	(38,870)	(-0,9308)	(2,809)	(-2,5971)	(2,2753)

Adicionalmente se puede comprobar que el coeficiente de determinación ha sido $R^2 = 0,99$, es decir, se ha conseguido un ajuste prácticamente perfecto. Así, las rentabilidades que deben ofrecer los bonos y obligaciones del estado con vencimiento de hasta 10 años son, según el modelo analizado:

t	I_t
1	0,02897
2	0,02944
3	0,03036
4	0,03156
5	0,03292
6	0,03431
7	0,03565
8	0,03687
9	0,03794
10	0,03884

2.1.1.3. El modelo de Cohen, Kramer y Vaugh (1966)

Tras probar varias funciones rentabilidad-vencimiento, estos autores comprueban que la que produce un mejor ajuste puede expresarse para la r -ésima referencia de la forma:

$$I_r = a_0 + a_1 t_r + a_2 (\ln t_r)^2 + \varepsilon_r$$

Para la sesión que estamos analizando, los resultados que obtenemos para cada uno de los parámetros son:

	a_0	a_1	a_2
	0,02825746	0,0000599	0,0018049
t	(109,055)	(0,236)	(3,884)

siendo $R^2 = 0,9855$. Así, las rentabilidades estimadas para referencias con vencimiento de hasta 10 años que se obtienen en este caso son:

t	I_t
1	0,02832
2	0,02924
3	0,03062
4	0,03197
5	0,03323
6	0,03441

7	0,03551
8	0,03654
9	0,03751
10	0,03843

2.1.1.4. El modelo de Bradley y Crame (1973)

También plantean una relación funcional entre la rentabilidad de las referencias y el tiempo hasta el vencimiento de las mismas, pero la primera viene dada a través de la tasa instantánea de interés. En concreto, estos autores proponen:

$$\ln(1 + I_r) = a_0 + a_1 t_r + a_2 \ln t_r + \varepsilon_r$$

Mediante MCO obtenemos la siguiente estimación de a_0 , a_1 y a_2 en la sesión que está siendo analizada:

	a_0	a_1	a_2
	0,02686409	0,0008610	0,0008476
t	(65,446)	(8,266)	(1,474)

Siendo $R^2 = 0,9758$. Asimismo, la rentabilidad exigida a los bonos con vencimiento de hasta 10 años expresada como tanto efectivo anual es:

t	I_t
1	0,02811
2	0,02960
3	0,03084
4	0,03198
5	0,03307
6	0,03412
7	0,03514
8	0,03615
9	0,03715
10	0,03813

Obteniéndose el tanto efectivo anual como:

$$I_r = (t_r)^{a_2} \cdot e^{a_0 + a_1 t_r} - 1$$

2.1.2. Estimación de la ETTI través de la estimación de la curva de rentabilidades

Los cuatro métodos expuestos permiten estimar la rentabilidad que en una determinada fecha deben ofrecer bonos con cupones intermedios o bonos americanos para diversos vencimientos de

los mismos, ya que son prácticamente los únicos títulos con vencimientos superiores a un año negociados en el mercado de deuda pública anotada. Asimismo el cupón que ofrecen estos títulos presenta periodicidad anual en nuestro mercado. Sin embargo, las estimaciones realizadas no permiten conocer directamente el interés que rige en un mercado a un plazo determinado, es decir, no permiten observar directamente la ETTI. Ello es debido a que la rentabilidad de un bono americano no sólo recoge información sobre el interés que rige para el plazo en el que vence, sino también de los plazos intermedios en los que existe un pago de cupones. A continuación analizaremos el método conocido como del “bono par” que permitirá obtener los tipos al contado a través de la determinación de la curva de rentabilidades.

Para implementar esta metodología es necesario definir el concepto de bono par con un vencimiento t entero. Éste será aquél que paga cupones periódicos -en el mercado español, anuales- y cotiza a la par, es decir, su precio es igual a 100. Para que ello ocurra, el cupón anual que debe ofrecer este título debe ser exactamente igual a su rentabilidad. Si notamos al cupón anual en tanto por cien del bono par como c_t , podremos establecer que $c_t = 100i_t$. De esta forma, para hallar los tipos spot deberemos tener en cuenta que para un vencimiento t cualquiera se deberá cumplir para el bono par con dicho vencimiento:

$$100 = \sum_{r=1}^{t-1} c_r (1 + i_r)^{-r} + (c_t + 100)(1 + i_t)^{-t} \quad t=1,2,\dots,n. \quad [1]$$

En este caso la incógnita será el tipo al contado para un vencimiento t dado, i_t , con $t=1,2,\dots,n$ y n el máximo vencimiento para el que pretendemos estimar la ETTI en el sistema planteado. Por supuesto, i_t y c_t se habrán calculado previamente a través de las expresiones expuestas en 2.1.1.1., 2.1.1.2., 2.1.1.3 ó 2.1.1.4, según el modelo por el que se haya optado.

Puede observarse que el sistema de ecuaciones planteado en [1] es no lineal, pero puede ser transformado en uno lineal sin más que tomar como incógnita el valor de 1 unidad monetaria con vencimiento a t años o factor de actualización a t años, f_t con $f_t = (1+i_t)^{-t}$, en lugar de tomar el tipo spot asociado i_t . De esta forma, plantearemos un sistema de ecuaciones lineal que podemos notar matricialmente como $AF=(100)$, siendo (100) una matriz columna $n \times 1$ con todos los elementos 100, donde:

$$A = \begin{pmatrix} c_1 + 100 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & c_2 + 100 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_{n-1} & c_{n-1} & \dots & c_{n-1} + 100 & 0 \\ c_n & c_n & c_n & c_n & \dots & c_n + 100 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Este sistema, que puede ser resuelto recursivamente, de forma que si han sido obtenidos los primeros $t-1$ factores de actualización, el t -ésimo se hallará como:

$$f_t = \frac{100 - c_t \sum_{r=1}^{t-1} f_r}{100 + c_t}$$

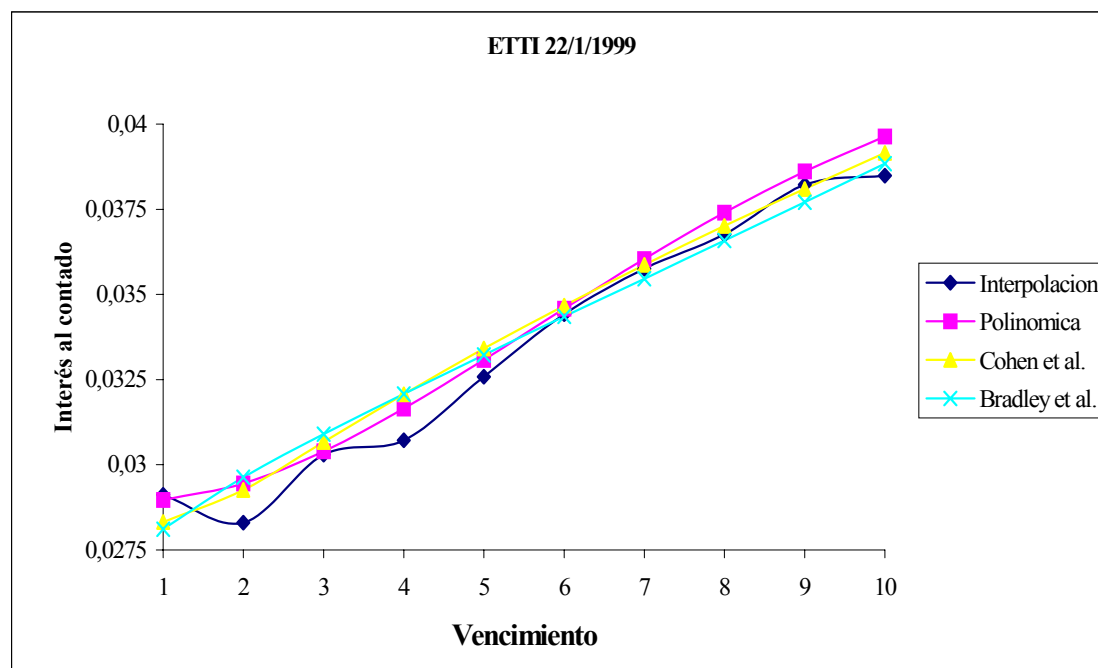
Finalmente, para hallar el tipo spot, i_t , bastará con deshacer el cambio de variable de la forma:

$$i_t = (f_t)^{-1/t} - 1.$$

En cada uno de los casos analizados, los resultados que obtenemos el 22-1-1999 a través de la técnica comentada para vencimientos de hasta 10 años son:

t	Interpolación	Polinómica	Cohen <i>et al.</i>	Bradley <i>et al.</i>
1	0,02912	0,02897	0,02832	0,02811
2	0,02830	0,02945	0,02926	0,02963
3	0,03030	0,03039	0,03067	0,03090
4	0,03072	0,03165	0,03207	0,03208
5	0,03258	0,03308	0,03341	0,03322
6	0,03442	0,03458	0,03467	0,03435
7	0,03575	0,03604	0,03587	0,03546
8	0,03676	0,03740	0,03701	0,03658
9	0,03822	0,03861	0,03810	0,03771
10	0,03849	0,03964	0,03915	0,03884

Y gráficamente, la ETTI estimada con las metodologías propuestas resulta ser:



Como comentario general sobre las estimaciones realizadas, podemos comprobar que los modelos que mejor ajuste han producido para la curva de rentabilidades han sido el polinómico y Cohen *et al*, no quedando bajo nuestra consideración la estimación mediante interpolación lineal, ya que no ha sido estimada con métodos econométricos.

Respecto a los modelos que ajustan la ETTI de forma menos suave, podemos comprobar que el ajuste polinómico y sobre todo, la interpolación proporcionan una forma de la ETTI bastante oscilante, mientras que el resto de modelos proporciona una forma más suave para dicha curva. Ello puede ser fácilmente intuido si comparamos las funciones que combinamos en el apartado 2.1.1.2., de carácter potencial, y por tanto mucho más explosivas en su crecimiento o decrecimiento respecto al vencimiento a las propuestas en 2.1.1.3. y 2.1.1.4. Por otra parte, respecto a la interpolación lineal, ni siquiera se ajusta una relación continua TIR-vencimiento, de forma que el perfil de la curva de rentabilidades, y por tanto, de la ETTI dependerá únicamente de los títulos a partir de los cuales se interpola la TIR en los vértices elegidos. Así, determinadas circunstancias que pueden distorsionar la formación del precio de un título como su liquidez, pueden desvirtuar también el rendimiento que se obtiene en el vértice en cuya estimación se utiliza el rendimiento de dicho título.

2.1.3. Estimación de los tipos forward

A partir de las estimaciones realizadas de la ETTI, que como hemos observado que solamente puede obtenerse como una función discreta del tiempo, los tipos forward únicamente se podrán

hallar como una función discreta. A pesar de que la TIR de los títulos, excepto en la interpolación lineal, se obtienen como una función continua del tiempo, la ETTI se obtiene únicamente para ciertos vencimientos, ya que finalmente recurrimos a la metodología del bono par para acabar hallándola.

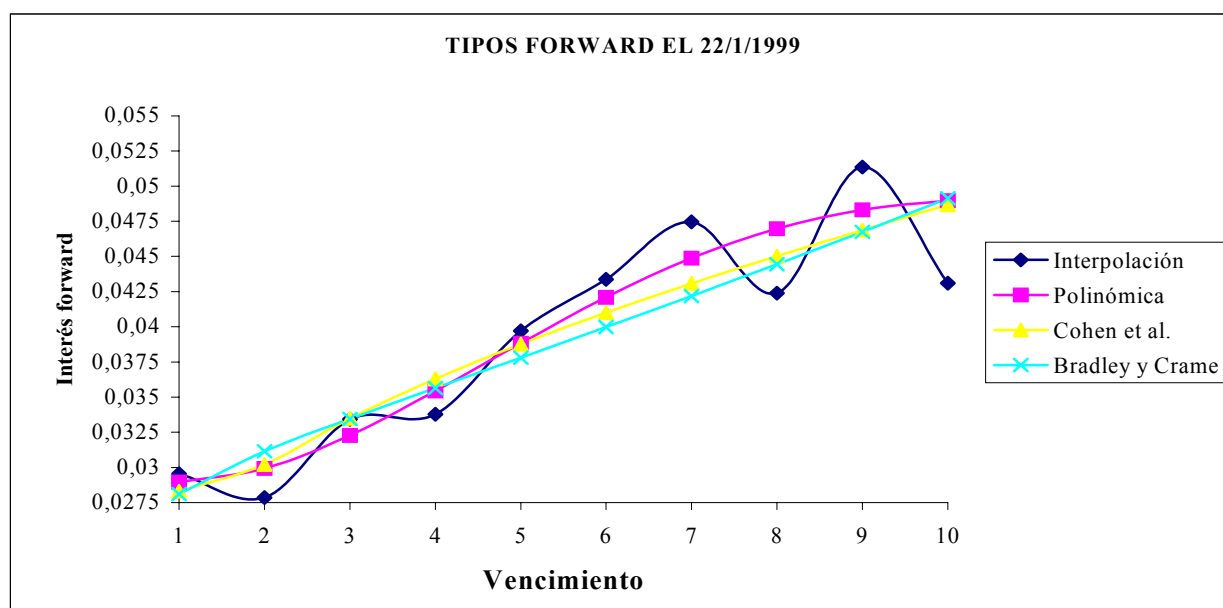
Para hallar los tipos forward a un año que regirán en el mercado durante los n años siguientes, es decir, los tipos que implícitamente anticipa el mercado para los n años de los que consta nuestro horizonte estimatorio planteamos:

$${}_{t-1}i_1 = \left[\frac{(1 + i_t)^t}{(1 + i_{t-1})^{t-1}} \right] - 1 = \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1, t = 1, 2, \dots, n.$$

De esta forma, los resultados que obtenemos en nuestro caso son:

t	Interpolación	Polinómica	Cohen <i>et al.</i>	Bradley <i>et al.</i>
1	0,02955	0,02897	0,02832	0,02811
2	0,02786	0,02992	0,03020	0,03114
3	0,03343	0,03228	0,03349	0,03345
4	0,03379	0,03543	0,03630	0,03564
5	0,03971	0,03884	0,03877	0,03781
6	0,04337	0,04209	0,04101	0,03998
7	0,04746	0,04487	0,04308	0,04218
8	0,04239	0,04698	0,04502	0,04444
9	0,05136	0,04832	0,04688	0,04675
10	0,04310	0,04898	0,04867	0,04914

y gráficamente los podemos representar como:



Podemos observar que con la estimación polinómica, y más especialmente con la realizada a través de la interpolación lineal de la TIR de los títulos, los tipos forward que se obtienen son

muy oscilantes, lo cual en principio no parece razonable, ya que, a mayor vencimiento, los agentes del mercado deben discriminar peor entre el interés de un periodo y el del periodo siguiente, debiendo ser entonces la pendiente de la curva que describen los tipos forward cada vez menos pronunciada. En cambio las estimaciones halladas a través de los métodos de Cohen *et al.* y Bradley y Crame presentan una gran similitud en sus resultados para todos los vencimientos, y con tipos forward menos oscilantes que con los otros dos métodos.

2.2. ESTIMACIÓN DE LA ETTI A TRAVÉS DEL AJUSTE DE LA FUNCIÓN DE DESCUENTO

Las metodologías que a continuación expondremos, tienen como nexo común que buscan establecer un ajuste del factor de descuento mediante métodos econométricos, en lugar del ajuste de las rentabilidades de los títulos, lo cual simplificará enormemente la posterior estimación de la ETTI en el caso en que los tipos cupón cero no sean directamente observables. Como metodologías más relevantes, podemos mencionar las propuestas en los trabajos de McCulloch (1971) y (1975), Carleton y Cooper (1976), Chambers, Carleton y Waldman (1984) y Vasicek y Fong (1982). Éstas, adicionalmente pueden ser utilizadas tanto si los títulos negociados son únicamente cupón cero, como si son bonos americanos o, como ocurre normalmente, en el mercado de deuda pública, se negocian títulos de todos los tipos.

Estos métodos parten de que la posesión de un título r , con $r=1,2,\dots,k$, y siendo k el número de clases de referencias negociables y que tiene una corriente de cobros compuesta por n_r capitales financieros que representamos como $\{(C_i^r, t_i^r)\}_{i=1,2,\dots,n_r}$, es equivalente tener n_r títulos de tipo cupón cero, con las mismas cuantías y los mismos diferimientos. Con C_i^r representamos el i -ésimo cobro generado por el bono número r y como t_i^r el vencimiento de dicha cuantía. De esta forma, el precio de un título del tipo r será la suma de los precios de cada uno de los títulos cupón cero que lo conforman. Asimismo, en el modelo a estimar se hará intervenir el factor de actualización asociado a cada vencimiento y no el interés asociado al mismo, ya que la relación precio-factor de descuento es lineal mientras que la relación precio-interés no lo es. Así, escribimos el precio de un bono del tipo r como¹:

$$P^r = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r f_{t_i^r} \quad [2]$$

¹ El precio debe entenderse como precio con el cupón corrido. En la mayor parte de mercados los precios publicados son precios ex-cupón, es decir, que no consideran la parte de cupón correspondiente al tiempo transcurrido desde la percepción del último cupón, así, P^r se hallará sumando al precio ex-cupón el cupón corrido.

y si se supone que el factor de descuento puede ser expresado a través de la combinación lineal de $m+1$ funciones del vencimiento, de forma que:

$$f_t = \sum_{j=0}^m a_j g_j(t)$$

El modelo básico a estimar se expresa como:

$$P^r = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \sum_{j=0}^m a_j g_j(t_i^r) + \varepsilon_r \quad [3]$$

En todos los casos se busca estimar los parámetros a_j . La diferencia entre uno u otro modelo vendrá dado por la naturaleza de las funciones g_j propuestas y las hipótesis que se realizan sobre el término de error (por ejemplo, presencia o no de heterocedasticidad), de forma que hará necesario utilizar un tipo u otro de estimación econométrica, dependiendo de los supuestos de partida.

Por su mayor utilización respecto al resto, y por que en ellas nos basaremos a la hora de realizar nuestra correspondiente propuesta en incertidumbre, analizamos de forma más particularizada las metodologías propuestas por McCulloch y por Vasicek y Fong, basadas ambas en el ajuste de la función de descuento que definen los tipos al contado mediante funciones del vencimiento definidas a trozos, también denominadas splines.

2.2.1. El modelo de McCulloch

Este método ha sido aplicado en el mercado español, entre otros, por Ezquiaga *et al.* (1994) o Núñez (1995). McCulloch considera que el factor de descuento puede escribirse como:

$$f_t = \sum_{j=0}^m a_j g_j(t), \text{ siendo } g_j(t) \text{ funciones polinómicas del tiempo. Dado que } f_0 = 1, \text{ para el}$$

cumplimiento de esta condición consideraremos:

- 1) $a_0 = 1$
- 2) $g_0(0) = 1$
- 3) $g_j(0) = 0, j=1, 2, \dots, m.$

Así, el factor de descuento que define la ETTI queda reescrito entonces como:

$$f_t = 1 + \sum_{j=1}^m a_j g_j(t)$$

siendo por tanto, el interés al contado para un vencimiento t , i_t :

$$i_t = \left[1 + \sum_{j=1}^m a_j g_j(t) \right]^{-1/t} - 1$$

Y así, la expresión del precio del r -ésimo bono con el cupón vencido queda reescrita a partir de [3] de la forma:

$$P^r = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \left[1 + \sum_{j=1}^m a_j g_j(t_i^r) \right] + \varepsilon_r = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r + \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \sum_{j=1}^m a_j g_j(t_i^r) + \varepsilon_r$$

obteniéndose a partir de la expresión anterior:

$$P^r - \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r = \sum_{j=1}^m a_j \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r g_j(t_i^r) + \varepsilon_r$$

y si $P^r - \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r = Y^r$ y $\sum_{i=1}^{n_r} C_i^r g_j(t_i^r) = \sum_{j=1}^m X_j^r$, la anterior expresión puede ser reescrita como:

$$Y^r = \sum_{j=1}^m a_j X_j^r + \varepsilon_r$$

Podemos observar que el modelo a estimar no tiene termino independiente -se exige que el hiperplano a ajustar pase por el origen de coordenadas-. Asimismo, postulamos para el término de error todas las condiciones necesarias para poder ser llevada a cabo la estimación mediante mínimos cuadrados ordinarios.

Asimismo, las dos cuestiones a abordar, son el número de funciones m a considerar, y determinar la forma que éstas tienen que tomar.

Si bien, en principio el número m de funciones a elegir es discrecional, a la hora de fijarse su número debemos tener en cuenta que éste debe permitir, por una parte, un ajuste satisfactorio en la regresión analizada, y por otra la forma de la ETTI que se obtenga debe ser suave. Utilizar un número de funciones elevado nos llevará a obtener un ajuste prácticamente perfecto, pero dicho ajuste “perfecto” implicará que la función de descuento se ajustará también muy bien a observaciones anormales (provocadas, por ejemplo, por la insuficiente liquidez de algunas referencias), por lo que los tipos spot e implícitos que se desprendan de la estimación efectuada pueda tener un comportamiento poco suave. Por otra parte, tomando pocas funciones conseguiremos una evolución muy suave, pero el ajuste (medido por ejemplo, a través del coeficiente de determinación) no será muy elevado, sobre todo, en aquellos casos en los que la ETTI tome formas relativamente complejas -por ejemplo, de barriga invertida-. En los trabajos de

McCulloch, de forma heurística se propone tomar como m al entero más próximo a $k^{1/2}$ y demuestra que proporciona en la práctica buenos resultados ya que dicho criterio da a la estimación el necesario equilibrio entre un buen ajuste y la suavidad de la ETTI que se deriva.

Una cuestión que debemos abordar a continuación, es la forma de las funciones $g_j(t)$, que en nuestro caso será finalmente polinómica. Respecto a ésta propuesta, la alternativa más sencilla es tomar $g_j(t)=t^j$, sin embargo tal como se explica en los trabajos de McCulloch, esta especificación no está exenta de problemas. En primer lugar, no tiene en cuenta la distribución temporal de los vencimientos de los bonos que componen la muestra. Dado que la mayor parte de éstos se concentran en el corto y medio plazo, el ajuste obtenido será bueno para aquellos vencimientos donde existan una gran cantidad de referencias, ignorándose el resto de plazos. Bien es cierto que el primer problema puede ser solucionado eligiendo un gran número de funciones –por ejemplo $m=10$, por lo que el factor de descuento que define la ETTI sería ajustado por un polinomio de grado 10-, pero en este caso el problema de la poca suavidad de la ETTI resultante se agravaría. Asimismo, dada su naturaleza, estas funciones suelen proporcionar un ajuste demasiado suave al principio de la curva, y demasiado explosivo al final. Sin embargo, aunque en la aplicación que realizamos a continuación también tomaremos esta alternativa, las dos formas que propone para $g_j(t)$ McCulloch son los splines cuadráticos –McCulloch (1971)- y por los splines cúbicos –McCulloch (1975)-. Analizamos la forma de $g_j(t)$, $j=1,2,\dots,m$ en cada uno de los casos.

2.2.1.1. Splines cuadráticos en la modelización de la función de descuento

Tras haberse hallado el número de funciones, m , que intervendrán en la construcción del factor de descuento, si las funciones $g_j(t)$ utilizadas para llevar a cabo la estimación de la ETTI son splines cuadráticos, es decir, polinomios de segundo grado definidos a tramos, continuos y derivables hasta primer orden, deberemos determinar los intervalos en que debemos dividir el espectro de vencimientos considerado. Normalmente, este espectro vendrá dado, si suponemos que los bonos han sido ordenados en orden creciente, por el intervalo $[0, t_{n_k}^k]$, donde $t_{n_k}^k$ será el vencimiento del bono k -ésimo, que al ser el último, será el mayor. Al utilizarse m splines cuadráticos será necesario dividir el espectro de vencimientos en $m-1$ intervalos o tramos, los cuales vendrán delimitados por un nodo inferior y uno superior. En total deberemos determinar m nodos, notándose el j ésimo como d_j , $j=1,2,\dots,m$. La determinación del primero y del último es inmediata: $d_1 = 0$ y $d_m = t_{n_k}^k$.

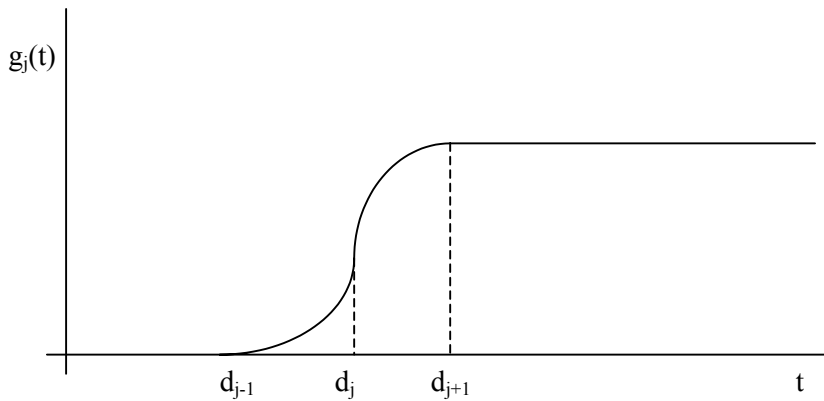
La cuestión que abordamos a continuación es la determinación de los nodos intermedios, d_j , $j=2,3,\dots,m-1$. Su elección se deberá realizar teniendo en cuenta que en cada uno de los intervalos

en que dividimos el espectro de vencimientos, $[d_{j-1}, d_j]$, $j=2, \dots, m$, se deben contener el mismo número de observaciones, es decir, aproximadamente $\frac{k}{m-1}$ observaciones. Así, la forma de las funciones $g_j(t)$ dependerá de la distribución de vencimientos de las referencias, y como es lógico y deseable, obtendremos una mayor matización de la ETTI en los vencimientos en los que exista mayor número de observaciones. Así,

$$d_j = t_{n_q}^q + \theta(t_{n_{q+1}}^{q+1} - t_{n_q}^q), \quad j = 2, \dots, m-1$$

siendo q la parte entera de $\frac{(j-1)k}{m-1}$, y $\theta = \frac{(j-1)k}{m-1} - q$. Con q notamos el número de orden del bono. Volvemos a reseñar que partimos de que los bonos están ordenados en orden creciente de vencimiento, debiéndose cumplir por tanto: $t_{n_r}^r < t_{n_{r+1}}^{r+1}$, $r = 1, 2, \dots, k-1$.

Tras haberse hallado los nodos, definimos para cada uno de ellos, d_j , $j=1, \dots, m$, una función asociada $g_j(t)$, las cuales estarán definidas de forma distinta para cada uno de los tramos en que dividimos el espectro de vencimientos. La j -ésima función valdrá cero para $t \leq d_{j-1}$, quedará definida a través de un polinomio de segundo grado para $d_{j-1} \leq t \leq d_j$ y otro distinto para $d_j \leq t \leq d_{j+1}$. A partir de d_{j+1} , $g_j(t)$ será constante. Es decir, gráficamente podemos observar que dichas funciones son:



Obsérvese que para el tramo (d_j, d_{j+1}) , $g_j(t)$ tiene la segunda derivada negativa, ya que en dicho tramo es creciente y la pendiente en d_{j+1} debe ser nula, ya que a partir de dicho nodo $g_j(t)$ se define como una constante (su primera derivada es cero) y las derivadas de $g_j(t)$ deben ser continuas.

Asimismo, puede observarse que, de esta forma, esta familia de funciones proporcionará un ajuste mucho más suave que tomar t^j , $\forall j$, ya que por naturaleza, estas últimas funciones tienen un comportamiento mucho más explosivo.

Asimismo, las funciones $g_j(t)$ deben ser continuas y derivables hasta primer orden. Añadiendo la condición arbitraria $\frac{df_t}{dt}(d_j) = a_j$, la cual se reduce a exigir que $\frac{dg_j(t)}{dt}(d_j) = 1$, los m splines que debemos utilizar vienen dados por:

$$g_1(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2d_2}t^2 + t & 0 \leq t < d_2 \\ \frac{1}{2}d_2 & d_2 \leq t < t_{n_k}^k \end{cases}$$

$$g_j(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < d_{j-1} \\ \frac{1}{2(d_j - d_{j-1})}(t - d_{j-1})^2 & d_{j-1} \leq t \leq d_j \\ -\frac{1}{2(d_{j+1} - d_j)}(t - d_j)^2 + (t - d_j) + \frac{1}{2}(d_j - d_{j-1}) & d_j \leq t \leq d_{j+1} \\ \frac{1}{2}(d_{j+1} - d_{j-1}) & d_{j+1} \leq t \leq d_m \end{cases}$$

$j = 2, 3, \dots, m-1$

$$g_m(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t \leq d_{m-1} \\ \frac{1}{2(d_m - d_{m-1})}(t - d_{m-1})^2 & d_{m-1} \leq t \leq d_m \end{cases}$$

2.2.1.2. Splines cúbicos en la modelización de la función de descuento

Cuando hemos determinado el número de funciones, m , que determinan el factor de actualización, lo cual podemos realizar de la forma ya comentada, McCulloch (1975) se propone utilizar en la determinación de $g_j(t)$, $j=1,2,\dots,m$, splines cúbicos, es decir polinomios de tercer grado definidos a tramos, por lo que la función de descuento ajustada finalmente será también un polinomio de tercer grado. Ello es debido a que, aunque los splines cuadráticos proporcionan un ajuste satisfactorio y una ETTI normalmente más suave que la que se obtendría utilizando simples polinomios, la suavidad de los tipos forward que se obtienen utilizando splines cúbicos es todavía mayor.

En este caso, bastará con definir $m-1$ nodos, que notamos como d_j , $j=1,2,\dots,m-1$, de forma que se habrá particionado el espectro de vencimientos en $m-2$ intervalos. Como siempre, la obtención del

primer y último nodo es inmediata, ya que $d_1 = 0$ y el último nodo es el vencimiento del bono que lo tiene más alejado, es decir, $d_{m-1} = t_{n_k}^k$.

Como hemos comentado en el supuesto de los splines cuadráticos, los nodos intermedios, d_j , $j=2, \dots, m-2$ se deben definir de forma que los $m-2$ intervalos en que dividamos $[0, t_{n_k}^k]$ contengan el mismo número de observaciones, en este caso, aproximadamente $\frac{k}{m-2}$. Así, el j -ésimo nodo se halla como:

$$d_j = t_{n_q}^q + \theta(t_{n_{q+1}}^{q+1} - t_{n_q}^q)$$

siendo q el entero de:

$$\frac{(j-1)k}{m-2}$$

y asimismo,

$$\theta = \frac{(j-1)k}{m-2} - q$$

Igual que cuando analizamos la determinación de los splines cuadráticos, q indica un número de orden del bono, considerándose igualmente que los bonos están ordenados en orden creciente de vencimiento, es decir: $t_{n_r}^r < t_{n_{r+1}}^{r+1}$ $r = 1, 2, \dots, k-1$.

Una vez hemos dividido el espectro de vencimientos en $m-2$ intervalos de confianza, McCulloch define las $m-1$ primeras funciones $g_j(t)$ como los splines cúbicos resultantes de calcular la función primitiva de los splines cuadráticos que obtendríamos en el apartado 2.2.1.1. para cada uno de los nodos de que disponemos, d_j , $j=1, 2, \dots, m-1$, e imponiéndose la condición de continuidad. Así, las funciones $g_j(t)$, $j=1, 2, \dots, m-1$, son funciones cúbicas definidas de forma distinta para cada uno de los $m-2$ tramos en los que ha sido dividido el horizonte estimatorio. Éstas serán continuas, ya que para su construcción se ha impuesto dicha condición, y derivables hasta segundo orden, ya que los splines cuadráticos de los cuales provienen son derivables hasta primer orden. En concreto, $g_j(t)$; $j=1, 2, \dots, m-1$ es:

$$g_j(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < d_{j-1} \\ \frac{(t - d_{j-1})^3}{6(d_j - d_{j-1})} & d_{j-1} \leq t \leq d_j \\ \frac{(d_j - d_{j-1})^2}{6} + \frac{(d_j - d_{j-1})(t - d_j)}{2} + \frac{(t - d_j)^2}{2} - \frac{(t - d_j)^3}{6(d_{j+1} - d_j)} & d_j \leq t \leq d_{j+1} \\ (d_{j+1} - d_{j-1}) \left[\frac{2d_{j+1} - d_j - d_{j-1}}{6} + \frac{t - d_{j+1}}{2} \right] & d_{j+1} \leq t \leq t_{n_k}^k \end{cases}$$

$j = 1, 2, \dots, m-1$

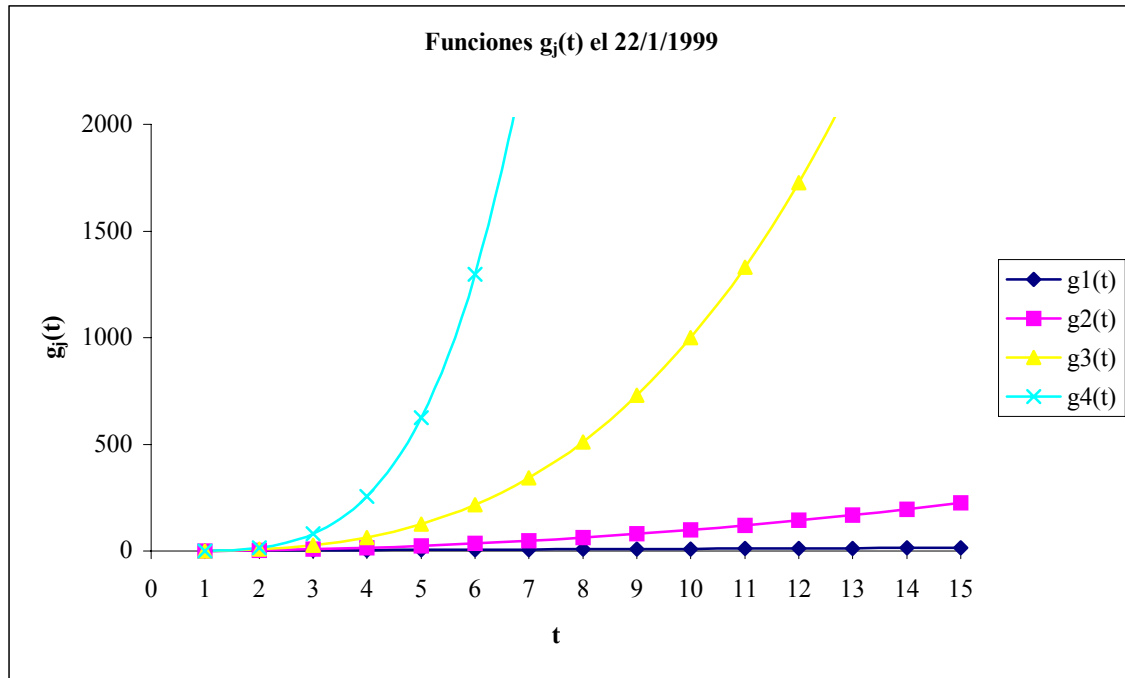
La última función, $g_m(t)$, queda definida de forma distinta. En concreto, McCulloch propone tomar simplemente:

$$g_m(t) = t \quad \forall t$$

Exponemos a continuación los resultados correspondientes a cada una de las especificaciones propuestas (polinómica, splines cuadráticos y splines cúbicos) correspondientes al 22-1-1999. En todos los casos hemos tomado cuatro funciones ($m=4$) $g_j(t)$ con $j>0$, y como precio, el punto medio del intervalo que definan los precios superior e inferior al que han sido negociadas cada una de las referencias a lo largo de la sesión. Como en el apartado 2.1., en la muestra únicamente han sido tomados bonos y obligaciones con vencimientos de hasta 15 años, por las razones ya comentadas. Así, la ETTI únicamente queda definida con fiabilidad en dicho espectro de vencimientos.

a) Estimación polinómica

La forma de las funciones $g_j(t)$, $j=1,2,3,4$ propuestas para cuantificar el factor de descuento es:



Los resultados que arrojan nuestra estimación es:

	a_1	a_2	a_3	a_4
	-0,0260850	-0,0010953	0,0000402	0,0000005
t	(-21,172)	(-2,220)	(0,693)	(0,261)

Adicionalmente, se puede comprobar que el coeficiente de determinación ha sido $R^2 = 0,99$, es decir, se ha conseguido un ajuste prácticamente perfecto. Por otra parte, el tipo spot para un vencimiento t se obtiene como:

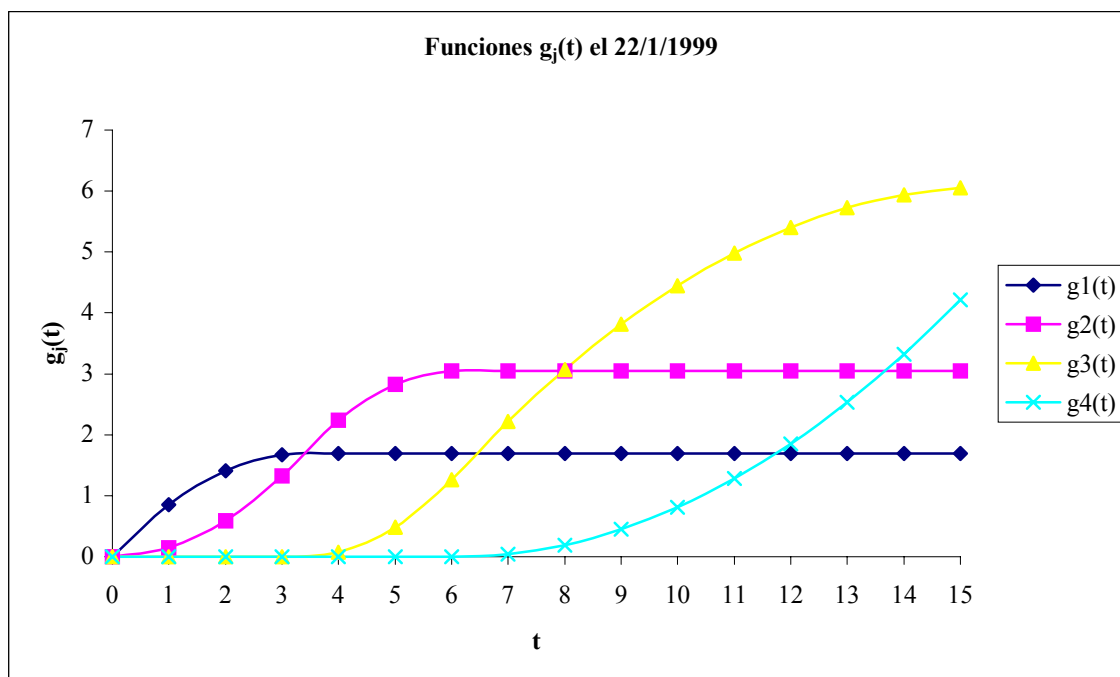
$$i_t = [1 - 0,0260850t - 0,0010953t^2 + 0,0000402t^3 + 0,0000005t^4]^{-1/t} - 1$$

y así, la ETTI hasta 10 años que se deduce es:

t	i_t
1	0,02790
2	0,02935
3	0,03080
4	0,03223
5	0,03363
6	0,03501
7	0,03636
8	0,03765
9	0,03889
10	0,04006

b) Estimación mediante splines cuadráticos

También han sido tomadas cuatro funciones $g_j(t)$, $j=1,2,3,4$, siendo por tanto, el número de nodos a tomar, 4. Su forma es:



Así, los parámetros que estimamos son:

	a_1	a_2	a_3	a_4
	-0,0272905	-0,0310820	-0,0363390	-0,0271128
t	(-21,814)	(-27,818)	(-52,430)	(-27,495)

Con un coeficiente de determinación $R^2 = 0,99$, es decir, se ha conseguido un ajuste prácticamente perfecto. Los tipos al contado se hallarán a partir de la expresión:

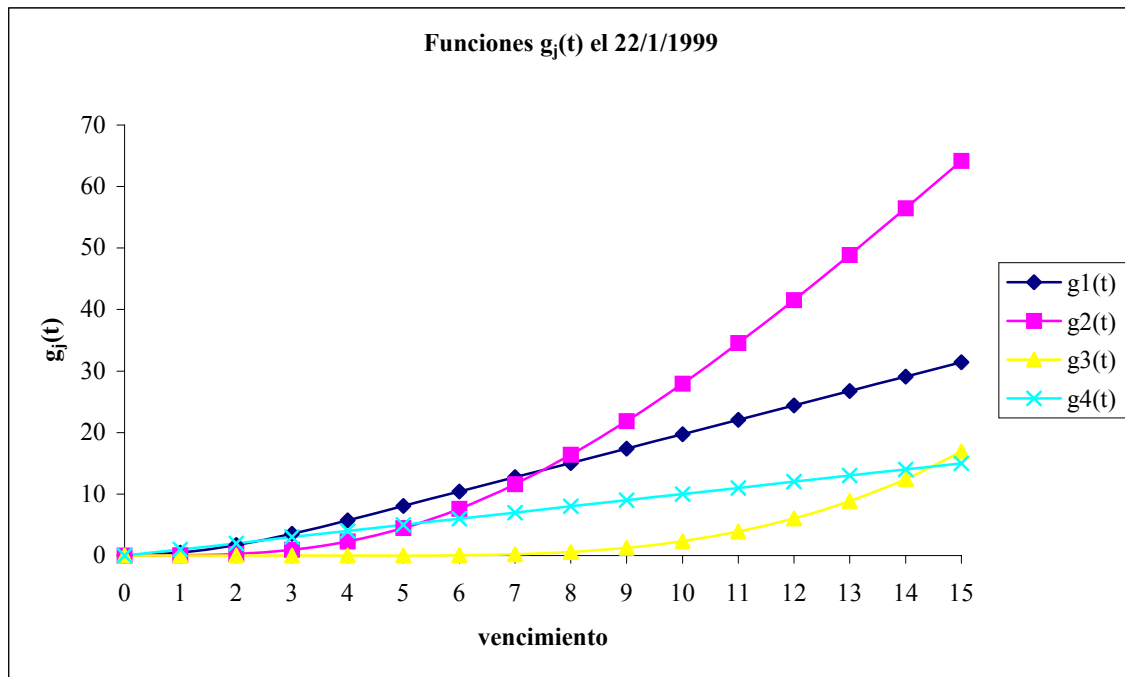
$$i_t = [1 - 0,0272905 g_1(t) - 0,0310820 g_2(t) - 0,0363390 g_3(t) - 0,0271128 g_4(t)]^{-1/t} - 1$$

Para los próximos 10 años la ETTI será:

t	i_t
1	0,02865
2	0,02968
3	0,03077
4	0,03197
5	0,03340
6	0,03504
7	0,03663
8	0,03793
9	0,03904
10	0,04002

c) Estimación mediante splines cúbicos

También han sido tomadas cuatro funciones $g_j(t)$, $j=1,2,3,4$, y por tanto, sólo hemos seleccionado tres nodos. La forma de éstas es:



Los resultados que se obtienen para los parámetros de la regresión son:

	a_1	a_2	a_3	a_4
	-0,002079188	-0,001011142	0,00288336	-0,026224548
t	(-1,856)	(-2,175)	(3,980)	(-17,705)

Igualmente, el coeficiente de determinación ha sido $R^2 = 0,99$, es decir, el ajuste vuelve a ser prácticamente perfecto. Los tipos spot que se obtienen para los próximos 10 años en este caso son:

t	i_t
1	0,02799
2	0,02940
3	0,03081
4	0,03221
5	0,03361
6	0,03500
7	0,03636
8	0,03766
9	0,03891
10	0,04007

Habiendo sido calculados, evidentemente, a través de:

$$i_t = [1 - 0,00207919g_1(t) - 0,00101114g_2(t) + 0,0028834g_3(t) - 0,02622455g_4(t)]^{-1/t} - 1$$

2.2.2. El modelo de Vasicek y Fong

Siguiendo la línea iniciada por McCulloch (1971), Vasicek y Fong (1982) proponen la utilización de splines exponenciales del tiempo, para la cuantificación de la función de descuento que definen los tipos cupón cero. Este modelo ha sido aplicado en el mercado español, entre otros, por Contreras *et al.* (1996) y Urrutia *et al.* (1998).

Para ello Vasicek y Fong empiezan postulando para f_t una forma aproximadamente exponencial:

$$f_t = a_0 + a_1 e^{-\gamma t} + a_2 e^{-\gamma^2 t} + a_3 e^{-\gamma^3 t}$$

Así, el factor de descuento que obtendremos tendrá una forma más parecida a la que teóricamente le corresponde (exponencial del tiempo). De esta forma queda solventado parcialmente uno de los problemas, al menos teórico, que plantea el modelo de McCulloch; el hecho de que el factor de descuento acaba siendo una función polinómica del tiempo.

Otro de los problemas que plantea el modelo de McCulloch era que al trabajar directamente con el tiempo como variable dependiente, el dominio de la función de descuento, a priori debe ser $[0, \infty)$, es decir, no está acotado superiormente. Para que éste quedara acotado superiormente, se limitaba el espectro de vencimientos en los que finalmente se definía la función de descuento a $[0, t_{n_k}^k]$, siendo $t_{n_k}^k$ el vencimiento del bono que lo tiene más alejado, y no pudiendo ser la función de descuento a vencimientos más alejados de $t_{n_k}^k$. Para solventar este problema, Vasicek y Fong proponen, como variable independiente, no el tiempo, sino una variable que surge como transformación de éste x , la cual se construye realizando el cambio de variable $x = 1 - e^{-\gamma t}$. De esta forma, para $t=0$, $x=0$, y si $t \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 1$. Por tanto la nueva variable independiente x que definirá al factor de descuento contempla todos los diferimientos posibles, $t \in [0, \infty)$ a la vez que está acotada: $0 \leq x < 1$. De esta forma, el factor de descuento que se propone es una función polinómica de x , cuya forma es:

$$f_t = G(x) = a_0 + a_1(1-x) + a_2(1-x)^2 + a_3(1-x)^3$$

A partir de estas consideraciones, postulamos, de forma análoga a lo realizado en el modelo de McCulloch, que el factor de descuento sea definido a través de $m+1$ funciones polinómicas –que finalmente serán polinómicas- de x :

$$G(x) = \sum_{j=0}^m \beta_j g_j(x).$$

Una cuestión crucial es la elección de las funciones $g_j(x)$ que cuantifican la función de descuento. Si bien, Vasicek y Fong no proponen ninguna forma para las mismas, grado que $f_0=G(0)=1$, para el cumplimiento de esta condición consideraremos:

- 1) $\beta_0=1$
- 2) $g_0(0)=1-x$
- 3) $g_j(0)=0, j=1,2,\dots,m$.

y por tanto:

$$G(x) = (1-x) + \sum_{j=1}^m \beta_j g_j(x)$$

Por otra parte, éstos consideran que las funciones $g_j(x)$ son splines cúbicos de x .

Así, el tipo spot que se deduce para un plazo t de la función de descuento anterior se hallará como:

$$i_t = \left[e^{-\gamma t} + \sum_{j=1}^m \beta_j g_j(1 - e^{-\gamma t}) \right]^{-1/t} - 1$$

Sustituyendo en la expresión del precio de un bono [3], la expresión de $G(x)$, obtendremos:

$$\begin{aligned} P^r &= \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r G(x_i^r) + \varepsilon_r = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \left[(1 - x_i^r) + \sum_{j=1}^m \beta_j g_j(x_i^r) \right] + \varepsilon_r = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r (1 - x_i^r) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \sum_{j=1}^m \beta_j g_j(x_i^r) + \varepsilon_r = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r (1 - x_i^r) + \sum_{j=1}^m \beta_j \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r g_j(x_i^r) + \varepsilon_r \end{aligned}$$

donde la variable $x_i^r = 1 - e^{-\gamma t_i^r}$. De esta forma podremos escribir:

$$P^r - \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r (1 - x_i^r) = \sum_{j=1}^m \beta_j \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r g_j(x_i^r) + \varepsilon_r$$

Si denominamos $Y^r = P^r - \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r (1 - x_i^r)$ y $X_j^r = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r g_j(x_i^r)$, el modelo que finalmente deberemos estimar será:

$$Y^r = \sum_{j=1}^m \beta_j X_j^r + \varepsilon_r$$

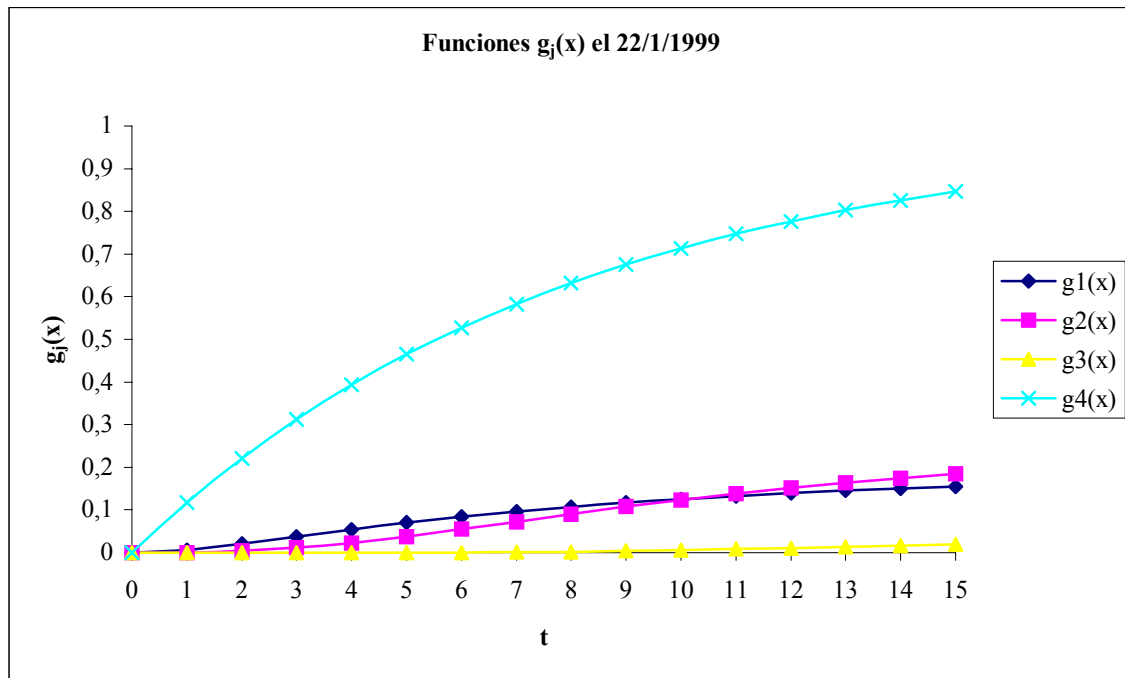
Respecto al modelo básico [3], si bien se supone que el término de perturbación aleatorio ε_r cumple que $E[\varepsilon_r]=0$ y $E[\varepsilon_r \cdot \varepsilon_l]=0, \forall r \neq l$. Vasicek y Fong postulan que los errores son heterocedásticos, y más concretamente que para el r -ésimo bono $\text{Var}[\varepsilon_r]= \left[\frac{dP^r(I)}{dI} (I^r) \right]^2 \sigma^2$, donde $P^r(I)$ es el precio del bono r -ésimo como función de la variable rendimiento interno, I , e I_r la TIR de dicho bono en la sesión que estemos analizando. Ello supondrá que la estimación de los parámetros $\beta_j, j=1, \dots, m$ deberá ser realizada mediante mínimos cuadrados generalizados para un γ determinado, dada la naturaleza heterocedástica del error.

Aunque en principio, y como en el modelo de McCulloch, no hubiera habido problema en suponer que los residuos son homocedásticos, la introducción de la heterocedasticidad está justificada porque un mismo error en términos absolutos en los precios de varios bonos no tiene la misma repercusión en la rentabilidad final que se estima para éstos, lo que incide en la calidad de la ETTI que se derive del modelo una vez implementado. Ello es debido a que, para un error dado en el precio de un bono, a medida que el precio de éste es menos sensible ante variaciones del interés, el error que finalmente se comete en su rendimiento interno sobre el precio debe aumentar. Ello viene motivado porque la derivada del interés respecto al precio del bono es la función inversa de la derivada del precio de un bono respecto al interés. Así, la estimación mediante mínimos cuadrados generalizados nos permitirá, al minimizar la suma de errores al cuadrado, ponderar dichos errores. Daremos mayor importancia a aquellos errores del precio asociados a bonos menos sensibles ante variaciones del tipo de interés (los cuales, asimismo, serán normalmente los que tengan un vencimiento más cercano) y menor a los correspondientes a los precios que sean más sensibles ante variaciones en el tipo de interés, ya que un error dado en su precio no tiene tanta repercusión sobre el error que se cometería en su rentabilidad.

Para hallar la estimación del parámetro γ , $\hat{\gamma}$, deberemos utilizar algún método numérico, como por ejemplo, la optimización cuadrática de Newton. El objetivo sería minimizar la suma de los errores al cuadrado de la regresión.

A continuación exponemos los resultados obtenidos en la estimación del factor de descuento el 22/1/1999. Hemos tomado tres nodos que son: $x_1 = 0$, $x_2 = 1 - e^{-\gamma t_2}$ siendo t_2 la mediana de los vencimientos de los bonos negociados durante la sesión en que se estima la ETTI y $x_3 = 1$. Como splines se ha tomado las cúbicas propuestas por McCulloch, pero teniéndose en cuenta que el argumento de las funciones no es el vencimiento de los cupones y el principal, sino la

transformación que sobre los mismos se realiza. La forma de estas funciones, una vez obtenido el valor de $\hat{\gamma}=0,125$ que es el que minimiza la suma de los errores al cuadrado de la regresión, es:



El coeficiente de determinación es en este caso también del 99%. Los resultados que obtenemos en la sesión que analizamos son:

	β_1	β_2	β_3	β_4	γ
t	0,10945 (1,169)	-1,18703 (-14,485)	-3,23174 (-6,765)	0,75497 (99,844)	0,125

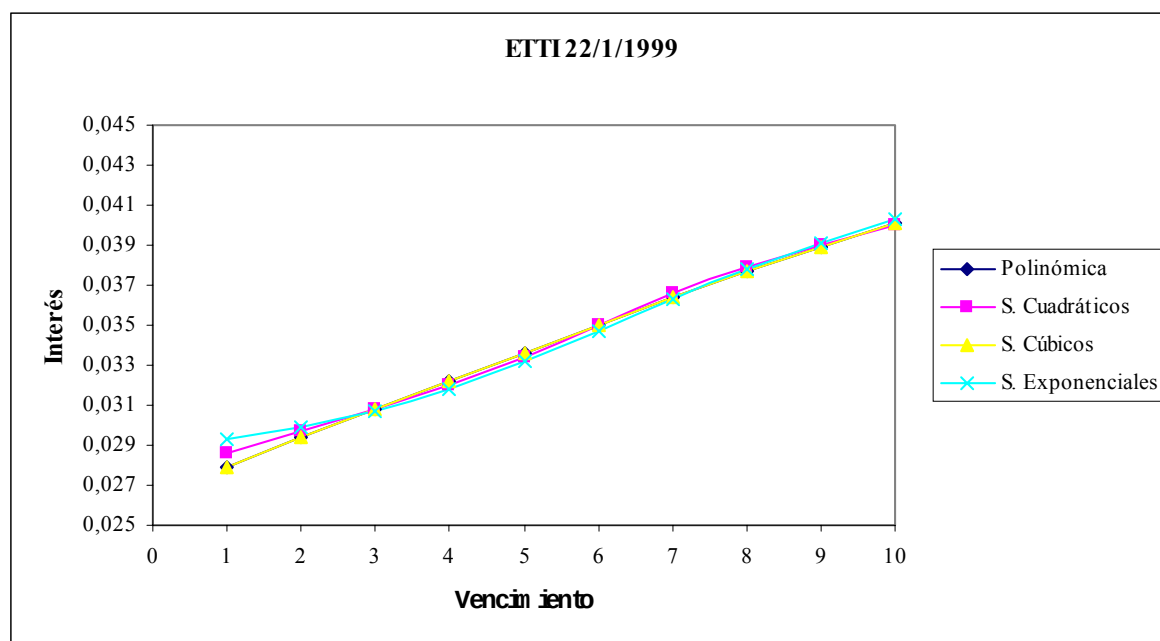
Siendo entonces i_t :

$$i_t = [e^{-0,125t} + 0,10945g_1(1-e^{-0,125t}) - 1,18703g_2(1-e^{-0,125t}) - 3,23174g_3(1-e^{-0,125t}) + 0,75497g_4(1-e^{-0,125t})]^{-1/t} - 1$$

obteniéndose, por tanto, los siguientes tipos al contado:

t	i_t
1	0,02968
2	0,02967
3	0,03050
4	0,03179
5	0,03329
6	0,03485
7	0,03640
8	0,03785
9	0,03918
10	0,04035

La representación gráfica de la ETTI para vencimientos de hasta 10 años con las metodologías expuestas durante este apartado es:



2.2.3. Comentarios a los resultados obtenidos en las estimaciones

Podemos comprobar que las especificaciones de las funciones $g_j(t)$ en el caso de McCulloch no arrojan diferencias sustanciales en la estimación de la ETTI, tanto por los valores de los tipos spot obtenidos como por la bondad del ajuste, ya que en todos los casos los coeficientes de determinación son iguales al 99%. Podemos observar, por otra parte, que el modelo de Vasicek procura resultados similares a los obtenidos con los modelos de McCulloch.

Es cierto que existen divergencias en los tipos spot correspondientes al tramo de 1-2 años, pero pueden ser achacadas a las pocas observaciones que se disponen sobre bonos y obligaciones para dichos vencimientos. En la muestra considerada, el bono con menor maduración era el B-12'25% a 10 años, con un vencimiento residual de 426 días.

En el modelo de McCulloch, y con la estimación $g_j(x) = t_j^j$, no hemos observado, en la fecha analizada, que provoque una ETTI más oscilante que otras definidas a través de splines cúbicos o cuadráticos. Sin embargo, somos conscientes de que un estudio más riguroso debería partir de estimaciones de la ETTI en diferentes sesiones y periodos de tiempo, de forma que puedan ser captadas una variada gama de perfiles de la ETTI. Así sería posible observar el comportamiento que mantienen las diferentes especificaciones propuestas en diferentes escenarios. Sin embargo,

trabajos como del de McCulloch (1971) y Núñez (1995) soportan la hipótesis de que la especificación de $g_j(t)$ como t^j provoca una mayor suavidad en los tipos spot obtenidos.

Asimismo, podemos observar que utilizando esta línea metodológica, a partir de plazos relativamente poco elevados –2 o 3 años- la ETTI que obtenemos queda por encima de la que se deduce de la utilización de la metodología de los bonos par tras el ajuste de las TIR –mediante una regresión o mediante la interpolación-, lo cual es debido a que en este segundo caso no eliminamos totalmente, como ya ha sido comentado, el sesgo de cupón y la ETTI que impera el 22-1-1999 es creciente.

2.2.4. Estimación de los tipos forward a través de la estimación directa de la ETTI

Ya hemos comprobado que en este caso, la función de descuento que describen los tipos al contado y estos mismos tipos, pueden obtenerse como una función continua del tiempo, una vez hayamos ajustado los parámetros de la regresión. Pues bien, también podemos hallar los tipos anticipados por el mercado a través de una función continua. Es decir, podemos hallar una expresión analítica para los tipos forward y los factores de actualización que estos describen.

Así, el factor de actualización forward dentro de $t-1$ años o el valor de 1 unidad monetaria que vence en t años dentro de $t-1$ años es:

$${}_{t-1}f_1 = \frac{f_t}{f_{t-1}} = \frac{\sum_{j=0}^m a_j g_j(t)}{\sum_{j=0}^m a_j g_j(t-1)}$$

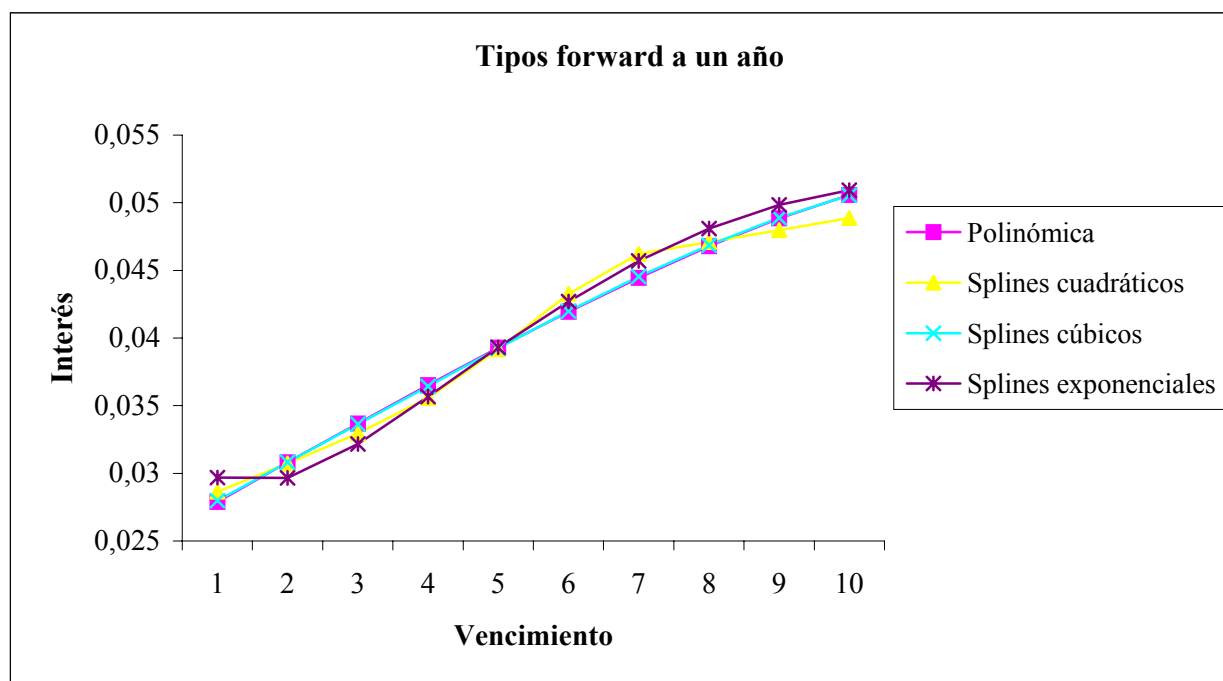
siendo entonces el tipos forward a un año dentro de $t-1$ años:

$${}_{t-1}i_1 = \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1 = \frac{\sum_{j=0}^m a_j g_j(t-1)}{\sum_{j=0}^m a_j g_j(t)} - 1$$

De esta forma, los resultados que obtenemos, con los cuatro modelos de obtención del factor de descuento estudiados son:

t	Polinómica	Splines cuadráticos	Splines cúbicos	Splines exponenciales
1	0,02790	0,02865	0,02799	0,02968
2	0,03081	0,03071	0,03081	0,02966
3	0,03369	0,03295	0,03363	0,03216
4	0,03652	0,03557	0,03643	0,03567
5	0,03928	0,03918	0,03924	0,03931
6	0,04194	0,04326	0,04198	0,04271
7	0,04446	0,04622	0,04453	0,04570
8	0,04679	0,04709	0,04686	0,04810
9	0,04886	0,04797	0,04889	0,04985
10	0,05059	0,04886	0,05056	0,05092

Siendo la evolución temporal de dichos tipos forward:



Como conclusión a los métodos expuestos en este apartado, creemos, que en principio, son superiores a los expuestos en el epígrafe 2.1. ya que:

- La obtención de la ETTI es más sencilla. A partir del ajuste de la TIR de los títulos creemos que el camino para llegar a obtener la ETTI es mucho más tortuosa, ya que debemos combinar dos instrumentos: el ajuste de las TIRs de los títulos con vencimientos enteros y después obtener la ETTI mediante el método del bono par.
- La obtención de la ETTI con las metodologías propuestas en este apartado permite obtener los tipos del mercado (al contado y forward) como funciones continuas del tiempo. Sin embargo, con las metodologías explicadas en el apartado 2.1. sólo podemos obtener la ETTI para determinados vencimientos o vértices, esto es, como una nube de puntos.

- c) En los métodos expuestos en el apartado 2.1. reconocemos, al aplicar la metodología del bono par la diferencia entre los tipos spot y la rentabilidad de un bono americano que presente el mismo vencimiento, con lo cual queda parcialmente eliminado el sesgo de cupón que introducen las rentabilidades de dichos títulos. Sin embargo, el sesgo cupón no queda totalmente eliminado, ya que al ajustar una función del tiempo a la TIR de los títulos, incorporamos como variable independiente únicamente el tiempo, aceptándose de esta forma, que dos bonos que ofrezcan diferentes cupones (por ejemplo, el 8% y el 10%), y que presenten el mismo vencimiento, la TIR de los mismos debe ser idéntica, lo cual, como ya comentamos en el apartado 1.2. no es cierto.
- d) Aunque en general podemos afirmar que en certeza parece ser superior metodológicamente la estimación econométrica de la función de descuento que estimar la ETTI a partir del ajuste TIR-plazo de los bonos, nuestra propuesta en incertidumbre abarcará ambas posibilidades. En primer lugar, porque la segunda línea, aún siendo peor, está ampliamente extendida en la práctica, y en segundo lugar, porque no podemos asegurar, a priori, que utilizando los instrumentos de regresión borrosa la estimación de la ETTI a partir de las TIR de los títulos sea un método netamente inferior a la estimación de la ETTI a través de la función de descuento.

CAPÍTULO 3:

ESTIMACIÓN DE LA ETTI MEDIANTE EL EMPLEO DE UNA REGRESIÓN POSIBILÍSTICA

3.1. ESTIMACIÓN DE LA ETTI A TRAVÉS DE LA CURVA DE RENTABILIDADES

3.1.1. Planteamiento general e hipótesis

Los diversos modelos que a continuación proponemos para la estimación de la curva de rentabilidades de la deuda pública, corresponden a los analizados en el epígrafe 2.1. y adaptados al hecho de que partimos de observaciones sobre la variable dependiente –rentabilidad de las referencias- cuya cuantificación se realiza a través de números borrosos, dada la incertidumbre de los datos. Como método de regresión para el ajuste de la curva de rentabilidades proponemos el modelo de regresión posibilística de Tanaka ya analizado en el apartado 2 de la primera parte de la tesis. Asimismo, realizamos a continuación una serie de hipótesis previas para poder posteriormente ajustar la curva de rentabilidades a partir de los modelos propuestos en el apartado 2.1. de esta parte.

Hipótesis 1: La TIR o la tasa instantánea de rentabilidad del r -ésimo título durante una sesión concreta puede ser expresada a través de un número borroso L-R de Dubois y Prade, en concreto, a partir de un número borroso L-L simétrico de Dubois y Prade. Así, representamos la rentabilidad de los títulos negociados en una sesión como:

$$\tilde{y}_r = (y_C^r, y_R^r)_L \quad y_C^r, y_R^r \geq 0, r = 1, 2, \dots, k$$

La aceptación de esta hipótesis implica considerar que la rentabilidad de una referencia en un día concreto es "aproximadamente y_C ", en lugar de aceptar que es exactamente y_C ; lo cual consideramos que tras lo expuesto en el apartado 1.5 es más adecuado.

Hipótesis 2: La rentabilidad observada para cada título es un α -corte del número borroso que la cuantifica para un nivel α^* arbitrario prefijado por el observador. Dicho intervalo queda expresado a través de su centro y su radio como $\langle y_C^r, y_R^r \rangle$.

Como el α -corte de $\tilde{y}_r$, $y_{r_{\alpha^*}}^r$, vienen dados por $y_{r_{\alpha^*}}^r = [y_C^r - y_R^r L^{-1}(\alpha^*), y_C^r + y_R^r L^{-1}(\alpha^*)]$, la relación entre el centro y el radio del intervalo de confianza considerado y el centro, el radio y la función forma del número borroso del que provienen vendrá dado por las siguientes relaciones:

$$y_C^r = y_C^r \text{ y } y_R^r = L^{-1}(\alpha^*) y_R^r, 0 \leq \alpha^* \leq 1, r = 1, 2, \dots, k$$

De alguna forma, el parámetro α^* , que es el nivel arbitrario al que el decisor observa el α -corte del número borroso $\tilde{y}_r$, podemos interpretarlo como el nivel de incertidumbre que dicho decisor percibe en el mercado. Si este elige un α^* poco elevado, la rentabilidad observada para el bono r $\tilde{y}_r$ tiene un menor radio –es menos incierta-, y por tanto, el decisor otorga mayor fiabilidad a la horquilla de rentabilidades –o precios- observada. Asimismo, creemos que α^* puede ser interpretado como aversión al riesgo del decisor, ya que al aumentar el valor de dicho parámetro se incrementa la incertidumbre de las observaciones, y por tanto dicho decisor percibe un mayor riesgo.

Para hallar y_C^r , nuestra propuesta es, tanto si se trata de la rentabilidad de la referencia número r medida como tanto efectivo anual, como si se mide como tasa instantánea, tomar el centro del intervalo delimitado por la rentabilidad mínima y la máxima negociada durante la sesión expresada como tanto efectivo anual o tasa instantánea, según el caso; y para y_R^r , el radio correspondiente a dicho intervalo.

Analizamos a continuación la metodología que seguiremos, que será común, cuando adaptemos los modelos analizados en 2.1.1.2, 2.1.1.3 y 2.1.1.4 al hecho de que las observaciones realizadas vienen dadas por números borrosos. Partiremos en todos los casos de que la variable dependiente y los parámetros vienen expresados a través de su α^* -corte, siendo α^* el nivel al que el decisor ha obtenido el α -corte de $\tilde{y}^r$. Dado que la expresión del α^* -corte que obtendremos al estimar $\tilde{y}^r$ mediante la regresión posibilística de Tanaka, $\hat{\tilde{y}}^r$, es:

$$\langle \hat{y}_C^r, \hat{y}_R^r \rangle = \sum_{j=0}^m \langle a'_{jC}, a'_{jR} \rangle X_j^r = \left\langle \sum_{j=0}^m a'_{jC} X_j^r, \sum_{j=0}^m a'_{jR} |X_j^r| \right\rangle$$

Evidentemente, el objetivo es estimar el centro y el radio del α^* -corte de los parámetros a'_{jC} y a'_{jR} respectivamente. Notamos como X_j^r la observación de la variable j -ésima para la referencia r , que corresponde a una variable relacionada con el vencimiento del título, siendo por tanto una variable cierta. Asimismo, $\hat{y}_C^r$, $\hat{y}_R^r$ son las estimaciones que sobre el centro y el radio del α^* -

corte correspondiente a la rentabilidad del título r que realizamos tras estimar los parámetros a'_{jC} y a'_{jR} .

Una vez obtenidos a'_{jC} y a'_{jR} , obtendremos el centro y el radio de los números borrosos del que provienen sin mas que identificar $a_{jC} = a'_{jC}$, y $a_{jR} = \frac{a'_{jR}}{L^{-1}(\alpha^*)}$. Igualmente, la estimación realizada sobre la rentabilidad del r -ésimo título es también inmediata. Ésta será un número borroso que hallaremos como:

$$\hat{y}^r = (\hat{y}_C^r, \hat{y}_R^r)_L = \sum_{j=0}^m (a_{jC}, a_{jR})_L X_j^r = \left(\sum_{j=0}^m a_{jC} X_j^r, \sum_{j=0}^m a_{jR} |X_j^r| \right)_L$$

Para determinar los parámetros a_{jC} y a_{jR} , deberemos hallar previamente a'_{jC} y a'_{jR} planteando el programa lineal:

$$\text{Minimizar } z = \sum_{r=1}^k \sum_{j=0}^m a'_{jR} |X_j^r| = \sum_{j=0}^m a'_{jR} \sum_{r=1}^k |X_j^r| \quad [4a]$$

sujeto a:

$$\bar{y}_C^r - \bar{y}_R^r = \sum_{j=0}^m a'_{jC} X_j^r - \sum_{j=0}^m a'_{jR} |X_j^r| \leq y_C^r - y_R^r \quad r=1,2,\dots,k \quad [4b]$$

$$\bar{y}_C^r + \bar{y}_R^r = \sum_{j=0}^m a'_{jC} X_j^r + \sum_{j=0}^m a'_{jR} |X_j^r| \geq y_C^r + y_R^r \quad r=1,2,\dots,k \quad [4c]$$

$$\bar{y}_C^r - \bar{y}_R^r = \sum_{j=0}^m a'_{jC} X_j^r - \frac{1}{L^{-1}(\alpha^*)} \sum_{j=0}^m a'_{jR} |X_j^r| \geq 0 \quad r=1,2,\dots,k \quad [4d]$$

$$a_{jR} \geq 0 \quad j=0,1,\dots,m \quad [4e]$$

Respecto a la función objetivo [4a] y las restricciones [4b], [4c], y [4e], son las expuestas en el epígrafe dedicado a la regresión borrosa de la primera parte de la tesis. El bloque de restricciones [4d] es asegura la no negatividad de la TIR correspondiente a cualquier bono de los k que componen la muestra analizada.

3.1.2. Implementación de los diversos modelos de estimación de la curva de rentabilidades considerando los datos de partida como números borrosos triangulares

A continuación presentamos los resultados obtenidos para el 22-1-1999 al aplicar el método de regresión posibilística propuesto en los diversos modelos de la curva de rentabilidades. En todos los casos se ha tomado una función forma $L(x) = \text{Max} \{0, 1-|x|\}$, es decir, la correspondiente a un número borroso triangular. Por tanto, $L^{-1}(\alpha) = 1-\alpha \forall \alpha \in [0,1]$. Así, cada parámetro estimado será un NBT simétrico que notaremos como $\tilde{a}_j = (a_{jC}, a_{jR}) \forall j$. De esta forma, la estimación realizada sobre la rentabilidad de un bono americano con vencimiento en t predefinido por el decisor, $\tilde{y}_t$ vendrá dada por un número borroso triangular cuya función de pertenencia será:

$$\mu_{\tilde{y}_t}(x) = \begin{cases} \frac{x - \left(\sum_{j=0}^m a_{jC} X_j^t - \sum_{j=0}^m a_{jR} |X_j^t| \right)}{\sum_{j=0}^m a_{jR} |X_j^t|} & \sum_{j=0}^m a_{jC} X_j^t - \sum_{j=0}^m a_{jR} |X_j^t| \leq x \leq \sum_{j=0}^m a_{jC} X_j^t \\ \frac{\left(\sum_{j=0}^m a_{jC} X_j^t + \sum_{j=0}^m a_{jR} |X_j^t| \right) - x}{\sum_{j=0}^m a_{jR} |X_j^t|} & \sum_{j=0}^m a_{jC} X_j^t \leq x \leq \sum_{j=0}^m a_{jC} X_j^t + \sum_{j=0}^m a_{jR} |X_j^t| \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Siendo X_j^t la j -ésima variable a considerar para el hipotético bono que vence en t , y que estará relacionada con el vencimiento de dicho bono.

3.1.2.1. Ajuste de la curva de rentabilidades mediante la interpolación lineal

Debemos señalar que de los métodos que se proponen para la curva de rentabilidades será el único que no precisa de la utilización de la regresión borrosa, si bien, si que es necesario partir de las hipótesis realizadas en 3.1.1. Asimismo, como en el caso de certeza, se parte de que la rentabilidad de las k referencias que componen la muestra vienen expresadas como tanto efectivo anual. El número borroso que cuantificará esta rentabilidad según la primera hipótesis, será un número borroso simétrico $\tilde{I}_r = (I_C^r, I_R^r)_L$, cuyo centro será el centro del intervalo que delimitan la TIR mínima y máxima a las que se negoció el r -ésimo título. El radio se halla una vez el decisor ha elegido el nivel de confianza α^* correspondiente al conjunto de TIRs negociadas. Para estimar la rentabilidad de un bono con vencimiento en un diferimiento t (normalmente supondremos que t

es entero), tomaremos la rentabilidad del bono con el vencimiento anterior más cercano, $\tilde{I}_r = (I_C^r, I_R^r)_L$ en t_r , y el del posterior más cercano, $\tilde{I}_{r+1} = (I_C^{r+1}, I_R^{r+1})_L$ que vence en t_{r+1} . La rentabilidad para un título que vence en t será un NB simétrico $\tilde{I}_t = (I_C^t, I_R^t)_L$ que se calculará como:

$$\tilde{I}_t = \frac{t_{r+1} - t}{t_{r+1} - t_r} \tilde{I}_r + \frac{t - t_r}{t_{r+1} - t_r} \tilde{I}_{r+1}$$

obteniéndose entonces:

$$\begin{aligned} (I_C^t, I_R^t)_L &= \frac{t_{r+1} - t}{t_{r+1} - t_r} (I_C^r, I_R^r)_L + \frac{t - t_r}{t_{r+1} - t_r} (I_C^{r+1}, I_R^{r+1})_L = \\ &= \left(\frac{t_{r+1} - t}{t_{r+1} - t_r} I_C^r + \frac{t - t_r}{t_{r+1} - t_r} I_C^{r+1}, \frac{t_{r+1} - t}{t_{r+1} - t_r} I_R^r + \frac{t - t_r}{t_{r+1} - t_r} I_R^{r+1} \right)_L \end{aligned}$$

Así, las rentabilidades estimadas el 22/1/99 siguiendo este método para bonos de hasta 10 años de vencimiento tomando $\alpha^* = 0$ ó $0,5$, son:

t	$\alpha^* = 0$	$\alpha^* = 0,5$
1	(0,02955, 0)	(0,02955, 0)
2	(0,02872, 0)	(0,02872, 0)
3	(0,03071, 0,00024)	(0,03071, 0,00047)
4	(0,03113, 0,00003)	(0,03113, 0,00005)
5	(0,03294, 0,00013)	(0,03294, 0,00025)
6	(0,03471, 0,00020)	(0,03471, 0,00040)
7	(0,03597, 0)	(0,03597, 0)
8	(0,03693, 0,00014)	(0,03693, 0,00027)
9	(0,03826, 0,00012)	(0,03826, 0,00023)
10	(0,03855, 0,00005)	(0,03855, 0,00010)

Las estimaciones realizadas son triangulares y simétricas, ya que se ha considerado que los números borrosos de partida tienen dicha naturaleza. Se puede observar, al igual que en todos los demás casos que estudiaremos, que a medida que se toma un α^* mayor (en nuestro caso $\alpha^* = 0,5$), la incertidumbre aumenta. Es decir, el centro es el mismo para $\alpha^* = 0$ y $0,5$, pero los radios para $\alpha^* = 0,5$ son mayores.

3.1.2.2 Estimación polinómica

En este caso hemos tomado un polinomio de 4º grado para el modelo del apartado 2.1.1.2. De esta forma, deberemos tener en cuenta que la variable dependiente $\tilde{y}_r \equiv \tilde{I}_r$, siendo $\tilde{I}_r$ el número borroso que cuantifica la rentabilidad interna de la r-ésima referencia es un tanto efectivo anual. Asimismo, las variables independientes son $X_j^r \equiv (t_r)^j, j \in \{0,1,2,3,4\}$. Así, la rentabilidad estimada para un bono con vencimiento en t será:

$$\tilde{I}_t = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 t + \tilde{a}_2 t^2 + \tilde{a}_3 t^3 + \tilde{a}_4 t^4$$

y $\tilde{I}_t$ es:

$$\tilde{I}_t = (I_C^t, I_R^t)_L = (a_{0C}, a_{0R}) + (a_{1C}, a_{1R})t + (a_{2C}, a_{2R})t^2 + (a_{3C}, a_{3R})t^3 + (a_{4C}, a_{4R})t^4$$

Los resultados de la regresión posibilística referentes al 22-1-1999, tomando $\alpha^*=0$ y 0,5 son los siguientes:

	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
$\tilde{a}_0$	(0,02919376, 0,00072589)	(0,02919376, 0,00145178)
$\tilde{a}_1$	(-0,00086305, 0)	(-0,00086305, 0)
$\tilde{a}_2$	(0,00052164, 0)	(0,00052164, 0)
$\tilde{a}_3$	(-4,7465E-05, 0)	(-4,7465E-05, 0)
$\tilde{a}_4$	(1,3608E-06, 0)	(1,3608E-06, 0)

Siendo el valor de la función objetivo $z = 0,01524$.

A continuación obtenemos el nivel de pertenencia de las rentabilidades estimadas para bonos con vencimientos enteros (1,2,...,10 años) a través de MCO, en la función característica de su estimación utilizando la regresión posibilística. Estos valores nos indican hasta que punto la estimación mediante MCO discrepa de la obtenida a través de números borrosos. En la última fila, indicamos cual el grado de pertenencia que por término medio presenta la estimación MCO dentro de la estimación posibilística.

Vencimiento (años)	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	0,77	0,89
2	0,67	0,83
3	0,68	0,84
4	0,77	0,89
5	0,89	0,94
6	0,99	1,00
7	0,93	0,96
8	0,90	0,95
9	0,91	0,96
10	0,96	0,98
Media	0,85	0,92

Podemos comprobar que en todos los casos la estimación MCO nos conduce a resultados casi idénticos a los que se obtienen mediante la regresión posibilística, ya que toman un nivel de verdad medio del 0'85 si el modelo posibilístico fue estimado para $\alpha^*=0$ y de 0'92 para $\alpha^*=0'5$. Estos resultados indican que las estimaciones obtenidas mediante MCO toman unos niveles muy cercanos a la verdad absoluta en los números borrosos obtenidos al realizar la regresión posibilística.

3.1.2.3. El modelo de Cohen, Kramer y Waugh

En este caso, partimos del modelo del apartado 2.1.1.3. tomando como variable dependiente $\tilde{y}_t \equiv \tilde{I}_t$. Por otra parte, para las variables independientes observamos que $X_1^t \equiv t_r$ y $X_2^t \equiv (\ln t_r)^2$. De esta forma, la rentabilidad estimada para un hipotético bono americano que venza en t será:

$$\tilde{I}_t = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 t + \tilde{a}_2 (\ln t)^2$$

y por tanto:

$$\tilde{I}_t = (I_C^t, I_R^t)_L = (a_{0C}, a_{0R}) + (a_{1C}, a_{1R})t + (a_{2C}, a_{2R})(\ln t)^2$$

Así, los resultados de la regresión posibilística referentes al 22-1-1999, tomando $\alpha^*=0$ y 0,5, son los siguientes:

	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$
$\tilde{a}_0$	(0,02814259, 0,00099685)	(0,028142594, 0,0019937)
$\tilde{a}_1$	(0,00032441, 0)	(0,00032441, 0)
$\tilde{a}_2$	(0,00133701, 4,6839E-05)	(0,00133701, 9,3679E-05)

con $z = 0,02093$. El nivel de presunción de la estimación MCO de las rentabilidades en las estimaciones realizadas mediante NB de las rentabilidades de los bonos y obligaciones del Estado para bonos con vencimientos de hasta 10 años son:

Vencimiento (años)	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	0,85	0,92
2	0,81	0,90
3	0,89	0,94
4	0,96	0,98
5	1,00	1,00
6	0,97	0,99
7	0,97	0,98
8	0,98	0,99
9	0,99	1,00

10	0,95	0,98
Media	0,94	0,97

Puede observarse, igual que en el caso anterior, que los valores obtenidos en certeza son prácticamente los centros de los números borrosos que se obtienen mediante regresión posibilística. Incluso, para $\alpha^*=0,5$ el nivel medio de verdad para las rentabilidades estimadas para estos vencimientos en el apartado 2.1.1.3 son prácticamente ciertos en las rentabilidades borrosas que se deducen de los parámetros $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_1$ y $\tilde{a}_2$ estimados en éste epígrafe.

3.1.2.4. El modelo de Bradley y Crame.

En este modelo la variable dependiente es la rentabilidad del título medida como tanto instantáneo de interés, es decir, $\tilde{y}_t \equiv \ln(1 + \tilde{I}_t)$, y suponemos que $\ln(1 + \tilde{I}_t)$ es un número borroso triangular, por lo que $\tilde{I}_t$ no lo será. Asimismo, identificamos como variables independientes:

$$X_1^t \equiv t_r \text{ y } X_2^t \equiv \ln t_r$$

Así, la estimación de los parámetros $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_1$ y $\tilde{a}_2$ permitirá inferir el tanto interno que debe ofrecer una referencia con vencimiento en un determinado t a través de un tanto instantáneo de interés $\ln(1 + \tilde{I}_t)$ como:

$$\ln(1 + \tilde{I}_t) = (\ln(1 + I_t)_C, \ln(1 + I_t)_R)_L = (a_{0C} + a_{1C}t + a_{2C} \ln t, a_{0R} + a_{1R}t + a_{2R} |\ln t|)_L$$

En este caso, si podremos obtener la función de pertenencia de la rentabilidad expresada como tanto efectivo anual, $\tilde{I}_t$, ya que a través del principio de extensión de Zadeh $\mu_{\tilde{I}_t}(y) = \bigvee_{y=e^x-1} \mu_{\ln(1+\tilde{I}_t)}(x) = \mu_{\ln(1+\tilde{I}_t)}[\ln(1+y)]$, obtendremos para una función forma $L(x)$

cualquiera la función de pertenencia de $\tilde{I}_t$ a través de $\ln(1 + \tilde{I}_t)$ como:

$$\mu_{\tilde{I}_t}(y) = \begin{cases} L\left(\frac{|\ln(1+y) - \ln(1+I_t)_C|}{\ln(1+I_t)_R - \ln(1+I_t)_C}\right) & e^{\ln(1+I_t)_C - \ln(1+I_t)_R} - 1 \leq y \leq e^{\ln(1+I_t)_C + \ln(1+I_t)_R} - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por supuesto, si en el análisis estamos analizando números borrosos triangulares, deberemos tener en cuenta que $L(x) = \max\{0, 1-|x|\}$.

Los resultados de la regresión obtenidos el 22/1/1999 para los mismos valores de α^* que en los casos anteriores son:

	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
$\tilde{a}_0$	(0,02718054, 0,00120611)	(0,02718054, 0,00241222)
$\tilde{a}_1$	(0,00084448, 0)	(0,00084448, 0)
$\tilde{a}_2$	(0,0011501, 0)	(0,0011501, 0)

En este caso podemos observar que en este ejemplo los parámetros $\tilde{a}_1$ y $\tilde{a}_2$ son números ciertos ya que su radio es cero. Evidentemente, este resultado no puede generalizarse, pues únicamente realizamos la estimación de la curva de rentabilidades para una sesión determinada.

Obteniéndose un grado de incertidumbre de la función objetivo $z=0,02533$. Para finalizar, el nivel de presunción de la estimación MCO realizada en el apartado 2.1.1.4 para la misma sesión dentro de las estimaciones realizadas mediante números borrosos triangulares simétricos para cada uno de los posibles vencimientos considerados es:

Vencimiento (años)	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	0,75	0,88
2	0,59	0,80
3	0,50	0,75
4	0,44	0,72
5	0,40	0,70
6	0,37	0,69
7	0,35	0,67
8	0,33	0,66
9	0,31	0,65
10	0,30	0,65
Media	0,43	0,72

Observamos que, aunque la similitud de la estimación que se obtiene en certeza respecto a la que se obtiene mediante números borrosos es elevada para $\alpha^*=0,5$, no lo es, para $\alpha^*=0$ - el nivel de verdad de la estimación MCO al ser inferior al 0,5 se situaría en una posición más cercana a la no pertenencia que a la pertenencia-. En ambos casos, los niveles de pertenencia asociados son inferiores a los de los modelos anteriores.

3.1.2.5. Comentarios a los resultados obtenidos

Respecto a los resultados obtenidos mediante interpolación lineal, no ha sido expuesta la adecuación del método en certeza respecto a su adaptación en borrosidad, ya que por propia construcción, el nivel de presunción de la estimación realizada en certeza debe ser 1.

Respecto a los métodos en los cuales se utiliza métodos de regresión, podemos realizar las siguientes observaciones:

- a) Cuanto mejor ajuste proporciona el método en condiciones de “certeza”, medida a través del coeficiente de determinación, menos incierta es la estimación que obtenemos mediante la regresión posibilística medida a través del valor de la función objetivo de la regresión, z , y por tanto, mejor es el ajuste que proporciona este método.
- b) Los modelos que utilizan como variable explicada el rendimiento medido como tanto efectivo anual –todos a excepción del de Bradley y Crame- proporcionan un mejor ajuste tanto en la estimación MCO –medida a través del coeficiente de determinación- como en la regresión posibilística –el valor de la función objetivo es menor-. Asimismo, en este caso los resultados obtenidos con MCO y la regresión posibilística están más próximos, es decir, las estimaciones MCO toman un mayor nivel de verdad en la correspondientes a la regresión de Tanaka. Así en la estimación polinómica y la realizada a través del modelo de Cohen *et al.* observamos que las estimaciones realizadas para la rentabilidad en certeza toman un nivel de verdad de casi absolutamente cierto en el NB que cuantifica las rentabilidades de bonos con el mismo vencimiento.
- c) Las estimaciones realizadas mediante MCO se adecuan mejor a sus correspondientes posibilísticas a medida que aumenta el nivel α^* para el cual es implementado el modelo de regresión posibilístico. Por tanto, dicha adecuación se incrementa a medida que consideramos la rentabilidad observada en las referencias que componen la muestra como más inciertas. En este caso sólo hemos tomado $\alpha^*=0$ y $\alpha^*=0.5$, pero ello se seguiría cumpliendo si utilizamos más niveles de presunción, ya que aumentando el valor de α^* , los datos de la variable independiente son más inciertos, y por tanto, las estimaciones realizadas sobre la curva de rentabilidades también lo son.

3.1.3. Estimación de la ETTI a través de la curva de rentabilidades

Los modelos anteriores permiten inferir la rentabilidad que debe ofrecer un bono que paga cupones periódicos cuyo vencimiento es t años, pero no permiten estimar directamente el interés que rige en el mercado para dicho vencimiento. A continuación analizaremos el procedimiento a seguir, basado en el método del bono par que ya ha sido expuesto en el apartado 2.1.2.1. en un ambiente de certeza, y que deberá ser adaptado al hecho de que la rentabilidad de los “bonos par” vendrá dada a través de números borrosos.

En este caso, deberemos proceder igual que en certeza, pero teniendo en cuenta que trabajamos con estimaciones borrosas. Para ellos proponemos seguir el siguiente procedimiento:

- 1) Estimar los precios de los bonos que cotizan a la par y cuyos vencimientos son $t \in \{1, 2, \dots, n\}$ siendo n el máximo vencimiento considerado en la estimación de la ETTI. En este caso, dado que los rendimientos para los diversos vencimientos considerados que se derivan de la curva de rentabilidades no son ciertos, el precio del bono par que obtendremos será un número borroso que tomará un valor de “aproximadamente 100”, pero no el número cierto 100.
- 2) Deducir a través del precio de los bonos par los factores de actualización que definen los tipos al contado.
- 3) Deducir los tipos spot correspondientes a cada vencimiento, quedando establecida así la ETTI.

3.1.3.1. Estimación del precio del bono par

Para hallar el precio del bono par, en primer lugar debemos hallar el cupón correspondiente a un bono que cotice “aproximadamente a la par”, y por tanto, 100 pertenezca al soporte del número borroso que cuantifica su precio, para después hallar el precio de éste. Los vencimientos a considerar serán $\{1, 2, \dots, t, \dots, n\}$, con t entero y n el máximo diferimiento para el que pretendemos estimar la curva de tipos cupón cero. Dado que el cupón que ofrece un bono del estado es cierto, y sin embargo, su rentabilidad se manifiesta como un número borroso que depende del vencimiento, para hallar el cupón del bono par deberemos considerar que éste es un número cierto que representa razonablemente bien a la TIR de dicho bono -debemos desfuzzyficar la TIR del bono-. Adicionalmente, exigiremos que 100 sea el valor con mayor nivel de presunción del precio. Para ello, el cupón –cierto- que ofrece dicho bono debe coincidir con la rentabilidad que tiene mayor nivel de presunción para éste. Así, el cupón del bono con un vencimiento de t años medido en tanto por uno de su valor nominal, c'_t , debe cumplir que $\mu_{\tilde{I}_t}(c'_t) = 1$. Al cupón expresado en porcentaje le denominaremos como c_t , siendo por tanto $c'_t = 100 c_t$.

Así, el precio del bono par es un número borroso que se hallará como:

$$\tilde{P}_t = \sum_{r=1}^{t-1} \frac{c_t}{(1 + \tilde{I}_t)^r} + \frac{c_t + 100}{(1 + \tilde{I}_t)^t}$$

y de esta forma, la función de pertenencia de $\tilde{P}_t$ será:

$$\mu_{\tilde{P}_t}(y) = \bigvee \mu_{\tilde{I}_t}(x) \\ y = \sum_{r=1}^{t-1} \frac{c_t}{(1+x)^r} + \frac{c_t + 100}{(1+x)^t}$$

la cual, generalmente, no tendrá solución analítica. Sin embargo, siempre podrán ser hallados los α -cortes de $\tilde{P}_t$, que serían:

$$\begin{aligned} P_{t\alpha} &= [P_t^1(\alpha), P_t^2(\alpha)] = \left[\sum_{r=1}^{t-1} \frac{c_t}{(1 + I_t^2(\alpha))^r} + \frac{c_t + 100}{(1 + I_t^2(\alpha))^t}, \sum_{r=1}^{t-1} \frac{c_t}{(1 + I_t^1(\alpha))^r} + \frac{c_t + 100}{(1 + I_t^1(\alpha))^t} \right] = \\ &= \left[c_t \frac{1 - (1 + I_t^2(\alpha))^{-t}}{I_t^2(\alpha)} + 100(1 + I_t^2(\alpha))^{-t}, c_t \frac{1 - (1 + I_t^1(\alpha))^{-t}}{I_t^1(\alpha)} + 100(1 + I_t^1(\alpha))^{-t} \right] = \\ &= [c_t a_{t|I_t^2(\alpha)} + 100(1 + I_t^2(\alpha))^{-t}, c_t a_{t|I_t^1(\alpha)} + 100(1 + I_t^1(\alpha))^{-t}] \end{aligned} \quad [5]$$

Obsérvese que hemos notado a los α -cortes de la rentabilidad interna del bono expresada como tanto efectivo anual de la forma $I_{t\alpha} = [I_t^1(\alpha), I_t^2(\alpha)]$, siendo para los modelos presentados en 3.1.2.1, 3.1.2.2. y 3.1.2.3.: $I_{t\alpha} = [I_{tC} - I_{tR} L^{-1}(\alpha), I_{tC} + I_{tR} L^{-1}(\alpha)]$. En el modelo de Bradley y Crame, en cambio, puede comprobarse que la expresión que obtendremos será: $I_{t\alpha} = [e^{\ln(1+I_t)_C - \ln(1+I_t)_R L^{-1}(\alpha)} - 1, e^{\ln(1+I_t)_C + \ln(1+I_t)_R L^{-1}(\alpha)} - 1]$. En cualquier caso, podemos asegurar que siempre se cumple que $\mu_{\tilde{P}_t}(100) = 1$.

Debemos comentar que $\tilde{P}_t$ no es ya un número L-L de Dubois y Prade, el precio del bono deja de ser simétrico (asimetría a la derecha). Dicha circunstancia es debida al 4º principio de Malkiel (1962), que indica que los incrementos del precio ante decrementos del tipo de interés son superiores a las disminuciones en este debidas a un incremento de la misma magnitud en los tipos: es decir, la segunda derivada del precio del bono con respecto al tipo de interés es positiva, ya que la función es convexa. Sin embargo, si partimos de la rentabilidad estimada mediante un número borroso triangular, podremos comprobar que se obtiene una aproximación lo suficientemente satisfactoria de $\tilde{P}_t$ mediante un número borroso que tenga la misma naturaleza, lo cual facilitará enormemente posteriores desarrollos. Así, el análisis que realizaremos a continuación hará especial hincapié en el caso en que se considere como aceptable:

$$\tilde{P}_t \approx (P_t, l_{P_t} = P_t - P_t^1(0), r_{P_t} = P_t^2(0) - P_t)_L \quad [6]$$

3.1.3.2. Estimación de los precios de los bonos par a partir de una estimación triangular de la curva de rentabilidades: análisis de los diferentes modelos planteados

A continuación presentamos los resultados que obtenemos con los modelos de estimación de la curva de rentabilidades presentados, en la estimación de los precios de los bonos que cotizan a la par ahondándose en el análisis de la triangularidad de los precios hallados.

a) Estimación del precio del bono par a partir de la estimación de la curva de rentabilidades mediante interpolación lineal

La estimación de los α -cortes del precio del bono par para cada una de las referencias se realiza a través de la expresión [5] sin mas que sustituir $L^{-1}(\alpha)$ por $1 - \alpha$. Así, por ejemplo, los α -cortes del precio del bono con vencimiento a 10 años, $\tilde{P}_{10}$, para las estimaciones de la curva de rentabilidades realizadas a un nivel $\alpha^*=0$ y 0.5 son:

i	α_i	$\alpha^*=0$		$\alpha^*=0.5$	
		$P_{10}^1(\alpha)$	$P_{10}^2(\alpha)$	$P_{10}^1(\alpha)$	$P_{10}^2(\alpha)$
0	0	99,9592	100,0409	99,9183	100,0817
1	0,1	99,9632	100,0368	99,9265	100,0736
2	0,2	99,9673	100,0327	99,9347	100,0654
3	0,3	99,9714	100,0286	99,9428	100,0572
4	0,4	99,9755	100,0245	99,9510	100,0490
5	0,5	99,9796	100,0204	99,9592	100,0409
6	0,6	99,9837	100,0163	99,9673	100,0327
7	0,7	99,9877	100,0123	99,9755	100,0245
8	0,8	99,9918	100,0082	99,9837	100,0163
9	0,9	99,9959	100,0041	99,9918	100,0082
10	1	100	100	100	100

Si bien, los extremos de los α -cortes no son una función polinómica de α , calculamos la tabla de diferencias para dichos extremos, izquierdo y derecho, considerándose una escala endecadaria, con el fin de analizar si podemos ajustarlos a través de una expresión polinómica del nivel de presunción. En concreto, calculamos hasta las segundas diferencias de los extremos de los α -cortes para $\Delta\alpha_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i = 0.1$:

i	$\alpha^*=0$				$\alpha^*=0.5$			
	$\Delta P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^2(\alpha)$
0	0,0040830	-0,0040868	0,0000002	0,0000002	0,0081620	-0,0081776	0,0000008	0,0000008
1	0,0040832	-0,0040866	0,0000002	0,0000002	0,0081629	-0,0081767	0,0000008	0,0000008
2	0,0040834	-0,0040864	0,0000002	0,0000002	0,0081637	-0,0081759	0,0000008	0,0000008
3	0,0040836	-0,0040862	0,0000002	0,0000002	0,0081645	-0,0081751	0,0000008	0,0000008
4	0,0040838	-0,0040860	0,0000002	0,0000002	0,0081653	-0,0081743	0,0000008	0,0000008
5	0,0040840	-0,0040858	0,0000002	0,0000002	0,0081661	-0,0081735	0,0000008	0,0000008
6	0,0040842	-0,0040856	0,0000002	0,0000002	0,0081669	-0,0081727	0,0000008	0,0000008
7	0,0040844	-0,0040854	0,0000002	0,0000002	0,0081678	-0,0081718	0,0000008	0,0000008
8	0,0040846	-0,0040852	0,0000002	0,0000002	0,0081686	-0,0081710	0,0000008	0,0000008
9	0,0040848	-0,0040850			0,0081694	-0,0081702		

Podemos observar que en todos los casos las primera diferencias son prácticamente constantes, por lo que los α -cortes son casi constantes. Asimismo, las segundas diferencias, son en este caso, constantes. Así, los extremos de los α -cortes pueden aproximarse exactamente mediante un polinomio interpolante de segundo grado. Para ello, sólo hacen falta tres puntos, así que tomamos $h = \Delta\alpha_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i = 0,5$. En consecuencia, y dado que el polinomio de 2º grado interpolante de una función $f(x)$, es $P(x)$, cuya forma es:

$$f(x) \approx P(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1!h} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2} (x - x_0)(x - x_1)$$

para cada nivel α^* contemplado, obtenemos:

$\alpha^*=0$							
i	α_i	$P_{10}^1(\alpha)$	$P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^2(\alpha)$
0	0	99,9592	100,0409	0,0204	-0,2585	0,0000051	0,0000051
1	0,5	99,9796	100,0204	0,0204	-0,2577		
2	1	100	100				

$\alpha^*=0,5$							
i	α_i	$P_{10}^1(\alpha)$	$P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^2(\alpha)$
0	0	99,9183	100,0817	0,0408	-0,0409	0,0000204	0,0000204
1	0,5	99,9592	100,0409	0,0408	-0,0409		
2	1	100	100				

Para cada α^* , los α -cortes son ajustados de forma perfecta por:

$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
$P_{10}^1(\alpha) \approx 99,9592 + 0,0408\alpha + 0,0000102\alpha(\alpha-1/2)$	$P_{10}^1(\alpha) \approx 99,9183 + 0,0816\alpha + 0,0000408\alpha(\alpha-1/2)$
$P_{10}^2(\alpha) \approx 100,0409 - 0,0409\alpha + 0,0000102\alpha(\alpha-1/2)$	$P_{10}^2(\alpha) \approx 100,0817 - 0,0818\alpha + 0,0000408\alpha(\alpha-1/2)$

En el resto de vencimientos considerados podría comprobarse, igualmente, que el ajuste mediante un polinomio de 2º grado de los extremos de los α -cortes es prácticamente perfecto, ya que las segundas diferencias de los extremos de los α -cortes también son prácticamente constantes.

A continuación seguiremos la metodología propuesta por Jiménez y Rivas ya expuesta en el apartado 1.4.2. de la primera parte de la tesis, para medir la calidad de aproximación $\tilde{P}_t$ mediante un número borroso triangular. Supondremos que la aproximación de los α -cortes mediante una función cuadrática es “perfecta”. En este caso, la mayor divergencia que en términos absolutos se produce tanto para el extremo izquierdo como para el derecho en la aproximación de $\tilde{P}_t$ es en el nivel $\alpha^*_1(t) = \alpha^*_D(t) = 1/2$, siendo $\alpha^*_I(t)$ el nivel de presunción en el que se produce dicha desviación

en el extremo izquierdo de los α -cortes y $\alpha^*_D(t)$ para los derechos. Así, las desviaciones absolutas máximas que se producen a la izquierda y a la derecha son:

$$D_I^*(t) = \frac{1}{2} \left| P_t^1(1) - 2P_t^1(0,5) + P_t^1(0) \right| \text{ y } D_D^*(t) = \frac{1}{2} \left| P_t^2(1) - 2P_t^2(0,5) + P_t^2(0) \right|$$

La demostración de los resultados se realiza, como ya comentamos, en el apartado 4.2.3.1. de la primera parte de la tesis, en Terceño *et al.* (1995).

Así, obtenemos como desviaciones máximas de los α -cortes por la aproximación triangular del precio de bonos de vencimiento 1, 3, 5 y 10 años:

t	$\alpha^*=0$		$\alpha^*=0,5$	
	$D_I^*(t)$	$D_D^*(t)$	$D_I^*(t)$	$D_D^*(t)$
1	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
3	0,0000078	0,0000078	0,0000299	0,0000300
5	0,0000055	0,0000055	0,0000201	0,0000202
10	0,0000026	0,0000026	0,0000102	0,0000102

Los errores que en el nivel de presunción podemos cometer como máximo han sido calculados tal como se comenta en la primera parte de esta tesis, y son:

t	1	3	5	10
$\alpha^*=0$	0	0,0001153	0,0000924	0,0000625
$\alpha^*=0,5$	0	0,0002258	0,0001776	0,0001249

Podemos comprobar que el error que proporciona un ajuste triangular aumenta a medida que aumenta el vencimiento de los bonos y la incertidumbre del interés de valoración, que se incrementa asimismo, a medida que crece la incertidumbre de los datos de partida para ajustar la curva de rentabilidades (aumenta α^*). Sin embargo, en todos los casos los errores que cometemos son asumibles. Así, por ejemplo, el máximo error que cometemos para un precio que efectivamente tome un nivel de presunción de 0'7 en el bonos a 10 años y con $\alpha^*=0,5$ es 0'0001. Así, en la aproximación a $\tilde{P}_{10}$ dicho precio tendría un nivel de presunción en el peor de los casos, de $0,7 \pm 0,0001249$; es decir, dicho valor desde un punto de vista de interpretación semántica sigue siendo bastante verdadero¹.

Recogemos a continuación los precios de los bonos par estimados para vencimientos hasta 10 años y ya aproximados mediante números borrosos triangulares:

¹ Adaptado de Jiménez *et al.* (1996).

t	c_t	$P_t (\alpha^*=0)$	$P_t (\alpha^*=0'5)$
1	0,02955	(100, 0, 0)	(100, 0, 0)
2	0,02872	(100, 0, 0)	(100, 0, 0)
3	0,03071	(100, 0,06635, 0,06641)	(100, 0,13264, 0,13288)
4	0,03113	(100, 0,00927, 0,00927)	(100, 0,01853, 0,01854)
5	0,03294	(100, 0,05675, 0,05679)	(100, 0,11346, 0,11362)
6	0,03471	(100, 0,10660, 0,10674)	(100, 0,21307, 0,21363)
7	0,03597	(100, 0, 0)	(100, 0, 0)
8	0,03693	(100, 0,09200, 0,09211)	(100, 0,18390, 0,18432)
9	0,03826	(100, 0,08614, 0,08623)	(100, 0,17219, 0,17256)
10	0,03855	(100, 0,04084, 0,04086)	(100, 0,08166, 0,08174)

b) Estimación del precio del bono par a partir de la estimación polinómica de la curva de rentabilidades

A continuación presentamos los resultados que se obtienen para el modelo presentado en el apartado 3.1.1.2. Únicamente analizamos el ajuste polinómico de los α -cortes para el bono 10, demostrándose que la aproximación cuadrática es prácticamente perfecta. Se puede comprobar que para otros vencimientos dicha aproximación continúa siendo igualmente buena. Posteriormente presentamos los resultados de los errores que se obtienen para diversos vencimientos si asumimos que el precio es un NBT, comparando dicha aproximación, como ya se realizó en el caso anterior, con los α -cortes obtenidos mediante la aproximación cuadrática. Así, para $\alpha^*=0$ y $0'5$, los α -cortes del bono par con vencimiento a 10 años son:

i	α_i	$\alpha^*=0$		$\alpha^*=0'5$	
		$P_{10}^1(\alpha)$	$P_{10}^2(\alpha)$	$P_{10}^1(\alpha)$	$P_{10}^2(\alpha)$
0	0	99,4101	100,5942	98,8244	101,1928
1	0,1	99,4689	100,5346	98,9412	101,0727
2	0,2	99,5277	100,4750	99,0581	100,9529
3	0,3	99,5866	100,4155	99,1753	100,8331
4	0,4	99,6455	100,3560	99,2926	100,7136
5	0,5	99,7045	100,2966	99,4101	100,5942
6	0,6	99,7635	100,2372	99,5277	100,4750
7	0,7	99,8226	100,1778	99,6455	100,3560
8	0,8	99,8817	100,1185	99,7635	100,2372
9	0,9	99,9408	100,0592	99,8817	100,1185
10	1	100	100	100	100

Y la tabla de diferencias para los extremos de los α -cortes que obtenemos es:

i	$\alpha^*=0$				$\alpha^*=0'5$			
	$\Delta P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^2(\alpha)$
0	0,05880	-0,05962	0,00004	0,00004	0,11680	-0,12006	0,00017	0,00017
1	0,05885	-0,05957	0,00004	0,00004	0,11697	-0,11989	0,00017	0,00017
2	0,05889	-0,05953	0,00004	0,00004	0,11714	-0,11971	0,00017	0,00017
3	0,05893	-0,05949	0,00004	0,00004	0,11731	-0,11954	0,00017	0,00017

4	0,05897	-0,05945	0,00004	0,00004	0,11748	-0,11937	0,00017	0,00017
5	0,05902	-0,05940	0,00004	0,00004	0,11765	-0,11919	0,00017	0,00017
6	0,05906	-0,05936	0,00004	0,00004	0,11782	-0,11902	0,00017	0,00017
7	0,05910	-0,05932	0,00004	0,00004	0,11799	-0,11885	0,00017	0,00017
8	0,05914	-0,05927	0,00004	0,00004	0,11816	-0,11868	0,00017	0,00017
9	0,05919	-0,05923			0,11833	-0,11850		

Podemos observar que en todos los casos las segundas diferencias son prácticamente constantes, de forma que los extremos de los α -cortes pueden aproximarse casi exactamente mediante un polinomio interpolante de segundo grado. Éstos son:

$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
$P_{10}^1(\alpha) \approx 99,4101 + 0,5889\alpha + 0,0021\alpha(\alpha-1/2)$	$P_{10}^1(\alpha) \approx 98,8244 + 1,1714\alpha + 0,0085\alpha(\alpha-1/2)$
$P_{10}^2(\alpha) \approx 100,5942 - 0,5953\alpha + 0,0022\alpha(\alpha-1/2)$	$P_{10}^2(\alpha) \approx 101,1928 - 1,1971\alpha + 0,0086\alpha(\alpha-1/2)$

Para el resto de vencimientos considerados, podría comprobarse igualmente que el ajuste mediante un polinomio de 2º grado de los extremos de los α -cortes es prácticamente perfecto, ya que las segundas diferencias también son prácticamente constantes.

Los errores que en el nivel de presunción se producen por la aproximación triangular de $\tilde{P}_1$, $\tilde{P}_3$, $\tilde{P}_5$ y $\tilde{P}_{10}$ son despreciables, siendo estos:

t	1	3	5	10
$\alpha^*=0$	0,00018	0,00035	0,00052	0,00091
$\alpha^*=0,5$	0,00035	0,00070	0,00103	0,00181

Recogemos a continuación los precios de los bonos par estimados para vencimientos hasta 10 años y ya aproximados mediante números borrosos triangulares:

t	c_t	$P_t(\alpha^*=0)$	$P_t(\alpha^*=0,5)$
1	0,02881	(100, 0,07051, 0,07061)	(100, 0,14091, 0,14131)
2	0,02920	(100, 0,13891, 0,13921)	(100, 0,27753, 0,27871)
3	0,03013	(100, 0,20499, 0,20556)	(100, 0,40941, 0,41170)
4	0,03140	(100, 0,26846, 0,26939)	(100, 0,53598, 0,53971)
5	0,03284	(100, 0,32908, 0,33044)	(100, 0,65681, 0,66225)
6	0,03431	(100, 0,38676, 0,38861)	(100, 0,77167, 0,77907)
7	0,03570	(100, 0,44150, 0,44389)	(100, 0,88062, 0,89020)
8	0,03695	(100, 0,49346, 0,49644)	(100, 0,98395, 0,99589)
9	0,03801	(100, 0,54286, 0,54648)	(100, 1,08212, 1,09660)
10	0,03887	(100, 0,5899,5, 0,59424)	(100, 1,17564, 1,19280)

c) Estimación del precio del bono par a partir del modelo de Cohen, Kramer y Vaugh

Igual que en el caso anterior, presentamos los α -cortes del precio del bono par con vencimiento a 10 años el 22/1/1999:

i	α_i	$\alpha^*=0$		$\alpha^*=0,5$	
		$P_{10}^1(\alpha)$	$P_{10}^2(\alpha)$	$P_{10}^1(\alpha)$	$P_{10}^2(\alpha)$
0	0	99,18934	100,81878	98,3867	101,6458
1	0,1	99,27004	100,73653	98,5466	101,4797
2	0,2	99,35083	100,65437	98,7068	101,3140
3	0,3	99,43169	100,57229	98,8673	101,1486
4	0,4	99,51263	100,49029	99,0282	100,9835
5	0,5	99,59366	100,40837	99,1893	100,8188
6	0,6	99,67477	100,32653	99,3508	100,6544
7	0,7	99,75595	100,24478	99,5126	100,4903
8	0,8	99,83722	100,16310	99,6748	100,3265
9	0,9	99,91857	100,08151	99,8372	100,1631
10	1	100	100	100	100

Y se obtiene que las primeras y segundas diferencias de los extremos de los α -cortes son:

i	$\alpha^*=0$				$\alpha^*=0,5$			
	$\Delta P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^2(\alpha)$
0	0,08070	-0,08225	0,00008	0,00008	0,15989	-0,16606	0,00032	0,00033
1	0,08078	-0,08216	0,00008	0,00008	0,16021	-0,16573	0,00032	0,00033
2	0,08086	-0,08208	0,00008	0,00008	0,16053	-0,16540	0,00032	0,00033
3	0,08094	-0,08200	0,00008	0,00008	0,16085	-0,16507	0,00032	0,00033
4	0,08103	-0,08192	0,00008	0,00008	0,16117	-0,16474	0,00032	0,00033
5	0,08111	-0,08184	0,00008	0,00008	0,16149	-0,16441	0,00032	0,00033
6	0,08119	-0,08176	0,00008	0,00008	0,16181	-0,16408	0,00032	0,00033
7	0,08127	-0,08167	0,00008	0,00008	0,16213	-0,16375	0,00032	0,00033
8	0,08135	-0,08159	0,00008	0,00008	0,16245	-0,16343	0,00032	0,00033
9	0,08143	-0,08151			0,16278	-0,16310		

De igual forma que en el casos anteriores, podemos obtener los extremos de los α -cortes como polinomios de segundo grado de α . Para cada α^* estos resultan ser:

$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
$P_{10}^1(\alpha) \approx 99,1893 + 0,8086\alpha + 0,0040\alpha(\alpha-1/2)$	$P_{10}^1(\alpha) \approx 98,3867 + 1,6053\alpha + 0,0165\alpha(\alpha-1/2)$
$P_{10}^2(\alpha) \approx 100,8188 - 0,8208\alpha + 0,0041\alpha(\alpha-1/2)$	$P_{10}^2(\alpha) \approx 101,6458 - 1,654\alpha + 0,0164\alpha(\alpha-1/2)$

En el resto de vencimientos considerados, podría comprobarse igualmente que el ajuste mediante un polinomio de 2º grado de los extremos de los α -cortes es prácticamente perfecto.

Asimismo, los errores máximos que en el nivel de presunción se cometen con la aproximación triangular de $\tilde{P}_t$ siendo $t=1,3,5$ y 10 son:

t	1	3	5	10
$\alpha^*=0$	0,00024	0,00048	0,00071	0,00125
$\alpha^*=0,5$	0,00049	0,00096	0,00142	0,00249

Recogemos a continuación los precios de los bonos par estimados para vencimientos hasta 10 años y ya aproximados mediante números borrosos triangulares:

t	c_t	$P_t(\alpha^*=0)$	$P_t(\alpha^*=0,5)$
1	0,05822	(100, 0,09683, 0,09702)	(100, 0,19348, 0,19423)
2	0,05702	(100, 0,19062, 0,19118)	(100, 0,38070, 0,38291)
3	0,05736	(100, 0,28104, 0,28211)	(100, 0,56100, 0,56531)
4	0,05817	(100, 0,36789, 0,36964)	(100, 0,73404, 0,74105)
5	0,05955	(100, 0,45107, 0,45363)	(100, 0,89960, 0,90985)
6	0,06388	(100, 0,53052, 0,53401)	(100, 1,05757, 1,07153)
7	0,06631	(100, 0,60619, 0,61071)	(100, 1,20790, 1,22599)
8	0,06679	(100, 0,67809, 0,68374)	(100, 1,35059, 1,37318)
9	0,06823	(100, 0,74623, 0,75308)	(100, 1,48569, 1,51309)
10	0,06943	(100, 0,81066, 0,81878)	(100, 1,61330, 1,64576)

d) Estimación del precio del bono par a partir del modelo de curva de rentabilidades de Bradley y Crame

Los α -cortes del precio del bono par con vencimiento a 10 años son, con las estimaciones de la curva de rentabilidades halladas en el apartado 3.1.2.4 son:

i	α_i	$\alpha^*=0$		$\alpha^*=0,5$	
		$P_{10}^1(\alpha)$	$P_{10}^2(\alpha)$	$P_{10}^1(\alpha)$	$P_{10}^2(\alpha)$
0	0	98,9843	101,0272	97,9800	102,0661
1	0,1	99,0854	100,9240	98,1800	101,8574
2	0,2	99,1865	100,8208	98,3804	101,6492
3	0,3	99,2878	100,7178	98,5812	101,4414
4	0,4	99,3892	100,6149	98,7826	101,2341
5	0,5	99,4907	100,5122	98,9843	101,0272
6	0,6	99,5924	100,4095	99,1865	100,8208
7	0,7	99,6941	100,3069	99,3892	100,6149
8	0,8	99,7959	100,2045	99,5924	100,4095
9	0,9	99,8979	100,1022	99,7959	100,2045
10	1	100	100	100	100

siendo la tabla de diferencias que obtenemos para los extremos de los α -cortes:

i	$\alpha^*=0$				$\alpha^*=0,5$			
	$\Delta P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta P_{10}^2(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^1(\alpha)$	$\Delta^2 P_{10}^2(\alpha)$
0	0,10105	-0,10325	0,00011	0,00012	0,19995	-0,20872	0,00045	0,00047
1	0,10117	-0,10313	0,00011	0,00012	0,20040	-0,20825	0,00045	0,00047
2	0,10128	-0,10301	0,00011	0,00012	0,20085	-0,20778	0,00045	0,00047
3	0,10140	-0,10290	0,00011	0,00012	0,20131	-0,20731	0,00046	0,00047
4	0,10151	-0,10278	0,00011	0,00012	0,20176	-0,20684	0,00046	0,00047
5	0,10162	-0,10266	0,00011	0,00012	0,20222	-0,20637	0,00046	0,00047
6	0,10174	-0,10255	0,00012	0,00012	0,20268	-0,20591	0,00046	0,00046

7	0,10185	-0,10243	0,00012	0,00012	0,20313	-0,20544	0,00046	0,00046
8	0,10197	-0,10232	0,00012	0,00012	0,20359	-0,20498	0,00046	0,00046
9	0,10209	-0,10220			0,20406	-0,20452		

Podemos observar que las segundas diferencias son prácticamente constantes, de forma que los extremos de los α -cortes pueden aproximarse casi exactamente mediante un polinomio interpolante de segundo grado, como en los casos anteriores. Así, para este bono obtenemos, según el nivel α^* para el cual se halla realizado la estimación de la curva de rentabilidades los siguientes α -cortes:

$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
$P_{10}^1(\alpha) \approx 98,9843 + 1,0128\alpha + 0,0057\alpha(\alpha-1/2)$	$P_{10}^1(\alpha) \approx 97,9801 + 2,0085\alpha + 0,0228\alpha(\alpha-1/2)$
$P_{10}^2(\alpha) \approx 101,0272 - 1,0301\alpha + 0,0058\alpha(\alpha-1/2)$	$P_{10}^2(\alpha) \approx 102,0661 - 2,0778\alpha + 0,0234\alpha(\alpha-1/2)$

Los errores máximos que en el nivel de presunción se producen con la aproximación triangular del precio del bono par son, entonces:

t	1	3	5	10
$\alpha^*=0$	0,00015	0,00045	0,00073	0,00141
$\alpha^*=0,5$	0,00030	0,00089	0,00147	0,00283

Errores, por supuesto, inapreciables, aunque superiores a los que cometíamos con los tres modelos anteriores.

Recogemos a continuación los precios de los bonos par estimados para vencimientos hasta 10 años y ya aproximados mediante números borrosos triangulares:

t	c_t	$P_t(\alpha^*=0)$	$P_t(\alpha^*=0,5)$
1	0,02842	(100, 0,12054, 0,12068)	(100, 0,24093, 0,24151)
2	0,03011	(100, 0,23741, 0,23798)	(100, 0,47426, 0,47653)
3	0,03146	(100, 0,35028, 0,35153)	(100, 0,69932, 0,70433)
4	0,03268	(100, 0,45894, 0,46111)	(100, 0,91571, 0,92441)
5	0,03381	(100, 0,56322, 0,56654)	(100, 1,12314, 1,13641)
6	0,03490	(100, 0,66300, 0,66766)	(100, 1,32138, 1,34000)
7	0,03596	(100, 0,75819, 0,76436)	(100, 1,51027, 1,53494)
8	0,03700	(100, 0,84872, 0,85656)	(100, 1,68969, 1,72103)
9	0,03801	(100, 0,93456, 0,94419)	(100, 1,85958, 1,89812)
10	0,03902	(100, 1,01568, 1,02722)	(100, 2,01995, 2,06613)

3.1.3.3. Estimación de los factores de descuento al contado

Para la estimación de los tipos spot, de forma análoga al apartado 2.1.3., plantearemos un sistema de ecuaciones lineales donde las incógnitas son los factores de actualización spot. Una vez

resueltos éstos, la obtención de los tipos spot será inmediata. Dicho sistema lo representamos matricialmente como $AF=P$, siendo cada una de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} c_1 + 100 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & c_2 + 100 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_{n-1} & c_{n-1} & \dots & c_{n-1} + 100 & 0 \\ c_n & c_n & c_n & c_n & \dots & c_n + 100 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \dots \\ \tilde{f}_n \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \tilde{P}_1 \\ \tilde{P}_2 \\ \dots \\ \tilde{P}_n \end{pmatrix}$$

Dado que resolveremos este sistema recursivamente, para iniciar el proceso de resolución partiremos del sistema anterior planteado como:

$$\tilde{P}_t = \sum_{r=1}^{t-1} c_t \tilde{f}_r + (c_t + 100) \tilde{f}_t, \quad t = 1, 2, \dots, n.$$

quedando la t-ésima ecuación representada por sus α -cortes como:

$$\begin{aligned} [P_t^1(\alpha), P_t^2(\alpha)] &= c_t \sum_{r=1}^{t-1} [f_r^1(\alpha), f_r^2(\alpha)] + (c_t + 100) [f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)] \\ \left[\frac{P_t^1(\alpha)}{c_t + 100}, \frac{P_t^2(\alpha)}{c_t + 100} \right] &= \frac{c_t}{c_t + 100} \sum_{r=1}^{t-1} [f_r^1(\alpha), f_r^2(\alpha)] + [f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)] \end{aligned} \quad [7]$$

Empezamos por hallar el factor de actualización para un bono con vencimiento a un año ($t=1$). De esta forma obtenemos directamente:

$$\left[\frac{P_1^1(\alpha)}{c_1 + 100}, \frac{P_1^2(\alpha)}{c_1 + 100} \right] = [f_1^1(\alpha), f_1^2(\alpha)]$$

Si aceptamos que el precio del bono puede ser aproximado como un NB L-L de Dubois y Prade de la misma naturaleza que su rentabilidad, el factor de actualización para una unidad monetaria con vencimiento a 1 años también será un número borroso de la misma forma. Así, $\tilde{f}_1 \approx (f_1, l_{f_1}, r_{f_1})_L$, con:

$$f_1 = \frac{P_1}{c_1 + 100}, \quad l_{f_1} = \frac{l_{P_1}}{c_1 + 100}, \quad r_{f_1} = \frac{r_{P_1}}{c_1 + 100} \quad [8]$$

Igualmente, para $t=2$ podremos observar que:

$$\left[\frac{P_2^1(\alpha)}{c_2 + 100}, \frac{P_2^2(\alpha)}{c_2 + 100} \right] = \frac{c_2}{c_2 + 100} [f_1^1(\alpha), f_1^2(\alpha)] + [f_2^1(\alpha), f_2^2(\alpha)]$$

Así, si existe la solución tradicional a la ecuación anterior, lo cual no se puede asegurar, los α -cortes del valor actual de 1 unidad monetaria con vencimiento a dos años son:

$$f_{2\alpha} = [f_2^1(\alpha), f_2^2(\alpha)] = \left[\frac{P_2^1(\alpha) - c_2 f_1^1(\alpha)}{c_2 + 100}, \frac{P_2^2(\alpha) - c_2 f_1^2(\alpha)}{c_2 + 100} \right]$$

los cuales podemos expresar de forma parametrizada si $\tilde{P}_2$ puede ser aproximado por un número L-L de Dubois y Prade, sin más que expresar los α -cortes correspondientes al precio y a $\tilde{f}_1$ a partir de [6] y [7]:

$$\begin{aligned} f_{2\alpha} &\approx \left[\frac{P_2}{100 + c_2} - \frac{l_{p_2}}{100 + c_2} L^{-1}(\alpha) - \frac{c_2}{100 + c_2} f_1 + \frac{c_2}{100 + c_2} l_{f_1} L^{-1}(\alpha), \right. \\ &\quad \left. \frac{P_2}{100 + c_2} + \frac{r_{p_2}}{100 + c_2} L^{-1}(\alpha) - \frac{c_2}{100 + c_2} f_1 - \frac{c_2}{100 + c_2} r_{f_1} L^{-1}(\alpha) \right] = \\ &= \left[\frac{P_2 - c_2 f_1}{100 + c_2} - \frac{l_{p_2} - c_2 l_{f_1}}{100 + c_2} L^{-1}(\alpha), \frac{P_2 - c_2 f_1}{100 + c_2} + \frac{r_{p_2} - c_2 r_{f_1}}{100 + c_2} L^{-1}(\alpha) \right] \end{aligned}$$

Es decir, $\tilde{f}_2 \approx (f_2, l_{f_2}, r_{f_2})_L$, donde:

$$f_2 = \frac{P_2 - c_2 f_1}{c_2 + 100}, l_{f_2} = \frac{l_{p_2} - c_2 l_{f_1}}{c_2 + 100}, r_{f_2} = \frac{r_{p_2} - c_2 r_{f_1}}{c_2 + 100} \quad [9]$$

De idéntica manera, y partiendo de la ecuación [7], el t -ésimo factor de actualización se hallará tras haber hallado el valor actual de una unidad monetaria con vencimiento dentro de $t-1$ años. Así plantearíamos:

$$\left[\frac{P_t^1(\alpha)}{c_t + 100}, \frac{P_t^2(\alpha)}{c_t + 100} \right] = \frac{c_t}{c_t + 100} \sum_{r=1}^{t-1} [f_r^1(\alpha), f_r^2(\alpha)] + [f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)]$$

Los α -cortes que se deducen de la solución clásica, la cual no necesariamente existirá, quedan caracterizados por su extremo inferior y superior de la forma:

$$f_{t\alpha} = [f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)] = \left[\frac{P_t^1(\alpha) - c_t \sum_{r=1}^{t-1} f_r^1(\alpha)}{c_t + 100}, \frac{P_t^2(\alpha) - c_t \sum_{r=1}^{t-1} f_r^2(\alpha)}{c_t + 100} \right]$$

Y al igual que realizamos en [9], podemos hallar el t-ésimo factor de actualización spot como $\tilde{f}_t \approx (f_t, r_{f_t}, l_{f_t})_L$ si $\tilde{P}_t \forall t$ puede aproximarse por un NB de las mismas características. Así, dado que el extremo izquierdo del α -corte lo podemos escribir como:

$$\begin{aligned} f_t - l_{f_t} L^{-1}(\alpha) &= \frac{P_t}{100 + c_t} - \frac{l_{P_t}}{100 + c_t} L^{-1}(\alpha) - \frac{c_t}{100 + c_t} \sum_{r=1}^{t-1} f_r + \frac{c_t}{100 + c_t} \sum_{r=1}^{t-1} l_{f_r} L^{-1}(\alpha) = \\ &= \frac{P_t - c_t \sum_{r=1}^{t-1} f_r}{100 + c_t} - \frac{l_{P_t} - c_t \sum_{r=1}^{t-1} l_{f_r}}{100 + c_t} L^{-1}(\alpha) \end{aligned}$$

observándose que,

$$f_t = \frac{P_t - c_t \sum_{r=1}^{t-1} f_r}{100 + c_t} \text{ y } l_{f_t} = \frac{l_{P_t} - c_t \sum_{r=1}^{t-1} l_{f_r}}{100 + c_t} \quad [10]$$

Igualmente podemos realizar el mismo proceso para el extremo superior de los α -cortes de $\tilde{f}_t$, de forma que:

$$\begin{aligned} f_t + r_{f_t} L^{-1}(\alpha) &= \frac{P_t}{100 + c_t} + \frac{r_{P_t}}{100 + c_t} L^{-1}(\alpha) - \frac{c_t}{100 + c_t} \sum_{r=1}^{t-1} f_r - \frac{c_t}{100 + c_t} \sum_{r=1}^{t-1} r_{f_r} L^{-1}(\alpha) = \\ &= \frac{P_t - c_t \sum_{r=1}^{t-1} f_r}{100 + c_t} + \frac{r_{P_t} - c_t \sum_{r=1}^{t-1} r_{f_r}}{100 + c_t} L^{-1}(\alpha) \end{aligned}$$

y así,

$$r_{f_t} = \frac{r_{P_t} - c_t \sum_{r=1}^{t-1} r_{f_r}}{100 + c_t} \quad [11]$$

Evidentemente, no tiene porque existir, excepto para $t=1$, solución en el sentido clásico para estas ecuaciones. Así, y si en la ecuación [7] los coeficientes son números borrosos L-L de Dubois y Prade, podemos asegurar la existencia de solución en el sentido clásico, tal como demostramos en el apartado 1.3.1. de la tesis si se cumple simultáneamente:

$$c_t \sum_{r=1}^{t-1} l_{f_r} \leq l_{p_t} \cdot y \quad c_t \sum_{r=1}^{t-1} r_{f_r} \leq r_{p_t}$$

Una vez se han resuelto los primeros $t-1$ factores de actualización, si para el t -ésimo factor de actualización no existe solución en el sentido clásico proponemos en la determinación de sus α -cortes utilizar el concepto de solución de Buckley y Qu. En este caso, los α -cortes del t -ésimo factor de actualización serían:

$$f_{t_\alpha} = \left\{ x \in R^+ / x = \frac{y - c_t \sum_{r=1}^{t-1} z_r}{100 + c_t}, y \in P_{t_\alpha}, z_r \in f_{r_\alpha} \quad r = 1, 2, \dots, t-1 \right\}$$

que dada la relación monótona creciente del factor de actualización para 1 unidad monetaria con vencimiento en t respecto al precio y decreciente respecto a los $t-1$ factores de descuento anteriores, f_{t_α} quedaría expresado como:

$$f_{t_\alpha} = [f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)] = \left[\frac{P_t^1(\alpha) - c_t \sum_{r=1}^{t-1} f_r^2(\alpha)}{100 + c_t}, \frac{P_t^2(\alpha) - c_t \sum_{r=1}^{t-1} f_r^1(\alpha)}{100 + c_t} \right]$$

Así, si $\tilde{P}_t \approx (P_t, l_{p_t}, r_{p_t})_L \forall t$ el t -ésimo factor de actualización queda expresado como $\tilde{f}_t \approx (f_t, l_{f_t}, r_{f_t})_L$, de forma que sus α -cortes serán:

$$f_{t_\alpha} \approx \left[\frac{P_t - l_{p_t} L^{-1}(\alpha) - c_t \sum_{r=1}^{t-1} f_r - c_t \sum_{r=1}^{t-1} r_{f_r} L^{-1}(\alpha)}{100 + c_t}, \frac{P_t + r_{p_t} L^{-1}(\alpha) - c_t \sum_{r=1}^{t-1} f_r + c_t \sum_{r=1}^{t-1} l_{f_r} L^{-1}(\alpha)}{100 + c_t} \right] =$$

$$= \left[\frac{P_t - c_t \sum_{r=1}^{t-1} f_r}{100 + c_t} - \frac{l_{p_t} + c_t \sum_{r=1}^{t-1} r_{f_r}}{100 + c_t} L^{-1}(\alpha), \frac{P_t - c_t \sum_{r=1}^{t-1} f_r}{100 + c_t} + \frac{r_{p_t} + c_t \sum_{r=1}^{t-1} l_{f_r}}{100 + c_t} L^{-1}(\alpha) \right]$$

Podemos observar que los parámetros que caracterizan a $\tilde{f}_t$ son en este caso:

$$f_t = \frac{P_t - c_t \sum_{r=1}^{t-1} f_r}{100 + c_t}, \quad l_{f_t} = \frac{l_{p_t} + c_t \sum_{r=1}^{t-1} r_{f_r}}{100 + c_t} \quad y \quad r_{f_t} = \frac{r_{p_t} + c_t \sum_{r=1}^{t-1} l_{f_r}}{100 + c_t} \quad [12]$$

Aumentándose considerablemente la incertidumbre de $\tilde{f}_t$ ya que sus radios l_{f_t} y r_{f_t} se obtienen como suma de radios y no como diferencia.

3.1.3.4. Estimación de los factores de actualización spot a partir de una estimación triangular de la curva de rentabilidades: análisis de los modelos planteados

Si partimos de una aproximación triangular al precio del bono par, ya hemos observado que podemos hallar los factores de actualización para una cuantía con vencimiento a t años también como números borrosos triangulares, tanto si la resolución del t -ésimo factor de actualización admite la solución clásica, como si debemos recurrir al concepto de solución de ecuaciones borrosas de Buckley y Qu. De esta forma, en la aplicación numérica que estamos considerando, la forma de la función de pertenencia para el factor de descuento de una cuantía con vencimiento dentro de t años, $\tilde{f}_t$ será:

$$\mu_{\tilde{f}_t}(x) \approx \begin{cases} \frac{x - (f_t - l_{f_t})}{l_{f_t}} & f_t - l_{f_t} < x \leq f_t \\ \frac{(f_t + r_{f_t}) - x}{r_{f_t}} & f_t < x \leq f_t + r_{f_t} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo los valores de f_t , l_{f_t} y r_{f_t} los hallados en [10] y [11] si $\tilde{f}_t$ admite solución en sentido clásico y [12] si debe ser utilizado el concepto de solución de Buckley y Qu.

Así, los resultados obtenidos según el método de interpolación son, para el 22-1-99:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0.5$
1	(0,97130, 0, 0)	(0,97130, 0, 0)
2	(0,94497, 0, 0)	(0,94497, 0, 0)
3	(0,91311, 0,00064, 0,00064)	(0,91311, 0,00129, 0,00129)
4	(0,88438, 0,00007, 0,00007)	(0,88438, 0,00014, 0,00014)
5	(0,84969, 0,00053, 0,00053)	(0,84969, 0,00105, 0,00105)
6	(0,81340, 0,00099, 0,00099)	(0,81340, 0,00198, 0,00198)
7	(0,77859, 0,00008, 0,00008)	(0,77859, 0,00015, 0,00016)
8	(0,74515, 0,00081, 0,00081)	(0,74515, 0,00162, 0,00162)
9	(0,70885, 0,00072, 0,00072)	(0,70885, 0,00144, 0,00144)
10	(0,68043, 0,00026, 0,00026)	(0,68043, 0,00051, 0,00051)

Para la regresión polinómica se obtiene:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0.5$
1	(0,97200, 0,00069, 0,00069)	(0,97200, 0,00137, 0,00137)
2	(0,94406, 0,00133, 0,00133)	(0,94406, 0,00266, 0,00267)

3	(0,91471, 0,00193, 0,00194)	(0,91471, 0,00386, 0,00388)
4	(0,88338, 0,00248, 0,00249)	(0,88338, 0,00496, 0,00499)
5	(0,85012, 0,00298, 0,00299)	(0,85012, 0,00595, 0,00600)
6	(0,81544, 0,00343, 0,00344)	(0,81544, 0,00684, 0,00690)
7	(0,78010, 0,00382, 0,00384)	(0,78010, 0,00762, 0,00771)
8	(0,74490, 0,00417, 0,00419)	(0,74490, 0,00830, 0,00841)
9	(0,71057, 0,00447, 0,00450)	(0,71057, 0,00890, 0,00903)
10	(0,67765, 0,00473, 0,00477)	(0,67765, 0,00943, 0,00957)

En el modelo de Cohen, Kramer y Vaugh los resultados son:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	(0,97232, 0,00094, 0,00094)	(0,97232, 0,00188, 0,00189)
2	(0,94361, 0,00182, 0,00183)	(0,94361, 0,00364, 0,00367)
3	(0,91307, 0,00264, 0,00265)	(0,91307, 0,00528, 0,00532)
4	(0,88124, 0,00340, 0,00341)	(0,88124, 0,00678, 0,00684)
5	(0,84852, 0,00408, 0,00411)	(0,84852, 0,00814, 0,00824)
6	(0,81523, 0,00470, 0,00473)	(0,81523, 0,00937, 0,00950)
7	(0,78162, 0,00525, 0,00529)	(0,78162, 0,01046, 0,01063)
8	(0,74789, 0,00574, 0,00579)	(0,74789, 0,01143, 0,01162)
9	(0,71421, 0,00616, 0,00622)	(0,71421, 0,01226, 0,01250)
10	(0,68072, 0,00652, 0,00659)	(0,68072, 0,01297, 0,01325)

Y en el de Bradley y Crame:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	(0,97236, 0,00117, 0,00117)	(0,97236, 0,00234, 0,00235)
2	(0,94235, 0,00227, 0,00228)	(0,94235, 0,00454, 0,00456)
3	(0,91109, 0,00329, 0,00330)	(0,91109, 0,00657, 0,00662)
4	(0,87895, 0,00423, 0,00425)	(0,87895, 0,00844, 0,00852)
5	(0,84612, 0,00509, 0,00512)	(0,84612, 0,01015, 0,01027)
6	(0,81279, 0,00586, 0,00591)	(0,81279, 0,01169, 0,01186)
7	(0,77910, 0,00656, 0,00661)	(0,77910, 0,01306, 0,01328)
8	(0,74517, 0,00717, 0,00724)	(0,74517, 0,01427, 0,01455)
9	(0,71114, 0,00770, 0,00778)	(0,71114, 0,01531, 0,01565)
10	(0,67710, 0,00815, 0,00825)	(0,67710, 0,01620, 0,01659)

3.1.3.5. Estimación de la ETTI

La función de pertenencia del tipo spot para un vencimiento t es fácilmente deducible a partir de su factor de actualización asociado, ya que se trata de evaluar la función borrosa:

$$\tilde{i}_t = \tilde{f}_t^{-1/t} - 1$$

Así, la función de pertenencia del tipo al contado para un vencimiento t , $\tilde{i}_t$, es:

$$\mu_{\tilde{i}_t}(y) = \bigvee_{y=x^{-1/t}-1} \mu_{\tilde{f}_t}(x) = \mu_{\tilde{f}_t}[(1+y)^{-t}]$$

Siendo entonces, los α -cortes del tipo de actualización con vencimiento a t años:

$$i_{t_\alpha} = [f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)]^{-1/t} - 1 = \left[(f_t^2(\alpha))^{-1/t} - 1, (f_t^1(\alpha))^{-1/t} - 1 \right]$$

En el caso en que el precio sea aproximable mediante un número L-L de Dubois y Prade, la función de pertenencia de $\tilde{i}_t$ sería entonces:

$$\mu_{\tilde{i}_t}(x) \approx \begin{cases} L \left(\frac{(1+x)^{-t} - f_t}{r_{f_t}} \right) & (f_t + r_{f_t})^{-1/t} - 1 < x \leq f_t^{-1/t} - 1 \\ L \left(\frac{f_t - (1+x)^{-t}}{l_{f_t}} \right) & f_t^{-1/t} - 1 < x \leq (f_t - l_{f_t})^{-1/t} - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad [13]$$

y por tanto, sus α -cortes serán:

$$i_{t_\alpha} \approx \left[(f_t + r_{f_t} L^{-1}(\alpha))^{-1/t} - 1, (f_t - l_{f_t} L^{-1}(\alpha))^{-1/t} - 1 \right] \quad [14]$$

Podemos observar que los tipos spot no mantienen la naturaleza del factor de actualización spot (p.e., si partimos de factores de actualización triangulares, intereses al contado triangulares). Sin embargo, creemos de interés cuantificar el tipo de interés spot como un número L-R de Dubois y Prade ya que según la Teoría de las Expectativas racionales, éste no es más que una media de unas magnitudes futuras e inciertas (los tipos forward), no siendo necesario por tanto extrema precisión en su cuantificación. Adicionalmente, su estructura (para construirlo sólo hace falta un centro y dos radios) se adapta perfectamente a la forma de razonar humana. Así, e igual que ocurre con el precio de los bonos par, cuando partamos de una estimación triangular de la curva de rentabilidades, observaremos que será posible aproximar al interés spot un número de la misma naturaleza que las rentabilidades de partida, sin incurrir en errores excesivamente elevados.

3.1.3.6. Estimación de los tipos spot a partir de una estimación triangular de la curva de rentabilidades: análisis de los diversos modelos planteados

En el caso que los coeficientes $\tilde{a}_j$, $j=0,1,\dots,m$ que definan la curva de rentabilidades sean estimados mediante NBT simétricos, ya hemos observado que el precio del bono que cotiza a la par para los diversos vencimientos considerados puede aproximarse sin ningún problema mediante números borrosos de la misma naturaleza, obteniéndose a partir de dicha aproximación triangular los factores de actualización spot también como NBTs.

Así, la función de pertenencia y los α -cortes de $\tilde{i}_t$ se hallan con [13] y [14] respectivamente, sin mas que considerar que las funciones forma izquierda y derecha son $L(x)=R(x)=\text{Max}\{0, 1-|x|\}$.

Así, el tipo al contado con vencimiento a t años, $\tilde{i}_t$, tendrá como función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{i}_t}(x) = \begin{cases} \frac{(f_t + r_{f_t}) - (1+x)^{-t}}{r_{f_t}} & (f_t + r_{f_t})^{-1/t} - 1 < x \leq f_t^{-1/t} - 1 \\ \frac{(1+x)^{-t} - (f_t - l_{f_t})}{l_{f_t}} & f_t^{-1/t} - 1 < x \leq (f_t - l_{f_t})^{-1/t} - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así, se observa que el interés spot no mantiene la triangularidad de los factores de actualización de partida. De esta forma, si deseamos expresarlo mediante un NBT, debemos aproximarlos. Como siempre, nosotros proponemos como NB aproximado aquel NBT que presente el mismo soporte y el mismo núcleo que el número borroso originario, de forma que $\tilde{i}_t \approx (i_t, l_{i_t}, r_{i_t})$ con:

$$i_t = f_t^{-1/t} - 1, l_{i_t} = f_t^{-1/t} - (f_t + r_{f_t})^{-1/t} \text{ y } r_{i_t} = (f_t - l_{f_t})^{-1/t} - f_t^{-1/t}$$

siendo en este caso la función de pertenencia de $\tilde{i}_t$:

$$\mu_{\tilde{i}_t}(x) \approx \begin{cases} \frac{x - (i_t - l_{i_t})}{l_{i_t}} & i_t - l_{i_t} < x \leq i_t \\ \frac{(i_t + r_{i_t}) - x}{r_{i_t}} & i_t < x \leq i_t + r_{i_t} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En nuestro caso, los tipos spot estimados para el día 22-1-1999 ya aproximados mediante NBT, si hemos estimado la curva de rentabilidades mediante interpolación lineal, son para vencimientos de hasta 10 años:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	(0,02955, 0, 0)	(0,02955, 0, 0)
2	(0,02871, 0, 0)	(0,02871, 0, 0)
3	(0,03076, 0,00024, 0,00024)	(0,03076, 0,00048, 0,00048)
4	(0,03119, 0,00002, 0,00002)	(0,03119, 0,00004, 0,00004)
5	(0,03311, 0,00013, 0,00013)	(0,03311, 0,00026, 0,00026)
6	(0,03502, 0,00021, 0,00021)	(0,03502, 0,00042, 0,00042)
7	(0,03640, 0,00001, 0,00001)	(0,03640, 0,00003, 0,00003)
8	(0,03746, 0,00014, 0,00014)	(0,03746, 0,00028, 0,00028)
9	(0,03897, 0,00012, 0,00012)	(0,03897, 0,00023, 0,00023)
10	(0,03925, 0,00004, 0,00004)	(0,03925, 0,00008, 0,00008)

Con las estimaciones polinómicas de la curva de rentabilidades obtenemos:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	(0,02881, 0,00073, 0,00073)	(0,02881, 0,00145, 0,00145)
2	(0,02920, 0,00073, 0,00073)	(0,02920, 0,00145, 0,00145)
3	(0,03016, 0,00073, 0,00073)	(0,03016, 0,00145, 0,00145)
4	(0,03149, 0,00073, 0,00073)	(0,03149, 0,00145, 0,00145)
5	(0,03301, 0,00073, 0,00073)	(0,03301, 0,00145, 0,00145)
6	(0,03459, 0,00073, 0,00073)	(0,03459, 0,00145, 0,00145)
7	(0,03611, 0,00073, 0,00073)	(0,03611, 0,00145, 0,00145)
8	(0,03750, 0,00073, 0,00073)	(0,03750, 0,00145, 0,00145)
9	(0,03869, 0,00073, 0,00073)	(0,03869, 0,00146, 0,00146)
10	(0,03968, 0,00073, 0,00073)	(0,03968, 0,00146, 0,00146)

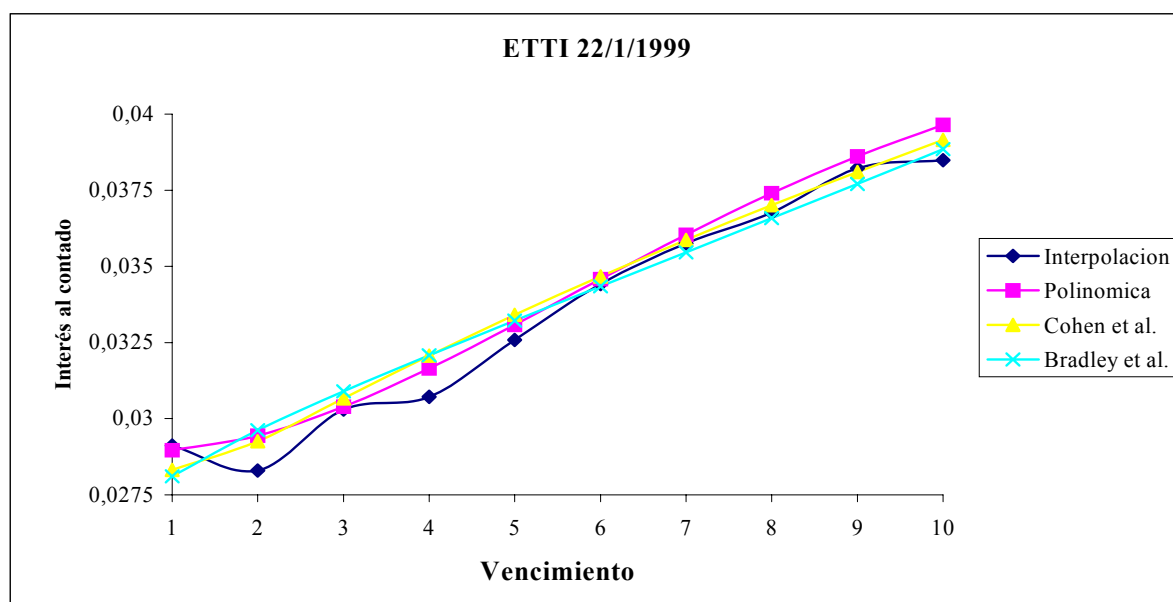
Los resultados que se obtienen si el modelo utilizado es el de Cohen *et al.* son:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	(0,02847, 0,00100, 0,00100)	(0,02847, 0,00199, 0,00199)
2	(0,02945, 0,00100, 0,00100)	(0,02945, 0,00199, 0,00199)
3	(0,03078, 0,00100, 0,00100)	(0,03078, 0,00199, 0,00199)
4	(0,03211, 0,00100, 0,00100)	(0,03211, 0,00199, 0,00199)
5	(0,03340, 0,00100, 0,00100)	(0,03340, 0,00199, 0,00199)
6	(0,03463, 0,00100, 0,00100)	(0,03463, 0,00200, 0,00200)
7	(0,03582, 0,00100, 0,00100)	(0,03582, 0,00200, 0,00200)
8	(0,03698, 0,00100, 0,00100)	(0,03698, 0,00200, 0,00200)
9	(0,03811, 0,00100, 0,00100)	(0,03811, 0,00200, 0,00200)
10	(0,03921, 0,00100, 0,00100)	(0,03921, 0,00200, 0,00200)

Y para el de Bradley y Crame obtenemos:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	(0,02842, 0,00124, 0,00124)	(0,02842, 0,00248, 0,00248)
2	(0,03014, 0,00124, 0,00124)	(0,03014, 0,00248, 0,00249)
3	(0,03152, 0,00124, 0,00124)	(0,03152, 0,00249, 0,00249)
4	(0,03278, 0,00125, 0,00125)	(0,03278, 0,00249, 0,00249)
5	(0,03398, 0,00125, 0,00125)	(0,03398, 0,00249, 0,00250)
6	(0,03515, 0,00125, 0,00125)	(0,03515, 0,00250, 0,00250)
7	(0,03630, 0,00125, 0,00125)	(0,03630, 0,00250, 0,00251)
8	(0,03745, 0,00125, 0,00125)	(0,03745, 0,00250, 0,00251)
9	(0,03860, 0,00126, 0,00126)	(0,03860, 0,00251, 0,00252)
10	(0,03976, 0,00126, 0,00126)	(0,03976, 0,00251, 0,00252)

Asimismo, la representación gráfica de la ETTI estimada para un nivel de presunción al $\alpha=1$ en cada uno de los modelos es:



A continuación analizamos la idoneidad de la aproximación triangular de los tipos al contado obtenidos para cada uno de los modelos, suponiéndose que el factor de descuento del que provienen es triangular. A partir de los errores máximos que en los extremos de los α -cortes se cometen para unos niveles de $\alpha_l^*(t)$ en la izquierda y $\alpha_D^*(t)$ a la derecha que son:

$$\alpha_l^*(t) = \frac{f_t + r_{f_t}}{r_{f_t}} - \left(\frac{l_{f_t} t}{r_{f_t} - \frac{1}{t}} \right)^{-\frac{t}{t+1}} \quad \text{y} \quad \alpha_D^*(t) = -\frac{f_t - l_{f_t}}{l_{f_t}} + \left(\frac{r_{f_t} t}{l_{f_t} - \frac{1}{t}} \right)^{-\frac{t}{t+1}} \quad [15]$$

hallaremos los errores máximos en el nivel de presunción que se cometen por la aproximación triangular de los tipos spot para cada uno de los modelos que serán:

t	Interpolación		Polinómica		Cohen <i>et al.</i>		Bradley y Crame	
	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0.5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0.5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0.5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0.5$
1	0	0	0,00018	0,00035	0,00024	0,00049	0,00030	0,00060
2	0	0	0,00026	0,00053	0,00036	0,00073	0,00045	0,00090
3	0,00012	0,00024	0,00035	0,00071	0,00048	0,00097	0,00060	0,00121
4	0,00001	0,00002	0,00044	0,00088	0,00060	0,00121	0,00075	0,00151
5	0,00009	0,00019	0,00053	0,00106	0,00072	0,00145	0,00090	0,00181
6	0,00018	0,00035	0,00061	0,00123	0,00084	0,00169	0,00106	0,00211
7	0,00021	0,00043	0,00070	0,00140	0,00096	0,00193	0,00121	0,00242
8	0,00015	0,00031	0,00079	0,00158	0,00108	0,00217	0,00136	0,00272
9	0,00014	0,00028	0,00088	0,00175	0,00120	0,00241	0,00151	0,00302
10	0,00005	0,00010	0,00096	0,00193	0,00132	0,00265	0,00166	0,00333

Así pues, se comprueba que los resultados de la aproximación triangular son mas que satisfactorios.

El nivel de presunción de los tipos spot obtenidos en el apartado 2.1.2.1. en los que se obtienen a partir de la regresión posibilística son:

t	Interpolación		Polinómica		Cohen <i>et al.</i>		Bradley y Crame	
	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	1	1	0,77	0,89	0,85	0,92	0,75	0,88
2	1	1	0,67	0,83	0,81	0,90	0,59	0,79
3	1	1	0,68	0,84	0,89	0,94	0,50	0,75
4	1	1	0,78	0,89	0,96	0,98	0,44	0,72
5	1	1	0,90	0,95	0,99	0,99	0,39	0,70
6	1	1	0,99	0,99	0,96	0,98	0,36	0,68
7	1	1	0,90	0,95	0,96	0,98	0,33	0,66
8	1	1	0,87	0,93	0,97	0,99	0,30	0,65
9	1	1	0,89	0,94	0,99	1,00	0,29	0,64
10	1	1	0,95	0,97	0,94	0,97	0,27	0,63
Media	1	1	0,84	0,92	0,93	0,97	0,42	0,71

Como en apartados anteriores, en la última fila ha sido expresado el nivel que en promedio presenta la estimación MCO de los tipos spot para cada modelo en su correspondiente posibilístico.

3.1.3.7. Comentarios a los resultados obtenidos

Respecto a los resultados obtenidos a lo largo del apartado 3.1.3., podemos realizar los siguientes comentarios generales:

- Respecto a la incertidumbre de los tipos spot obtenidos, el que incorpora menor incertidumbre es el método de interpolación, si medimos la incertidumbre como el radio de los intereses al contado que se obtienen para cada vencimiento. Sin embargo, y en contra de lo que en principio sería deseable, esta incertidumbre no guarda relación con el vencimiento. En cambio, en los modelos basados en la regresión, la incertidumbre de los tipos spot aumenta o se mantiene invariable, como es lógico, con el tiempo, ya que a mayor vencimiento, se incorpora información sobre un número de tipos forward mayor. Asimismo, aquéllos modelos de regresión que ajustan mejor la curva de rentabilidades (consiguen menor incertidumbre en la función objetivo), proporcionan unos tipos spot menos inciertos (el polinómico y el de Cohen *et al.*)
- En aquéllos modelos en los cuales la estimación en certeza sobre los tipos a un determinado plazo era un valor cercano al centro del correspondiente número borroso que se deriva de la regresión de Tanaka, el tipo spot cierto que se obtiene presenta un nivel de pertenencia también muy elevado en la estimación borrosa asociada. Por supuesto, en aquéllos casos en los que existía para la curva de rentabilidades una mayor divergencia entre las estimaciones MCO y las derivadas de la regresión posibilística, dicha divergencia se mantiene en la ETTI

que se obtiene. Asimismo, creemos que podemos interpretar el hecho de que en un método la estimación mediante MCO diverja poco de la posibilística, como un indicador de fiabilidad de la relación funcional propuesta para la curva de rentabilidades. En este sentido, el modelo de Bradley y Crame es el peor, ya que las rentabilidades estimadas para los bonos y los tipos spot que se deducen mediante MCO están más alejados de los que hallamos con la regresión posibilística –los niveles de presunción son los más bajos–.

- c) Podemos observar que los modelos que proporcionan estimaciones de la ETTI menos suaves en certeza, continúan proporcionando las menos suaves cuando utilizamos la regresión posibilística –hemos representado en este caso, únicamente la ETTI que se obtiene con los tipos al contado de mayor presunción–. En este sentido, los modelos que se comportan peor son la interpolación lineal y la estimación polinómica.

3.2. ESTIMACIÓN DE LA ETTI MEDIANTE LA ESTIMACIÓN DE LA FUNCIÓN DE DESCUENTO

3.2.1. Planteamiento general e hipótesis

A continuación realizamos, al igual que en el apartado 3.1.1. diversas hipótesis que nos permitirán, partiendo del marco conceptual analizado para la estimación de la ETTI en el apartado 2.2., realizar nuestra correspondiente propuesta utilizando la regresión borrosa, lo cual nos permitirá posteriormente realizar la estimación de los intereses que regirán en el mercado en un futuro a través de números borrosos. Asimismo, algunas de estas hipótesis serán análogas a las realizadas en 3.1., pero teniendo en cuenta que en este caso la variable a explicar no es la rentabilidad de los bonos, sino su precio.

Hipótesis 1: El precio negociado para el r-ésimo título durante una sesión concreta puede ser expresado a través de un número borroso L-R simétrico de Dubois y Prade. Así, representamos dicho precio por:

$$\tilde{P}^r = (P_C^r, P_R^r)_L \quad P_C^r, P_R^r \geq 0, r = 1, 2, \dots, k.$$

La aceptación de esta hipótesis implica considerar que el precio de una referencia en un día concreto es "aproximadamente P_C ", en lugar de aceptar que es exactamente P_C ; lo cual consideramos que tras lo expuesto en el punto 1.5. es más adecuado.

Hipótesis 2: Ya hemos comentado anteriormente que podemos considerar que el precio de un título negociado durante una determinada sesión puede cuantificarse mediante un intervalo de confianza cuyos extremos inferior y superior son, respectivamente, el precio mínimo y el precio máximo que ha tomado. Partiremos como hipótesis de que el precio observado para cada título es un α -corte para un nivel α^* arbitrario del número borroso que lo cuantifica prefijado por el observador. De esta forma, dicho intervalo puede ser expresado a través de su centro y su radio como $\langle P_C^r, P_R^r \rangle$. Por otra parte su centro y su radio pueden ser expresados en función del centro, el radio y la función forma del número borroso del que provienen:

$$P_C^r = P_C^r \text{ y } P_R^r = L^{-1}(\alpha^*)P_R^r, 0 \leq \alpha^* \leq 1, r = 1, 2, \dots, k$$

Hipótesis 3: El factor de descuento se puede cuantificar a través de un número borroso cuyo valor depende del tiempo, de forma que para un plazo dado t , dicho factor de descuento es un número borroso L-R simétrico de Dubois y Prade.

$$\tilde{f}_t = (f_t, l_{f_t})_L, t > 0, 0 \leq f_t - l_{f_t} \leq f_t + l_{f_t} \leq 1$$

De esta forma, el precio del r -ésimo bono puede ser escrito como la suma de las cuantías a cobrar por la posesión del título, actualizada con el factor de descuento que les corresponde por su vencimiento. Así:

$$\tilde{P}^r = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \tilde{f}_{t_i^r}$$

y entonces,

$$(P_C^r, P_R^r)_L = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r (f_{t_i^r}, l_{f_{t_i^r}})_L$$

Así, el α -corte observado para el precio del bono r , para un nivel α^* arbitrario prefijado por el decisor, puede escribirse como:

$$\langle P_C^r, P_R^r \rangle = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \langle f_{t_i^r}, l_{f_{t_i^r}} \rangle$$

con:

$$f_{t_i^r} = f_{t_i^r} \text{ y } l_{f_{t_i^r}} = L^{-1}(\alpha^*)l_{f_{t_i^r}}, 0 \leq \alpha^* \leq 1, r = 1, 2, \dots, k$$

Asimismo, también podemos interpretar el valor tomado de α^* como un indicador de la incertidumbre que percibe el decisor en el mercado. Si aumentamos α^* aumentaremos el radio de

los números borrosos que cuantifican el precio observado para los bonos, por lo que estaremos introduciendo mayor incertidumbre en las observaciones de la variable independiente –en este caso el precio–.

Hipótesis 4: El factor de descuento puede aproximarse a través de una combinación lineal de $m+1$ funciones $g_j(t)$, $j=0,1,\dots,m$ con imagen en R , continuas y derivables, cuyos parámetros asociados vendrán dados por números borrosos simétricos de Dubois y Prade. De esta forma, podremos representar a los parámetros como:

$$\tilde{a}_j = (a_{jC}, a_{jR})_L \quad a_{jR} \geq 0, j = 0, 1, \dots, m$$

y el factor de actualización podrá escribirse como:

$$(f_t, l_{f_t})_L = \sum_{j=0}^m (a_{jC}, a_{jR})_L g_j(t) = \sum_{j=0}^m (a_{jC} g_j(t), a_{jR} |g_j(t)|)_L, a_{jR} \geq 0 \forall j \quad [16]$$

y así, estimaremos un precio para el r -ésimo bono una vez ajustados los parámetros a_{jC} y $a_{jR} \forall j$:

$$\hat{P}^r = (\hat{P}_C^r, \hat{P}_R^r)_L = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \sum_{j=0}^m (a_{jC}, a_{jR})_L g_j(t_i^r) \quad [17]$$

De esta forma, el α^* -corte del precio del r -ésimo bono que será estimado para $\langle P_C^r, P_R^r \rangle$ vendrá dado por:

$$\langle \hat{P}_C^r, \hat{P}_R^r \rangle = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \sum_{j=0}^m \langle a'_{jC}, a'_{jR} \rangle g_j(t_i^r)$$

con:

$$a'_{jC} = a_{jC} \text{ y } a'_{jR} = L^{-1}(\alpha^*)a_{jR}, 0 \leq \alpha^* \leq 1, r = 1, 2, \dots, k$$

A continuación, realizamos la adaptación que proponemos de los modelos analizados en los apartados 2.2.1 y 2.2.2. a la circunstancia de que tomamos toda la horquilla de precios a las que han sido negociadas las referencias durante la sesión que estudiemos, y que se ha supuesto que las mismas son un α -corte de su precio para un nivel α^* dado.

3.2.2. El modelo de McCulloch

Dado que el factor de descuento debe tomar para el vencimiento $t=0$ el valor cierto 1; es decir, necesariamente debe cumplirse que $\tilde{f}_0 = (f_0, l_{f_0})_L = (1, 0)_L$. Esta condición quedará asegurada si en la expresión [16] exigimos:

- 1) $(a_{0C}, a_{0R})_L = (1, 0)_L$
- 2) $g_0(t) = 1$.
- 3) $g_j(0) = 0, j=1,2,...,m$.

Así, podemos escribir el factor de descuento correspondiente a 1 u.m. que vence en t como:

$$(f_t, l_{f_t})_L = (1, 0)_L + \sum_{j=1}^m (a_{jC}, a_{jR})_L g_j(t) = \left(1 + \sum_{j=1}^m a_{jC} g_j(t), \sum_{j=1}^m a_{jR} |g_j(t)| \right)_L \quad [18]$$

La función de pertenencia y los α -cortes de $\tilde{f}_t$ se hallarán a través de las correspondientes a los parámetros $\tilde{a}_j$. La función de pertenencia de $\tilde{f}_t$ es, por tanto:

$$\mu_{\tilde{f}_t}(x) = \begin{cases} L \left(\frac{\left| x - \left[1 + \sum_{j=1}^m a_{jC} g_j(t) \right] \right|}{\sum_{j=1}^m a_{jR} |g_j(t)|} \right) & 1 + \sum_{j=1}^m a_{jC} g_j(t) - \sum_{j=1}^m a_{jR} |g_j(t)| \leq x \leq 1 + \sum_{j=1}^m a_{jC} g_j(t) + \sum_{j=1}^m a_{jR} |g_j(t)| \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Tomando en consideración las expresiones [16] y [18], el precio que del r -ésimo bono estimaremos una vez se hayan estimado los parámetros $\tilde{a}_j$ -su centro y su radio más concretamente- puede escribirse como:

$$\hat{P}^r = (\hat{P}_C^r, \hat{P}_R^r)_L = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \left[(1, 0)_L + \sum_{j=1}^m (a_{jC}, a_{jR})_L g_j(t_i^r) \right] = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r (1, 0)_L + \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \sum_{j=1}^m (a_{jC}, a_{jR})_L g_j(t_i^r)$$

y operando llegaremos a obtener:

$$(\hat{P}_C^r, \hat{P}_R^r)_L - \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r (1, 0)_L = \sum_{j=1}^m (a_{jC}, a_{jR})_L \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r g_j(t_i^r)$$

De esta forma, identificando $\hat{Y}^r = (\hat{Y}_C^r, \hat{Y}_R^r)_L = (\hat{P}_C^r, \hat{P}_R^r)_L - \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r (1, 0)_L$, observamos que:

$$\hat{Y}_C^r = \hat{P}_C^r - \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r ; \text{ y } \hat{Y}_R^r = \hat{P}_R^r$$

Se puede observar que el valor de la j -ésima variable independiente correspondiente al bono r es la variable crisp $X_j^r = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r g_j(t_i^r)$. Así, el modelo que finalmente deberá ser estimado es:

$$\left(\hat{Y}_C^r, \hat{Y}_R^r\right)_L = \sum_{j=1}^m \left(a_{jC}, a_{jR}\right)_L X_j^r \quad [19]$$

El modelo a implementar tiene como característica que la variable dependiente y los parámetros vienen expresados a través de su α^* -corte, y así, partiendo de [19], la expresión del α -corte que queda estimado para dicho nivel de presunción α^* y para un título r es:

$$\left\langle \hat{Y}_C^r, \hat{Y}_R^r \right\rangle = \sum_{j=1}^m \left\langle a'_{jC}, a'_{jR} \right\rangle X_j^r = \sum_{j=1}^m \left\langle a'_{jC} X_j^r, a'_{jR} \left| X_j^r \right| \right\rangle \quad [20]$$

Debiéndose estimar el centro y el radio del α^* -corte de los parámetros $\tilde{a}_j$, $j=1, \dots, m$. Una vez resueltos, obtendremos el centro y el radio de los números borrosos del que provienen sin más que identificar $a_{jC} = a'_{jC}$, y $a_{jR} = \frac{a'_{jR}}{L^{-1}(\alpha^*)}$.

Asimismo, tras ajustar los parámetros $\tilde{a}_j$, $j=1, \dots, m$, estaremos realizando una estimación sobre la variable $\tilde{Y}^r = \left(Y_C^r, Y_R^r\right)_L$ del r -ésimo bono, relacionada con el precio del mismo, tal que:

$$Y_C^r = P_C^r - \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r; \text{ y } Y_R^r = P_R^r$$

De esta forma, el α^* -corte de $\hat{\tilde{Y}}^r$ que ha sido expresado en [20] no es más que la estimación del intervalo de confianza correspondiente a $\tilde{Y}^r$ para el mismo nivel de presunción α^* . Así, $\left\langle \hat{Y}_C^r, \hat{Y}_R^r \right\rangle$ es la estimación de $Y_{\alpha^*}^r = \left\langle Y_C^r, Y_R^r \right\rangle$, donde:

$$Y_C^r = Y_C^r = P_C^r - \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r; \text{ y } Y_R^r = Y_R^r L^{-1}(\alpha^*) = P_R^r L^{-1}(\alpha^*)$$

Así, para obtener los parámetros $\tilde{a}_j$, que vendrán definidos por a_{jC} y a_{jR} , si utilizamos el modelo de regresión posibilística de Tanaka, el programa lineal a resolver será:

$$\text{Minimizar } z = \sum_{r=1}^k \sum_{j=1}^m a'_{jR} \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \left| g_j(t_i^r) \right| = \sum_{j=1}^m a'_{jR} \sum_{r=1}^k \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \left| g_j(t_i^r) \right| \quad [21a]$$

sujeto a:

$$\hat{Y}_C^r - \hat{Y}_R^r = \sum_{j=1}^m a'_{jC} \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r g_j(t_i^r) - \sum_{j=1}^m a'_{jR} \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r |g_j(t_i^r)| \leq Y_C^r - Y_R^r \quad r=1,2,\dots,k. \quad [21b]$$

$$\hat{Y}_C^r + \hat{Y}_R^r = \sum_{j=1}^m a'_{jC} \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r g_j(t_i^r) + \sum_{j=1}^m a'_{jR} \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r |g_j(t_i^r)| \geq Y_C^r + Y_R^r \quad r=1,2,\dots,k. \quad [21c]$$

$$\sum_{j=1}^m a'_{jC} g_j(sP) - \sum_{j=1}^m a'_{jR} |g_j(sP)| \geq \sum_{j=1}^m a'_{jC} g_j((s+1)P) - \sum_{j=1}^m a'_{jR} |g_j((s+1)P)| \Rightarrow \sum_{j=1}^m a'_{jC} (g_j(sP) - g_j((s+1)P)) - \sum_{j=1}^m a'_{jR} (|g_j(sP)| - |g_j((s+1)P)|) \geq 0 \quad s=1,\dots,u-1 \quad [21d]$$

$$\sum_{j=1}^m a'_{jC} g_j(sP) + \sum_{j=1}^m a'_{jR} |g_j(sP)| \geq \sum_{j=1}^m a'_{jC} g_j((s+1)P) + \sum_{j=1}^m a'_{jR} |g_j((s+1)P)| \Rightarrow \sum_{j=1}^m a'_{jC} (g_j(sP) - g_j((s+1)P)) + \sum_{j=1}^m a'_{jR} (|g_j(sP)| - |g_j((s+1)P)|) \geq 0 \quad s=1,\dots,u-1 \quad [21e]$$

$$1 + \sum_{j=1}^m a'_{jC} g_j(uP) - \sum_{j=1}^m \frac{a'_{jR}}{L^{-1}(\alpha^*)} |g_j(uP)| \geq 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^m a'_{jC} g_j(uP) - \sum_{j=1}^m \frac{a'_{jR}}{L^{-1}(\alpha^*)} |g_j(uP)| \geq -1 \quad [21f]$$

$$1 + \sum_{j=1}^m a'_{jC} g_j(P) + \sum_{j=1}^m \frac{a'_{jR}}{L^{-1}(\alpha^*)} |g_j(P)| \leq 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^m a'_{jC} g_j(P) + \sum_{j=1}^m \frac{a'_{jR}}{L^{-1}(\alpha^*)} |g_j(P)| \leq 0 \quad [21g]$$

$$a'_{jR} \geq 0 \quad j=1,2,\dots,m \quad [21h]$$

Las restricciones [21b] y [21c] vienen dadas por la necesidad de que las estimaciones realizadas por el modelo sobre la variable dependiente deben incluir las realmente observadas. Las restricciones [21d] y [21e] indican que el factor de actualización debe ser decreciente respecto al tiempo, quedando asegurado al menos para una periodicidad P arbitraria, y siendo uP el máximo diferimiento considerado, en principio cercano al vencimiento del título que lo tenga más elevado. Obsérvese² que se ha utilizado como criterio de ordenación de números borrosos el propuesto por Ramik y Rimanek (1985). A través de [21f] y [21g] aseguramos que para los periodos contemplados, el factor de actualización toma valores comprendidos entre 0 y 1; y por último, [21h] indica que los radios de los parámetros a estimar deben ser siempre positivos.

² Para que exista desigualdad en sentido estricto, deberíamos haber exigido que el extremo inferior del soporte del factor de actualización con un vencimiento más cercano fuera superior o igual que el extremo superior del factor de actualización con vencimiento más lejano. Ello, sin embargo, no suele utilizarse en determinadas aplicaciones como la programación posibilística, porque es un criterio excesivamente restrictivo. En nuestro caso, podría provocar que el programa lineal a resolver fuera más fácilmente no factible.

Respecto a las alternativas que proponemos para las funciones $g_j(t)$, son las mismas que las propuestas en el apartado 2.2.1. Así, en la aplicación numérica que desarrollaremos consideramos las siguientes formas de $g_j(t)$:

- 1) $g_j(t) = t^j$. La consideramos por su sencillez, si bien somos conscientes de los problemas que puede conllevar su adopción respecto a la explosividad de los tipos forward y al contado que de ella se deriven.
- 2) Los splines cuadráticos de McCulloch (1971).
- 3) Los splines cúbicos propuestos por McCulloch (1975).

A continuación presentamos los resultados que obtenemos el 22/1/1999 para cada una de las posibles formas supuestas para $g_j(t)$. Como en el caso de certeza, hemos tomado $m=4$, de forma que los nodos que se han considerado cuando tomamos splines han sido los mismos que en las aplicaciones realizadas en el apartado 2.2.1. Asimismo, hemos partido de que las observaciones sobre los precios de los bonos son triangulares, de forma que el factor de descuento que se obtiene para un vencimiento t es también es triangular, y presenta la siguiente forma:

$$\mu_{\tilde{r}_t}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\left| x - \left[1 + \sum_{j=1}^m a_{jC} g_j(t) \right] \right|}{\sum_{j=1}^m a_{jR} |g_j(t)|} & 1 + \sum_{j=1}^m a_{jC} g_j(t) - \sum_{j=1}^m a_{jR} |g_j(t)| \leq x \leq 1 + \sum_{j=1}^m a_{jC} g_j(t) + \sum_{j=1}^m a_{jR} |g_j(t)| \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por último, también reseñamos que para los bloques de restricciones [21d], [21e], [21f] y [21g] se ha considerado una periodicidad anual ($P=1$) y dado que en principio, el horizonte temporal que consideramos en la estimación de la ETTI son 15 años, $u=15$.

a) Estimación polinómica

El valor de los parámetros $\tilde{a}_j$ correspondientes al factor de actualización son para los niveles de presunción $\alpha^*=0$ y $\alpha^*=0.5$ a partir de los cuales implementamos la regresión:

	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0.5$
$\tilde{a}_1$	(-0,02853676, 0,00103866)	(-0,02853676, 0,00207733)
$\tilde{a}_2$	(0,0003709, 0)	(0,0003709, 0)
$\tilde{a}_3$	(-0,00017255, 0)	(-0,00017255, 0)
$\tilde{a}_4$	(9,1989E-06, 0)	(9,1989E-06, 0)

y el valor de la función objetivo es 16'98.

Así, los factores de actualización correspondientes a los próximos 10 años que quedan estimados para cada uno de los niveles de presunción son:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	(0,97167, 0,00104)	(0,97167, 0,00208)
2	(0,94318, 0,00208)	(0,94318, 0,00415)
3	(0,91381, 0,00312)	(0,91381, 0,00623)
4	(0,88310, 0,00415)	(0,88310, 0,00831)
5	(0,85077, 0,00519)	(0,85077, 0,01039)
6	(0,81678, 0,00623)	(0,81678, 0,01246)
7	(0,78132, 0,00727)	(0,78132, 0,01454)
8	(0,74478, 0,00831)	(0,74478, 0,01662)
9	(0,70778, 0,00935)	(0,70778, 0,01870)
10	(0,67116, 0,01039)	(0,67116, 0,02077)

A continuación medimos, como siempre, el grado de adecuación de las estimaciones realizadas mediante la regresión convencional –en los modelos que analizamos, no estimamos rentabilidades, sino el factor de actualización que define la ETTI- en las regresiones posibilísticas efectuadas. En concreto, hallamos el nivel de presunción que los factores de actualización estimados en certeza –apartado 2.2.1- toman en el número borroso que cuantifica al factor de actualización para los mismos vencimientos, y que se deducen de los resultados recién obtenidos:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	0,00	0,43
2	0,71	0,86
3	0,74	0,87
4	0,46	0,73
5	0,38	0,69
6	0,46	0,73
7	0,66	0,83
8	0,91	0,95
9	0,83	0,92
10	0,61	0,81
Media	0,58	0,78

b) Estimación mediante la utilización de splines cuadráticos

En este caso también hemos tomado $m=4$, y por tanto es necesario tomar cuatro nodos, que se calculan de la forma reseñada en el apartado 2.2.1. El valor de los parámetros $\tilde{a}_j$ son, para $\alpha^*=0$ y $0,5$:

	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
$\tilde{a}_1$	(-0,02746245, 0,00154556)	(-0,02746245, 0,00309112)
$\tilde{a}_2$	(-0,03099554, 0,00011541)	(-0,03099554, 0,00023083)
$\tilde{a}_3$	(-0,03573161, 0,0003417)	(-0,03573161, 0,00068341)
$\tilde{a}_4$	(-0,02825489, 0)	(-0,02825489, 0)

y el valor de la función objetivo es $z=9'41$.

Así, los factores de actualización correspondientes a los próximos 10 años quedan estimados en cada caso por los siguiente números borrosos triangulares simétricos:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$
1	(0,97202, 0,00133)	(0,97202, 0,00267)
2	(0,94299, 0,00225)	(0,94299, 0,00449)
3	(0,91292, 0,00274)	(0,91292, 0,00548)
4	(0,88168, 0,00290)	(0,88168, 0,00580)
5	(0,84874, 0,00311)	(0,84874, 0,00622)
6	(0,81404, 0,00340)	(0,81404, 0,00680)
7	(0,77865, 0,00373)	(0,77865, 0,00746)
8	(0,74403, 0,00402)	(0,74403, 0,00804)
9	(0,71021, 0,00427)	(0,71021, 0,00855)
10	(0,67718, 0,00449)	(0,67718, 0,00898)

Respecto al grado de adecuación de los factores de descuento estimados en el apartado 2.2.1. para los siguientes 10 años, éstos toman los siguientes niveles de presunción en las correspondientes estimaciones borrosas:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$
1	0,90	0,95
2	0,91	0,96
3	0,94	0,97
4	0,98	0,99
5	0,92	0,96
6	0,78	0,89
7	0,66	0,83
8	0,60	0,80
9	0,58	0,79
10	0,61	0,81
Media	0,79	0,89

c) Estimación mediante la utilización de splines cúbicos

En este caso, también hemos tomado $m=4$, y por tanto el número de nodos es 3, tal como se explicó en el apartado 2.2.1. El valor de los parámetros $\tilde{a}_j$ para los niveles α^* que están siendo considerados al realizar la regresiones:

	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$
$\tilde{a}_1$	(0,0007488, 0)	(0,0007488, 0)
$\tilde{a}_2$	(-0,0026089, 0)	(-0,002609, 0)
$\tilde{a}_3$	(0,00671392, 0)	(0,0067139, 0)
$\tilde{a}_4$	(-0,0286392, 0,0009969)	(-0,028639, 0,0019938)

siendo $z=16'3$.

Así, los factores de actualización correspondientes a los próximos 10 años quedan estimados en cada caso por:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	(0,97162, 0,00100)	(0,97162, 0,00199)
2	(0,94326, 0,00199)	(0,94326, 0,00399)
3	(0,91422, 0,00299)	(0,91422, 0,00598)
4	(0,88378, 0,00399)	(0,88378, 0,00798)
5	(0,85122, 0,00498)	(0,85122, 0,00997)
6	(0,81641, 0,00598)	(0,81641, 0,01196)
7	(0,78013, 0,00698)	(0,78013, 0,01396)
8	(0,74324, 0,00798)	(0,74324, 0,01595)
9	(0,70660, 0,00897)	(0,70660, 0,01794)
10	(0,67107, 0,00997)	(0,67107, 0,01994)

Asimismo, los factores de actualización estimados mediante MCO para vencimientos de hasta 10 años, toman los siguientes niveles de presunción en sus correspondientes estimaciones posibilísticas:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	0,00	0,42
2	0,78	0,89
3	0,59	0,80
4	0,28	0,64
5	0,28	0,64
6	0,51	0,76
7	0,81	0,91
8	0,91	0,96
9	0,70	0,85
10	0,59	0,80
Media	0,55	0,77

3.2.3. El modelo de Vasicek y Fong introduciendo la incertidumbre en los precios negociados

Partiendo de la expresión [16], consideramos que el factor de descuento $\tilde{f}_t$ es un número borroso que se obtiene como una función borrosa aproximadamente exponencial de la forma:

$$\tilde{f}_t = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 e^{-\gamma t} + \tilde{a}_2 e^{-\gamma^2 t} + \tilde{a}_3 e^{-\gamma^3 t}$$

Asimismo, los parámetros $\tilde{a}_j$, $j=0,1,2,\dots,3$ supondremos que son números borrosos L-L simétricos de Dubois y Prade, de forma que el factor de actualización también lo será. Así:

$$\tilde{f}_t = (f_t, l_{f_t})_L = (a_{0C}, a_{0R})_L + (a_{1C}, a_{1R})_L e^{-\gamma t} + (a_{2C}, a_{2R})_L e^{-\gamma^2 t} + (a_{3C}, a_{3R})_L e^{-\gamma^3 t}$$

y de esta forma, la función de pertenencia de $\tilde{f}_t$ vendrá dada por:

$$\mu_{\tilde{f}_t}(x) = \begin{cases} L \left(\frac{\left| x - \left[a_{0C} + \sum_{j=1}^3 a_{jC} e^{-\gamma_j t} \right] \right|}{a_{0R} + \sum_{j=1}^3 a_{jR} e^{-\gamma_j t}} \right) & a_{0C} - a_{0R} + \sum_{j=1}^3 (a_{jC} - a_{jR}) e^{-\gamma_j t} \leq x \leq a_{0C} + a_{0R} + \sum_{j=1}^3 (a_{jC} + a_{jR}) e^{-\gamma_j t} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para poder realizar la estimación del factor de descuento, realizamos el cambio de variable: $x=1-e^{-\gamma t}$. Así, la función de descuento dejará de ser una función del tiempo, para ser función del argumento x , $\tilde{G}(x)$, siendo su dominio $x \in [0, 1]$, expresándose entonces el factor de actualización como $\tilde{f}_t = \tilde{G}(1 - e^{-\gamma t}) = \tilde{G}(x)$. En concreto, para un valor dado x , $\tilde{G}(x)$ puede escribirse como:

$$\tilde{G}(x) = \sum_{j=0}^m \tilde{\beta}_j g_j(x)$$

siendo las funciones $g_j(x)$ polinomios de tercer grado de x , y que nosotros consideraremos que son splines cúbicos. Para conseguir la forma de número borroso L-L de Dubois y Prade simétrico para $\tilde{G}(x)$, postulamos que $\tilde{\beta}_j = (\beta_{jC}, \beta_{jR})_L \forall j$. Así, podremos obtener $\tilde{G}(x)$ como:

$$\tilde{G}(x) = (G_C(x), G_R(x))_L = \sum_{j=0}^m (\beta_{jC}, \beta_{jR})_L g_j(x)$$

Dado que $\tilde{f}_0 = (1, 0)_L$, $\tilde{G}(0) = (1, 0)_L$. Dichas condiciones son obtenidas si:

- a) $g_0(x) = 1-x$
- b) $g_j(0) = 0, j=1, 2, \dots, m$.
- c) $\tilde{\beta}_0 = (1, 0)_L$

Así, el factor de descuento podrá ser reescrito como una función de x que será:

$$\tilde{G}(x) = (G_C(x), G_R(x))_L = (1-x) + \sum_{j=1}^m (\beta_{jC}, \beta_{jR})_L g_j(x)$$

Siendo entonces su función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{G}(x)}(y) = \begin{cases} L \left(\frac{\left| y - \left[(1-x) + \sum_{j=1}^m \beta_{jC} g_j(x) \right] \right|}{\sum_{j=1}^m \beta_{jR} |g_j(x)|} \right) & (1-x) + \sum_{j=1}^m \beta_{jC} g_j(x) - \sum_{j=1}^m \beta_{jR} |g_j(x)| \leq y \leq (1-x) + \sum_{j=1}^m \beta_{jC} g_j(x) + \sum_{j=1}^m \beta_{jR} |g_j(x)| \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así, para implementar el modelo a estimar, deberemos partir de la expresión del precio del r -ésimo bono expresada en [17], teniendo en cuenta que para el vencimiento de su i -ésimo cobro, C_i^r , las funciones g_j que definen el factor de descuento no son función de su vencimiento, t_i^r , sino de su transformación, x_i^r la cual se obtiene como: $x_i^r = 1 - e^{-y_i^r}$. Así, tras la estimación de los parámetros $\tilde{\beta}_j$, $j=1,2,\dots,m$, el precio que a través de [17] se presume para el bono r , $\hat{P}^r$, es una estimación de su verdadero precio $\tilde{P}^r$ y se obtiene como:

$$\hat{P}^r = (\hat{P}_C^r, \hat{P}_R^r)_L = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \left[1 - x_i^r + \sum_{j=1}^m (a_{jC}, a_{jR})_L g_j(x_i^r) \right] = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r (1 - x_i^r) + \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r \sum_{j=1}^m (a_{jC}, a_{jR})_L g_j(x_i^r)$$

y operando llegaremos a obtener:

$$(\hat{P}_C^r, \hat{P}_R^r)_L - \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r (1 - x_i^r) = \sum_{j=1}^m (a_{jC}, a_{jR})_L \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r g_j(x_i^r)$$

Y si notamos como $(\hat{Y}_C^r, \hat{Y}_R^r)_L = (\hat{P}_C^r, \hat{P}_R^r)_L - \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r (1 - x_i^r)$, donde:

$$\hat{Y}_C^r = \hat{P}_C^r - \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r (1 - x_i^r) \text{ y } \hat{Y}_R^r = \hat{P}_R^r$$

Se puede observar que el valor de la j -ésima variable independiente correspondiente al bono r es

$X_j^r = \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r g_j(x_i^r)$, que será crisp. Así, el modelo que finalmente deberá ser estimado es:

$$(\hat{Y}_C^r, \hat{Y}_R^r)_L = \sum_{j=1}^m (a_{jC}, a_{jR})_L X_j^r \quad [22]$$

Volvemos a remarcar que la variable dependiente y los parámetros vienen expresados a través de su α^* -corte. Así, partiendo de [22], la expresión para dicho nivel de presunción α^* del α -corte de $\hat{Y}^r$, que no es mas que la estimación que obtenemos del α^* -corte para el mismo nivel de número borroso $\tilde{Y}^r$ que estima, y será:

$$\langle \hat{Y}_C^r, \hat{Y}_R^r \rangle = \sum_{j=1}^m \langle a'_{jC}, a'_{jR} \rangle X_j^r = \sum_{j=1}^m \langle a'_{jC} X_j^r, a'_{jR} | X_j^r \rangle$$

Como siempre, deberemos estimar el centro y el radio del α^* -corte de los parámetros $\tilde{a}_j$, $j=1,\dots,m$. Una vez resueltos, obtendremos el centro y el radio de los números borrosos del que provienen tal como ha sido ya comentado.

Por otra parte, la variable observada del r -ésimo bono es una $\tilde{Y}^r = (Y_C^r, Y_R^r)_L$ relacionada con el precio del mismo, tal que:

$$Y_C^r = P_C^r - \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r (1 - x_i^r) \text{ y } Y_R^r = P_R^r$$

siendo entonces el α^* -corte observado, $Y_{\alpha^*}^r = \langle Y_C^r, Y_R^r \rangle$ con:

$$Y_C^r = Y_C^r \text{ y } Y_R^r = L^{-1}(\alpha^*) Y_R^r$$

Respecto a la obtención de los parámetros $\tilde{a}_j$, utilizando el modelo de regresión posibilística de Tanaka, el programa lineal que deberemos resolver será, para un parámetro γ predefinido es:

$$\text{Minimizar } z = \sum_{r=1}^k \sum_{j=1}^m a'_{jR} \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r |g_j(x_i^r)| = \sum_{j=1}^m a'_{jR} \sum_{r=1}^k \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r |g_j(x_i^r)| \quad [23a]$$

sujeto a:

$$\hat{Y}_C^r - \hat{Y}_R^r = \sum_{j=1}^m a'_{jC} \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r g_j(x_i^r) - \sum_{j=1}^m a'_{jR} \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r |g_j(x_i^r)| \leq Y_C^r - Y_R^r \quad r=1,2,\dots,k. \quad [23b]$$

$$\hat{Y}_C^r + \hat{Y}_R^r = \sum_{j=1}^m a'_{jC} \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r g_j(x_i^r) + \sum_{j=1}^m a'_{jR} \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r |g_j(x_i^r)| \geq Y_C^r + Y_R^r \quad r=1,2,\dots,k. \quad [23c]$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m a'_{jC} g_j(1 - e^{-\gamma s P}) - \sum_{j=1}^m a'_{jR} |g_j(1 - e^{-\gamma s P})| &\geq \sum_{j=1}^m a'_{jC} g_j(1 - e^{-\gamma(s+1)P}) - \sum_{j=1}^m a'_{jR} |g_j(1 - e^{-\gamma(s+1)P})| \Rightarrow \\ \sum_{j=1}^m a'_{jC} (g_j(1 - e^{-\gamma s P}) - g_j(1 - e^{-\gamma(s+1)P})) - \sum_{j=1}^m a'_{jR} (|g_j(1 - e^{-\gamma s P})| - |g_j(1 - e^{-\gamma(s+1)P})|) &\geq 0 \\ s &= 1, \dots, u-1 \end{aligned} \quad [23d]$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m a'_{jC} g_j(1 - e^{-\gamma s P}) + \sum_{j=1}^m a'_{jR} |g_j(1 - e^{-\gamma s P})| &\geq \sum_{j=1}^m a'_{jC} g_j((s+1)P) + \sum_{j=1}^m a'_{jR} |g_j((s+1)P)| \Rightarrow \\ \sum_{j=1}^m a'_{jC} (g_j(1 - e^{-\gamma s P}) - g_j(1 - e^{-\gamma(s+1)P})) + \sum_{j=1}^m a'_{jR} (|g_j(1 - e^{-\gamma s P})| - |g_j(1 - e^{-\gamma(s+1)P})|) &\geq 0 \\ s &= 1, \dots, u-1 \end{aligned} \quad [23e]$$

$$1 + \sum_{j=1}^m a'_{jC} g_j(1 - e^{-\gamma u P}) - \sum_{j=1}^m \frac{a'_{jR}}{L^{-1}(\alpha^*)} |g_j(1 - e^{-\gamma u P})| \geq 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^m a'_{jC} g_j(1 - e^{-\gamma u P}) - \sum_{j=1}^m \frac{a'_{jR}}{L^{-1}(\alpha^*)} |g_j(1 - e^{-\gamma u P})| \geq -1 \quad [23f]$$

$$1 + \sum_{j=1}^m a'_{jC} g_j(1 - e^{-\gamma P}) + \sum_{j=1}^m \frac{a'_{jR}}{L^{-1}(\alpha^*)} |g_j(1 - e^{-\gamma P})| \leq 1 \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^m a'_{jC} g_j(1 - e^{-\gamma P}) + \sum_{j=1}^m \frac{a'_{jR}}{L^{-1}(\alpha^*)} |g_j(1 - e^{-\gamma P})| \leq 0 \quad [23g]$$

$$a'_{jR} \geq 0 \quad j=1,2,\dots,m \quad [23h]$$

Donde:

$$Y_C^r = Y_C^r = P_C^r - \sum_{i=1}^{n_r} C_i^r (1 - x_i^r) \text{ y } Y_R^r = Y_R^r L^{-1}(\alpha^*) = P_R^r L^{-1}(\alpha^*)$$

Por otra parte, el significado de la función objetivo, y de las restricciones planteadas, es análogo al que planteamos para el modelo de McCulloch en el apartado 3.2.2.

Posteriormente, deberemos hallar el valor del parámetro γ óptimo, $\hat{\gamma}$, de forma que se haga mínima la función objetivo. Igual que en el caso de certeza, postulamos que $\hat{\gamma}$ es un número crisp, de forma que podrá ser hallado mediante algún método numérico. En concreto el programa planteado es un programa lineal paramétrico de γ . Para hallarse el parámetro γ que minimiza la función objetivo, puede partirse del resultado de z para tres valores de γ arbitrarios. Si suponemos que el mínimo de z es una función cuadrática de γ , el mínimo de dicha función, $\hat{\gamma}$ puede ser una buena aproximación al valor γ -óptimo. Posteriormente, con el valor óptimo $\hat{\gamma}$ obtenido, volvemos a plantear el programa lineal anterior de forma que la estimación que obtengamos, nos permitirá hallar el centro y el radio de los parámetros $\tilde{a}_j$ definitivo.

A continuación explicitamos los resultados obtenidos el 22/1/1999 con la modificación que sobre el modelo de Vasicek y Fong ha sido propuesta. Igual que en el apartado 2.2.2. se han tomado los siguientes tres nodos: $x_1 = 0$, $x_2 = 1 - e^{-\gamma t_2}$ siendo t_2 la mediana de los vencimientos de los bonos negociados durante la sesión en que se estima la ETTI y $x_3 = 1$. También se ha considerado que $g_j(x)$ son las splines cúbicas propuestas por McCulloch, pero teniéndose en cuenta que el argumento de las funciones no es el vencimiento de los flujos, sino la transformación que sobre los mismos se realiza. Para los bloques de restricciones [23d], [23e], [23f] y [23g] se ha considerado que $u=15$ y $P=1$. Por otra parte, hemos considerado como valor óptimo del parámetro γ , el ya hallado en el apartado 2.2.2., es decir: $\gamma = 0'125$.

Asimismo, en el ejemplo que estamos analizando, dado que partimos de que los precios observados para cada uno de los k bonos que componen la muestra son números borrosos triangulares, postularemos que los parámetros $\tilde{\beta}_j$ que definan el factor de actualización presentan una forma también triangular. Así, el factor de actualización $\tilde{f}_t$ asociado a un vencimiento t que

queda estimado tras implementar la regresión vendrá caracterizado por su función de pertenencia, que será:

$$\mu_{\tilde{f}_t}(y) = \begin{cases} 1 - \frac{\left| y - \left[(1-x) + \sum_{j=1}^m \beta_{jC} g_j(x) \right] \right|}{\sum_{j=1}^m \beta_{jR} |g_j(x)|} & (1-x) + \sum_{j=1}^m \beta_{jC} g_j(x) - \sum_{j=1}^m \beta_{jR} |g_j(x)| \leq y \leq (1-x) + \sum_{j=1}^m \beta_{jC} g_j(x) + \sum_{j=1}^m \beta_{jR} |g_j(x)| \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

con $x = 1 - e^{-\gamma t}$.

En este caso, el valor de los parámetros $\tilde{\beta}_j$ correspondientes al factor de actualización para los niveles de presunción $\alpha^*=0$ y $\alpha^*=0.5$ a partir de los cuales implementamos la regresión son:

	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0.5$
$\tilde{\beta}_1$	(0,038865, 0)	(0,038865, 0)
$\tilde{\beta}_2$	(-1,129265, 0)	(-1,129265, 0)
$\tilde{\beta}_3$	(-3,346527, 0)	(-3,346527, 0)
$\tilde{\beta}_4$	(0,761458, 0,008315)	(0,761458, 0,01663)

y el valor de la función objetivo, $z=11.05$.

Así, los factores actualización correspondientes a los próximos 10 años que quedan estimados para cada uno de los niveles de presunción $\alpha^*=0$ y 0.5 son:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0.5$
1	(0,97153, 0,00098)	(0,97153, 0,00195)
2	(0,94343, 0,00184)	(0,94343, 0,00368)
3	(0,91386, 0,00260)	(0,91386, 0,00520)
4	(0,88236, 0,00327)	(0,88236, 0,00654)
5	(0,84920, 0,00386)	(0,84920, 0,00773)
6	(0,81482, 0,00439)	(0,81482, 0,00877)
7	(0,77969, 0,00485)	(0,77969, 0,00970)
8	(0,74440, 0,00526)	(0,74440, 0,01051)
9	(0,70951, 0,00562)	(0,70951, 0,01123)
10	(0,67555, 0,00593)	(0,67555, 0,01187)

A continuación medimos el grado de adecuación de la estimación de los factores de actualización realizados en el apartado 2.2.2. en las regresiones posibilísticas efectuadas. El nivel de presunción que toma el factor de actualización estimado en certeza en el número borroso que cuantifica al factor de actualización para el mismo vencimiento es, para cada uno de los próximos 10 años:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	0,64	0,82
2	0,87	0,94
3	0,98	0,99
4	0,99	1,00
5	0,94	0,97
6	0,86	0,93
7	0,78	0,89
8	0,71	0,85
9	0,66	0,83
10	0,62	0,81
Media	0,80	0,90

3.2.4. Estimación de la ETTI a través de la estimación posibilística de los factores de actualización

La obtención del número borroso representativo del interés al contado a un plazo t , se realiza de la forma explicitada en el apartado 3.1.3.1., aplicando el principio de extensión de Zadeh, es decir, aplicando la expresión [13] para la función de pertenencia y [14] para los α -cortes. Así, dada la expresión genérica que ha sido postulada para $\tilde{f}_t$ en el apartado 3.2.1, la función de pertenencia del tipo al contado para un plazo de t años, $\tilde{f}_t$, tanto si se opta por el modelo de estimación de ETTI de McCulloch, como si optamos por el propuesto por Vasicek y Fong, es:

$$\mu_{\tilde{f}_t}(x) = \begin{cases} L \left(\frac{\left| (1+x)^{-t} - \sum_{j=0}^m a_{jC} g_j(t) \right|}{\sum_{j=1}^m a_{jR} |g_j(t)|} \right) & \left(\sum_{j=0}^m a_{jC} g_j(t) + \sum_{j=0}^m a_{jR} |g_j(t)| \right)^{-1/t} - 1 \leq x \\ \leq \left(\sum_{j=0}^m a_{jC} g_j(t) - \sum_{j=0}^m a_{jR} |g_j(t)| \right)^{-1/t} - 1 & \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y en el caso particular en que los parámetros característicos $\tilde{a}_j$ del modelo de McCulloch, o los parámetros $\tilde{\beta}_j$, del modelo de Vasicek y Fong sean triangulares, que es lo que ha sido considerado en nuestras aplicaciones, $\mu_{\tilde{f}_t}(x)$ tendrá la siguiente forma:

$$\mu_{\tilde{f}_t}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\left| (1+x)^{-t} - \sum_{j=0}^m a_{jC} g_j(t) \right|}{\sum_{j=1}^m a_{jR} |g_j(t)|} & \left(\sum_{j=0}^m a_{jC} g_j(t) + \sum_{j=0}^m a_{jR} |g_j(t)| \right)^{-1/t} - 1 \leq x \\ \leq \left(\sum_{j=0}^m a_{jC} g_j(t) - \sum_{j=0}^m a_{jR} |g_j(t)| \right)^{-1/t} - 1 & \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así, el tipo al contado $\tilde{i}_t$, en el caso en que partamos de estimaciones de su factor de actualización asociado triangulares, no es triangular ni tampoco simétrico. Como comprobaremos posteriormente, $\tilde{i}_t$, será, sin embargo, un número borroso que se puede aproximar casi exactamente por un número borroso triangular con su mismo centro y sus mismos radios. Así, dado que partiremos de un factor de actualización triangular y simétrico, $\tilde{f}_t = (f_t, l_{f_t})$, con

$$f_t = \sum_{j=0}^m a_{jC} g_j(t) \text{ y } l_{f_t} = \sum_{j=0}^m a_{jR} |g_j(t)|$$

En la aproximación triangular del tipo spot propuesta, $\tilde{i}_t \approx (i_t, l_{i_t}, r_{i_t})$, consideraremos de forma análoga a lo comentado en el apartado 3.1.3.1:

$$i_t = \left(\sum_{j=0}^m a_{jC} g_j(t) \right)^{-1/t} - 1, \quad l_{i_t} = \left(\sum_{j=0}^m a_{jC} g_j(t) \right)^{-1/t} - \left(\sum_{j=0}^m a_{jC} g_j(t) + \sum_{j=0}^m a_{jR} |g_j(t)| \right)^{-1/t} \text{ y}$$

$$r_{i_t} = \left(\sum_{j=0}^m a_{jC} g_j(t) - \sum_{j=0}^m a_{jR} |g_j(t)| \right)^{-1/t} - \left(\sum_{j=0}^m a_{jC} g_j(t) \right)^{-1/t}$$

Asimismo, los niveles en los que se cometerá mayor desviación al aproximar por un número borroso triangular en la estimación de los α -cortes son $\alpha_l^*(t)$ y $\alpha_D^*(t)$ para los extremos izquierdo y derecho de los mismos, respectivamente. A partir de las expresiones consideradas en [15], y teniendo en cuenta la simetría de los factores de actualización, los niveles en los que se producen dichas desviaciones máximas son:

$$\alpha_l^*(t) = \frac{f_t + l_{f_t}}{l_{f_t}} - \left(\frac{l_{i_t} t}{l_{f_t}^{-\frac{1}{t}} - \frac{1}{t}} \right)^{-\frac{t}{t+1}} \text{ y } \alpha_D^*(t) = -\frac{f_t - l_{f_t}}{l_{f_t}} + \left(\frac{l_{i_t} t}{l_{f_t}^{-\frac{1}{t}} - \frac{1}{t}} \right)^{-\frac{t}{t+1}}$$

Y a partir de ambas expresiones, y tal como fue comentado en el apartado 1.4.2. de la primera parte de esta tesis, podemos calcular las máximas desviaciones que se producen en los α -cortes, y el error máximo que en el nivel de presunción podemos cometer por la aproximación triangular de los tipos spot.

A continuación, y en la sesión que estamos analizando, expresamos ya como NBTs los tipos spot estimados para cada uno de los niveles de presunción α^* considerados en la implementación de las regresiones –tres especificaciones distintas para las funciones g_j en McCulloch, y una sola para el modelo de Vasicek y Fong en un horizonte temporal de diez años. Para la adaptación del

modelo de McCulloch en el caso en el que el factor de actualización venía dado por un simple polinomio del tiempo, los resultados que obtenemos son:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$
1	(0,02916, 0,00110, 0,00110)	(0,02916, 0,00220, 0,00220)
2	(0,02968, 0,00113, 0,00114)	(0,02968, 0,00226, 0,00228)
3	(0,03050, 0,00117, 0,00117)	(0,03050, 0,00233, 0,00235)
4	(0,03157, 0,00121, 0,00122)	(0,03157, 0,00241, 0,00244)
5	(0,03285, 0,00126, 0,00127)	(0,03285, 0,00250, 0,00254)
6	(0,03431, 0,00131, 0,00132)	(0,03431, 0,00261, 0,00265)
7	(0,03588, 0,00137, 0,00138)	(0,03588, 0,00273, 0,00278)
8	(0,03752, 0,00144, 0,00146)	(0,03752, 0,00286, 0,00293)
9	(0,03915, 0,00151, 0,00154)	(0,03915, 0,00301, 0,00310)
10	(0,04068, 0,00160, 0,00162)	(0,04068, 0,00317, 0,00328)

Para McCulloch, pero con el factor de descuento cuantificado a través de splines cuadráticos, se obtiene:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$
1	(0,02879, 0,00141, 0,00141)	(0,02879, 0,00282, 0,00283)
2	(0,02978, 0,00122, 0,00123)	(0,02978, 0,00245, 0,00246)
3	(0,03083, 0,00103, 0,00103)	(0,03083, 0,00205, 0,00207)
4	(0,03198, 0,00085, 0,00085)	(0,03198, 0,00169, 0,00170)
5	(0,03335, 0,00076, 0,00076)	(0,03335, 0,00151, 0,00152)
6	(0,03488, 0,00072, 0,00072)	(0,03488, 0,00143, 0,00145)
7	(0,03639, 0,00071, 0,00071)	(0,03639, 0,00141, 0,00143)
8	(0,03765, 0,00070, 0,00070)	(0,03765, 0,00139, 0,00141)
9	(0,03875, 0,00069, 0,00070)	(0,03875, 0,00138, 0,00140)
10	(0,03975, 0,00069, 0,00069)	(0,03975, 0,00137, 0,00139)

Para McCulloch, modelizando la función de descuento con splines cúbicos, se obtiene:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$
1	(0,02921, 0,00105, 0,00106)	(0,02921, 0,00211, 0,00212)
2	(0,02964, 0,00109, 0,00109)	(0,02964, 0,00217, 0,00218)
3	(0,03035, 0,00112, 0,00113)	(0,03035, 0,00224, 0,00226)
4	(0,03137, 0,00116, 0,00117)	(0,03137, 0,00231, 0,00234)
5	(0,03274, 0,00121, 0,00121)	(0,03274, 0,00240, 0,00244)
6	(0,03438, 0,00126, 0,00127)	(0,03438, 0,00250, 0,00255)
7	(0,03611, 0,00132, 0,00133)	(0,03611, 0,00262, 0,00268)
8	(0,03779, 0,00138, 0,00140)	(0,03779, 0,00275, 0,00282)
9	(0,03934, 0,00146, 0,00148)	(0,03934, 0,00289, 0,00297)
10	(0,04069, 0,00153, 0,00156)	(0,04069, 0,00304, 0,00314)

Y por último, tomando el modelo de Vasicek y Fong se obtiene,

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$
1	(0,02931, 0,00103, 0,00104)	(0,02931, 0,00207, 0,00207)
2	(0,02955, 0,00100, 0,00101)	(0,02955, 0,00200, 0,00201)
3	(0,03048, 0,00098, 0,00098)	(0,03048, 0,00195, 0,00196)
4	(0,03178, 0,00095, 0,00096)	(0,03178, 0,00190, 0,00192)

5	(0,03323, 0,00094, 0,00094)	(0,03323, 0,00187, 0,00189)
6	(0,03472, 0,00093, 0,00093)	(0,03472, 0,00185, 0,00187)
7	(0,03619, 0,00092, 0,00092)	(0,03619, 0,00183, 0,00185)
8	(0,03759, 0,00091, 0,00092)	(0,03759, 0,00182, 0,00185)
9	(0,03887, 0,00091, 0,00092)	(0,03887, 0,00181, 0,00184)
10	(0,04000, 0,00091, 0,00092)	(0,04000, 0,00181, 0,00184)

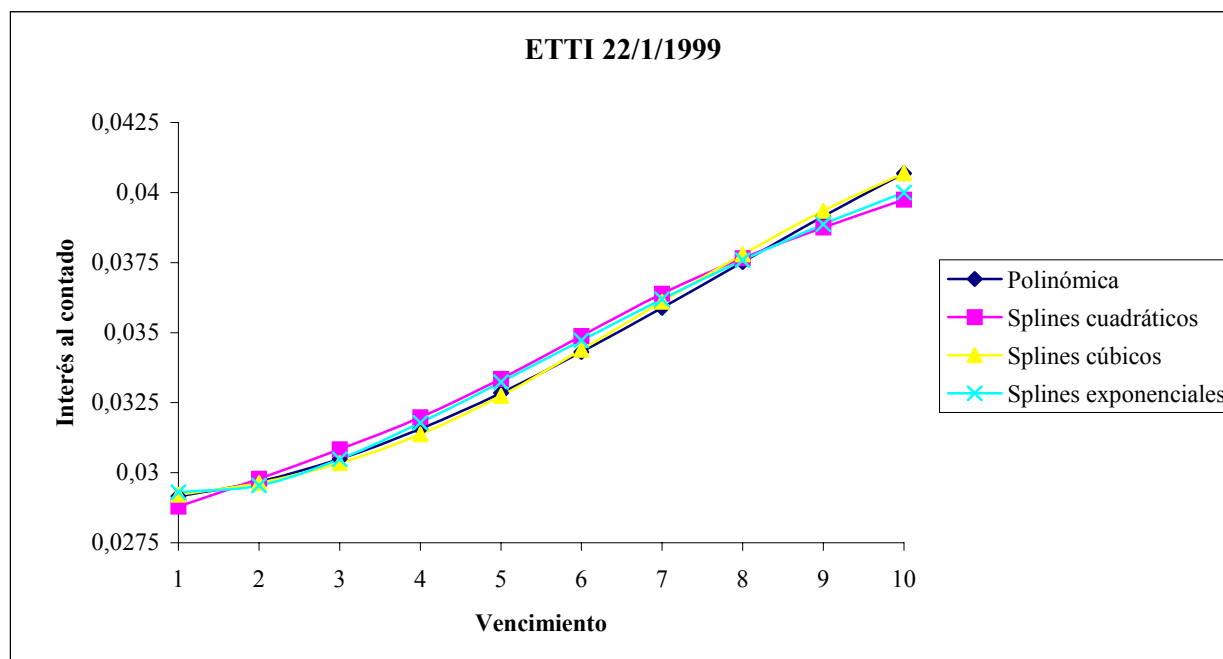
Así, los errores que como máximo se cometen en la aproximación triangular del tipo spot son:

t	Polinómica		Splines cuadráticos		Splines cúbicos		Splines exponenciales	
	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$
1	0,00053	0,00107	0,00069	0,00137	0,00051	0,00103	0,00050	0,00101
2	0,00087	0,00175	0,00094	0,00189	0,00084	0,00168	0,00077	0,00154
3	0,00123	0,00247	0,00108	0,00217	0,00118	0,00237	0,00103	0,00206
4	0,00162	0,00324	0,00113	0,00227	0,00155	0,00311	0,00128	0,00255
5	0,00204	0,00408	0,00122	0,00245	0,00195	0,00391	0,00152	0,00304
6	0,00249	0,00500	0,00136	0,00273	0,00240	0,00480	0,00176	0,00352
7	0,00300	0,00601	0,00154	0,00308	0,00288	0,00577	0,00200	0,00401
8	0,00355	0,00713	0,00172	0,00344	0,00342	0,00685	0,00225	0,00450
9	0,00417	0,00837	0,00190	0,00380	0,00401	0,00804	0,00250	0,00500
10	0,00485	0,00974	0,00208	0,00416	0,00466	0,00935	0,00275	0,00551

Asimismo, analizamos el nivel de presunción que los tipos al contado obtenidos en certeza toman en sus correspondientes posibilísticos, en cada uno de los modelos propuestos:

t	Polinómica		Splines cuadráticos		Splines cúbicos		Splines exponenciales	
	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$
1	0	0,43	0,90	0,95	0	0,42	0,64	0,82
2	0,71	0,85	0,91	0,96	0,78	0,89	0,87	0,94
3	0,74	0,87	0,94	0,97	0,59	0,80	0,98	0,99
4	0,46	0,73	0,98	0,99	0,28	0,64	0,99	1,00
5	0,38	0,69	0,92	0,96	0,28	0,64	0,94	0,97
6	0,46	0,73	0,78	0,89	0,51	0,76	0,86	0,93
7	0,66	0,83	0,66	0,83	0,81	0,91	0,78	0,89
8	0,91	0,95	0,60	0,80	0,91	0,95	0,71	0,86
9	0,83	0,91	0,59	0,79	0,70	0,85	0,66	0,83
10	0,61	0,80	0,61	0,81	0,59	0,79	0,63	0,81
Media	0'58	0'78	0'79	0'89	0'55	0'77	0'8	0'9

A continuación representamos para un horizonte temporal de 10 años, la ETTI de mayor presunción que obtenemos para el 22-1-1999, que estará conformada por los tipos de interés al contado que presenten un nivel de presunción igual a uno:



3.2.5. Comentarios a los resultados obtenidos

Creemos que los resultados obtenidos pueden ser objeto de los siguientes comentarios:

- Podemos observar que los métodos que proporcionan un mejor ajuste en incertidumbre, son McCulloch mediante la especificación cuadrática de los splines que cuantifican la función de descuento, y el método basado en la construcción del factor de actualización mediante de los splines exponenciales.
- En aquellos métodos en los que se produce un mejor ajuste, la aproximación triangular de los tipos spot es mejor que en aquéllos que proporcionan un ajuste más incierto. Ello es debido a que partimos de unos factores de actualización menos inciertos en el primer caso. De todas formas, el ajuste triangular propuesto que se obtiene en todos los casos, es más que satisfactorio.
- En la modelización cuadrática y exponencial de los $\tilde{f}_t$ podemos observar que los tipos spot que de ellas deducimos van disminuyendo su incertidumbre a medida que aumenta el vencimiento de estos tipos, lo cual, en principio no es razonable, ya que, tal como fue comentado, a mayor vencimiento, los tipos spot incorporan mayor número de tipos forward a un año en su formación, debiendo ser más inciertos. Esta circunstancia es especialmente relevante en el modelo de McCulloch con splines cuadráticos. En el caso del modelo de Vasicek, este aspecto, aún no pudiéndose apreciar de forma tan clara, también se produce. En este segundo caso es debido a la introducción del parámetro γ como un valor cierto. Una interpretación que Vasicek y Fong hacen de dicho parámetro es que este es el tipo forward instantáneo al que tiende la ETTI para vencimientos elevados. Al modelarse éste como un

valor cierto, es de suponer que en el caso borroso dicho tipo instantáneo debe tomar un valor cierto, y por tanto, los tipos spot –que también se situarán en vencimientos alejados- del que deriven deben incorporar poca “borrosidad”.

- d) Podemos comprobar, igual que en la estimación de la ETTI basada en la estimación de la curva de rentabilidades, que si partimos de una “mejor” regresión posibilística, la similitud entre los tipos spot obtenidos de forma cierta y los obtenidos de forma borrosa es mayor. Podemos comprobar que el nivel de verdad de los tipos spot obtenidos de forma cierta alcanza mayores niveles de verdad en su correspondiente estimación borrosa si postulamos para la función de descuento una forma mediante splines cuadráticos o mediante splines exponenciales, que si tomamos el resto de alternativas. En el caso de la adaptación realizada sobre el modelo de Vasicek y Fong, esta circunstancia es particularmente clara: dependiendo de si tomamos para la regresión $\alpha^*=0$ ó $\alpha^*=0,5$, los niveles de verdad de los tipos spot obtenidos de forma cierta pueden llegar a ser de casi verdaderos por término medio, en sus correspondientes posibilísticos. Volvemos a reseñar que la congruencia entre los resultados obtenidos con mínimos cuadrados y mediante regresión posibilística creemos que dan indicios del mayor o menor acierto al emplear un determinado modelo. Una menor discrepancia puede ser indicio de un mayor acierto en las funciones $g_j(t)$ tomadas para ajustar la ETTI.
- e) Respecto a la representación gráfica de la ETTI que se obtiene para un nivel de presunción 1 en los cuatro casos ensayados, podemos observar que, por supuesto, todos los métodos nos conducen a resultados similares. Sin embargo si que se puede comprobar que el modelo de McCulloch implementado mediante una simple especificación polinomial del factor de actualización nos lleva a obtener una ETTI ligeramente más oscilante que en otras formas de especificación de las funciones $g_j(t)$.
- f) Asimismo, podemos observar que los tipos spot son prácticamente simétricos, pero no absolutamente simétricos, ya que partimos para estimar dichos tipos del factor de descuento spot, que sí lo es para cualquier vencimiento.

CAPÍTULO 4:

PREDICCIÓN DE LOS TIPOS DE INTERÉS FUTUROS A TRAVÉS DE NÚMEROS BORROSOS

4.1. INTRODUCCIÓN

De forma análoga a lo realizado en el apartado 2.3., analizaremos a continuación la obtención de los tipos de interés forward cuando los tipos de interés spot, y por tanto, los factores de actualización spot, vienen dados a través de números borrosos. Asimismo, volvemos a reseñar que adoptaremos el marco de la teoría de las expectativas racionales sobre los tipos de interés, identificándose de esta forma los tipos forward como los tipos a un año que en el mercado se estiman para vencimientos futuros. En nuestro caso, haremos especial hincapié en el hecho de que los factores de actualización $\tilde{f}_t$ sean números borrosos L-L de Dubois y Prade, es decir $\tilde{f}_t = (f_t, l_{f_t}, r_{f_t})_L$.

Como ya hemos comprobado, $\tilde{f}_t$ es siempre un número borroso L-L de Dubois y Prade cuando estimamos directamente la función de descuento mediante la adaptación de los modelos de McCulloch y Vasicek a los supuestos de borrosidad en los precios. En este caso, los factores de actualización que se obtienen además son simétricos, de forma que $l_{f_t} = r_{f_t}$. Por otra parte, bien es cierto que si estimábamos la ETTI a través de la curva de rentabilidades, los factores de actualización $\tilde{f}_t$ no eran números borrosos L-L de Dubois y Prade. Sin embargo, al menos en el caso en el que partamos de una estimación triangular de la curva de rentabilidades, éstos pueden ser aproximados de una forma excelente a través de un NBT, de forma que $\tilde{f}_t \approx (f_t, l_{f_t}, r_{f_t})_L$.

4.2. OBTENCIÓN DE LOS TIPOS DE ACTUALIZACIÓN FORWARD A UN AÑO A TRAVÉS DE NÚMEROS BORROSOS

Para hallar el tipo implícito a un año para dentro de $t-1$ años, bastará con conocer el factor de actualización que éste define, para hallarlo planteamos la siguiente ecuación borrosa:

$$\tilde{f}_t = \tilde{f}_{t-1} \cdot \tilde{f}_1$$

donde ${}_{t-1}\tilde{f}_1$ es la incógnita y se trata del número borroso correspondiente al factor de actualización para dentro de $t-1$ años.

Así, para hallar ${}_{t-1}\tilde{f}_1$ la ecuación a resolver expresada mediante α -cortes es:

$$[f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)] = [f_{t-1}^1(\alpha), f_{t-1}^2(\alpha)] \cdot [{}_{t-1}f_1^1(\alpha), {}_{t-1}f_1^2(\alpha)]$$

Como siempre, si existe, proponemos que la solución aplicada sea la solución tradicional. En caso de existir, los α -cortes de ${}_{t-1}\tilde{f}_1$ son:

$${}_{t-1}f_{1\alpha} = [{}_{t-1}f_1^1(\alpha), {}_{t-1}f_1^2(\alpha)] = \left[\frac{f_t^1(\alpha)}{f_{t-1}^1(\alpha)}, \frac{f_t^2(\alpha)}{f_{t-1}^2(\alpha)} \right]$$

Por supuesto, si los factores de actualización al contado son números borrosos L-L, obtenemos:

$${}_{t-1}f_{1\alpha} = [{}_{t-1}f_1^1(\alpha), {}_{t-1}f_1^2(\alpha)] = \left[\frac{f_t - l_{f_t} L^{-1}(\alpha)}{f_{t-1} - l_{f_{t-1}} L^{-1}(\alpha)}, \frac{f_t + r_{f_t} L^{-1}(\alpha)}{f_{t-1} + r_{f_{t-1}} L^{-1}(\alpha)} \right]$$

Planteando las ecuaciones:

$$x = \frac{f_t - l_{f_t} L^{-1}(\alpha)}{f_{t-1} - l_{f_{t-1}} L^{-1}(\alpha)}; \quad x = \frac{f_t + r_{f_t} L^{-1}(\alpha)}{f_{t-1} + r_{f_{t-1}} L^{-1}(\alpha)}$$

y despejando el nivel de presunción α como función de los extremos de los α -cortes (x), hallaríamos la función de pertenencia de ${}_{t-1}\tilde{f}_1$. Con la primera ecuación hallaríamos el tramo izquierdo, y con la segunda el tramo derecho. Así, dicha función de pertenencia será:

$$\mu_{{}_{t-1}\tilde{f}_1}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{xf_{t-1} - f_t}{xl_{f_{t-1}} - l_{f_t}}\right) & \frac{f_t - l_{f_t}}{f_{t-1} - l_{f_{t-1}}} \leq x \leq \frac{f_t}{f_{t-1}} \\ L\left(\frac{xf_{t-1} - f_t}{r_{f_t} - xr_{f_{t-1}}}\right) & \frac{f_t}{f_{t-1}} < x \leq \frac{f_t + r_{f_t}}{f_{t-1} + r_{f_{t-1}}} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Asimismo, y tal como obteníamos en el apartado 3.2., si $\tilde{f}_t$ es simétrico $\forall t$, entonces $\mu_{{}_{t-1}\tilde{f}_1}(x)$ quedará expresada como:

$$\mu_{t-1\tilde{f}_1}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{|xf_{t-1} - f_t|}{xl_{f_{t-1}} - l_{f_t}}\right) & \frac{f_t - l_{f_t}}{f_{t-1} - l_{f_{t-1}}} \leq x \leq \frac{f_t + l_{f_t}}{f_{t-1} + l_{f_{t-1}}} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Respecto a la solución en sentido clásico, dado que se trata de una solución a la ecuación $\tilde{A} \cdot \tilde{X} = \tilde{B}$, y los factores de descuento son L-L de Dubois y Prade, ésta siempre existe si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\frac{l_{f_t}}{l_{f_{t-1}}} \geq \frac{f_t}{f_{t-1}} \text{ y } \frac{r_{f_t}}{r_{f_{t-1}}} \geq \frac{f_t}{f_{t-1}}$$

Estas condiciones fueron demostradas en el apartado 1.3.1. de la primera parte de la tesis.

Si existe simetría en los números borrosos que representan el factor de actualización, bastará pues con exigir que $\frac{l_{f_t}}{l_{f_{t-1}}} \geq \frac{f_t}{f_{t-1}}$.

En cualquier caso, siempre podemos asegurar la existencia de solución en el sentido de Buckley y Qu. De esta forma obtenemos para un nivel α , los α -cortes del factor de actualización forward a través de:

$${}_{t-1}f_{1\alpha} = \left\{ x \in \mathbb{R}^+ / x = \frac{y}{z}, y \in f_{t\alpha}, z \in f_{(t-1)\alpha} \right\}$$

y dada la relación monótona creciente de la solución con respecto a f_t , y decreciente con respecto al factor de actualización para una unidad monetaria con vencimiento en $t-1$, obtendremos:

$${}_{t-1}f_{1\alpha} = [{}_{t-1}f_1^1(\alpha), {}_{t-1}f_1^2(\alpha)] = \left[\frac{f_t^1(\alpha)}{f_{t-1}^2(\alpha)}, \frac{f_t^2(\alpha)}{f_{t-1}^1(\alpha)} \right]$$

En este caso, si los factores de actualización al contado están estimados a través de números borrosos L-L de Dubois y Prade, obtendremos:

$${}_{t-1}f_{1\alpha} = [{}_{t-1}f_1^1(\alpha), {}_{t-1}f_1^2(\alpha)] = \left[\frac{f_t - l_{f_t} L^{-1}(\alpha)}{f_{t-1} + r_{f_{t-1}} L^{-1}(\alpha)}, \frac{f_t + r_{f_t} L^{-1}(\alpha)}{f_{t-1} - l_{f_{t-1}} L^{-1}(\alpha)} \right]$$

Si utilizamos la solución de Buckley y Qu, la expresión de la función de pertenencia de ${}_{t-1}\tilde{f}_1$ a través de sus α -cortes, se hallará de forma análoga a la planteada cuando recurriamos a la solución clásica de ecuaciones. Así pues, la función de pertenencia de ${}_{t-1}\tilde{f}_1$ es:

$$\mu_{{}_{t-1}\tilde{f}_1}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{f_t - xf_{t-1}}{xr_{f_{t-1}} + l_{f_t}}\right) & \frac{f_t - l_{f_t}}{f_{t-1} + r_{f_{t-1}}} \leq x < \frac{f_t}{f_{t-1}} \\ L\left(\frac{xf_{t-1} - f_t}{r_{f_t} + xl_{f_{t-1}}}\right) & \frac{f_t}{f_{t-1}} \leq x < \frac{f_t + r_{f_t}}{f_{t-1} - l_{f_{t-1}}} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

que en el caso de simetría de los factores de actualización al contado $\tilde{f}_t$ y $\tilde{f}_{t-1}$, quedará reducida a:

$$\mu_{{}_{t-1}\tilde{f}_1}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{|xf_{t-1} - f_t|}{xl_{f_{t-1}} + l_{f_t}}\right) & \frac{f_t - l_{f_t}}{f_{t-1} - l_{f_{t-1}}} \leq x \leq \frac{f_t + l_{f_t}}{f_{t-1} + l_{f_{t-1}}} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obviamente, sea cual sea la solución que se aplique el número obtenido no es un número borroso de la misma naturaleza del que partimos (es decir, deja de ser L-L de Dubois y Prade). Si fuera necesario y siguiendo la metodología de ajuste planteada, al menos para números borrosos triangulares si que podríamos ajustar uno de la misma naturaleza.

Respecto al valor de los factores de actualización forward que obtenemos aplicando esta última solución consideramos que puede presentar los siguientes problemas:

1. En primer lugar, y como ya ha sido comentado, la solución obtenida incorpora excesiva incertidumbre. Ello podría provocar que los tipos forward que de los factores de actualización se deduzcan aporten poca información al decisor.
2. En segundo lugar, que la solución obtenida no tenga sentido financiero, ya que se obtengan valores posibles de los factores de actualización forward mayores a uno, de forma que no se cumpla que ${}_{t-1}\tilde{f}_1 < 1$. A continuación ilustramos esta afirmación con un ejemplo. Supongamos que ha sido estimado como factores de actualización al contado a 6 y 7 años y mediante números borrosos triangulares:

$$\tilde{f}_6 = (0'8134, 0'05, 0'05) \Rightarrow \tilde{i}_6 \approx (0'035, 0'01024, 0'011)$$

$$\tilde{f}_7 = (0'77859, 0'001, 0'001) \Rightarrow \tilde{f}_7 \approx (0'0364, 0'00019, 0'00019)$$

A partir de estos datos, obtenemos que el valor de una unidad monetaria con vencimiento en 7 años dentro de 6 será el número borroso aproximadamente triangular ${}_6\tilde{f}_1 \approx (0'9572, 0'05659, 0'064)$. Podemos comprobar que en este caso estamos aceptando la posibilidad de valores del factor de actualización superiores a 1, ya que $0'9572 + 0'064 = 1,0212$.

4.2.1. Análisis de la existencia de solución en sentido clásico cuando realizamos la estimación directa de los factores de actualización spot

Como comprobaremos a continuación, una de las ventajas de la estimación directa de los factores de actualización al contado es que los factores de actualización a un año forward pueden expresarse fácilmente como una función explícita de los parámetros borrosos estimados en la regresión $\tilde{\alpha}_j$ ó $\tilde{\beta}_j$ -dependiendo del modelo por el que optemos-. Pues bien, si expresamos los factores de actualización forward como función directa de los parámetros estimados en la regresión, la solución de Buckley y Qu, que siempre existe, coincide con la solución en el sentido clásico si el factor de actualización es una función no decreciente respecto a los parámetros que lo conforman, lo cual se cumple siempre cuando las funciones $g_j(t)$ que cuantifican el factor de actualización son no negativas y no decrecientes. En nuestro caso, y tal como puede observarse en el apartado 2.2., las funciones propuestas cumplen ambos requisitos, por lo que la solución en sentido clásico siempre existe. A continuación demostramos la anterior afirmación sólo para los factores de actualización spot que deducimos a partir de la adaptación realizada del modelo de McCulloch. La demostración cuando el factor de actualización venga cuantificado a través de splines exponenciales se realizaría de forma análoga.

En presencia de certeza en el factor de descuento spot, podríamos escribir a ${}_{t-1}f_1$ como función de los parámetros a_j , de forma que:

$${}_{t-1}f_1(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{f_t}{f_{t-1}} = \frac{1 + \sum_{j=1}^m a_j g_j(t)}{1 + \sum_{j=1}^m a_j g_j(t-1)}$$

pero como los parámetros a_j han sido estimados mediante números borrosos, también lo deberá ser el factor de actualización forward. En concreto ${}_{t-1}\tilde{f}_1$ es una función borrosa de $\tilde{\alpha}_j$, $j=1,2,\dots,m$. De esta forma, podemos notar a ${}_{t-1}\tilde{f}_1$ como ${}_{t-1}f_1(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n)$. Así, aplicando la

solución de Buckley y Qu, los α -cortes para un nivel α dado serán un subconjunto del intervalo $(0,1]$ tal que:

$${}_{t-1}f_{1\alpha} = \left\{ y / y = \frac{1 + \sum_{j=1}^m x_j g_j(t)}{1 + \sum_{j=1}^m x_j g_j(t-1)}, x_j \in a_{j\alpha}, j=1,2,\dots,m \right\} = [\inf\{y\}, \sup\{y\}] \quad [24]$$

con $a_{j\alpha}$, el α -corte del número borroso $\tilde{a}_j$.

Respecto a la anterior expresión, debemos mencionar que para hallar los puntos extremos del conjunto que define el α -corte deberemos resolver dos programas matemáticos, uno de minimización, para el extremo inferior, y uno de maximización para el extremo superior, que siempre tendrán solución, ya que se cumplen las hipótesis del Teorema de Weirstrass (la función es continua y definida en un conjunto compacto). Adicionalmente, dado que la función que evaluamos es continua, y los parámetros a_j son números borrosos, ${}_{t-1}\tilde{f}_1$ será un número borroso - para la demostración, ver Li Calzi (1990)-. Sin embargo las dos soluciones propuestas para ${}_{t-1}f_{1\alpha}$ coincidirán si las funciones g_j , $j=1,2,\dots,m$ son no decrecientes. Dado que la solución en el sentido de Buckley y Qu siempre existe, esto nos dará pie a afirmar que la solución en el sentido clásico también existe.

La búsqueda de los extremos del intervalo de confianza ${}_{t-1}f_{1\alpha}$ en [24] implica tener que resolver los programas matemáticos:

$$\text{Maximizar (Minimizar) } {}_{t-1}f_{1\alpha}(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

s.a:

$$x_j \in a_{j\alpha} = [a_j^1(\alpha), a_j^2(\alpha)] = [a_{jC} - L^{-1}(\alpha)a_{jR}, a_{jC} + L^{-1}(\alpha)a_{jR}], j=1,2,\dots,m.$$

Es fácil comprobar que las derivadas parciales de la función objetivo respecto a x_j , $j=1,2,\dots,m$ son no negativas, es decir

$$\frac{\partial y}{\partial x_j} = \frac{g_j(t) \left[1 + \sum_{j=1}^m x_j g_j(t-1) \right] - g_j(t-1) \left[1 + \sum_{j=1}^m x_j g_j(t) \right]}{\left[1 + \sum_{j=1}^m x_j g_j(t-1) \right]^2} \geq 0, j=1,2,\dots,m.$$

ya que $g_j(t) \geq g_j(t-1)$ (las funciones g_j son no decrecientes) y $f_{t-1} = 1 + \sum_{j=1}^m x_j g_j(t-1) \geq$

$\geq f_t = 1 + \sum_{j=1}^m x_j g_j(t)$ por la propia naturaleza de una función de descuento. Así, es fácil comprobar

que tanto el numerador como el denominador son mayores o iguales que cero, por lo que todas las derivadas parciales son no negativas respecto de los parámetros x_j .

De esta forma, [24] puede quedar expresado como:

$${}_{t-1}f_{t\alpha} = \left[\frac{1 + \sum_{j=1}^m a_j^1(\alpha)g_j(t)}{1 + \sum_{j=1}^m a_j^1(\alpha)g_j(t-1)}, \frac{1 + \sum_{j=1}^m a_j^2(\alpha)g_j(t)}{1 + \sum_{j=1}^m a_j^2(\alpha)g_j(t-1)} \right] = \left[\frac{f_t - L^{-1}(\alpha)l_{f_t}}{f_t - L^{-1}(\alpha)l_{f_t}}, \frac{f_t + L^{-1}(\alpha)l_{f_t}}{f_t + L^{-1}(\alpha)l_{f_t}} \right]$$

que es la solución de ecuaciones clásica que se obtiene para los factores de actualización forward.

Así pues, como en nuestro caso las funciones $g_j(t)$ con las que nosotros trabajamos son no decrecientes y no negativas, ello implica, tal como hemos demostrado, que la función factor de actualización forward a un año es no negativo y no decreciente respecto a los parámetros que son ajustados con la regresión, $a_1, a_2, \dots, a_n$, por lo que podemos identificar la solución de ecuaciones clásica y la de Buckley y Qu, de forma que la solución de ${}_{t-1}\tilde{f}_1$ en sentido clásico siempre existe.

4.3. ESTIMACIÓN DE LOS TIPOS DE INTERÉS FUTUROS A TRAVÉS DE NÚMEROS BORROSOS

A partir del factor de actualización forward a un año dentro de $t-1$ años, podemos hallar el interés forward asociado, ${}_{t-1}\tilde{i}_1$ sin más que considerar las relaciones expuestas en el apartado 1.1.3. En este caso, como el factor de actualización forward a un año es un número borroso, el tipo forward asociado también lo será, de forma que:

$${}_{t-1}\tilde{i}_1 = {}_{t-1}\tilde{f}_1^{-1} - 1$$

Siendo entonces la función de pertenencia del tipo forward:

$$\mu_{{}_{t-1}\tilde{i}_1}(x) = \bigvee_{x=y^{-1}-1} \mu_{{}_{t-1}\tilde{f}_1}(y) = \mu_{{}_{t-1}\tilde{f}_1}((1+x)^{-1})$$

y sus α -cortes, si ${}_{t-1}\tilde{f}_1$ admite solución en sentido clásico:

$${}_{t-1}i_{1\alpha} = [{}_{t-1}i_1^1(\alpha), {}_{t-1}i_1^2(\alpha)] = \left[\left(({}_{t-1}f_1^2(\alpha))^{-1} - 1, ({}_{t-1}f_1^1(\alpha))^{-1} - 1 \right) \right] = \left[\frac{f_{t-1}^2(\alpha)}{f_t^2(\alpha)} - 1, \frac{f_{t-1}^1(\alpha)}{f_t^1(\alpha)} - 1 \right] =$$

$$= \left[\frac{f_{t-1} + L^{-1}(\alpha)r_{f_{t-1}}}{f_t + L^{-1}(\alpha)r_{f_t}} - 1, \frac{f_{t-1} - L^{-1}(\alpha)l_{f_{t-1}}}{f_t - L^{-1}(\alpha)l_{f_t}} - 1 \right]$$

Asimismo, la función de pertenencia se hallará despejando de los α -cortes, el nivel de presunción α en función de los extremos. Así, la función de pertenencia que obtenemos para el tipo forward dentro de $t-1$ años es:

$$\mu_{{}_{t-1}\tilde{f}_1}(x) = \begin{cases} L \left(\frac{f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1}}{(1+x)^{-1}r_{f_{t-1}} - r_{f_t}} \right) & \frac{f_{t-1} + r_{f_{t-1}}}{f_t + r_{f_t}} - 1 \leq x < \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1 \\ L \left(\frac{f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1}}{l_{f_t} - (1+x)^{-1}l_{f_{t-1}}} \right) & \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1 \leq x < \frac{f_{t-1} - l_{f_{t-1}}}{f_t - l_{f_t}} - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y por tanto sus α -cortes son:

$${}_{t-1}i_{1\alpha} = [{}_{t-1}i_1^1(\alpha), {}_{t-1}i_1^2(\alpha)] = \left[\frac{f_{t-1} + L^{-1}(\alpha)r_{f_{t-1}}}{f_t + L^{-1}(\alpha)r_{f_t}} - 1, \frac{f_{t-1} - L^{-1}(\alpha)l_{f_{t-1}}}{f_t - L^{-1}(\alpha)l_{f_t}} - 1 \right]$$

En el caso en que se hubiera tenido que adoptar la solución de ecuaciones borrosas de Buckley y Qu, la función de pertenencia de ${}_{t-1}\tilde{f}_1$ sería:

$$\mu_{{}_{t-1}\tilde{f}_1}(x) = \begin{cases} L \left(\frac{(1+x)^{-1}f_{t-1} - f_t}{(1+x)^{-1}l_{f_{t-1}} + r_{f_t}} \right) & \frac{f_{t-1} - l_{f_{t-1}}}{f_t + r_{f_t}} - 1 \leq x < \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1 \\ L \left(\frac{f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1}}{l_{f_t} + (1+x)^{-1}r_{f_{t-1}}} \right) & \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1 \leq x < \frac{f_{t-1} + r_{f_{t-1}}}{f_t - l_{f_t}} - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y sus α -cortes:

$${}_{t-1}i_{1\alpha} = [{}_{t-1}i_1^1(\alpha), {}_{t-1}i_1^2(\alpha)] = \left[\frac{f_{t-1} - l_{f_{t-1}}L^{-1}(\alpha)}{f_t + r_{f_t}L^{-1}(\alpha)} - 1, \frac{f_{t-1} + r_{f_{t-1}}L^{-1}(\alpha)}{f_t - l_{f_t}L^{-1}(\alpha)} - 1 \right]$$

Asimismo, bajo el supuesto de simetría de los factores de actualización que definen los tipos al contado, la función de pertenencia de ${}_{t-1}\tilde{i}_1$ vendrá dada, en el caso en que exista solución de ${}_{t-1}\tilde{f}_1$ en el sentido clásica, por:

$$\mu_{{}_{t-1}\tilde{i}_1}(x) = \begin{cases} L \left(\frac{\left| (1+x)^{-1} f_{t-1} - f_t \right|}{(1+x)^{-1} l_{f_{t-1}} - l_{f_t}} \right) & \frac{f_{t-1} - l_{f_{t-1}}}{f_t - l_{f_t}} - 1 \leq x \leq \frac{f_{t-1} + l_{f_{t-1}}}{f_t + l_{f_t}} - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Y si debemos recurrir a la solución de Buckley y Qu, la función de pertenencia que obtendremos es:

$$\mu_{{}_{t-1}\tilde{i}_1}(x) = \begin{cases} L \left(\frac{\left| (1+x)^{-1} f_{t-1} - f_t \right|}{(1+x)^{-1} l_{f_{t-1}} + l_{f_t}} \right) & \frac{f_{t-1} - l_{f_{t-1}}}{f_t + l_{f_t}} - 1 \leq x \leq \frac{f_{t-1} + l_{f_{t-1}}}{f_t - l_{f_t}} - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En cualquier caso, y como ya comentamos para ${}_{t-1}\tilde{f}_1$, los tipos borrosos ${}_{t-1}\tilde{i}_1$ no mantienen la condición de número borroso L-L de Dubois y Prade. Sin embargo, y como comprobaremos a continuación, su aproximación mediante números borrosos triangulares es muy razonable cuando partimos de estimaciones triangulares de la ETTI, que son las que utilizamos en el análisis que estamos realizando en el mercado de deuda pública el 22-1-1999.

4.3.1. Estimación de los tipos futuros a través de números borrosos triangulares

En el caso particular de una estimación triangular de las rentabilidades de los bonos o del factor de actualización, ya hemos comprobado que la estimación que obtendremos de los tipos de interés futuros no mantendrá dicha triangularidad. Sin embargo, consideramos que será de interés expresar dichas estimaciones a través de números borrosos de dicha naturaleza, ya que, por una parte, su manejo y operatividad es relativamente sencilla; y por otra, es indudable que el proceso de estimación subjetiva de una determinada magnitud suele realizarse fijándose el valor más “posible/probable”, un valor mínimo y un valor máximo para la misma. La plasmación por excelencia de esta intuitiva forma de realizar estimaciones de determinación de dicha magnitud a través de números borrosos, y en concreto, mediante números borrosos triangulares.

Así, la función de pertenencia del tipo de interés a un año estimado para dentro de t-1 años, si existe solución en el sentido clásico, en nuestro caso particular es:

$$\mu_{\tilde{f}_t}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1}}{(1+x)^{-1}r_{f_{t-1}} - r_{f_t}} & \frac{f_{t-1} + r_{f_{t-1}}}{f_t + r_{f_t}} - 1 \leq x < \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1 \\ 1 - \frac{f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1}}{l_{f_t} - (1+x)^{-1}l_{f_{t-1}}} & \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1 \leq x < \frac{f_{t-1} - l_{f_{t-1}}}{f_t - l_{f_t}} - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obsérvese que hemos eliminado el valor absoluto en la función de pertenencia anterior, de forma

que $\frac{f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1}}{(1+x)^{-1}r_{f_{t-1}} - r_{f_t}}$ y $\frac{f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1}}{l_{f_t} - (1+x)^{-1}l_{f_{t-1}}}$ deben ser positivos. En efecto, para la primera

función, que está definida para $\frac{f_{t-1} + r_{f_{t-1}}}{f_t + r_{f_t}} - 1 \leq x < \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1$, podemos observar que:

a) $f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1} \leq 0$, ya que $x < \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1 \Rightarrow (1+x)^{-1} > \frac{f_t}{f_{t-1}} \Rightarrow f_t < (1+x)^{-1}f_{t-1}$

b) $(1+x)^{-1}r_{f_{t-1}} - r_{f_t} \leq 0$. Del dominio de la función podemos observar que

$$\frac{f_{t-1} + r_{f_{t-1}}}{f_t + r_{f_t}} - 1 \leq x \quad \text{por lo que} \quad f_t + r_{f_t} \geq (f_{t-1} + r_{f_{t-1}})(1+x)^{-1}. \quad \text{Así, } f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1} \geq$$

$$\geq (1+x)^{-1}r_{f_{t-1}} - r_{f_t} \quad \text{y} \quad (1+x)^{-1}r_{f_{t-1}} - r_{f_t} \leq 0, \text{ como demostramos en a).}$$

c) Así, $\frac{f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1}}{(1+x)^{-1}r_{f_{t-1}} - r_{f_t}} \geq 0$

Para $\frac{f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1}}{l_{f_t} - (1+x)^{-1}l_{f_{t-1}}}$, podemos observar que está definido para $\frac{f_{t-1}}{f_t} - 1 \leq x < \frac{f_{t-1} - l_{f_{t-1}}}{f_t - l_{f_t}} - 1$.

De aquí se deduce que:

a) $f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1} \geq 0$, ya que como $x \geq \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1 \Rightarrow (1+x)^{-1} \leq \frac{f_t}{f_{t-1}} \Rightarrow f_t \geq (1+x)^{-1}f_{t-1}$

b) $l_{f_t} - (1+x)^{-1}l_{f_{t-1}} \geq 0$. Del dominio de la función podemos observar que

$$\frac{f_{t-1} - l_{f_{t-1}}}{f_t - l_{f_t}} - 1 > x \quad \text{por lo que} \quad f_t - l_{f_t} < (f_{t-1} - l_{f_{t-1}})(1+x)^{-1}. \quad \text{Así, } f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1} <$$

$$< l_{f_t} - (1+x)^{-1}l_{f_{t-1}} \quad \text{y} \quad l_{f_t} - (1+x)^{-1}l_{f_{t-1}} \geq 0.$$

c) Por tanto $\frac{f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1}}{l_{f_t} - (1+x)^{-1}l_{f_{t-1}}} \geq 0$.

Si recurrimos a la solución de Buckley y Qu, obtenemos:

$$\mu_{t-1, \tilde{i}_1}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{(1+x)^{-1}f_{t-1} - f_t}{(1+x)^{-1}l_{f_{t-1}} + r_{f_t}} & \frac{f_{t-1} - l_{f_{t-1}}}{f_t + r_{f_t}} - 1 \leq x < \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1 \\ 1 - \frac{f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1}}{l_{f_t} + (1+x)^{-1}r_{f_{t-1}}} & \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1 \leq x \leq \frac{f_{t-1} + r_{f_{t-1}}}{f_t - l_{f_t}} - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Donde podemos comprobar que $\frac{(1+x)^{-1}f_{t-1} - f_t}{(1+x)^{-1}l_{f_{t-1}} + r_{f_t}}$ y $\frac{f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1}}{l_{f_t} + (1+x)^{-1}r_{f_{t-1}}}$ son positivos, ya que

$$(1+x)^{-1}f_{t-1} - f_t \geq 0 \quad \text{para} \quad \frac{f_{t-1} - l_{f_{t-1}}}{f_t + r_{f_t}} - 1 \leq x < \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1 \quad \text{y} \quad f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1} \geq 0, \quad \text{para}$$

$$\frac{f_{t-1}}{f_t} - 1 \leq x \leq \frac{f_{t-1} + r_{f_{t-1}}}{f_t - l_{f_t}} - 1. \text{ Estas últimas afirmaciones pueden deducirse con planteamientos}$$

semejantes a los expuestos cuando analizábamos la función de pertenencia de ${}_{t-1}\tilde{i}_1$ cuando en su resolución utilizábamos el concepto de resolución en sentido clásico y también partíamos de factores de descuento spot triangulares.

Por otra parte y dada la naturaleza de las funciones que definan el factor de descuento en los métodos propuestos en los apartados 3.2.1. y 3.2.2. permiten que ${}_{t-1}\tilde{i}_1$ tenga solución en sentido clásico, podemos comprobar que la función de pertenencia del tipo de interés estimado para dentro de t-1 año es:

$$\mu_{t-1, \tilde{i}_1}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|(1+x)^{-1}f_{t-1} - f_t|}{l_{f_t} - (1+x)^{-1}l_{f_{t-1}}} & \frac{f_{t-1} - l_{f_{t-1}}}{f_t - l_{f_t}} - 1 \leq x \leq \frac{f_{t-1} + l_{f_{t-1}}}{f_t + l_{f_t}} - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Nuestra propuesta, consiste en ajustar la estimación realizada de los tipos futuros a través de un número borroso triangular que mantenga el mismo núcleo y soporte que el original, y posteriormente analizar hasta que punto es razonable sostener que ${}_{t-1}\tilde{i}_1 \approx \left({}_{t-1}i_1, l_{{}_{t-1}i_1}, r_{{}_{t-1}i_1}\right)$, con:

$$l_{{}_{t-1}i_1} = {}_{t-1}i_1 - {}_{t-1}i_1^1(0) \text{ y } r_{{}_{t-1}i_1} = {}_{t-1}i_1^2(0) - {}_{t-1}i_1$$

En este caso, y como ya comentamos en el apartado 1.4.2. de la primera parte de la tesis, dado que el número borroso que pretendemos aproximar se halla como cociente de dos números borrosos triangulares, los niveles de presunción donde se cometen mayores errores en términos absolutos sobre los extremos izquierdos y derechos de los α -cortes de ${}_{t-1}\tilde{i}_1$ son, tanto si existe solución en sentido clásico como si debemos recurrir a la solución de Buckley y Qu:

$$\alpha_1^*(t-1) = \frac{f_t + r_{f_t} - \sqrt{(f_t + r_{f_t})f_t}}{r_{f_t}} \text{ y } \alpha_D^*(t-1) = \frac{\sqrt{(f_t - l_{f_t})f_t} - (f_t - l_{f_t})}{l_{f_t}}$$

Asimismo, si en la estimación de los tipos futuros partimos de los factores de actualización spot simétricos del apartado 3.2:

$$\alpha_1^*(t-1) = \frac{f_t + l_{f_t} - \sqrt{(f_t + l_{f_t})f_t}}{l_{f_t}} \text{ y } \alpha_D^*(t-1) = \frac{\sqrt{(f_t - l_{f_t})f_t} - (f_t - l_{f_t})}{l_{f_t}}$$

A partir de estos valores, y de la forma expuesta en la primera parte de la tesis, calcularíamos los errores que como máximo se podrían producir en el error de presunción que tome un determinado valor por el hecho de utilizar una aproximación triangular para el tipo forward.

4.3.1.1. Resultados obtenidos con los métodos de estimación de la ETTI basados en la curva de rentabilidades

Si estimamos la ETTI a través de la curva de rentabilidades mediante interpolación lineal, los tipos forward para vencimientos de hasta 10 años son, el 22-1-1999, y ya aproximados triangularmente:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	(0,02955, 0, 0)	(0,02955, 0, 0)
2	(0,02786, 0, 0)	(0,02786, 0, 0)
3	(0,03489, 0,00073, 0,00073)	(0,03489, 0,00146, 0,00146)
4	(0,03249, 0,00081, 0,00081)	(0,03249, 0,00162, 0,00162)
5	(0,04083, 0,00056, 0,00056)	(0,04083, 0,00112, 0,00113)
6	(0,04461, 0,00062, 0,00062)	(0,04461, 0,00125, 0,00125)
7	(0,04471, 0,00117, 0,00117)	(0,04471, 0,00233, 0,00234)
8	(0,04487, 0,00124, 0,00124)	(0,04487, 0,00248, 0,00249)
9	(0,05121, 0,00221, 0,00222)	(0,05121, 0,00442, 0,00444)
10	(0,04176, 0,00145, 0,00145)	(0,04176, 0,00290, 0,00291)

Con las estimaciones polinómicas de la curva de rentabilidades, los tipos forward que obtenemos son:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$
1	(0,02881, 0,00073, 0,00073)	(0,02881, 0,00145, 0,00145)
2	(0,02960, 0,00073, 0,00073)	(0,02960, 0,00145, 0,00145)
3	(0,03208, 0,00073, 0,00073)	(0,03208, 0,00145, 0,00145)
4	(0,03547, 0,00073, 0,00073)	(0,03547, 0,00145, 0,00145)
5	(0,03912, 0,00073, 0,00073)	(0,03912, 0,00145, 0,00145)
6	(0,04253, 0,00073, 0,00073)	(0,04253, 0,00146, 0,00146)
7	(0,04531, 0,00073, 0,00073)	(0,04531, 0,00146, 0,00146)
8	(0,04726, 0,00073, 0,00073)	(0,04726, 0,00146, 0,00146)
9	(0,04830, 0,00073, 0,00073)	(0,04830, 0,00147, 0,00147)
10	(0,04859, 0,00074, 0,00074)	(0,04859, 0,00147, 0,00147)

Los resultados que se obtienen si el modelo utilizado es el de Cohen *et al.* son:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$
1	(0,02847, 0,00100, 0,00100)	(0,02847, 0,00199, 0,00199)
2	(0,03043, 0,00100, 0,00100)	(0,03043, 0,00199, 0,00199)
3	(0,03345, 0,00100, 0,00100)	(0,03345, 0,00199, 0,00199)
4	(0,03612, 0,00100, 0,00100)	(0,03612, 0,00199, 0,00199)
5	(0,03855, 0,00100, 0,00100)	(0,03855, 0,00200, 0,00200)
6	(0,04083, 0,00100, 0,00100)	(0,04083, 0,00200, 0,00200)
7	(0,04300, 0,00100, 0,00100)	(0,04300, 0,00200, 0,00200)
8	(0,04510, 0,00100, 0,00100)	(0,04510, 0,00201, 0,00201)
9	(0,04716, 0,00101, 0,00101)	(0,04716, 0,00201, 0,00201)
10	(0,04920, 0,00101, 0,00101)	(0,04920, 0,00202, 0,00202)

Y para el de Bradley y Crame obtenemos:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$
1	(0,02842, 0,00124, 0,00124)	(0,02842, 0,00248, 0,00248)
2	(0,03185, 0,00124, 0,00125)	(0,03185, 0,00249, 0,00249)
3	(0,03430, 0,00125, 0,00125)	(0,03430, 0,00249, 0,00250)
4	(0,03658, 0,00125, 0,00125)	(0,03658, 0,00250, 0,00250)
5	(0,03879, 0,00125, 0,00126)	(0,03879, 0,00251, 0,00251)
6	(0,04101, 0,00126, 0,00126)	(0,04101, 0,00251, 0,00252)
7	(0,04325, 0,00126, 0,00126)	(0,04325, 0,00252, 0,00253)
8	(0,04552, 0,00127, 0,00127)	(0,04552, 0,00253, 0,00254)
9	(0,04786, 0,00127, 0,00128)	(0,04786, 0,00255, 0,00255)
10	(0,05027, 0,00128, 0,00128)	(0,05027, 0,00256, 0,00257)

Los errores que como máximo se cometen en el nivel de presunción al aproximar triangularmente estos tipos forward son:

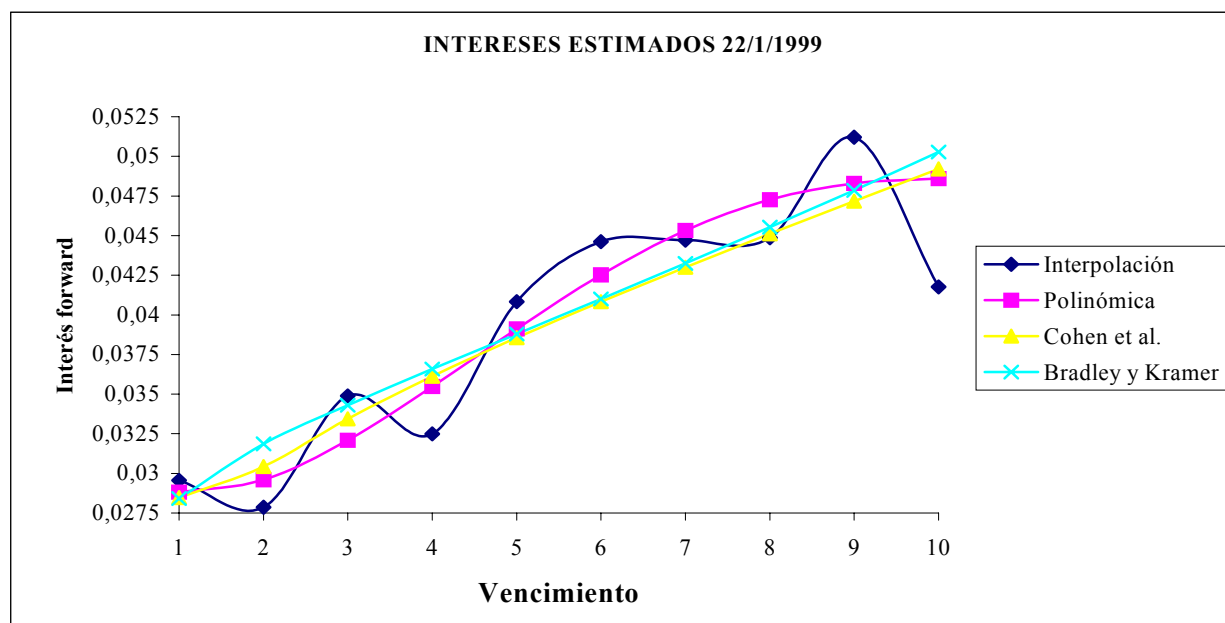
t	Interpolación		Polinómica		Cohen <i>et al.</i>		Bradley y Crame	
	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0'5$
1	0,00000	0,00000	0,00018	0,00035	0,00024	0,00049	0,00030	0,00060
2	0,00000	0,00000	0,00035	0,00071	0,00048	0,00097	0,00060	0,00121
3	0,00018	0,00035	0,00053	0,00106	0,00073	0,00145	0,00090	0,00181

4	0,00002	0,00005	0,00070	0,00141	0,00097	0,00193	0,00121	0,00241
5	0,00016	0,00031	0,00088	0,00176	0,00121	0,00241	0,00151	0,00302
6	0,00030	0,00061	0,00105	0,00211	0,00145	0,00290	0,00181	0,00362
7	0,08909	0,08903	0,00123	0,00246	0,00169	0,00338	0,00211	0,00423
8	0,08399	0,08425	0,00140	0,00281	0,00193	0,00386	0,00242	0,00483
9	0,00025	0,00051	0,00158	0,00316	0,00217	0,00434	0,00272	0,00544
10	0,00009	0,00019	0,00175	0,00351	0,00241	0,00482	0,00303	0,00605

Podemos observar que en todos los casos la aproximación triangular de los tipos forward es más que aceptable. A continuación presentamos el nivel de presunción que los intereses futuros estimados en certeza toman en el número borroso correspondiente al tipo forward para el mismo vencimiento:

t	Interpolación		Polinómica		Cohen <i>et al.</i>		Bradley y Crame	
	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	1	1	0,77	0,89	0,85	0,92	0,75	0,88
2	1	1	0,56	0,78	0,77	0,88	0,43	0,71
3	1	1	0,72	0,86	0,96	0,98	0,32	0,66
4	1	1	0,94	0,97	0,82	0,91	0,25	0,63
5	1	1	0,61	0,81	0,78	0,89	0,21	0,61
6	1	1	0,40	0,70	0,82	0,91	0,18	0,59
7	1	1	0,40	0,70	0,93	0,96	0,16	0,58
8	1	1	0,62	0,81	0,92	0,96	0,14	0,57
9	1	1	0,97	0,98	0,72	0,86	0,13	0,56
10	1	1	0,48	0,74	0,47	0,74	0,12	0,56
Media	1	1	0,65	0,82	0,80	0,90	0,32	0,63

Por otra parte, la representación gráfica de la evolución de los tipos con un nivel de verdad máximo es:



4.3.1.2. Resultados obtenidos con los métodos de estimación del factor de actualización

Si estimamos la ETTI a través de la adaptación de la metodología de McCulloch realizada en 3.2.2. y modelando los factores de actualización al contado $\tilde{f}_t$ a través de simples polinomios, inferimos los siguientes tipos de interés futuros:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0.5$
1	(0,02916, 0,00110, 0,00110)	(0,02916, 0,00220, 0,00220)
2	(0,03021, 0,00117, 0,00117)	(0,03021, 0,00233, 0,00235)
3	(0,03213, 0,00124, 0,00125)	(0,03213, 0,00248, 0,00251)
4	(0,03478, 0,00133, 0,00135)	(0,03478, 0,00265, 0,00271)
5	(0,03800, 0,00144, 0,00146)	(0,03800, 0,00287, 0,00294)
6	(0,04161, 0,00158, 0,00160)	(0,04161, 0,00313, 0,00323)
7	(0,04539, 0,00174, 0,00177)	(0,04539, 0,00344, 0,00357)
8	(0,04906, 0,00192, 0,00196)	(0,04906, 0,00380, 0,00397)
9	(0,05228, 0,00213, 0,00219)	(0,05228, 0,00420, 0,00443)
10	(0,05456, 0,00236, 0,00243)	(0,05456, 0,00464, 0,00494)

A través del modelo de ETTI de McCulloch con factores de actualización especificados a través de splines polinómicos de segundo grado, los resultados que obtenemos son:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0.5$
1	(0,02879, 0,00141, 0,00141)	(0,02879, 0,00282, 0,00283)
2	(0,03078, 0,00104, 0,00104)	(0,03078, 0,00207, 0,00209)
3	(0,03294, 0,00063, 0,00064)	(0,03294, 0,00126, 0,00128)
4	(0,03544, 0,00030, 0,00030)	(0,03544, 0,00060, 0,00061)
5	(0,03881, 0,00039, 0,00039)	(0,03881, 0,00077, 0,00078)
6	(0,04262, 0,00053, 0,00054)	(0,04262, 0,00106, 0,00108)
7	(0,04546, 0,00063, 0,00064)	(0,04546, 0,00126, 0,00129)
8	(0,04652, 0,00064, 0,00065)	(0,04652, 0,00127, 0,00130)
9	(0,04762, 0,00064, 0,00065)	(0,04762, 0,00127, 0,00131)
10	(0,04877, 0,00064, 0,00065)	(0,04877, 0,00127, 0,00131)

Los resultados que sobre los tipos forward se obtienen si el modelo utilizado es el de McCulloch con una especificación del factor de actualización mediante splines cúbicos son:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0.5$
1	(0,02921, 0,00105, 0,00106)	(0,02921, 0,00211, 0,00212)
2	(0,03006, 0,00112, 0,00112)	(0,03006, 0,00223, 0,00225)
3	(0,03176, 0,00119, 0,00120)	(0,03176, 0,00237, 0,00240)
4	(0,03445, 0,00128, 0,00129)	(0,03445, 0,00254, 0,00259)
5	(0,03825, 0,00139, 0,00140)	(0,03825, 0,00276, 0,00282)
6	(0,04264, 0,00152, 0,00154)	(0,04264, 0,00302, 0,00311)
7	(0,04650, 0,00168, 0,00171)	(0,04650, 0,00333, 0,00345)
8	(0,04964, 0,00185, 0,00189)	(0,04964, 0,00367, 0,00383)
9	(0,05186, 0,00204, 0,00210)	(0,05186, 0,00404, 0,00425)
10	(0,05295, 0,00224, 0,00231)	(0,05295, 0,00441, 0,00468)

Y si utilizamos los splines cúbicos exponenciales propuestos en el apartado 2.2.2., entonces, los resultados de las estimaciones realizadas son:

t	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	(0,02931, 0,00103, 0,00104)	(0,02931, 0,00207, 0,00207)
2	(0,02978, 0,00097, 0,00097)	(0,02978, 0,00194, 0,00195)
3	(0,03235, 0,00092, 0,00093)	(0,03235, 0,00184, 0,00186)
4	(0,03569, 0,00089, 0,00090)	(0,03569, 0,00177, 0,00180)
5	(0,03905, 0,00087, 0,00088)	(0,03905, 0,00174, 0,00177)
6	(0,04219, 0,00086, 0,00087)	(0,04219, 0,00172, 0,00176)
7	(0,04505, 0,00087, 0,00088)	(0,04505, 0,00172, 0,00177)
8	(0,04742, 0,00088, 0,00089)	(0,04742, 0,00174, 0,00179)
9	(0,04917, 0,00089, 0,00090)	(0,04917, 0,00176, 0,00182)
10	(0,05028, 0,00090, 0,00092)	(0,05028, 0,00179, 0,00185)

En todos los casos, a pesar de que los tipos forward no eran números borrosos triangulares, hemos expresado ya su valor aproximado a través de un número borroso de dicha naturaleza. Así, los errores que en el nivel de presunción cometemos como máximo al aproximar triangularmente dichos tipos forward son:

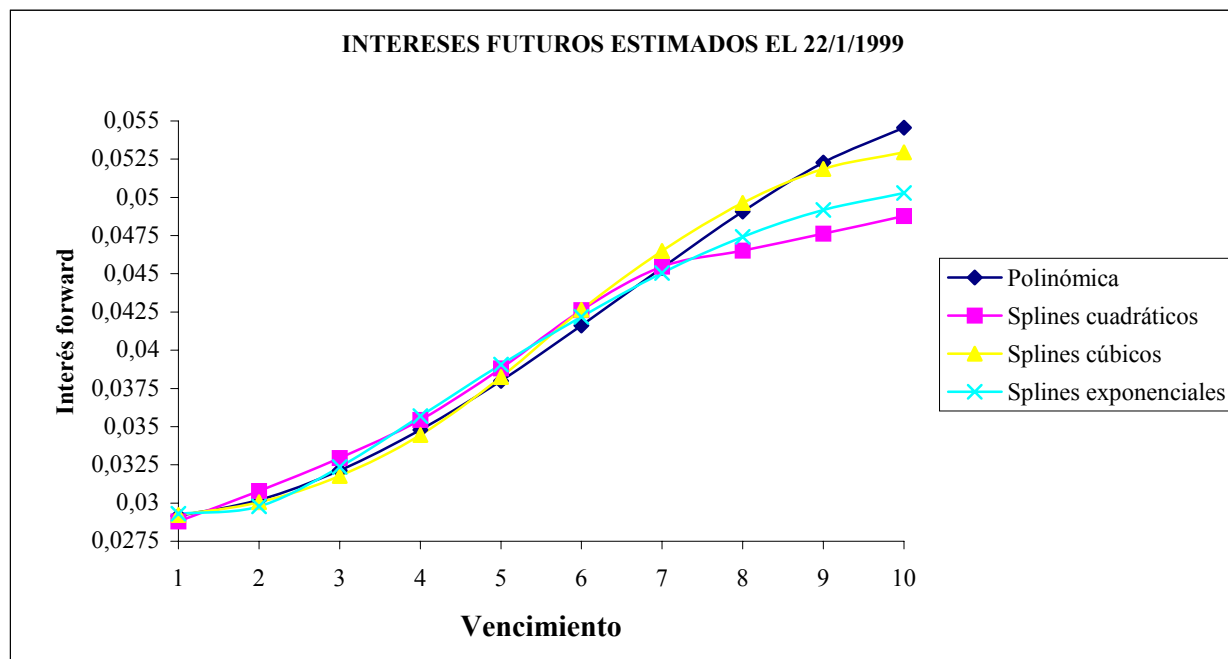
t	Polinómica		Splines cuadráticos		Splines cúbicos		Splines exponenciales	
	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	0,00027	0,00054	0,00034	0,00069	0,00026	0,00051	0,00025	0,00050
2	0,00055	0,00110	0,00060	0,00119	0,00053	0,00106	0,00049	0,00098
3	0,00085	0,00171	0,00075	0,00150	0,00082	0,00164	0,00071	0,00143
4	0,00118	0,00236	0,00082	0,00165	0,00113	0,00227	0,00093	0,00186
5	0,00153	0,00307	0,00092	0,00184	0,00147	0,00295	0,00114	0,00229
6	0,00191	0,00384	0,00105	0,00210	0,00184	0,00369	0,00135	0,00271
7	0,00234	0,00470	0,00120	0,00241	0,00225	0,00451	0,00156	0,00313
8	0,00280	0,00564	0,00135	0,00272	0,00270	0,00542	0,00177	0,00356
9	0,00332	0,00669	0,00151	0,00303	0,00319	0,00643	0,00199	0,00399
10	0,00390	0,00786	0,00166	0,00334	0,00374	0,00754	0,00221	0,00443

En todos los casos podemos observar que la aproximación triangular de los tipos spot produce unos resultados más que aceptables. A continuación presentamos el nivel de presunción que los intereses futuros estimados en certeza toman en el NB correspondiente al tipo forward para el mismo vencimiento, aproximados estos mediante un número borroso triangular:

t	Polinómica		Splines cuadráticos		Splines cúbicos		Splines exponenciales	
	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$	$\alpha^*=0$	$\alpha^*=0,5$
1	0,00	0,43	0,90	0,95	0,00	0,42	0,64	0,82
2	0,48	0,74	0,94	0,97	0,33	0,67	0,87	0,94
3	0,00	0,38	0,98	0,99	0,00	0,23	0,79	0,90
4	0,00	0,36	0,57	0,79	0,00	0,23	0,97	0,99
5	0,12	0,57	0,06	0,53	0,30	0,65	0,71	0,85
6	0,80	0,90	0,00	0,40	0,57	0,78	0,41	0,71
7	0,46	0,73	0,00	0,41	0,00	0,41	0,27	0,64

8	0,00	0,40	0,12	0,56	0,00	0,24	0,23	0,62
9	0,00	0,19	0,47	0,74	0,00	0,27	0,25	0,63
10	0,00	0,14	0,86	0,93	0,00	0,46	0,30	0,65
Media	0,19	0,48	0,49	0,73	0,12	0,44	0,54	0,77

Observándose para los tipos futuros borrosos, la siguiente evolución. Únicamente se representan los valores que poseen mayor nivel de presunción:



4.4. ALGUNOS COMENTARIOS SOBRE LOS MÉTODOS DE ESTIMACIÓN DE LOS TIPOS FUTUROS PROPUESTOS

A continuación realizamos algunas reflexiones sobre los resultados que se obtienen con las metodologías de estimación de intereses futuros a través de números borrosos desarrolladas en esta parte de la tesis:

- En todos los casos podemos comprobar que los modelos que proporcionan una mayor adecuación de los tipos spot que se obtenían econométricamente con sus correspondientes borrosos siguen siendo los que estiman unos tipos forward más cercanos a los que se obtienen mediante números borrosos.
- Al igual que ocurría en certeza, en la estimación de la ETTI y de los tipos forward partiendo del ajuste de las TIRs no queda eliminado en su totalidad el sesgo de cupón, ya que al ajustar la TIR mediante la utilización de una regresión borrosa, aceptamos implícitamente que el

número borroso TIR para bonos americanos con el mismo vencimiento debe ser el mismo con independencia del cupón que estos ofrezcan.

- c) Respecto a la estimación triangular de los tipos forward, creemos que se produce mayor distorsión en la estimación realizada a través del ajuste de la TIR de los títulos, ya que partimos para ajustar los tipos forward de la aproximación triangular de factores de actualización al contado que no son realmente triangulares. Sin embargo, si partimos del ajuste directo del factor de actualización spot, éstos una vez se ha realizado su estimación si que son triangulares, por tanto, no trabajamos con aproximaciones triangulares a dichos factores de actualización.
- d) Si bien, el análisis que realizamos se limita a una sola sesión, y para ver la bondad de los métodos propuestos necesitaríamos realizar el proceso durante un número de sesiones más elevado, podemos comprobar que para los niveles para los que hemos implementado las regresiones borrosas que sirven de base para realizar las posteriores estimaciones, $\alpha^*=0$ y 0.5 , no hemos introducido excesiva incertidumbre en los tipos futuros estimados. Si el decisor quisiera, por prudencia, obtener unos tipos forward más inciertos, aumentando el nivel de presunción α^* conseguiría dicho objetivo. Otra alternativa, aunque con esta los resultados que se obtengan pueden no tener en algún caso sentido económico, es aplicar el concepto de solución de ecuaciones de borrosas de Buckley y Qu en la determinación de los factores ${}_{t-1}\tilde{f}_1$.
- e) Por otra parte, respecto a los tipos borrosos futuros estimados, creemos que debemos considerar dos condiciones a las metodologías que utilicemos. La primera de ellas es que los tipos obtenidos no presenten comportamientos explosivos, ya que a medida que se aumenta el vencimiento, parece lógico suponer que a los agentes les es más difícil distinguir entre el tipo futuro para un determinado año y el siguiente. En segundo lugar, dado que a mayor vencimiento, debe existir mayor incertidumbre en los tipos de interés que regirán en estos plazos, parece lógico exigir que a medida que el tipo futuro presente mayor vencimiento, su incertidumbre deber ser mayor, es decir, el número borroso estimado debe tener unos radios más grandes. Respecto a estos criterios, y para los modelos que estiman la ETTI a partir del ajuste de las TIR de los títulos, podemos comprobar que con el ajuste a través de la interpolación lineal de los títulos obtenemos unos tipos futuros estimados muy oscilantes, lo cual ya fue observado en certeza, a la vez que la incertidumbre de los tipos forward, tal como ocurría con los tipos spot, no parecen guardar relación con el vencimiento de los mismos. Sin embargo, si que observamos que la incertidumbre de los tipos estimados para el futuro

aumenta o se mantiene invariable con el vencimiento y los tipos spot estimados no tienen un comportamiento excesivamente oscilante con el resto de métodos de ajuste TIR-vencimiento del título la estimación a través del ajuste polinómico de las TIR es quizás el que proporciona una estimación de los tipos implícitos más explosiva-. Respecto a los modelos de estimación de la ETTI que estiman directamente la función de descuento que describen los tipos spot, podemos observar que aquellos métodos que la ajustaban mejor y que eran más congruentes con las estimaciones que de la misma realizábamos en certeza –en concreto, mediante la especificación mediante splines cuadráticos y mediante splines exponenciales de los factores de descuento-, producen unos tipos futuros cuya incertidumbre no aumenta con el vencimiento de los mismos. Esta propiedad, sin embargo, si que la cumplen las especificaciones polinómicas y mediante splines cúbicos, que por otra parte, son los que mayor incertidumbre incorporan en los tipos futuros estimados. Todos los métodos propuestos proporcionan, asimismo, unos tipos forward con una evolución suave, incluso la especificación polinómica del factor de descuento al contado.

- f) Por último, y de forma análoga a lo que ocurría en un ambiente de certeza, podemos comprobar que tanto la ETTI como los tipos de interés futuros se hallan como unas funciones borrosas continuas del tiempo si estimamos directamente el factor de descuento spot, pudiendo ser hallada la expresión analítica tanto de la función de pertenencia como de los α -cortes para los tipos forward y para los tipos spot correspondientes al vencimiento que deseemos. Ello no ocurre así si partimos del ajuste de las TIR de los títulos. Respecto a los tipos spot que hallamos, tan sólo podemos conocer la expresión analítica de los α -cortes de los factores de actualización para unos determinados vencimientos o vértices y nunca su función de pertenencia, pues, como hemos podido observar, no podíamos hallar ésta para el precio de los bono par, si bien es cierto que su ajuste triangular es bueno. A partir de los tipos spot ya ajustados a través de números borrosos L-L de Dubois y Prade, si que podemos hallar la función de pertenencia de los tipos implícitos así como sus α -cortes, pero, al igual que los tipos al contado, sólo para vencimientos discretos. Asimismo, sea cual sea la metodología empleada, hemos podido comprobar que, partiendo de una ajuste triangular de la regresión de partida –TIR o factor de descuento- los tipos futuros se pueden hallar como números borrosos y ser ajustados de forma muy satisfactoria a través de números borrosos triangulares.

**PARTE III: ANÁLISIS DE LA DETERMINACIÓN DE
LAS PRIMAS EN LOS SEGUROS DE VIDA Y DE LA
SOLVENCIA DINÁMICA DEL ASEGURADOR
CUANDO LOS TIPOS DE INTERÉS DE VALORACIÓN
VIENEN ESTIMADOS A TRAVÉS DE NÚMEROS
BORROSOS**

CAPÍTULO 1:

CONCEPTOS INTRODUCTORIOS

1.1. SEGUROS DE VIDA: CONSIDERACIONES PREVIAS

En los últimos años, uno de los sectores empresariales que ha experimentado un mayor crecimiento es el sector asegurador. Los seguros permiten a las personas, tanto físicas como jurídicas, cubrirse del riesgo que supone el acaecimiento de sucesos desfavorables, fijándose el precio de dicha “seguridad” a través de la prima a pagar.

Respecto a los seguros de vida, que será el objeto de análisis de esta parte de la tesis, la mayor propensión al ahorro experimentado en esta última década por la sociedad española, tanto a largo plazo como a medio plazo ha revitalizado la demanda de estos productos. Respecto al largo plazo, el seguro de vida es un producto de ahorro competitivo a la hora de complementar las prestaciones de jubilación de la seguridad social. Pese a no tener las ventajas fiscales que presentan los planes de pensiones, es un producto mucho más flexible, ya que los seguros de vida pueden ser rescatados antes de la jubilación con independencia de las razones por las que se produzca dicho rescate. Los seguros de vida típicos en este caso son los planes de jubilación. Asimismo, el seguro de vida también es una buena forma de ahorro a medio plazo. Las ventajas fiscales que éstos presentan frente a los depósitos a plazo y a los fondos de inversión, y la posibilidad de alcanzar rentabilidades financieras semejantes a estos últimos con seguros de interés variable como los “unit linked”, han impulsado también la demanda del seguro de vida como producto de ahorro a medio plazo.

Pero el sector asegurador no sólo ha experimentado un fuerte auge en cuanto a su volumen de negocio, sino que también se ha convertido en un sector innovador. Dicha innovación se ha plasmado en la creación de nuevos productos cuya finalidad ya no es la tradicional, es decir, la cobertura del acaecimiento de un suceso: aparecen seguros que cubren contingencias relativas a la incertidumbre que lleva aparejada trabajar con previsiones futuras (por ejemplo, seguros de tipo de cambio). Estos seguros se confunden, en ocasiones, con productos financieros también relativamente novedosos y que intentan reducir esta incertidumbre (futuros, opciones, etc.).

En este trabajo no se pretende abordar la complejidad que supondría analizar los diferentes tipos de seguros y que representaría una tarea mucho más extensa. Hemos centrado nuestro estudio en

los seguros de vida, como ya ha sido comentado. Dicha elección se ha fundamentado en la constatación de una cierta incongruencia en el cálculo de las primas, al basarse este análisis, hasta hace relativamente pocos años, en la consideración de un tipo de interés cierto en la valoración actuarial.

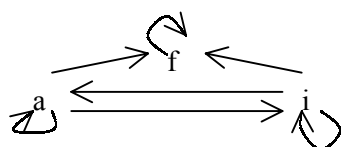
Nos parece interesante introducir brevemente algunos conceptos relacionados con los seguros de vida y que nos permitirá entrar gradualmente en su análisis.

Siguiendo a Piniés y Tornil¹ definimos un seguro de vida como “un contrato por el cual una de las partes, el asegurador, se compromete mediante una prima única o periódica que recibe del tomador del seguro, a pagar al beneficiario la cantidad o cantidades estipuladas si acaece en el plazo convenido para la duración del contrato, la eventualidad prevista en el mismo sobre la vida del asegurado”. Los seguros de vida se incluirían, asimismo, dentro de un grupo más amplio que son los seguros personales.

El precio del seguro de vida se concreta en la prima del seguro. Dentro del concepto de prima debemos diferenciar la denominada “prima pura”, que cubre, con carácter general, únicamente el coste que la siniestralidad supone para el asegurador; de la “prima de tarifa”, que incluye la repercusión sobre el asegurado de los costes de administración, de comercialización, etc.

Respecto a los factores que inciden en la determinación de la prima son básicamente:

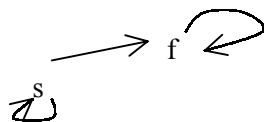
- a) *La edad del asegurado*, la cual determinará el futuro comportamiento de la mortalidad, la invalidez, etc. en los sucesivos periodos. Dicho comportamiento se recoge en la tabla de mortalidad o eliminación que refleja el comportamiento del fenómeno para el colectivo al que pertenece la cabeza asegurada. A partir de ésta se deducen las probabilidades básicas que se utilizan a la hora de determinar la prima y que analizaremos con posterioridad. La inclusión de la posibilidad de invalidez, implica trabajar con un proceso estocástico markoviano donde los posibles estados y transiciones son:



donde f es el estado de fallecimiento, a es el estado de actividad, e i es el estado de invalidez o inactividad.

¹ Tomado de Pérez Torres (1986), p.11.

En cualquier caso, nosotros no consideraremos la posibilidad de invalidez, es decir, únicamente trabajaremos con seguros de vida donde sólo se consideran dos estados: supervivencia o muerte. En este caso, el proceso estocástico con el que trabajamos es más sencillo, siendo los posibles estados y transiciones:



siendo el estado de supervivencia, s , y el de fallecimiento, f .

Dentro de los seguros que únicamente contemplan la supervivencia o fallecimiento de la cabeza asegurada, diferenciamos tres tipos:

- 1) *Seguros para caso de muerte*: Cubren la contingencia de fallecimiento del asegurado. El beneficiario recibe un capital a la muerte del mismo.
 - 2) *Seguros para caso de vida*: Cubren la contingencia de supervivencia del asegurado. El beneficiario recibe un capital o renta si el asegurado sobrevive a partir de una fecha determinada.
 - 3) *Seguros mixtos*: Se forman a partir de la combinación de los tipos anteriores, es decir, el asegurado cobra una cantidad si fallece durante la duración del seguro y otra si sobrevive a dicho plazo.
- b) *El interés técnico*, que puede ser definido como el tipo de interés que se garantiza al asegurado por sus aportaciones. Así, éste debe reflejar el rendimiento que el asegurador anticipa para la inversión que realice con las primas que perciba, es decir, se trata un rendimiento a medio y largo plazo. Dado que la novedad que aportamos en el estudio que realizamos en la presente parte de la tesis se localiza en éste segundo aspecto al considerar el interés de valoración definido a través de un número borroso, su determinación será objeto de especial atención.
- c) *Gastos de administración y comercialización para el asegurador*. Éstos son cargados por el asegurador al asegurado² bajo los conceptos de gastos de gestión externa –los gastos de comercialización o comisiones que cobra el intermediario, las cuales suele percibirlos por anticipado–, y los gastos de gestión interna –los gastos administrativos–. En cualquier caso, aunque reconozcamos la importancia de estos conceptos en la formación del precio en los seguros, no serán objeto de nuestro análisis, a fin y a efecto de acotar el objeto de estudio.

² El contratante del seguro, y por tanto, el pagador de las primas es el tomador del seguro, no el asegurado. Sin embargo, en los seguros de vida, a excepción de que el tomador sea una empresa que contrate un seguro de vida para sus empleados, el asegurado y tomador coincide. Por esta razón nosotros identificaremos tomador y asegurado.

Asimismo, los estudios actuariales de los seguros de vida se centran, tradicionalmente, en la determinación de la prima pura.

De esta forma, para realizar la valoración de un seguro de vida, precisamos de la modelización de dos fenómenos, uno de carácter demográfico – el comportamiento de la mortalidad en un determinado colectivo –, y otro de carácter financiero: la estimación de los tipos que regirán en el futuro en una economía, y que son los que como máximo puede ofrecer el asegurador como remuneración de las primas que perciba. Podemos distinguir tres ambientes distintos en los que enmarcar estos fenómenos:

- a) *Certeza*: se conocen los diferentes estados de la naturaleza o concreciones posibles del fenómeno objeto de estudio que pueden presentarse, y en cada momento se conoce cual será el que se presente.
- b) *Riesgo*: supone conocer las posibles concreciones que puede tomar el fenómeno, pero no cual se va a dar en cada momento, si bien si puede asignarse una determinada probabilidad de ocurrencia de que el fenómeno tome una u otra concreción.
- c) *Incertidumbre*: se conocen los estados de la naturaleza que pueden presentarse, pero no disponemos de información para asociar una probabilidad de que se presente uno u otro.

Respecto a la mortalidad, podemos afirmar que se trata de un fenómeno “natural”, no existe en la actualidad ninguna controversia sobre su carácter eminentemente estocástico, es decir, que este fenómeno se enmarcaría dentro de un ambiente de riesgo. Si las tablas de mortalidad que se utilicen están bien ajustadas, la información que ofrecen es suficiente para calcular la probabilidad de ocurrencia sobre cualquier suceso relacionado con la vida de un individuo. De hecho, el marco conceptual para este fenómeno sobre el que trabajan los actuarios data de los siglos XVIII y XIX, donde Dobson, Gompertz o Makeham son autores fundamentales a este respecto.

Sin embargo, el esfuerzo de la ciencia actuarial en los últimos años se centra en formalizar la incertidumbre inherente al fenómeno financiero asociado al seguro de vida, siendo utilizado en la mayor parte de trabajos, la teoría de los procesos estocásticos, con lo cual se sitúa al interés en un ambiente de riesgo. Creemos que, si bien esta metodología puede dar éxitos relativos, no es quizá el instrumento más realista para formalizar el tipo de interés, siendo en nuestra opinión, más acertado, situar éste en un ambiente de incertidumbre, y utilizar para su formalización un instrumento más adecuado y flexible para trabajar con la vaga información de que se dispone sobre el interés a largo plazo, cuantificándolo a través de números borrosos.

1.2. BREVE ANÁLISIS SOBRE EL TRATAMIENTO DEL FENÓMENO DE LA MORTALIDAD EN LOS SEGUROS DE VIDA

El estudio de fenómenos biológicos como la mortalidad, la invalidez, etc. en un colectivo determinado es realizado desde el punto de vista estadístico por la biometría. En el caso de la mortalidad, su comportamiento queda reflejado en las tablas de mortalidad, las cuales aproximan numéricamente dicho fenómeno. En ellas se indica, para un colectivo inicial de recién nacidos arbitrario (100.000 o 1.000.000 de personas habitualmente) cual es el número de supervivientes de cada edad, y para edades enteras. De esta forma, si denominamos como x a una edad cualquiera, el número de supervivientes de esa edad l_x es de lo que nos informará una tabla de mortalidad. Así, notaremos como l_0 al número de individuos del colectivo inicial. Dado que el ser humano no vive eternamente, existe una edad a partir de la cual no existirá vivo ningún individuo del colectivo, que notaremos como w , es decir, $l_w = 0$. A w también se le denomina primera edad no alcanzable o “infinito actuarial”, el cual, por supuesto, es un número finito.

Para el enfoque de valoración actuarial por el que optaremos nosotros, y partiendo de que la posible cabeza a asegurar tiene una edad x , la variable aleatoria sobre la cual se basa todo el planteamiento a realizar es el número de años enteros que puede sobrevivir una cabeza de dicha edad, x , la cual deberá ser inferida de la tabla de mortalidad utilizada y que será notada como T_x . El conjunto de sucesos elementales asociados a esta variable aleatoria es $\Omega = \{0, 1, \dots, t, \dots, w-x-1\}$, siendo la probabilidad de que el asegurado de edad x sobreviva t años enteros, o lo que es lo mismo, que fallezca durante el t -ésimo año:

$${}_t|q_x = \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x}$$

A partir de esta probabilidad básica podemos, hallar las probabilidades de los siguientes sucesos, relevantes en la valoración actuarial:

a) Probabilidad de que un individuo de edad x sobreviva a la edad $x+n$, ${}_n p_x$:

$${}_n p_x = \sum_{t=n}^{w-x-1} {}_t|q_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

b) Probabilidad de que un individuo de edad x fallezca en los n años siguientes, ${}_n q_x$:

$${}_n q_x = \sum_{t=0}^{n-1} {}_t|q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} = 1 - {}_n p_x$$

Un concepto fundamental para el ajuste de las tablas de mortalidad o ley de mortalidad de una determinada población es el tanto instantáneo de mortalidad, que para una edad $x+t$ notamos como μ_{x+t} . Dicho tanto indica la tasa unitaria y anual continua de decrecimiento de la población para un elemento de edad $x+t$. Analíticamente su expresión es:

$$\mu_{x+t} = -\frac{d \ln l_{x+t}}{dt} = -\frac{dl_{x+t}}{dt} \cdot \frac{1}{l_{x+t}}$$

Conociendo la expresión analítica del tanto instantáneo de mortalidad podemos inferir las magnitudes biométricas ya definidas anteriormente -su análisis más detallado puede encontrarse en Vegas (1981, p. 284-370)-. Así obtenemos:

a) Los individuos supervivientes del colectivo inicial de edad x , l_x son:

$$l_x = \int_0^{w-x} l_{x+t} \mu_{x+t} dt$$

b) La probabilidad de que un individuo de edad x sobreviva n años a su edad, ${}_n p_x$:

$${}_n p_x = \exp\left(-\int_0^n \mu_{x+t} dt\right)$$

c) La probabilidad de que un individuo de edad x sobreviva exactamente r años enteros:

$${}_r | q_x = \int_r^{r+1} {}_r p_x \mu_{x+t} dt$$

d) La probabilidad de que un individuo de edad x fallezca en los próximos n años:

$${}_n q_x = \int_0^n {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

Respecto a las expresiones analíticas del tanto instantáneo de mortalidad más utilizadas en aplicaciones académicas –por ejemplo en la valoración actuarial en el campo continuo- o prácticas, podemos mencionar la ley de Moivre, la ley de Gompertz y las dos leyes de Makeham. La ley Moivre postula para el tanto instantáneo de mortalidad la expresión:

$$\mu_x = \frac{A}{B - Ax}, \text{ con } A > 0$$

mientras que la ley de Gompertz se define como:

$$\mu_x = A \cdot B^x, \text{ con } A > 0 \text{ y } B > 1.$$

La primera ley de Makeham no es más que una pequeña variación de la ley de Gompertz, y según ésta:

$$\mu_x = C + A \cdot B^x, \text{ con } A > 0 \text{ y } B > 1.$$

Y la segunda ley de Makeham nos indica que:

$$\mu_x = C + Dx + A \cdot B^x, \text{ con } A > 0 \text{ y } B > 1.$$

Las tablas de mortalidad para una determinada población suelen ser construidas ajustando mediante métodos econométricos máximo-verosímiles alguno de los tantos instantáneos de mortalidad recién expuestos. Normalmente, la población para la que se desea construir una tabla de mortalidad suele dividirse en tres segmentos: el segmento de edades “pequeñas” –por ejemplo, hasta 10 años-, el extremo de edades “elevadas” –por ejemplo, a partir de 85 años- y el segmento de edades “centrales”, que comprenderá el espectro de edades más elevado e importante desde el punto de vista del negocio del asegurador. Para los segmentos extremos suele ajustarse una ley de Gompertz, y para el segmento central suele utilizarse la primera ley de Makeham.

En el análisis que realizaremos de los seguros de vida supondremos un devengo de capitales anual, ya que permitir un devengo inferior, si bien es un supuesto realista, no aportaría nada relevante al análisis que llevaremos a cabo además de complicar más la notación. Si pretendemos trabajar con una periodicidad inferior al año y dado que las tablas de mortalidad nos informan sobre el comportamiento de la mortalidad para edades enteras, deberíamos realizar algún supuesto adicional sobre el comportamiento del tanto instantáneo de mortalidad dentro de un año con el fin de obtener el número de superviventes para una edad l_{x+t} siendo $0 < t < 1$. Algunas aproximaciones usualmente utilizadas en la práctica, y que vienen comentadas con más detalle en Bowers *et al.* (1986, p.67-71) son:

a) Suponer que la mortalidad se distribuye uniformemente dentro de las edades. En este caso:

$$l_{x+t} = (1-t)l_x + tl_{x+1}, \text{ siendo } \mu_{x+t} = \frac{{}_1q_x}{1-t{}_1q_x} \quad 0 < t < 1.$$

b) Que el tanto instantáneo de mortalidad en $(x, x+1)$ es constante. En este caso

$$\mu_{x+t} = \mu = -\ln {}_1p_x. \text{ De esta forma:}$$

$$l_{x+t} = l_x e^{-\mu t}$$

c) La hipótesis de Balducci, según la cual:

$$\mu_{x+t} = \frac{{}_1q_x}{1 - (1-t){}_1q_x}, 0 < t < 1$$

y por tanto, para hallar l_{x+t} debemos resolver:

$$\frac{1}{l_{x+t}} = \frac{1-t}{l_x} + \frac{t}{l_{x+1}}$$

1.3. PROPUESTAS SOBRE EL INTERÉS A APLICAR EN LOS CONTRATOS DE SEGUROS DE VIDA

1.3.1. Consideraciones previas

El tipo de interés técnico es el tipo de interés utilizado en la valoración de un seguro de vida y en general se acepta que la determinación de su valor debe basarse en el rendimiento medio que conseguirá la compañía durante la duración del contrato invirtiendo las aportaciones de los asegurados, siendo en muchos casos, la duración de dichos contratos muy elevada. Sin embargo, respecto a la conceptualización del tipo de interés de valoración de los contratos de seguros, podemos encontrar varias concepciones. La primera es la que postularía que, en general, la valoración debe realizarse a una única tasa. En esta línea, Prieto (1993) considera que el interés técnico en las operaciones del Seguro de Vida permite:

- 1) El establecimiento de la equivalencia financiero-actuarial entre primas y prestaciones, así como el cálculo de la reserva matemática en periodos intermedios de la operación.
- 2) Expresa el tanto de interés mínimo garantizado al asegurado por sus aportaciones o primas.

Asimismo, dado que el rendimiento que tiene que ofrecer un proyecto de inversión para poder ser aceptado es:

$$I = I_L + P + \pi$$

donde I es la rentabilidad –por ejemplo, la TIR- del proyecto, I_L la tasa real de interés sin riesgo, P la prima de riesgo, que tomará mayor valor si el proyecto es más arriesgado y π la tasa de inflación, Prieto considera que el interés técnico, único para todo el contrato, debe incluir I_L y π - éste último dado generalmente vía reparto de beneficios- y nunca un interés superior. En este último caso se ofrecería al asegurado una prima de riesgo, y es el asegurador el que corre con el riesgo de inversión de las primas que satisface el asegurado, y no éste último.

En la misma línea se manifiesta Devolder (1988), el cual conceptualiza el interés técnico también como un interés único, que debe reflejar el tipo de interés que se espera que rijan a largo plazo en una economía. En este caso, el tipo de interés técnico a ofrecer en un contrato debe ser³:

Tipo técnico = Tasa real de interés a largo plazo + λ · Tasa anticipada de inflación a largo plazo.

Donde $0 \leq \lambda \leq 1$ indica el porcentaje de la inflación anticipada que se tiene en cuenta, a priori, para fijar las primas del seguro. A posteriori, mediante una cláusula de reparto de beneficios, se disminuyen las primas a pagar o bien se revalorizan los capitales asegurados, protegiéndose de esta forma totalmente al asegurado de la disminución que causa la inflación en el valor de dichos capitales.

Asimismo, Devolder indica que el tipo de interés real que debe considerarse a largo plazo, debe estar alrededor del 2%-3%, siendo necesario para la determinación del interés técnico a ofrecer, únicamente, la anticipación de una inflación que sea razonable a largo plazo.

Sin embargo, muchos autores aceptan la utilización de diferentes tipos de interés a lo largo del tiempo. Por ejemplo Gerber (1995, p. 57) acepta que es posible realizar la valoración actuarial mediante la utilización de tipos de interés forward. De esta forma, a nuestro entender, en este caso quedarían recogidas las expectativas que tienen los agentes económicos respecto al comportamiento del interés sin riesgo a lo largo del tiempo, y que pueden ser inferidas a través de la ETTI, como ya hemos expuesto.

Otros autores como Ostasiewski (1993) o Babbell y Merrill (1997) proponen, dado que el interés que ofrece el asegurador debe ser un interés sin prima de riesgo, y por tanto, íntimamente ligado con la rentabilidad de la deuda pública, utilizar una estructura temporal de tipos de interés de la deuda pública en la valoración de los contratos, es decir, actualizar cada uno de los flujos (primas y prestaciones) que conforman el contrato al tipo de interés spot que les corresponde por su vencimiento. Es remarcable que esta alternativa está contemplada por la regulación española para el cálculo de las provisiones matemáticas –que no es más que el valor de las obligaciones pendientes debidas a los contratos en vigor–, si el conjunto de pólizas que se analizan tienen un conjunto de activos expresamente asignado. Para un detallado análisis de la normativa española en materia del tipo de interés a considerar en la valoración de los seguros de vida puede consultarse en Lozano (1999).

³ Obsérvese que en ambos casos subyace la idea de que $i_n = i_r + \pi$, donde i_n es el interés nominal, i_r el interés real y π la tasa de inflación. Ello es sólo una aproximación a la relación de Fisher que indica que $i_n = i_r + \pi + i_r \pi$. El último sumando suele tener un

1.3.2. Modelización de la incertidumbre del tipo de interés técnico en la literatura actuarial

En general, las compañías de seguro utilizan un interés técnico conocido, fijo, único y suficientemente prudente para el cálculo de la prima, y en el mejor de los casos, recalculan anualmente dicha prima en función de la variación del interés estimado. Resulta paradójico que para el cálculo de la prima de seguro, cuya finalidad es la cobertura de un riesgo, se tome una magnitud incierta como es el tipo de interés futuro, o el tipo de interés que el asegurador conseguirá invirtiendo las primas del seguro, como si fuera conocida, y más paradójico todavía es que esta circunstancia no haya sido objeto de atención de los académicos hasta hace relativamente pocos años, siendo la materia, casi exclusiva de su atención, el análisis del riesgo de los contratos de seguros de vida únicamente en la vertiente biométrica.

Hasta finales de los 70 y principios de los 80 no aparecen diferentes trabajos que incorporan la incertidumbre sobre el tipo de valoración a aplicar suponiéndose que éste es una variable aleatoria. En este caso, la aleatoriedad asociada al valor actual de las prestaciones de un seguro tiene una doble vertiente aleatoria: el comportamiento de la mortalidad y el tipo de interés de valoración, que se supone que tiene un comportamiento estocástico. Así pues, para cada contingencia contemplada por el contrato –supervivencia o fallecimiento–, aunque las prestaciones sean ciertas, su valor actual es aleatorio, ya que el interés de valoración lo es. Por tanto, en el análisis de los seguros de vida con esta metodología será necesario trabajar con distribuciones de probabilidad (por la naturaleza estocástica del interés) condicionadas (a cada una de las posibles contingencias que sobre la vida del asegurado contempla el contrato).

Uno de los primeros autores en considerar la aleatoriedad del tipo de interés es Boyle (1976). En este trabajo supone que los tipos de interés de valoración para cada año (tipos forward) son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, haciéndose especial hincapié en el caso en que la tasa instantánea de interés correspondiente a cada periodo sigue una distribución normal, siendo por lo tanto, el factor de actualización correspondiente a cada periodo una variable aleatoria logarítmico-normal. En dicho trabajo se dan, bajo las hipótesis de partida, las expresiones de la esperanza matemática y de la varianza del valor actual de algunas de las estructuras actuariales más habituales en la práctica aseguradora.

En esta línea Panjer y Bellhouse (1980) y (1981), abundando en la normalidad de la tasa instantánea de valoración, suponen que ésta se comporta según una serie temporal autoregresiva

valor relativamente pequeño, y recoge la depreciación de los intereses debidos a la inflación, el cual, como puede comprobarse, en los casos que analizamos es despreciado.

de orden 1 o 2, y, como Boyle, hallan el valor esperado y la varianza matemática de capitales de fallecimiento y rentas de supervivencia.

A pesar de la sofisticación conseguida con este enfoque, Giaccotto (1986) demuestra que en los últimos años el comportamiento del interés no ha sido estacionario, e intenta resolver esta problemática planteando dos enfoques alternativos. En el primero de ellos se discute la posibilidad de modelizar mediante una serie ARMA(p,q), la variación que a lo largo de la vida del contrato experimenta el interés correspondiente a cada año, de forma que este enfoque no es más que una generalización del enfoque propuesto por Panjer y Bellhouse. La segunda propuesta consiste en la utilización del conocido modelo de valoración para opciones sobre tipos de interés de Vasicek, y en ella se propone que los derechos o las obligaciones correspondientes a cada periodo sean valorados con el tipo spot correspondiente al bono cupón cero con el mismo vencimiento del ingreso o gasto. Así pues, se propone para la valoración de los seguros de vida uno de los modelos de equilibrio dinámico de la ETTI que fueron reseñados en el apartado 1.4.2. de la segunda parte de la tesis.

Por otra parte, Beekman y Fuelling (1990) y (1991) analizan los parámetros estadísticos más importantes asociados al valor actual de las rentas actuariales, bajo la hipótesis de que el tipo de interés sigue un proceso de difusión de Ornstein-Uhlenbeck, también conocido como de “reversión a la media”, siendo dicho proceso estocástico, por otra parte, muy utilizado en economía financiera para modelizar el comportamiento del tipo de interés a corto plazo.

Asimismo, en el ya mencionado trabajo de Babbell y Merrill se aboga por la utilización de modelos de estructura temporal de tipos de interés estocásticos que sean al menos bifactoriales, como el ya mencionado modelo de Heath, Jarrow y Morton. Remarcamos que hemos reseñado los trabajos que nos han parecido más significativos en este sentido, ya que desde finales de los 70 hasta la actualidad, la literatura que analiza el problema del interés técnico desde una vertiente del riesgo ha sido muy abundante.

Sin embargo, no todos los autores están de acuerdo en modelizar la incertidumbre en el tipo de interés considerando éste aleatorio. Gerber (1995) sostiene que si bien, a corto plazo, podemos considerar que el interés se comporta de forma aleatoria, los seguros de vida están particularmente relacionados con el comportamiento del tipo de interés a largo plazo, el cual no tiene un comportamiento aleatorio. En este sentido, Kaufmann y Gil Aluja (1986, p. 74) afirman *“no sólo existe una gran variedad de tipos de mercado, según el momento y la empresa a quien corresponde realizar la inversión, sino que éstos resultan variables a lo largo del tiempo. Si a esto se añade la incertidumbre con que se plantea el futuro, no es extraño que se haya recurrido*

a la utilización de tipos de interés borrosos”. Lemaire (1990) esboza posibles aplicaciones de la teoría de los subconjuntos borrosos en la ciencia actuarial. Dentro de esta “agenda” incluye la valoración actuarial mediante intereses borrosos. Lemaire considera que la estimación de los tipos de interés futuros es indudablemente uno de los más complejos problemas de modelización, y sobre todo cuando se pretende estimar intereses a tan largo plazo como un seguro de vida, ya que en su formación se entremezclan variables políticas, sociales, etc. es decir, variables humanas de difícil modelización estocástica. Lemaire propone la utilización de un único tipo de interés en la valoración actuarial estimado a través de un número borroso, de forma que éste nos permita obtener, dada nuestra ignorancia sobre el comportamiento del interés futuro, una medida parcial de la rentabilidad que se obtendrá invirtiendo las primas del contrato. Un somero análisis de la valoración actuarial con intereses borrosos también puede ser encontrado en Ostasiewski (1993). Las razones que éste último apunta para considerar esta modelización como viable para los tipos de interés que deben intervenir en la valoración actuarial son:

- 1) La enorme complejidad del proceso de formación de los tipos de interés nominales en el mercado y por tanto su estimación, la cual se vuelve más compleja, si cabe, si se pretenden estimar los tipos de interés reales y la inflación. Ello hace inviable una modelización estocástica en el largo plazo para el interés.
- 2) Por otra parte, la tendencia de las variables que reflejan el comportamiento de los mercados de capitales, en nuestro caso, el interés, están evidentemente marcadas por los agentes económicos que en ellos intervienen, y por tanto por la particular percepción del riesgo de cada uno de los agentes, por sus expectativas, etc., con un fuerte comportamiento subjetivo. Es indiscutible que una herramienta natural para modelizar dichas apreciaciones subjetivas es la teoría de los subconjuntos borrosos.

Asimismo, otros autores que modelizan el tipo de interés técnico a través de números borrosos son Terceño *et al.* (1996), Bonet *et al.* (1999) y Betzuen *et al.* (1997), estos últimos en la determinación del porcentaje de salario a detraer a los trabajadores para constituir un plan de pensiones de prestación definida.

1.3.3. Propuestas para la determinación del tipo (los tipos) a aplicar en el cálculo de la prima de un seguro de vida

A continuación proponemos algunas alternativas para la estimación de el tipo o los tipos de valoración de los contratos de los seguros de vida, la mayor parte de las cuales estarán basadas en la utilización de una forma u otra de la ETTI borrosa. Asimismo, estas propuestas pueden dividirse en dos grupos distintos:

- a) La estimación de un tipo de interés único de valoración. Mediante esta vía, lo que pretendemos aplicar es el tipo de interés medio que se estima que se obtendrá con la inversión de las primas durante todo el horizonte temporal del seguro de vida. La utilización de una única tasa de interés es lo más habitual en la práctica, lo cual permite, asimismo, una mayor facilidad en el cómputo de valores financiero o actuariales.
- b) La utilización de más de un tipo de interés, bien sea porque para cada periodo se estimen unos tipos distintos (los tipos forward), o bien porque los flujos asociados al contrato se descuenten al tipo spot sin riesgo correspondiente que rige en el mercado.

1.3.3.1. Propuestas para la estimación de un tipo de interés único

Propuesta 1

Una primera idea es partir de la conceptualización del tipo de interés que se plantea en el ya mencionado trabajo de Devolder (1988), es decir, a partir de la concepción más clásica del tipo de interés técnico. En este caso, construimos el tipo de interés técnico como la suma de el tipo de interés real a largo plazo más un porcentaje de la inflación anticipada a largo plazo. Aunque dicho autor no lo explicita, ni probablemente tenga conciencia de ello, podemos comprobar que su concepto de interés técnico es borroso o fuzzy más que estocástico o cierto. Respecto al interés real considera que debe ser “*alrededor del 2% o 3%*” y que la proyección de la inflación debe ser una estimación “*razonable a largo plazo*”. De esta forma, podemos modelizar el tipo de interés técnico como un tipo de interés borroso:

$$\tilde{i} = \{x / \mu_{\tilde{i}}(x)\} = \{i_{\alpha} = [i^1(\alpha), i^2(\alpha)] / 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

que se halla como:

$$\tilde{i} = \tilde{i}_R + \lambda \tilde{\pi}$$

Donde:

$\tilde{i}_R$: Es el interés real, representado por el número borroso “aproximadamente el 2’5%”, o el 0’025. Asimismo también vendrá dado por su función de pertenencia y por sus α -cortes como:

$$\tilde{i}_R = \{x / \mu_{\tilde{i}_R}(x)\} = \{i_{R\alpha} = [i_R^1(\alpha), i_R^2(\alpha)] / 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

λ : Es el porcentaje de la inflación proyectada que se repercute al asegurado.

$\tilde{\pi}$: Es la inflación a largo plazo que se estima como “razonable”. Evidentemente esta conceptualización, admite su estimación a través de números borrosos, siendo de utilidad para su predicción la utilización de un haz de números borrosos, donde a cada experto que

interviene en el proceso se le da un peso probabilístico, o la metodología del Fuzzy Delphi descrita en Kaufmann y Gil Aluja (1986). La inflación borrosa vendrá dada asimismo por un número borroso como:

$$\tilde{\pi} = \{x / \mu_{\tilde{\pi}}(x)\} = \{\pi_{\alpha} = [\pi^1(\alpha), \pi^2(\alpha)] / 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

Por ejemplo, en el contexto actual, tras la constitución de la Unión Monetaria Europea, una estimación del interés real y la inflación al largo plazo razonable, podría ser realizada a través de los números borrosos triangulares:

$$\tilde{i}_R = (0'015, 0'025, 0'035), \quad \tilde{\pi} = (0'01, 0'025, 0'045)$$

Así, para una participación en la inflación anticipada del 50%, el interés técnico a aplicar sería el número borroso triangular $\tilde{i} = (0'015, 0'025, 0'035) + 0'5 \cdot (0'01, 0'025, 0'045) = (0'02, 0'0375, 0'0575)$

Propuesta 2

El interés técnico a aplicar durante toda la vida del contrato es un número borroso $\tilde{i}$ correspondiente a una proporción del interés promedio que el asegurador puede conseguir si adquiriera en el momento de valoración una cartera de renta fija y tesorería que replicara la que actualmente tiene en vigor. Un ejemplo de la valoración actuarial construyendo el tipo de interés de valoración de esta forma puede ser encontrado en Vergés⁴ (1995). Si la cartera del asegurador se compone de m títulos, una aproximación a la rentabilidad global de la cartera vendría dada por:

$$\tilde{r}_C \approx \sum_{j=1}^m w_j \tilde{r}_j$$

Donde $\tilde{r}_C$ sería el número borroso correspondiente a la rentabilidad de la cartera, w_j la proporción que el título del tipo j tiene dentro de la cartera de renta fija del asegurador y $\tilde{r}_j$ el número borroso estimado para el rendimiento medio del título j . De esta forma $\tilde{i} = \lambda \tilde{r}_C$ con $0 < \lambda < 1$, siendo λ la proporción de la rentabilidad de la cartera del asegurador que se ofrece como remuneración al asegurado.

⁴ Al menos en España, según Vergés (1995) la cartera activa del asegurador de vida contiene aproximadamente un 75% en renta fija y tesorería, de forma que, utilizando esta conceptualización del interés tenemos en cuenta el rendimiento correspondiente a la mayor parte de inversiones del asegurador, que suele materializarse en instrumentos financieros de poco o ningún riesgo de insolvencia.

Asimismo, si trabajamos con números borrosos, no vemos ninguna razón por la cual el asegurador no pueda repercutir un interés técnico $\tilde{i} = \tilde{r}_C$. En este caso el asegurador estaría considerando, de entrada, todos los escenarios posibles que respecto a las rentabilidades que por término medio conseguirá invirtiendo las primas. La prudencia podrá ser introducida en un momento posterior, cuando desfuzzyfique el valor resultante de las valoraciones realizadas y se deba determinar el precio del seguro como un valor cierto.

Evidentemente, aunque la cartera del asegurador se componga, básicamente, de activos de renta fija o monetarios, no podemos conocer en muchas ocasiones su rendimiento medio por las siguientes razones:

- Ya comentamos que, en primer lugar, el precio de los títulos de renta fija (y por tanto también de renta variable) que se negocian durante una sesión en los mercados no se manifiestan de forma cierta, sino que sus precios se negocian dentro de un intervalo, que puede cuantificarse a través de un número borroso.
- Para los rendimientos intermedios de los títulos, es decir, los cupones, no se suele conocer el tipo de interés de reinversión futuro. En cualquier caso, nosotros consideramos que, en base a los datos actuales, estos pueden ser estimados por los tipos implícitos correspondientes que se deducen de la estructura temporal de los tipos de interés para el mercado de deuda pública estatal.
- Si no se desea mantener el título hasta el vencimiento, aunque los cupones suelen venir prefijados desde el inicio de la emisión, no se conoce el interés que regirá en el mercado en el momento de venta, el cual determinará el precio del título en dicho momento. Sin embargo, hemos propuesto en la segunda parte de la tesis instrumentos para poder estimarlo a través de números borrosos.

De esta forma, si el rendimiento del j -ésimo título ha sido estimado como:

$$\tilde{r}_j = \{x / \mu_{\tilde{r}_j}(x)\} = \{r_{j\alpha} = [r_j^1(\alpha), r_j^2(\alpha)] / 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

la función de pertenencia de $\tilde{r}_C$ vendrá dada por:

$$\mu_{\tilde{r}_C}(x) = \bigvee_{x = \sum_{j=1}^m w_j x_j} \left[\bigwedge_{j=1}^m \mu_{\tilde{r}_j}(x_j) \right]$$

y por tanto, sus α -cortes serán:

$$r_{C\alpha} = \left[\sum_{j=1}^m w_j r_j^1(\alpha), \sum_{j=1}^m w_j r_j^2(\alpha) \right]$$

Por supuesto, si $\tilde{r}_j$, $j=1,2,\dots,m$ son números borrosos triangulares, y por tanto los podemos representar mediante triplas como $\tilde{r}_j = (r_j^1, r_j^2, r_j^3)$, la rentabilidad global de la cartera también lo será, de forma que:

$$\tilde{r}_C = \left(\sum_{j=1}^m w_j r_j^1, \sum_{j=1}^m w_j r_j^2, \sum_{j=1}^m w_j r_j^3 \right)$$

La última cuestión que nos queda por resolver es la obtención del rendimiento medio hasta el vencimiento para un título de renta fija. Existen tres enfoques básicos, cuyo análisis en un ambiente de certeza puede ser encontrado en Mascareñas (1991a), (1991b) y Haugen (1990).

a) El enfoque de la media aritmética

En este caso, el rendimiento del j -ésimo título, $\tilde{r}_j$, cuyo vencimiento es t_j se halla como la media aritmética de la tasas de rendimiento a un año estimadas para cada uno de los t_j años de vida del título, es decir, la media aritmética de los tipos implícitos. En la segunda parte de esta tesis ya ha sido propuesta una metodología de determinación de estos tipos futuros. De esta forma, si denominamos como ${}_{t-1}\tilde{i}_1$ al tipo implícito del t -ésimo año de vida del título y t_j es entero:

$$\tilde{r}_j = \frac{\sum_{t=1}^{t_j} {}_{t-1}\tilde{i}_1}{t_j}$$

Así, los α -cortes de $\tilde{r}_j$ vendrán dados a través de los de ${}_{t-1}\tilde{i}_1$ como:

$$r_{j\alpha} = [r_j^1(\alpha), r_j^2(\alpha)] = \left[\frac{\sum_{t=1}^{t_j} {}_{t-1}i_1^1(\alpha)}{t_j}, \frac{\sum_{t=1}^{t_j} {}_{t-1}i_1^2(\alpha)}{t_j} \right]$$

Si los tipos forward vienen dados a través de números borrosos triangulares, $\tilde{r}_j$ también será un número borroso triangular que para ${}_{t-1}\tilde{i}_1 = ({}_{t-1}i_1^1, {}_{t-1}i_1^2, {}_{t-1}i_1^3)$, se hallará como:

$$\tilde{r}_j = (r_j^1, r_j^2, r_j^3) = \left(\frac{\sum_{t=1}^{t_j} {}_{t-1}i_1^1}{t_j}, \frac{\sum_{t=1}^{t_j} {}_{t-1}i_1^2}{t_j}, \frac{\sum_{t=1}^{t_j} {}_{t-1}i_1^3}{t_j} \right)$$

Esta forma de cálculo del rendimiento medio de los títulos implica asumir que se mantiene la misma inversión en pesetas durante toda la vida del título, de forma que las ganancias que se obtienen al final de un periodo, sean cupones o incrementos de capital, son retiradas y no reinvertidas –por ejemplo, vendiendo la proporción que corresponda del título para mantener el mismo “saldo” que supone la inversión inicial- y que las pérdidas, si existieran, serían repuestas con nuevas aportaciones.

b) El enfoque de la media geométrica

En este caso, el rendimiento del título j , $\tilde{r}_j$, cuyo vencimiento es t_j se halla como la media geométrica de la tasas de rendimiento a un año –es decir, tipos forward- estimadas para cada uno de los t_j años de vida del título. Si la correspondiente al t -ésimo año se ha estimado a través de ${}_{t-1}\tilde{i}_1$ y t_j es entero:

$$\tilde{r}_j = \sqrt[t_j]{\prod_{t=1}^{t_j} (1 + {}_{t-1}\tilde{i}_1)} - 1 = \tilde{i}_{t_j}$$

Es decir, el rendimiento del título con vencimiento en t_j se identifica con el tipo spot a dicho vencimiento $\tilde{i}_{t_j}$.

En esta forma de calculo del rendimiento medio de un título también subyace una hipótesis clara: el inversor no hará efectivas las ganancias de capital hasta el vencimiento del título, mientras que los cupones que sean percibidos se reinvertirán a los tipos forward estimados.

c) El enfoque de la tasa interna de rentabilidad (TIR)

Ya comentamos con anterioridad que la TIR de un título de renta fija negociable durante una sesión no suele ser un número cierto, sino que para dicho título se negocia una horquilla de precios, y por tanto, de TIRes. Si cuantificamos dicha horquilla de precios a través de un número borroso, la TIR que obtendremos será también un número borroso cuya forma de cálculo fue comentada en la segunda parte de la tesis. Otras alternativas para estimar con este enfoque la

rentabilidad del j -ésimo título de renta fija que compone la cartera del asegurador a través de un número borroso, podrían ser asimilar la TIR a la rentabilidad correspondiente a su vencimiento, t_j , en la curva de rendimiento ajustada según los procedimientos expuestos en el apartado 3.1.2. de la segunda parte de la tesis. De esta forma obtendríamos $\tilde{r}_j$ directamente como un número borroso triangular si los parámetros que definan la curva de rentabilidades son triangulares. También podríamos partir del precio borroso que obtendremos para dicho título de los parámetros que definen al factor de descuento spot ajustados ya mediante números borrosos, siendo las posibles formas para realizar dicho ajuste, las ya analizadas en el apartado 3.2. de la segunda parte de esta tesis.

A partir de los métodos propuestos en este subepígrafe se obtiene un tipo de interés único para toda la vida del contrato a aplicar en la valoración de los contratos de seguros. De esta forma, a partir de $\tilde{i}$ podemos hallar el factor de actualización de una unidad monetaria con vencimiento a t años como el número borroso $\tilde{f}_t$:

$$\tilde{f}_t = (1 + \tilde{i})^{-t}$$

Su función de pertenencia se obtiene aplicando el principio de extensión de Zadeh, y se halla a partir de la de $\tilde{i}$ como:

$$\mu_{\tilde{f}_t}(x) = \mu_{\tilde{i}}\left(x^{-\frac{1}{t}} - 1\right)$$

y los α -cortes de $\tilde{f}_t$, $f_{t\alpha}$:

$$f_{t\alpha} = \left[(1 + i^2(\alpha))^{-t}, (1 + i^1(\alpha))^{-t} \right]$$

Si $\tilde{i}$ se estima como un número borroso triangular, $\tilde{i} = (i^1, i^2, i^3)$, obtendremos el factor de descuento de una unidad monetaria con vencimiento a t años, como un número borroso $\tilde{f}_t$, cuya función de pertenencia expresamos a través de $\mu_{\tilde{f}_t}(x)$ como:

$$\mu_{\tilde{f}_t}(x) = \begin{cases} \frac{1 + i^3 - x^{-\frac{1}{t}}}{i^3 - i^2} & \text{si } (1 + i^3)^{-t} \leq x < (1 + i^2)^{-t} \\ \frac{x^{-\frac{1}{t}} - (1 + i^1)}{i^2 - i^1} & \text{si } (1 + i^2)^{-t} \leq x < (1 + i^1)^{-t} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo sus α -cortes,

$$f_{t\alpha} = \left[(1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-t}, (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-t} \right]$$

1.3.3.2. Propuestas para la determinación de un tipo de interés variable

Propuesta 1

La primera alternativa que proponemos es ofrecer al asegurado una proporción de los tipos futuros –o todos, ya que partimos de escenarios optimistas y pesimistas con un grado de verdad asignado- que han sido estimados a través de la ETTI. El hecho de que el horizonte para el que somos capaces de estimar la ETTI sea inferior a la duración del contrato de seguro provoca que, a partir de cierto vencimiento, el asegurador no tenga un interés de referencia con el que valorar los flujos con dicho o superior vencimiento. Podemos proponer dos formas de solventar este problema:

- 1) Una alternativa es tomar el tipo forward para el vencimiento más lejano estimado y aplicarlo en los periodos más alejados, para los cuales no se tiene información de las expectativas del mercado sobre los tipos que regirán en los mismos. Como fue comentado, los agentes económicos son menos capaces de discernir entre tipos forward a medida que los vencimientos están más alejados, de forma que, con esta solución, estaríamos suponiendo que el tipo forward tiene un comportamiento asintótico, lo cual es, cuanto menos, razonable.
- 2) Alternativamente, para los periodos en los que no se disponga de una estimación de los tipos forward podemos utilizar un tipo de interés único estimado por los procedimientos propuestos en el apartado 1.3.3.1.

Si se opta por introducir esta forma de variabilidad en el tipo de interés de actualización, el interés a aplicar durante el t -ésimo año del contrato vendrá dado por el número borroso:

$${}_{t-1}\tilde{i}_1 = \left\{ x / \mu_{{}_{t-1}\tilde{i}_1}(x) \right\} = \left\{ {}_{t-1}i_{1\alpha} = \left[{}_{t-1}i_1^1(\alpha), {}_{t-1}i_1^2(\alpha) \right] / 0 \leq \alpha \leq 1 \right\}$$

de esta forma, el factor de actualización para una cuantía con vencimiento a t años será el número borroso $\tilde{f}_t$, que se hallará como:

$$\tilde{f}_j = \prod_{j=1}^t \left(1 + {}_{j-1}\tilde{i}_1 \right)^{-1}$$

Siendo entonces sus α -cortes:

$$f_{t\alpha} = \left[\prod_{j=1}^t [1 + {}_{t-1}i_1^2(\alpha)]^{-1}, \prod_{j=1}^t [1 + {}_{t-1}i_1^1(\alpha)]^{-1} \right]$$

y su función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{i}_t}(x) = \bigvee_{x = \prod_{j=1}^t (1+x_j)^{-1}} \left[\bigwedge_{j=1}^m \mu_{\tilde{i}_{j-1}}(x_j) \right]$$

Desde esta óptica, la utilización de un tipo de interés único en la valoración actuarial podría ser interpretado como la consecuencia de utilizar una ETTI borrosa plana. Podríamos comprobar que en este caso, podemos hallar una correspondencia con trabajos que tratan el interés como una variable aleatoria, como el ya mencionado trabajo de Boyle (1976), donde la hipótesis que se realiza es que los intereses correspondientes a cada periodo de la vida del contrato son variables aleatorias idénticamente distribuidas.

Propuesta 2

Otra alternativa, ya propuesta en el mencionado trabajo de Ostasiewski (1993), consistiría en utilizar una ETTI borrosa, cuya construcción ha sido el objeto de análisis de la segunda parte de la tesis. Cuando utilizamos un tipo de interés único borroso, estamos suponiendo una ETTI plana. Sin embargo, en contadas ocasiones la ETTI de un mercado –en nuestro caso nos interesa el de deuda pública–, tendrá esa forma. Así, Ostasiewski considera que una alternativa válida sería tomar una ETTI fuzzyficada, de forma que con dicha fuzzyficación quede plasmada la incertidumbre que tiene el asegurador sobre los tipos de interés futuros, la vaguedad de los mecanismos de política económica en su influencia sobre los tipos de interés a largo plazo, la anticipación de la inflación por parte de los agentes económicos, etc. Bien es cierto, como ya ha sido comentado con anterioridad, que posiblemente la ETTI estimada no cubra los vencimientos de las primas o prestaciones más alejadas en el tiempo. En este caso, para estimar los tipos spot más lejanos, podemos suponer que a partir de un determinado vencimiento éste es un tipo único. Para la estimación de dicho tipo spot constante podemos tomar el más alejado estimado –se asume un comportamiento asintótico de la ETTI– o un tipo de interés estimado con los métodos propuestos en el apartado 1.3.3.1. De esta forma, para un vencimiento t , si hemos estimado el tipo spot borroso $\tilde{i}_t$ como:

$$\tilde{i}_t = \{x / \mu_{\tilde{i}_t}(x)\} = \{i_{t\alpha} = [i_t^1(\alpha), i_t^2(\alpha)] / 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

El factor de descuento para un vencimiento t , $\tilde{f}_t$ se obtendrá como:

$$\tilde{f}_t = (1 + \tilde{i}_t)^{-t}$$

Cuya función de pertenencia, aplicando el principio de extensión de Zadeh será:

$$\mu_{\tilde{f}_t}(x) = \mu_{\tilde{i}_t}\left(x^{-\frac{1}{t}} - 1\right)$$

y los α -cortes de $\tilde{f}_t$, $f_{t\alpha}$:

$$f_{t\alpha} = \left[(1 + i_t^2(\alpha))^{-t}, (1 + i_t^1(\alpha))^{-t}\right]$$

Si $\tilde{i}_t$ se estima como un número borroso triangular, $\tilde{i}_t = (i_t^1, i_t^2, i_t^3)$, obtendremos para el valor hoy de una unidad monetaria con vencimiento a t años, $\tilde{f}_t$, a través de su función de pertenencia, como:

$$\mu_{\tilde{f}_t}(x) = \begin{cases} \frac{1 + i_t^3 - x^{-\frac{1}{t}}}{i_t^3 - i_t^2} & \text{si } (1 + i_t^3)^{-t} \leq x < (1 + i_t^2)^{-t} \\ \frac{x^{-\frac{1}{t}} - (1 + i_t^1)}{i_t^2 - i_t^1} & \text{si } (1 + i_t^2)^{-t} \leq x < (1 + i_t^1)^{-t} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y a través de sus α -cortes como,

$$f_{t\alpha} = \left[(1 + i_t^3 - (i_t^3 - i_t^2)\alpha)^{-t}, (1 + i_t^1 + (i_t^2 - i_t^1)\alpha)^{-t}\right]$$

Evidentemente, si utilizamos los métodos de estimación de la ETTI propuestos en el apartado 3.2. de la segunda parte de la tesis, aplicando la expresión [16] de dicho apartado, correspondiente a $\tilde{f}_t$, el factor de descuento para cualquier vencimiento es un número L-L de Dubois y Prade. Así, si hubieramos ajustado unos parámetros triangulares para [16], $\tilde{f}_t$ también será un número borroso triangular.

1.3.3.3. Utilización de tipos de interés con periodicidad inferior al año

Ya comentamos en el apartado 1.2., en el cual dimos unos breves esbozos sobre el tratamiento que se da al fenómeno de la mortalidad en la valoración actuarial, que normalmente la periodicidad de las prestaciones o de las primas de un seguro, suelen ser inferiores al año. En este

caso, sería más cómodo realizar la valoración de los contratos con un tanto (o tantos) de interés de dicha periodicidad. Sin embargo, en el mundo del seguro suele considerarse que el interés o intereses que se utilizan son tantos efectivos anuales, o, en estudios más académicos, que son tantos instantáneos. Para hallar un tanto efectivo de frecuencia m , con $m > 1$, $\tilde{i}_m$ equivalente a un tanto efectivo anual borroso $\tilde{i}$ el cual viene dado por su función de pertenencia o, alternativamente, a través de sus α -cortes como:

$$\tilde{i} = \{x / \mu_{\tilde{i}}(x)\} = \{i_{\alpha} = [i^1(\alpha), i^2(\alpha)] / 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

Dado que se obtiene $\tilde{i}_m$ como:

$$\tilde{i}_m = (1 + \tilde{i})^{1/m} - 1$$

su función de pertenencia será:

$$\mu_{\tilde{i}_m}(x) = \mu_{\tilde{i}}[(1+x)^m - 1]$$

y los α -cortes de $\tilde{i}_m$, $i_{m\alpha}$:

$$i_{m\alpha} = [i_m^1(\alpha), i_m^2(\alpha)] = [(1 + i^1(\alpha))^{1/m} - 1, (1 + i^2(\alpha))^{1/m} - 1]$$

Si $\tilde{i}$ se estima como un número borroso triangular, $\tilde{i} = (i^1, i^2, i^3)$, podemos obtener la función de pertenencia de $\tilde{i}_m$, $\mu_{\tilde{i}_m}(x)$, a través de $\mu_{\tilde{i}}(x)$ como:

$$\mu_{\tilde{i}_m}(x) = \begin{cases} \frac{x^m - (1 + i^1)^m}{i^2^m - i^1^m} & \text{si } (1 + i^1)^{1/m} - 1 \leq x < (1 + i^2)^{1/m} - 1 \\ \frac{1 + i^3^m - x^m}{i^3^m - i^2^m} & \text{si } (1 + i^2)^{1/m} - 1 \leq x < (1 + i^3)^{1/m} - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y los α -cortes como,

$$i_{m\alpha} = [(1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{1/m} - 1, (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{1/m} - 1]$$

De esta forma, con lo comentado en el apartado 1.2 y en éste subepígrafe, aunque el análisis que realicemos se referirá a periodos anuales, trasponer éste a periodicidades inferiores (mensuales, trimestrales, etc.) no deberá suponer ningún problema. Bastará con trabajar con una tabla de eliminación donde se refleje la evolución de la mortalidad del colectivo analizado para

periodicidades inferiores al año, lo cual no es difícil de conseguir empleando alguna de las hipótesis sobre el comportamiento del tanto instantáneo de mortalidad dentro de cada edad, las cuales fueron apuntadas en el apartado 1.2.; y realizando las correspondientes valoraciones financieras con un tanto efectivo cuya periodicidad sea la deseada. Ya hemos comprobado que éstos pueden ser inferidos a través del tanto o los tantos efectivos anuales que el asegurador desee utilizar sin ningún problema.

1.3.3.4. Intervalo esperado y valor esperado del factor de actualización.

Cuando calculamos valores actuales, lo cual es necesario para determinar primas, provisiones matemáticas o determinados parámetros asociados al riesgo de mortalidad que soporta el asegurador, si el interés que utilizamos en el proceso de actualización es un número borroso, dichos valores serán, generalmente, números borrosos. Sin embargo, en muchas ocasiones, deberemos plasmar dichas estimaciones mediante un número crisp que represente razonablemente bien el número borroso que ha sido obtenido. Para ello, nosotros propondremos la utilización del valor esperado de dicho número borroso, que, como ya comentamos en la primera parte de la tesis, permite introducir la aversión al riesgo del decisor en el proceso de desfuzzyficación. En todos los casos, dichos parámetros se obtendrán como combinación lineal de los valores esperados asociados a los factores de descuento que se utilicen en la valoración del seguro o de la estructura actuarial que sea analizada. Por ello dedicamos una especial atención a la desfuzzyficación de los factores de actualización, ya que la obtención del valor esperado del resto de parámetros que sean analizados será inmediata.

De forma general, podemos notar al factor de descuento asociado a un vencimiento t , como un número borroso que vendrá dado por su función de pertenencia y sus α -cortes como:

$$\tilde{f}_t = \{x / \mu_{\tilde{f}_t}(x)\} = \{f_{t\alpha} = [f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)] / 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

Siendo su intervalo esperado:

$$IE[\tilde{f}_t] = \left[\int_0^1 f_t^1(\alpha) d\alpha, \int_0^1 f_t^2(\alpha) d\alpha \right]$$

De esta forma, para un grado de aversión al riesgo del decisor, $\beta \in [0,1]$, el valor esperado de $\tilde{f}_t$ será:

$$VE[\tilde{f}_t; \beta] = (1 - \beta) \int_0^1 f_t^1(\alpha) d\alpha + \beta \int_0^1 f_t^2(\alpha) d\alpha$$

A partir de esta expresión general distinguiremos dos casos particulares.

Caso 1

Suponemos que trabajamos directamente con los factores de actualización obtenidos en el apartado 3.2. de la segunda parte de la tesis, suponiéndose además que son números borrosos triangulares. En este caso, podemos notarlos por la tripleta⁵ (f_t^1, f_t^2, f_t^3) , donde f_t^1 es el factor de actualización más pequeño posible, f_t^2 es el factor de actualización al que se le asigna máxima presunción y f_t^3 es el factor de actualización mayor. En este caso:

$$IE[\tilde{f}_t] = \left[\frac{f_t^1 + f_t^2}{2}, \frac{f_t^2 + f_t^3}{2} \right]$$

y,

$$VE[\tilde{f}_t; \beta] = (1 - \beta) \frac{f_t^1 + f_t^2}{2} + \beta \frac{f_t^2 + f_t^3}{2} = \frac{(1 - \beta)f_t^1 + f_t^2 + \beta f_t^3}{2}$$

Caso 2

Se utilizan los intereses spot estimados en la valoración durante todo el horizonte temporal, y éstos son números borrosos triangulares, que pueden ser variables o constantes. En este último caso aplicamos un único tipo de valoración, siendo la ETTI plana o bien se ha tomado para realizar la valoración del seguro un tipo “medio” para todo el horizonte planificador. Así, en este supuesto, $\tilde{i}_0 = \tilde{i}_1 = \dots = \tilde{i}_n = \tilde{i}$. Sea cual sea la circunstancia a la que nos enfrentemos –la más particular o la más general-, para un vencimiento t , el interés vendrá dado pues por la tripleta: $\tilde{i}_t = (i_t^1, i_t^2, i_t^3)$. En este contexto, debemos distinguir tres supuestos:

a) Si $t=0$, no existe actualización, siendo por tanto $f_{0\alpha}=[1,1]$ y por tanto:

$$\mu_{\tilde{f}_0}(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De esta forma:

$$IE[\tilde{f}_0] = [1,1] \text{ y } VE[\tilde{f}_0; \beta] = 1$$

⁵ Obsérvese que la notación que utilizamos para los factores de actualización es distinta a la utilizada en el apartado anterior. En aquél, la tripleta estaba compuesta por el valor de máxima presunción, la desviación a la izquierda, cuya sustracción del primer valor nos permitiría obtener el valor del mínimo posible, y la desviación a la derecha, cuya adición al valor de máxima presunción nos permitiría obtener el mayor valor estimado.

b) Si $t=1$,

$$E[\tilde{f}_1] = \left[\int_0^1 (1 + i_t^3 - (i_t^3 - i_t^2)\alpha)^{-1} d\alpha, \int_0^1 (1 + i_t^1 + (i_t^2 - i_t^1)\alpha)^{-1} d\alpha \right] = \left[\frac{\ln \frac{1 + i_t^3}{1 + i_t^2}}{i_t^3 - i_t^2}, \frac{\ln \frac{1 + i_t^2}{1 + i_t^1}}{i_t^2 - i_t^1} \right]$$

y por tanto,

$$VE[\tilde{f}_1; \beta] = (1 - \beta) \frac{\ln \frac{1 + i_t^3}{1 + i_t^2}}{i_t^3 - i_t^2} + \beta \frac{\ln \frac{1 + i_t^2}{1 + i_t^1}}{i_t^2 - i_t^1}$$

c) Si $t=2, 3, \dots, n$

$$E[\tilde{f}_t] = \left[\int_0^1 (1 + i_t^3 - (i_t^3 - i_t^2)\alpha)^{-t} d\alpha, \int_0^1 (1 + i_t^1 + (i_t^2 - i_t^1)\alpha)^{-t} d\alpha \right] = \left[\frac{(1 + i_t^2)^{-t+1} - (1 + i_t^3)^{-t+1}}{(t-1)(i_t^3 - i_t^2)}, \frac{(1 + i_t^1)^{-t+1} - (1 + i_t^2)^{-t+1}}{(t-1)(i_t^2 - i_t^1)} \right]$$

y por tanto,

$$VE[\tilde{f}_t; \beta] = (1 - \beta) \frac{(1 + i_t^2)^{-t+1} - (1 + i_t^3)^{-t+1}}{(t-1)(i_t^3 - i_t^2)} + \beta \frac{(1 + i_t^1)^{-t+1} - (1 + i_t^2)^{-t+1}}{(t-1)(i_t^2 - i_t^1)}$$

1.4. FORMULACIÓN DEL PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA ESTÁTICO EN EL SUPUESTO DE INTERÉS INCIERTO

Ya hemos comentado en el epígrafe anterior que muy pocos autores han modelizado la incertidumbre del fenómeno financiero inherente a un seguro de vida cuantificando el interés o intereses de valoración a través de números borrosos. En todos estos trabajos, a la hora de realizar la valoración financiero-actuarial del contrato, por ejemplo, en la determinación de las primas, se ha utilizado el enfoque más “clásico” de la matemática de los seguros de vida, basado en el denominado principio de equivalencia estático. Este enfoque consiste en reducir los capitales financieros que intervienen en la operación, cuyo devengo depende de un determinado suceso sobre la vida del asegurado, a su esperanza matemática.

De forma más precisa Vegas Asensio y Nieto del Alba (1993, p.9), respecto al principio de equivalencia estático, afirman:

“Este principio considera a la operación en su total duración. Existe equivalencia actuarial cuando el valor actual de las aportaciones es igual al valor actual de las

prestaciones, calculados estos valores actuales por medio de la esperanza matemática de los correspondientes capitales que definen el proceso financiero-estocástico”.

Así, el principio de equivalencia estático parte de que un seguro de vida es una operación financiero-aleatoria donde los capitales devengan ante el acaecimiento de determinados sucesos. Esta operación siempre tiene una duración finita $[0, T]$, y se divide en t periodos, donde $t \in [0, T]$.

Si denotamos por x la edad del asegurado, consideramos la variable aleatoria ξ_x^t asociada a sucesos relacionados con la vida del asegurado, en nuestro caso, supervivencia o fallecimiento durante un determinado periodo, cuyas realizaciones determinarán el devengo de los capitales pactados en el contrato.

Así, distinguimos dos subprocesos en un contrato de seguros de vida. En primer lugar el de primas, que podemos notar como:

$P(\xi_x^r, t) ; t \in [0, T]$, siendo $P(\xi_x^r, t)$ una cuantía aleatoria asociada a la prima a pagar por parte del asegurado en un momento t .

Y en segundo lugar, el de prestaciones, que representamos formalmente como:

$K(\xi_x^r, t)$; $t \in [0, T]$ siendo $K(\xi_x^r, t)$ una cuantía aleatoria asociada a la prestación a pagar por parte del asegurador en un momento t .

A partir de dichos subprocesos, el principio de equivalencia estática, si suponemos que el interés o intereses de valoración son conocidos de antemano queda expresado como:

$$\sum_{\forall t \in [0, T]} E[P(\xi_x^t, t)] \cdot f_t = \sum_{\forall t \in [0, T]} E[K(\xi_x^t, t)] \cdot f_t$$

donde f_t representa el factor de actualización para una cuantía cuyo vencimiento es t años y $E[\cdot]$ es el operador esperanza matemática. Dicho principio indica, si la valoración del contrato se realiza para determinar las primas a satisfacer por el asegurado, que el valor actual de la esperanza de las prestaciones debe coincidir con el valor actual de la esperanza de las contraprestaciones.

En el mencionado trabajo de Terceño *et al.* (1996) se realiza una formulación análoga, pero suponiéndose que el tipo de interés de actualización que se aplica a los capitales financieros contemplados en la operación financiera viene dado a través de un número borroso. Así, partiendo de las expresiones que hemos deducido para los factores de descuento en los apartados 1.3.3.1 y 1.3.3.2, podemos reformular el principio de equivalencia estática como:

$$\sum_{\forall t \in [0, T]} E[P(\xi_x^t, t)] \cdot \tilde{f}_t = \sum_{\forall t \in [0, T]} E[K(\xi_x^t, t)] \cdot \tilde{f}_t$$

En Terceño *et al.* (1996) se analizaba la fijación de las primas puras únicas para algunas estructuras actuariales, incorporándose las siguientes hipótesis de trabajo, las cuales también serán tenidas en consideración en el análisis que realizaremos:

- a) La operación se divide en periodos anuales, es decir, $\Delta t=1$ y por tanto el tipo de interés borroso se expresará mediante un tanto efectivo anual. Ya hemos comentado en apartados anteriores que la no asunción de esta hipótesis no aportará nada relevante al análisis que pretendemos llevar a cabo, si acaso, cargar la notación.
- b) La prima es única y devenga en el momento de valoración. Por lo tanto el principio de equivalencia utilizado será un caso particular del anterior, quedando expresado como:

$$\tilde{P} = \sum_{\forall t \in [0, T]} E[K(\xi_x^t, t)] \cdot \tilde{f}_t$$

- c) Los capitales pagaderos ante cada suceso considerado son unitarios ($K = 1$) en cuyo caso la expresión anterior puede reformularse como:

$$\tilde{P} = \sum_{\forall t \in [0, T]} E(\xi_x^t, t) \cdot \tilde{f}_t$$

Este supuesto habitual en la matemática actuarial, no es tan restrictivo como pueda parecer, ya que, de forma inmediata, se pueden trasponer los resultados obtenidos al supuesto de que las cuantías pactadas ante cualquier contingencia son constantes, lo cual es un hecho muy habitual en la práctica aseguradora, sin más que multiplicar la prima por dicha cuantía constante.

Por otra parte, también quedan contemplados implícitamente, aquéllos contratos en los que las cuantías varían en progresión geométrica según una razón de variación q , que no necesariamente tiene que ser cierta. Dicha razón, en muchas ocasiones, puede estar ligada a una revisión de las cuantías contempladas en el contrato sobre la base de algún índice que refleje la inflación, de forma que, si aceptamos como plausible su cuantificación a través de un número borroso de la forma:

$$\tilde{q} = \{x / \mu_{\tilde{q}}(x)\} = \{q_\alpha = [q^1(\alpha), q^2(\alpha)] / 0 \leq \alpha \leq 1\}, \text{ con } q^1(0) > 0$$

La cuantía aleatoria que devengará en el momento t será borrosa y aleatoria, la cual notamos como $\tilde{C}_t(\xi_x^t, t)$. Si $C_0 = 1$, hipótesis que al igual que fue comentado anteriormente, no es restrictiva ya que si la cuantía no fuese unitaria, bastaría por multiplicar la prima unitaria por las cuantías establecidas, podemos escribir entonces $\tilde{C}_t = \tilde{q}^t$, y obtenemos:

$$\tilde{P} = E[\tilde{C}_t(\xi_x^t, t)] = E[\tilde{q}^t(\xi_x^t, t)] = \tilde{q}^t E(\xi_x^t, t)$$

Y así:

$$\tilde{P} = \sum_{\forall t \in [0, T]} \tilde{q}^t \cdot E(\xi_x^t, t) \cdot \tilde{f}_t = \sum_{\forall t \in [0, T]} E(\xi_x^t, t) \cdot \tilde{f}_t'$$

Donde $\tilde{f}_t'$ es un nuevo factor de actualización que se construye como el producto de $\tilde{q} \cdot \tilde{f}_t$. Si, como ocurre usualmente en la práctica, $\tilde{q}$ refleja la estimación del decisor de algún índice que cuantifica la inflación, $\tilde{f}_t'$ es el factor de actualización que se podría construir utilizando el interés/intereses reales estimados por el asegurador para todo el horizonte temporal que abarca el seguro.

Así, obtendríamos:

$$\mu_{\tilde{f}_t'}(y) = \bigvee_{y=x_1x_2} (\mu_{\tilde{q}^t}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{f}_t}(x_2))$$

con $\mu_{\tilde{q}^t}(x) = \mu_{\tilde{q}}(x^{1/t})$

si operamos con los α -cortes, obtenemos los de $\tilde{f}_t'$, $f_{t\alpha}'$, que serán:

$$f_{t\alpha}' = [f_t'^1(\alpha), f_t'^2(\alpha)] = [q^1(\alpha)f_t^1(\alpha), q^2(\alpha)f_t^2(\alpha)]$$

Asimismo, a partir de la formulación particular del principio de equivalencia estática realizado en el punto c) anterior, podemos definir el factor de actualización financiero actuarial, el cual se trata de un elemento clave en el enfoque estático en la valoración de los seguros de vida, como:

$$E(\xi_x^t, t) \cdot \tilde{f}_t$$

Dicho factor financiero actualiza una cuantía con vencimiento en t en el caso en que devengue ante las contingencias asociadas a la variable aleatoria ξ_x^t , la reduce a su esperanza matemática y posteriormente actualiza dicha esperanza matemática. Es inmediato observar que $E(\xi_x^t, t) \cdot \tilde{f}_t$ es un número borroso cuya función de pertenencia se obtiene a través de $\mu_{\tilde{f}_t}(x)$ como:

$$\mu_{E(\xi_x^t, t) \cdot \tilde{f}_t}(x) = \mu_{\tilde{f}_t}\left(\frac{x}{E(\xi_x^t, t)}\right)$$

En el caso más típico de seguros de vida que únicamente contemplan el fenómeno de la mortalidad, existen dos factores de actualización financiero-actuarial.

- Uno asociado a que el capital contingente en t devengue en caso de que la cabeza sobre la que se pacte el seguro sobreviva t años.
- Uno asociado a que el capital contingente en t devengue en caso de que la cabeza sobre la que se pacte el seguro fallezca durante el t -ésimo año.

Este principio, ha venido siendo utilizado ampliamente (en su versión cierta al menos) porque instrumentos derivados de este enfoque, como los símbolos de conmutación, facilitaban sobremanera la farragosa tarea de computar valores actuariales. Pero en la actualidad se dispone de potentes herramientas informáticas que van dejando en desuso dichos instrumentos. El inconveniente de este método, es que al reducir los capitales contingentes a un único valor cierto, se elimina el componente aleatorio de la operación, y por tanto, parte de la información sobre el riesgo que le supone la misma al asegurador, con lo cual, la posible fijación de recargos de seguridad, márgenes de seguridad para asegurar la solvencia del asegurador, etc. debe ser realizado “a ojo”. No va a ser éste el enfoque que utilizaremos, sino que utilizaremos el denominado enfoque estocástico (en nuestro caso sería más propio decir borroso-estocástico). Un

análisis de la fijación de primas en los seguros de vida –que será el objeto de esta tesis- y en general, de valoración actuarial a través de este principio puede ser encontrado, de un modo formal y sistemático en Wolthuis y Van Hoek (1986), suponiéndose que los tipos de actualización son ciertos. Asimismo, bajo este principio enfocan el estudio de los seguros de vida los manuales de matemática de los seguros de vida más utilizados actualmente, entre los que podemos citar: Gerber (1995), Bowers *et al.* (1986) o Villalón (1998).

1.5. ENFOQUE BORROSO ESTOCÁSTICO EN LA VALORACIÓN DE LOS SEGUROS DE VIDA

1.5.1. Breve análisis del enfoque estocástico en la valoración actuarial con certeza en el tipo de valoración

En el enfoque estático, aunque manejamos probabilidades de fallecimiento y supervivencia, estas nociones tienen el significado de frecuencias que se realizarán con certeza, lo cual puede ser cierto en una cartera de pólizas del mismo tipo muy elevada, es decir, compuestos por gran número de individuos de la misma edad y sexo asegurados, suscritas en un mismo momento temporal y con las mismas prestaciones aseguradas, lo cual, rara vez se da en la práctica.

Suponiendo un contexto de certeza en el interés de valoración a utilizar, tiempo discreto y anual, esta conceptualización en el análisis de los seguros de vida parte de la variable aleatoria T_x , o número de años enteros de vida para una cabeza de edad x , ya descrita en el apartado 1.2. Ya hemos comprobado que no habría ningún problema en discretizarla en periodos de tiempo más pequeños. A partir de esta variable aleatoria se define la variable aleatoria “pérdida para el asegurador” que es una función de T_x y que notamos L_{T_x} o simplemente L . Esta se construye a través del espacio de sucesos elementales Ω de T_x , de forma que $L: t \in \Omega \rightarrow L_t$, siendo L_t la pérdida del asegurador si el asegurado sobrevive t años enteros. L_t se calcula como el valor actual de las prestaciones satisfechas por el asegurador una vez deducidas las primas percibidas por éste, en el caso en que el asegurado sobreviva t años enteros desde el origen de la operación. Por supuesto, $\text{Prob}[L=L_t]={}_tq_x$. Las ventajas de este enfoque frente al tradicional son:

- a) El valor de las primas que se determinan utilizando el principio de equivalencia estático, que se suele denominar como prima pura, se obtiene con este enfoque sin más que plantear $E[L]=0$. Así, los resultados que se obtienen con el principio de equivalencia estático se pueden obtener también con éste, siendo pues, el primero, un caso particular del segundo.

- b) Permite al asegurador obtener más información sobre el riesgo de desviaciones de siniestralidad ya que se manejan o se pueden inferir funciones de cuantía, de distribución, varianzas y desviaciones estándar, etc. del valor actual de las pérdidas que puede sufrir con la cartera vigente.
- c) Lo comentado anteriormente nos permitirá fijar recargos para desviaciones de siniestralidad en las primas de los asegurados de forma más precisa, aplicando otros principios a parte del de la esperanza matemática. Entre estos, podemos mencionar el principio de la desviación estándar, el de la varianza y, el cual será especialmente considerado por nosotros, el principio del percentil, basado en fijar un recargo que reduzca a un nivel ε prefijado la probabilidad de pérdida de la compañía. Por supuesto, al partirse de una descripción completa de la variable borroso-aleatoria pérdida para la cabeza asegurada, mediante simulación estocástica o aplicando el Teorema Central del Límite, se pueden obtener dichos recargos, teniendo en cuenta el tamaño del colectivo asegurado. Evidentemente, a mayor tamaño del colectivo asegurado, el recargo para desviaciones en la mortalidad deberá ser menor y deberá tender a cero cuando el colectivo tiende a infinito.

1.5.2. Enfoque borroso estocástico en la valoración de los seguros de vida y la utilización de variables borroso aleatorias

Dado que partimos de unos tipos de interés de valoración definidos por números borrosos, los valores actuales de las pérdidas del asegurador para cada uno de los periodos en que puede fallecer la cabeza asegurada vendrán dados por un número borroso. Así pues, en este caso, la variable aleatoria pérdida es una variable borroso aleatoria, esto es, una variable aleatoria cuyas realizaciones son difusas. Ésta será notada como $\tilde{L}$, y es el resultado de efectuar la aplicación $\tilde{L}: t \in \Omega \rightarrow \tilde{L}_t$, siendo $\tilde{L}_t$ el número borroso correspondiente a la diferencia entre las prestaciones percibidas por el asegurado y las primas que ha satisfecho si fallece durante el t -ésimo año del contrato. Por supuesto, $\tilde{L}_t$ será un número borroso que podemos representar como:

$$\tilde{L}_t = \{x / \mu_{\tilde{L}_t}(x)\} = \{L_{t\alpha} = [L_t^1(\alpha), L_t^1(\alpha)] / 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

y cuya probabilidad de ocurrencia asociada es ${}_tq_x$

En esta parte de la tesis analizaremos como fijar la prima única, sin tener en cuenta los recargos por gastos de gestión, de forma que el asegurador limite su probabilidad de pérdida para diversas estructuras de prestaciones típicas en la práctica aseguradora, siendo asimismo éstas unitarias. Sin

embargo, los resultados que obtengamos pueden ser generalizados al supuesto de cuantías constantes, y sin mucho problema, al supuesto de prestaciones variables en progresión geométrica; en este último caso, con pequeñas modificaciones. En cualquier caso, no contemplaremos que las cuantías aseguradas puedan ser borrosas, aunque ello podría ocurrir por ejemplo en un seguro capital diferido con reembolso de primas en el caso en que el asegurado falleciera antes del devengo de dicho capital de supervivencia, o si las cuantías aseguradas puedan revalorizarse en función de la inflación o de algún índice económico, aunque este supuesto está implícitamente contemplado en la fijación del interés de valoración.

Asimismo sólo analizaremos la fijación de primas únicas pagaderas en el inicio del contrato y no periódicas. No obstante, con la metodología que proponemos, creemos que la relajación de esta hipótesis debe ser motivo de posteriores investigaciones, que en cualquier caso, quedan fuera de los objetivos y extensión de esta tesis.

Por otra parte, los métodos que propondremos son también aplicables sin excesivas modificaciones a la determinación de las provisiones matemáticas asociadas a un seguro ya iniciado y donde únicamente quedan prestaciones pendientes a efectuar por el asegurador. Bastará asimilar la provisión matemática a la prima pura sin recargos por desviaciones de la mortalidad y el margen de solvencia con que se deban complementar las provisiones matemáticas con el recargo aplicado al asegurado sobre la prima pura para limitar la probabilidad de quiebra del asegurador.

Para realizar el análisis propuesto deberemos tener en cuenta la existencia de dos riesgos para el asegurador una vez se ha formalizado el contrato, y los cuales se han analizado anteriormente, y que tienen diversa naturaleza: el riesgo de supervivencia o mortalidad (es evidente que una supervivencia distinta a la prevista por el asegurador puede poner en peligro su solvencia), y el riesgo de interés, que, tras lo comentado, posiblemente sea mejor denominarla como incertidumbre en el tipo de interés.

Respecto al riesgo de mortalidad, éste disminuye aumentando el número de asegurados, ya que, según la ley de los grandes números, la frecuencia relativa de los años de supervivencia en un colectivo de individuos de edad x , debe tender a su probabilidad a medida que aumentamos dicho colectivo.

En lo referente al tratamiento de éste, seguiremos el esquema propuesto en Alegre y Claramunt (1988) en el que se analizaba la fijación de las primas únicas para un plan de pensiones de prestación definida, distinguiéndose entre la prima pura y un recargo de seguridad. Por otra parte,

en este trabajo, los autores suponían que el riesgo de quiebra para el asegurador únicamente venía dado por las desviaciones que en la siniestralidad se pudieran dar, siendo el tipo de interés cierto. En dicho trabajo se diferenciaba, entre tres casos posibles:

- a) La existencia de un único partícipe.
- b) Existe un colectivo elevado de partícipes con la misma edad y cuantías aseguradas para la renta de supervivencia.
- c) Para cada cuantía y edad existe un número muy limitado de partícipes.

Dada la importancia del tamaño del colectivo para decrementar el riesgo de mortalidad, y siguiendo el mencionado trabajo de Alegre y Claramunt, nosotros también distinguiremos entre:

- a) El colectivo asegurado esté compuesto sólo por un individuo de edad x . Si bien este supuesto no tiene gran trascendencia práctica, será de interés ya que nos permitirá exponer de forma clara la metodología que seguiremos en el resto del trabajo.
- b) La cartera está compuesta por un colectivo elevado de N asegurados de edad x , con idénticas prestaciones pactadas a lo largo de la vida del contrato y con pólizas suscritas en el mismo instante temporal. Este supuesto permite utilizar la hipótesis clásica de la teoría del riesgo, basada en el Teorema Central del Límite, la cual deberá ser adaptada a la circunstancia de que el valor actual de las prestaciones presenta un componente difícilmente asumible como cierto o incluso, como aleatorio, y provocado por la incorporación de la incertidumbre sobre los rendimientos futuros.
- c) Nos hallemos ante un colectivo reducido de individuos para cada edad y prestaciones aseguradas. En este caso no será factible aplicar el Teorema Central del Límite, siendo entonces necesario utilizar métodos de simulación estocástica. La metodología que nosotros utilizaremos es la propuesta por Pitacco (1986), utilizada por ejemplo, en Sarrasí (1995) en el estudio de la cobertura de los márgenes de solvencia en los seguros colectivos.

El segundo tipo de riesgo, que hemos modelizado a través de números borrosos, viene provocado por el carácter incierto del rendimiento que el asegurador obtendrá con la cartera activa destinada a cubrir sus obligaciones. Cuando el asegurador pacta un seguro de vida asume también el riesgo de interés, es decir, el riesgo de incurrir en pérdidas debido a las variaciones en los rendimientos obtenidos con la inversión de las primas y provisiones de la compañía, bien porque se reduzcan los rendimientos financieros futuros previstos o bien porque dicha fluctuación afecte al valor de la cartera de inversiones. A este respecto, cuando debamos desfuzzyficar los resultados de las valoraciones realizadas, deberemos utilizar un método que permita reflejar la prudencia del asegurador respecto al interés a ofrecer. Nosotros, como ya fue comentado, proponemos como

criterio el valor esperado de un número borroso, criterio que ya fue analizado en la primera parte de la tesis y en el subepígrafe 1.3.3.4. de esta parte.

Un incremento de la cartera de los asegurados implica incrementar en términos absolutos las posibles pérdidas que el asegurador puede sufrir en el caso en que haya sobrestimado al realizar el cálculo de la prima los rendimientos futuros que se pueden obtener con la cartera de activos financieros adquiridos con las primas ingresadas o que se ingresarán en el futuro. Por supuesto, ello no se soluciona ofreciendo un interés excesivamente prudente, ya que el producto ofrecido sería poco atractivo para el asegurado. En este caso, el peligro de la compañía de seguros será su desaparición por no ser capaz de ofrecer seguros competitivos respecto al resto de productos financieros existentes en el mercado. Evidentemente, el asegurador debe buscar un equilibrio entre la necesaria prudencia valorativa y el ofrecimiento de rentabilidades atractivas. Así, las repercusiones de ambos riesgos en la solvencia del asegurador al producirse un incremento de la cartera de los asegurados tienen distintos efectos, lo cual deberá reflejarse en los recargos que el asegurador debe aplicar para asegurar su solvencia.

El desarrollo de los sucesivos epígrafes que componen el resto de esta parte de la tesis se ha estructurado de la siguiente manera:

- 1) En primer lugar, analizaremos, suponiendo certeza en el tipo de interés, el valor actual de las estructuras actuariales más importantes como variables aleatorias. Los resultados obtenidos facilitarán sobremanera posteriores desarrollos.
- 2) Posteriormente analizaremos el valor actual de dichas estructuras actuariales, tomándose un tipo o unos tipos de interés borrosos. Así los valores actuales asociados a estas estructuras son variables borroso aleatorias. Algunos de los resultados obtenidos en certeza nos permitirán una mayor facilidad en el estudio en incertidumbre.
- 3) Acabaremos analizando la fijación de primas únicas en el caso en que las prestaciones aseguradas tengan alguna de las formas descritas en los anteriores apartados, y si el interés que se aplica para valorar el contrato es borroso. Asimismo, también ofreceremos instrumentos que en el nuevo ambiente, borroso y aleatorio, nos permitan analizar la solvencia del asegurador tras repercutir la prima. Como hemos comentado en párrafos precedentes, este análisis comprenderá tres supuestos: carteras con un único asegurado, carteras de pólizas homogéneas con un número de asegurados suficientes que permita aplicar el Teorema Central del Límite, y carteras homogéneas con un número de asegurados poco elevado, de forma que el Teorema Central del Límite no podrá ser aplicado.

CAPÍTULO 2:

ANÁLISIS DE LAS PRINCIPALES ESTRUCTURAS ACTUARIALES CON CERTEZA EN EL TIPO DE INTERÉS DE VALORACIÓN

A continuación describimos, desde un punto de vista estocástico, el valor actual de las principales estructuras actuariales asociadas al riesgo de fallecimiento o supervivencia de una sola cabeza, siendo estas unitarias. En concreto, las estructuras que analizaremos son:

- a) Capital de fallecimiento
- b) Capital de supervivencia
- c) Seguro inmediato de vida entera
- d) Seguro inmediato temporal
- e) Seguro mixto o endowment
- f) Renta vitalicia anticipada
- g) Renta temporal anticipada

En todos los casos damos una expresión para las mismas de su esperanza matemática, la cual se puede obtener aplicando el principio de equivalencia estática, la varianza y la desviación estándar. Posteriormente analizamos el comportamiento de estas medidas de las variables aleatorias respecto al tipo de interés, ya que estos parámetros son funciones del tipo o los tipos de interés de valoración, puesto que las realizaciones de dichas variables aleatorias lo son. El análisis del comportamiento de estos parámetros respecto al tipo de interés de valoración será de gran utilidad cuando debamos definirlos para tipos de descuento borrosos, ya que una forma natural de inferirlos será operar con α -cortes, siendo necesario para ello obtener los extremos de los mismos, es decir, el máximo y el mínimo de dichos parámetros para un conjunto de intereses (variables independientes) que viene dado a través de un intervalo de confianza nítido. Para todas las estructuras trataremos dos supuestos:

- a) Uno más general, en el cual se supone que la ETTI de referencia en la valoración no es plana, y por tanto, los tipos de interés que se aplican a cada vencimiento no tienen porque ser iguales.
- b) El caso en que se tome como interés de valoración un único interés, es decir, la ETTI es plana, lo cual correspondería a aplicar el tipo de interés que por término medio el asegurador espera obtener con la inversión de las primas a lo largo de toda la vida del contrato.

2.1. CAPITAL DE FALLECIMIENTO

En este caso, el asegurador paga al asegurado una unidad monetaria si este último fallece durante el t -ésimo año contado desde el momento de realizarse la valoración. Suponiendo que la unidad monetaria es pagadera al final de dicho año, la función de cuantía que describe su valor actual es:

$$Z = \begin{cases} f_{t+1} & \text{con } {}_t|q_x \\ 0 & \text{con } 1-{}_t|q_x \end{cases}$$

Hallamos la esperanza matemática, simbolizada habitualmente como ${}_tB_x$, y que es el factor de descuento financiero-actuarial de un capital de fallecimiento utilizado en el enfoque estático de valoración de los seguros de vida. También damos la expresión de la varianza de dicha variable aleatoria, $V[Z]$ y la desviación estándar $D[Z]$:

$$E[Z] = {}_tB_x = f_{t+1} {}_t|q_x; \quad V[Z] = (f_{t+1})^2 {}_t|q_x (1-{}_t|q_x); \quad D[Z] = f_{t+1} \sqrt{{}_t|q_x (1-{}_t|q_x)}$$

Si el tipo de interés es constante a lo largo de la vida del contrato, la expresión de Z en este caso es:

$$Z = \begin{cases} (1+i)^{-(t+1)} & \text{con } {}_t|q_x \\ 0 & \text{con } 1-{}_t|q_x \end{cases}$$

En este supuesto, las expresiones de la esperanza matemática, de la varianza y de la desviación estándar que obtenemos son:

$${}_tB_x = (1+i)^{-(t+1)} {}_t|q_x; \quad V[Z] = (1+i)^{-2(t+1)} {}_t|q_x (1-{}_t|q_x); \quad D[Z] = (1+i)^{-(t+1)} \sqrt{{}_t|q_x (1-{}_t|q_x)}$$

2.2. CAPITAL DE SUPERVIVENCIA

En este caso devenga una cuantía unitaria si un asegurado de x años de edad sobrevive t años después, y nada en caso contrario. La función de cuantía del valor actual de este capital es:

$$Z = \begin{cases} f_t & \text{con } {}_t p_x \\ 0 & \text{con } {}_t q_x \end{cases}$$

Su esperanza matemática, es simbolizada en la literatura actuarial como ${}_tE_x$, y es el factor de actualización de una cuantía de supervivencia pagadera dentro de t años, cuando se utiliza el enfoque estático en la valoración de los seguros de vida. Asimismo, también damos el valor de su varianza, y de su desviación estándar, de forma que:

$$E[Z] = {}_tE_x = f_t {}_t p_x; V[Z] = (f_t)^2 {}_t p_x {}_t q_x \text{ y } D[Z] = f_t \sqrt{{}_t p_x {}_t q_x}$$

Si el interés a aplicar en cada periodo es constante, la función de cuantía de Z es:

$$Z = \begin{cases} (1+i)^{-t} & \text{con } {}_t p_x \\ 0 & \text{con } {}_t q_x \end{cases}$$

siendo entonces la esperanza matemática, la varianza y la desviación estándar:

$$E[Z] = {}_tE_x = (1+i)^{-t} {}_t p_x; V[Z] = (1+i)^{-2t} {}_t p_x {}_t q_x \text{ y } D[Z] = (1+i)^{-t} \sqrt{{}_t p_x {}_t q_x}$$

2.3. SEGURO INMEDIATO DE VIDA ENTERA

Una estructura tipo seguro de vida entera inmediato, que únicamente puede venir asociada a las prestaciones de un seguro que cubra la contingencia de fallecimiento, consiste en que en el momento de su fallecimiento el asegurado tiene derecho a percibir un capital (unitario en nuestro análisis) al final de dicho año. En este caso, el valor actual de esta estructura es una variable aleatoria con la siguiente estructura:

$$Z = f_{t+1} \quad \text{con } {}_t q_x \quad t=0, 1, \dots, w-x-1$$

La esperanza matemática y la varianza de esta variable aleatoria son:

$$E[Z] = \sum_{t=0}^{w-x-1} f_{t+1} {}_t q_x = \sum_{t=0}^{w-x-1} B_x = A_x \text{ y } V[Z] = \sum_{t=0}^{w-x-1} (f_{t+1})^2 {}_t q_x - (A_x)^2$$

Obteniéndose, por supuesto, $D[Z]$ como la raíz cuadrada de $V[Z]$.

En el caso particular en que el interés a aplicar a lo largo de toda la vida del asegurado sea constante, obtenemos que la variable aleatoria Z, la esperanza y la varianza asociadas son:

$$Z = (1+i)^{-(t+1)} \quad \text{con } {}_t q_x \quad t=0, 1, \dots, w-x-1$$

donde,

$$E[Z] = \sum_{t=0}^{w-x-1} (1+i)^{-(t+1)} {}_t q_x = A_x; V[Z] = \sum_{t=0}^{w-x-1} (1+i)^{-2(t+1)} {}_t q_x - (A_x)^2; D[Z] = \sqrt{V[Z]}$$

2.4. SEGURO INMEDIATO TEMPORAL

También es una estructura que únicamente está asociada al subproceso de prestaciones de un seguro. Desde el momento en que se valora la estructura hasta el fallecimiento de la cabeza asegurada de edad x , si este se produce dentro de los n años para los cuales la contingencia de fallecimiento está cubierta, el asegurado tiene derecho a percibir un capital unitario al final del año de su fallecimiento. En el caso en que el asegurado sobreviva n años, éste no percibe nada. La variable aleatoria Z que describe el valor de las prestaciones es:

$$Z = \begin{cases} f_{t+1} & \text{con } {}_t|q_x \quad t = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0 & \text{con } {}_n p_x \end{cases}$$

Siendo entonces la esperanza matemática y la varianza de esta variable aleatoria:

$$E[Z] = \sum_{t=0}^{n-1} f_{t+1} {}_t|q_x = \sum_{t=0}^{n-1} {}_t B_x = {}_n A_x \text{ y } V[Z] = \sum_{t=0}^{n-1} (f_{t+1})^2 {}_t|q_x - ({}_n A_x)^2$$

Asimismo, la desviación estándar de Z se obtendrá como raíz cuadrada de $V[Z]$.

En el caso particular en que el interés a aplicar a lo largo de toda la vida del asegurado sea constante, obtenemos que la variable aleatoria Z , su esperanza y su varianza son:

$$Z = \begin{cases} (1+i)^{-(t+1)} & \text{con } {}_t|q_x \quad t = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0 & \text{con } {}_n p_x \end{cases}$$

$$E[Z] = \sum_{t=0}^{n-1} (1+i)^{-(t+1)} {}_t|q_x = {}_n A_x \text{ y } V[Z] = \sum_{t=0}^{n-1} (1+i)^{-2(t+1)} {}_t|q_x - ({}_n A_x)^2$$

2.5. SEGURO MIXTO O ENDOWMENT

Esta estructura combina un seguro temporal inmediato de duración n años con un capital de supervivencia con el mismo vencimiento. De esta forma, la variable aleatoria correspondiente al valor de las prestaciones viene dada por la convolución de las variables aleatorias que cuantifican el valor actual de las prestaciones de cada tipo de seguro. Así, Z para este caso es:

$$Z = \begin{cases} f_{t+1} & \text{con } {}_t|q_x \quad t = 0, 1, \dots, n-1 \\ f_n & \text{con } {}_n p_x \end{cases}$$

Siendo entonces la esperanza matemática y la varianza de esta variable aleatoria:

$$E[Z] = {}_nA_x + {}_nE_x \text{ y } V[Z] = \sum_{t=0}^{n-1} (f_{t+1})^2 {}_t|q_x + (f_n)^2 {}_n p_x - ({}_nA_x + {}_nE_x)^2$$

Obteniéndose, por supuesto, $D[Z] = \sqrt{V[Z]}$.

En el caso particular en que el interés a aplicar a lo largo de toda la vida del contrato sea constante, obtenemos la función de cuantía, la esperanza y la varianza del valor actual de prestaciones a través de la variable aleatoria Z como:

$$Z = \begin{cases} (1+i)^{-t+1} & \text{con } {}_t|q_x \quad t = 0, 2, \dots, n-1 \\ (1+i)^{-n} & \text{con } {}_n p_x \end{cases}$$

Hallándose la media y la varianza de dicha variable aleatoria sin más que sustituir f_t por $(1+i)^t$.

2.6. RENTAS VITALICIAS ANTICIPADAS

Esta estructura puede estar asociada, tanto a un subproceso de prestaciones como a uno de primas. Según esta estructura, se devenga, en caso de suponerse cuantías unitarias, una unidad monetaria a principio de cada año si el asegurado –de edad x en el momento de realizarse la valoración– sobrevive en dicha fecha. La variable aleatoria Z que describe el valor actual de los capitales asociados a esta estructura es:

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_d q_x \\ \sum_{j=d}^t f_j = {}_d| \ddot{a}_{t-d+1|} & \text{con } {}_t|q_x \quad t = d, d+1, \dots, w-x-1 \end{cases}$$

Siendo d el diferimiento de la renta. Evidentemente, si el asegurado fallece durante los primeros d años del contrato, dicha renta no devenga y el valor actual de la misma es nulo.

Respecto a los momentos de la variable aleatoria Z , observamos que la esperanza matemática de su valor actual es:

$$E[Z] = \sum_{t=d}^{w-x-1} \left[\sum_{j=d}^t f_j \right] {}_t|q_x = \sum_{t=d}^{w-x-1} f_t \sum_{j=t}^{w-x-1} {}_j|q_x = \sum_{t=d}^{w-x-1} f_t {}_t p_x = \sum_{t=d}^{w-x-1} {}_t E_x = {}_d| \ddot{a}_x$$

En el caso, muy habitual, en que no exista diferimiento ($d=0$), es decir, que la renta de supervivencia sea inmediata, la esperanza matemática es notada como $\ddot{a}_x$.

La varianza de dicha variable aleatoria, se obtiene como:

$$V[Z] = \sum_{t=d}^{w-x-1} \left[\sum_{j=d}^t f_j \right]^2 {}_tq_x - ({}_d\ddot{a}_x)^2$$

Desarrollamos a continuación la expresión de la varianza, de forma que el resultado que obtengamos nos será de utilidad en posteriores análisis:

$$\begin{aligned} V[Z] &= \sum_{t=d}^{w-x-1} \left[\sum_{j=d}^t f_j \right]^2 {}_tq_x - \left[\sum_{t=d}^{w-x-1} f_t {}_tp_x \right]^2 = \sum_{t=d}^{w-x-1} {}_tq_x \sum_{j=d}^t \sum_{r=d}^t f_j f_r - \sum_{t=d}^{w-x-1} \sum_{j=d}^{w-x-1} f_t f_j {}_tp_x {}_jp_x = \\ &= \sum_{t=d}^{w-x-1} [f_t]^2 {}_tp_x + 2 \sum_{t=d+1}^{w-x-1} {}_tq_x \sum_{j=d+1}^t f_j \sum_{r=d+1}^{j-1} f_r - \sum_{r=d}^{w-x-1} [f_r]^2 [{}_tp_x]^2 - 2 \sum_{t=d+1}^{w-x-1} \sum_{j=d}^{t-1} f_t f_j {}_tp_x {}_jp_x = \\ &= \sum_{t=d}^{w-x-1} [f_t]^2 {}_tp_x (1 - {}_tp_x) + 2 \sum_{t=d+1}^{w-x-1} f_t \sum_{j=d}^{t-1} f_j \sum_{r=t}^{w-x-1} {}_rq_x - 2 \sum_{t=d+1}^{w-x-1} f_t {}_tp_x \sum_{j=d}^{t-1} f_j {}_jp_x = \\ &= \sum_{t=d}^{w-x-1} [f_t]^2 {}_tp_x {}_tq_x + 2 \sum_{t=d+1}^{w-x-1} f_t {}_tp_x \sum_{j=d}^{t-1} f_j (1 - {}_jp_x) = \sum_{t=d}^{w-x-1} [f_t]^2 {}_tp_x {}_tq_x + 2 \sum_{t=d+1}^{w-x-1} \sum_{j=d}^{t-1} f_t f_j {}_tp_x (1 - {}_jp_x) \end{aligned}$$

La interpretación de esta segunda expresión de la varianza de Z , es la consecuencia de que Z puede conceptualizarse también como la suma de $w-x-d$ capitales de supervivencia como los estudiados en el apartado 2.2. Así, si denominamos como Z al valor actual de la renta de supervivencia vitalicia y como Z_t a la variable aleatoria valor actual del capital de supervivencia con vencimiento en el t -ésimo año con $t=d, d+1, \dots, w-x-1$, es inmediato comprobar que:

$$V[Z] = \sum_{t=d}^{w-x-1} V[Z_t] + 2 \sum_{t=d+1}^{w-x-1} \sum_{j=d}^{t-1} C[Z_t, Z_j]$$

Por una parte, ya conocemos que $V[Z_t] = [f_t]^2 {}_tp_x {}_tq_x$.

y por otra parte, si $t > j$:

$$C[Z_t, Z_j] = E[Z_t, Z_j] - E[Z_t] E[Z_j] = f_t \cdot f_j \cdot {}_tp_x - f_t \cdot f_j \cdot {}_tp_x \cdot {}_jp_x = f_t \cdot f_j \cdot {}_tp_x \cdot (1 - {}_jp_x)$$

el sentido de la expresión obtenida queda explicado.

Asimismo, $D[Z]$ se obtendrá como $\sqrt{V[Z]}$.

Si el interés que rige en la operación es constante a lo largo de toda la vida del contrato, entonces podemos observar que:

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_d q_x \\ {}_d | \ddot{a}_{\overline{t-d+1}|i} & \text{con } {}_t | q_x \quad t = d, d+1, \dots, w-x-1 \end{cases}$$

En este caso ${}_d | \ddot{a}_x$ es:

$$E[Z] = \sum_{t=d}^{w-x-1} \left[\sum_{j=d}^t (1+i)^{-j} \right] {}_t | q_x = \sum_{t=d}^{w-x-1} {}_t E_x = {}_d | \ddot{a}_x$$

Siendo asimismo la varianza de Z:

$$V[Z] = \sum_{t=d}^{w-x-1} \left[\sum_{j=d}^t (1+i)^{-j} \right]^2 {}_t | q_x - ({}_d | \ddot{a}_x)^2$$

O alternativamente:

$$V[Z] = \sum_{t=d}^{w-x-1} (1+i)^{-2t} {}_t p_x {}_t q_x + 2 \sum_{t=d+1}^{w-x-1} \sum_{j=d}^{t-1} (1+i)^{-t-j} {}_t p_x (1 - {}_j p_x)$$

2.7. RENTAS TEMPORALES ANTICIPADAS

La estructura de esta renta, puede estar asociada tanto a un subproceso de primas como de prestaciones, al igual que ocurría para el supuesto de rentas vitalicias. En este caso, si el asegurado sobrevive al diferimiento de la renta, se devenga una cuantía de 1 unidad monetaria durante n años al principio de cada año, mientras la cabeza asegurada se mantenga con vida. En este caso, la variable aleatoria discreta que describe el valor de la renta es:

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_d q_x \\ \sum_{r=d}^t f_t = {}_d | \ddot{a}_{\overline{t-d+1}|} & \text{con } {}_t | q_x \quad t = d, d+1, \dots, d+n-1 \\ \sum_{r=d}^{d+n-1} f_t = {}_d | \ddot{a}_{\overline{n}|} & \text{con } {}_{d+n} p_x \end{cases}$$

Así, la esperanza matemática de Z , ${}_d | n \ddot{a}_x$ se obtiene como:

$$E[Z] = \sum_{t=d}^{d+n-1} \left[\sum_{r=d}^t f_t \right] {}_t | q_x + \left[\sum_{t=d}^{d+n-1} f_t \right] {}_{d+n} p_x = \sum_{t=d}^{d+n-1} f_t {}_t p_x = \sum_{t=d}^{d+n-1} {}_t E_x = {}_d | n \ddot{a}_x$$

la cual, en el caso particular de que la renta sea inmediata, $d=0$, se nota simplemente como ${}_n \ddot{a}_x$.

Por otra parte, la varianza se calcula como:

$$V[Z] = \sum_{t=d}^{d+n-1} \left[\sum_{j=d}^t f_j \right]^2 {}_t|q_x + \left[\sum_{t=d}^{d+n-1} f_t \right]^2 {}_{d+n}p_x - ({}_{d|n}\ddot{a}_x)^2$$

Como en el caso de las rentas vitalicias, nos va a ser de utilidad en posteriores desarrollos reexpresar $V[Z]$ como la varianza que se obtiene por la suma de los capitales de supervivencia que forman Z , de forma que:

$$\begin{aligned} V[Z] &= \sum_{t=d}^{d+n-1} \left[\sum_{j=d}^t f_j \right]^2 {}_t|q_x + \left[\sum_{j=d}^t f_j \right]^2 {}_{d+n}p_x - \left[\sum_{t=d}^{d+n-1} f_t {}_t|p_x \right]^2 = \sum_{t=d}^{d+n-1} {}_t|q_x \sum_{j=d}^t \sum_{r=d}^t f_j f_r + \\ &+ \sum_{t=d}^{d+n-1} \sum_{j=d}^{d+n-1} f_t f_j {}_{d+n}p_x - \sum_{t=d}^{d+n-1} \sum_{j=d}^{d+n-1} f_t f_j {}_t|p_x {}_j|p_x = \sum_{t=d}^{d+n-1} {}_t|q_x \sum_{j=d}^t (f_j)^2 + \sum_{t=d}^{d+n-1} (f_t)^2 {}_{d+n}p_x + \\ &+ 2 \sum_{t=d+1}^{d+n-1} {}_t|q_x \sum_{j=d+1}^t f_j \sum_{r=d}^{j-1} f_r + 2 {}_{d+n}p_x \sum_{t=d+1}^{d+n-1} f_t \sum_{j=d}^{t-1} f_j - \sum_{r=d}^{d+n-1} [f_r]^2 [{}_t|p_x]^2 - 2 \sum_{t=d+1}^{d+n-1} \sum_{j=d}^{t-1} f_t f_j {}_t|p_x {}_j|p_x = \\ &= \sum_{t=d}^{d+n-1} [f_t]^2 \sum_{j=t}^{d+n-1} {}_j|q_x + {}_{d+n}p_x \sum_{r=d}^{d+n-1} [f_r]^2 + 2 \sum_{t=d+1}^{d+n-1} f_t \sum_{j=d}^{t-1} f_j \sum_{r=t}^{w-x-1} {}_r|q_x + 2 {}_{d+n}p_x \sum_{t=d+1}^{d+n-1} f_t \sum_{j=d}^{t-1} f_j - \\ &- \sum_{t=d}^{d+n-1} [f_t]^2 ({}_t|p_x)^2 - 2 \sum_{t=d+1}^{d+n-1} f_t {}_t|p_x \sum_{j=d}^{t-1} f_j {}_j|p_x = \sum_{t=d}^{d+n-1} [f_t]^2 {}_t|p_x {}_t|q_x + 2 \sum_{t=d+1}^{d+n-1} \sum_{j=d}^{t-1} f_t f_j {}_t|p_x (1 - {}_j|p_x) \end{aligned}$$

Como siempre, la desviación estándar se obtendrá como raíz cuadrada de la varianza.

Asimismo, si se utiliza un tipo de interés constante en la valoración de esta estructura actuarial, observamos que:

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_d|q_x \\ {}_d|\ddot{a}_{\overline{t-d+1}|i} & \text{con } {}_t|q_x \quad t = d, d+1, \dots, d+n-1 \\ {}_d|\ddot{a}_{\overline{n}|i} & \text{con } {}_{d+n}p_x \end{cases}$$

Obteniéndose entonces $E[Z]$ y $V[Z]$ sin más que sustituir f_t por $(1+i)^{-t}$ en las expresiones halladas anteriormente. En concreto:

$$E[Z] = \sum_{t=d}^{d+n-1} \left[\sum_{j=d}^t (1+i)^{-j} \right] {}_t|q_x = \sum_{j=d}^{d+n-1} {}_j|E_x = {}_{d|n}\ddot{a}_x$$

Siendo asimismo la varianza de Z :

$$V[Z] = \sum_{t=d}^{d+n-1} \left[\sum_{j=d}^t (1+i)^{-j} \right]^2 {}_t|q_x + \sum_{t=d}^{d+n-1} (1+i)^{-t} {}_{d+n}p_x - ({}_{d|n}\ddot{a}_x)^2$$

O alternativamente:

$$V[Z] = \sum_{t=d}^{d+n-1} (1+i)^{-2t} {}_t p_x {}_t q_x + 2 \sum_{t=d+1}^{d+n-1} \sum_{j=d}^{t-1} (1+i)^{-t-j} {}_t p_x (1 - {}_j p_x)$$

2.8. ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE LOS MOMENTOS REPRESENTATIVOS DEL VALOR ACTUAL DE LAS DIFERENTES ESTRUCTURAS ACTUARIALES RESPECTO AL TIPO DE INTERÉS DE VALORACIÓN

A continuación analizamos el crecimiento o decrecimiento de los momentos más importantes de las estructuras actuariales estudiadas respecto al tipo de interés, lo cual nos será de utilidad cuando calculemos dichos momentos en el caso en que el interés de valoración sea borroso a través de sus α -cortes, y nos encontremos entonces ante variables borroso aleatorias y no simplemente ante variables aleatorias. Únicamente realizaremos el estudio para la esperanza matemática y la varianza, ya que la desviación estándar es una transformación monótona creciente de la segunda, y por tanto, lo comentado para la varianza puede hacerse extensivo a la desviación estándar.

Respecto a la esperanza matemática de las estructuras básicas –capital de fallecimiento y capital de supervivencia–, es evidente que éstas son una función decreciente respecto a los tipos (al tipo) de interés de valoración, y por tanto, la esperanza matemática del resto de estructuras, que se hallan como suma de las esperanzas matemáticas de las dos primeras estructuras comentadas, serán también funciones monótonas decrecientes respecto al tipo o los tipos de interés de valoración.

También se puede comprobar que la varianza, y por tanto, la desviación estándar, son monótonas decrecientes respecto al interés o intereses de valoración para los capitales de fallecimiento y de supervivencia. Si denominamos como $V[Z]'$ a la derivada parcial de la varianza respecto al tipo de interés que se aplica para un determinado vencimiento (tipo spot) o durante un periodo determinado (tipo forward), y como f'_t a dicha derivada parcial para el factor de actualización podemos observar que:

a) Para el capital de fallecimiento:

$$V[Z]' = 2f'_{t+1} \cdot f'_{t+1} \cdot {}_t q_x \cdot (1 - {}_t q_x)$$

Es inmediato comprobar que todos los factores que componen la derivada de la varianza respecto al interés son positivos excepto f'_{t+1} , que es negativo, por lo que $V[Z]' \leq 0$ y por tanto decreciente respecto al tipo de interés.

b) Para el capital de supervivencia:

$$V[Z]' = 2f_t \cdot f'_{t+1} \cdot p_x \cdot q_x$$

Igualmente, es inmediato comprobar que todos los factores que componen la derivada de la varianza respecto al interés son positivos excepto f'_t , que es negativo, por lo que en este caso $V[Z]' \leq 0$ de nuevo y decreciente.

Respecto a la varianza de las rentas, sean temporales o vitalicias, podemos asimismo comprobar que también son decrecientes respecto al tipo de interés de valoración. Si denominamos como Z al valor actual de la renta de supervivencia, sea temporal o vitalicia, ya hemos comentado que ésta se halla como la suma de m capitales de supervivencia, con $m=w-x-d$ si la renta es vitalicia y $m=n$ si es temporal, siendo la expresión de la varianza que se obtiene a partir de esta conceptualización, la que fue puesta de manifiesto en los apartados 2.6 y 2.7. De esta forma, la varianza de una renta, si notamos como Z_t el valor actual del t -ésimo capital de supervivencia que la compone es:

$$V[Z] = \sum_{t=1}^m V[Z_t] + 2 \sum_{t=2}^m \sum_{j=1}^{t-1} C[Z_t, Z_j]$$

Si identificamos como $A = \sum_{t=1}^m V[Z_t]$ y $B = 2 \sum_{t=2}^m \sum_{j=1}^{t-1} C[Z_t, Z_j]$, observamos que:

$$V[Z] = A + B, \text{ y por tanto, } V[Z]' = A' + B'$$

Es inmediato comprobar que $A' \leq 0$, ya que sus sumandos son decrecientes respecto al tipo de interés de valoración, tal como hemos demostrado. Respecto a B' , bastará con demostrar que un sumando cualquiera $C[Z_t, Z_j]$ donde $t > j$ es decreciente respecto al tipo o los tipos de interés de valoración. Estudiemos el signo de su derivada.

Como:

$$C[Z_t, Z_j] = f_t \cdot f_j \cdot p_x \cdot (1 - p_x)$$

y siendo $C[Z_t, Z_j]'$ la derivada de la covarianza respecto a uno de los tipos de actualización con que descontamos los flujos de la estructura se obtiene:

$$C[Z_t, Z_j]' = (f_t f_j + f_t f_j) {}_t p_x (1 - {}_j p_x)$$

Y como ${}_t p_x (1 - {}_j p_x) \geq 0$ ya que $1 - {}_j p_x \geq 0$ y $[f_t f_j + f_t f_j] \leq 0$, ya que f_t y $f_j \leq 0$, es inmediato comprobar que $C'[Z_t, Z_j] \leq 0$, y por tanto $B' \leq 0$ y $V[Z]' \leq 0$.

Como a continuación observaremos, para los seguros de vida y el seguro mixto, el comportamiento de la varianza, y por tanto, de la desviación estándar respecto a los tipos de interés de valoración no es monótono, lo cual tendrá implicaciones importantes cuando analicemos la varianza o la desviación estándar de las variables aleatorias asociadas a dichas estructuras cuando los intereses de valoración vengan dados a través de números borrosos.

Para los seguros de vida entera, podemos comprobar que si los intereses (interés) a aplicar a lo largo de toda la vida del contrato tienden a infinito, la varianza tiende a cero. Ello es debido a que todas las realizaciones de la variable aleatoria valor actual tienden a cero, y por tanto, el valor actual de las prestaciones es el número cierto 0, no existiendo pues dispersión. Por otra parte, si el tipo o los tipos a aplicar durante toda la vida del contrato tienden a cero, la varianza vuelve a tender nuevamente a cero, ya que todas las realizaciones de Z tienden a 1, convirtiéndose pues el valor actual en una variable aleatoria degenerada, con varianza cero. Asimismo, si se aplica un único interés durante toda la vida del contrato debe existir, al menos, un único máximo relativo de la varianza respecto al interés de actualización para $i \in (0, \infty)$.

Analizamos a continuación la existencia de valores del interés (único) de actualización que cumplan la condición de primer orden de optimalidad local. Para ello partimos de la expresión de la varianza:

$$\begin{aligned} V[Z] &= \sum_{t=0}^{w-x-1} (1+i)^{-2(t+1)} {}_t q_x - (A_x)^2 = \sum_{t=0}^{w-x-1} (1+i)^{-2(t+1)} {}_t q_x - \left(\sum_{t=0}^{w-x-1} (1+i)^{-(t+1)} {}_t q_x \right)^2 = \\ &= \sum_{t=0}^{w-x-1} (1+i)^{-2(t+1)} {}_t q_x - \sum_{t=0}^{w-x-1} \sum_{j=0}^{w-x-1} (1+i)^{-t-j-2} {}_t q_x {}_j q_x = \sum_{t=0}^{w-x-1} (1+i)^{-2(t+1)} {}_t q_x - \\ &- \sum_{t=0}^{w-x-1} (1+i)^{-2(t+1)} ({}_t q_x)^2 - 2 \sum_{t=1}^{w-x-1} \sum_{j=0}^{t-1} (1+i)^{-t-j-2} {}_t q_x {}_j q_x = \sum_{t=0}^{w-x-1} (1+i)^{-2t-2} {}_t q_x (1 - {}_t q_x) - \\ &- 2 \sum_{t=1}^{w-x-1} \sum_{j=0}^{t-1} (1+i)^{-t-j-2} {}_t q_x {}_j q_x \end{aligned}$$

Así, y dado que la condición necesaria de optimalidad local de i es $\frac{dV[Z]}{di} = 0$:

$$\frac{dV[Z]}{di} = -2 \sum_{t=0}^{w-x-1} (t+1)(1+i)^{-2t-3} {}_tq_x (1-{}_tq_x) + 2 \sum_{t=1}^{w-x-1} \sum_{j=0}^{t-1} (t+j+2)(1+i)^{-t-j-3} {}_tq_x {}_jq_x$$

e igualando a cero la derivada, se observa, que los óptimos locales deben cumplir:

$$\sum_{t=1}^{w-x-1} \sum_{j=0}^{t-1} (t+j+2)(1+i)^{-t-j-3} {}_tq_x {}_jq_x - \sum_{t=0}^{w-x-1} (t+1)(1+i)^{-2t-3} {}_tq_x (1-{}_tq_x) = 0$$

Si realizamos el cambio de variable $\frac{1}{1+i} = x$, deberemos evaluar el número de raíces del polinomio:

$$\sum_{t=1}^{w-x-1} \sum_{j=0}^{t-1} (t+j+2)x^{t+j+3} {}_tq_x {}_jq_x - \sum_{t=0}^{w-x-1} (t+1)x^{2t+3} {}_tq_x (1-{}_tq_x) = 0$$

Y tras sacar factor común en la expresión anterior, esta queda reescrita como:

$$x^3 \left[\sum_{t=1}^{w-x-1} \sum_{j=0}^{t-1} (t+j+2)x^{t+j} {}_tq_x {}_jq_x - \sum_{t=0}^{w-x-1} (t+1)x^{2t} {}_tq_x (1-{}_tq_x) \right] = 0$$

Siendo una primera solución $x=0$ (multiplicidad 3) que supone que i tiende a ∞ . El resto de raíces, que son las que nos interesan, serán las resultantes de:

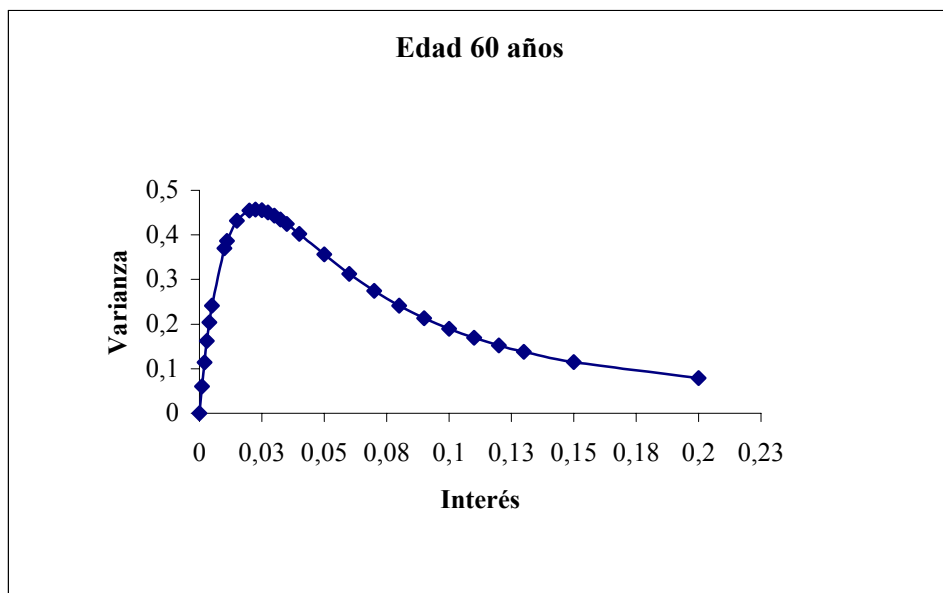
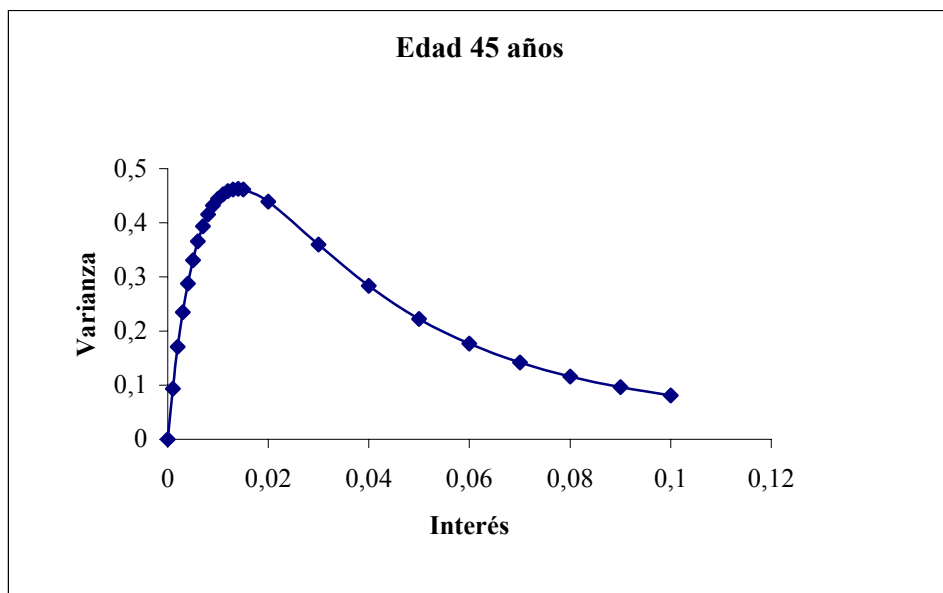
$$\sum_{t=1}^{w-x-1} \sum_{j=0}^{t-1} (t+j+2)x^{t+j} {}_tq_x {}_jq_x - \sum_{t=0}^{w-x-1} (t+1)x^{2t} {}_tq_x (1-{}_tq_x) = 0$$

Para el sustraendo, (coeficientes con signo negativo), el conjunto de exponentes de x viene dado por: $\{0, 2, \dots, 2(w-x)-2\}$. Para el minuendo (coeficientes con signo positivo) el conjunto de exponentes es: $\{1, 2, 3, \dots, 2(w-x)-3\}$. De esta forma, los coeficientes que multiplican a la variable independiente cuando su exponente es impar, tienen siempre un valor mayor que cero. Sin embargo, los coeficientes que multiplican a la variable independiente x con exponente par pueden tener un valor positivo o negativo. Discutimos a continuación el signo de dichos coeficientes, es decir, el de aquéllos que corresponden a x^{2t} , $t=0, 1, \dots, w-x-1$. Para ello, debemos partir de la expresión de dichos coeficientes, que para un t dado es:

$$\sum_{\substack{k+j=2t \\ k, j \in \{0, 1, \dots, w-x-1\} \\ k \neq j}} (k+j+2) {}_kq_x {}_jq_x - (t+1) {}_tq_x (1-{}_tq_x)$$

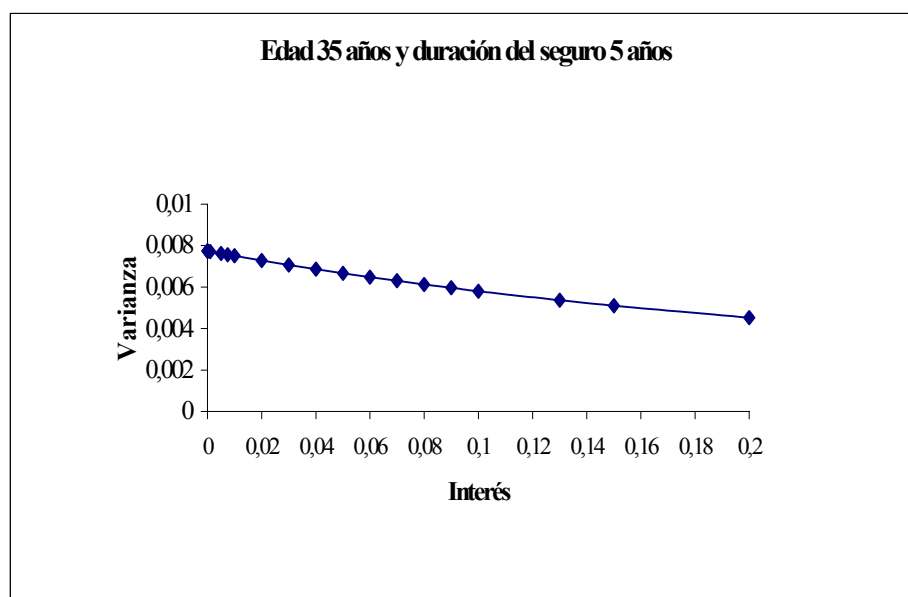
Puede comprobarse que, en el supuesto extremo en que todos los coeficientes de las variables dependientes con exponente par fuesen negativos, pueden existir en este polinomio hasta $2(w-x)-$

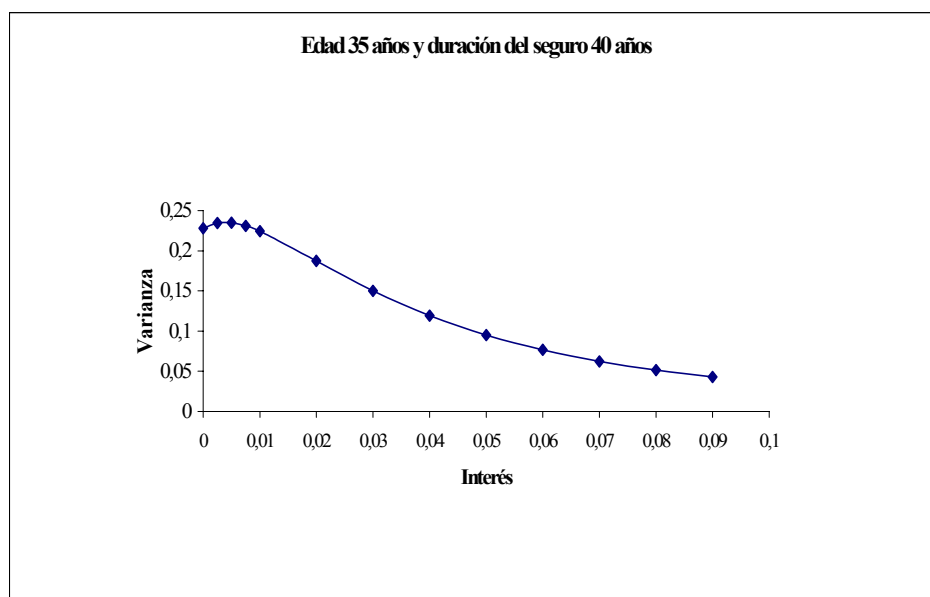
1) cambios de signo, por lo que pueden existir hasta $2(w-x-1)$ raíces positivas de x . Sin embargo, las diversas simulaciones efectuadas nos indican que existe, para los valores de x que nos interesan a nosotros, $x \in (0,1]$, ya que $i \in [0,\infty)$, un único máximo local, y por tanto global, que notaremos como i^* . Por ejemplo, el comportamiento de la varianza del valor actual de un seguro de vida entera para un individuo de 45 años y para un asegurado de 60 años viene dado gráficamente por:



Así pues, en el primer caso, el máximo de la varianza se alcanza en un entorno de $i^* \approx 1'5\%$ en el interés técnico, mientras que para el asegurado de 60 años, el máximo se alcanza para un entorno del interés técnico de $i^* \approx 2'5\%$.

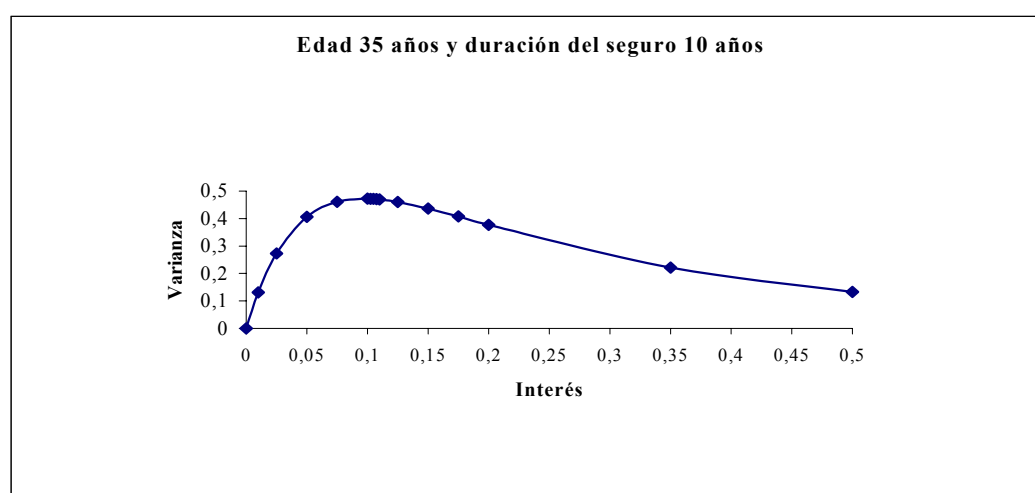
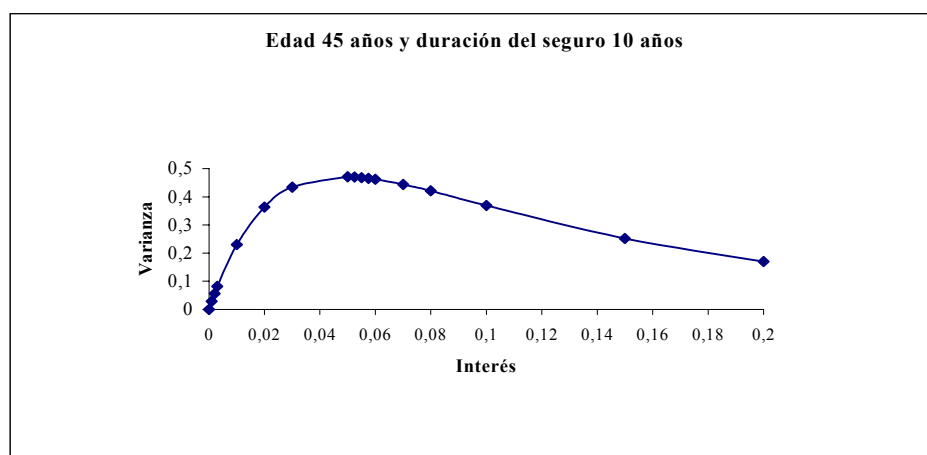
Asimismo, y dependiendo de la edad del individuo, en los seguros temporales tampoco podemos asegurar la monotonía de la varianza respecto a los tipos de interés de valoración. Lo que si que es comprobable es que cuando los tipos de interés de valoración tienden a infinito, la varianza del valor actual de las prestaciones tiende a cero, ya que todas las realizaciones tienden a cero. Si suponemos un único tipo de valoración para toda la duración del contrato, una duración “corta” del seguro, y para un único tipo de interés de valoración, si que parece observarse que el valor actual es una función monótona decreciente respecto al tipo de interés. Para duraciones “largas” si que existe un tramo creciente, un tipo de interés i^* para el cual la varianza alcanza el máximo valor y un tramo decreciente en la que tiende asintóticamente hacia cero. Sin embargo, y procediendo de forma análoga a lo realizado para la varianza del seguro de vida entera, podríamos observar que no se puede asegurar analíticamente la no existencia de valores del interés que cumplan la condición necesaria de optimalidad local, la existencia de uno, o la existencia de varios. Ello queda ilustrado en el comportamiento de la varianza que reflejan los siguientes gráficos para dos seguros temporales de duración 5 y 40 años respectivamente, siendo la edad de la cabeza asegurada 35 años.





En el primer seguro, de corta duración, podemos observar que la varianza es decreciente respecto al tipo de interés. En el segundo caso, en el entorno de un tipo de interés de actualización i^* del 0'5% la varianza toma el máximo valor, siendo decreciente a partir del 0'5%.

Por otra parte, y en los seguros mixtos unitarios, el comportamiento de la varianza es similar a los seguros de vida entera. Es fácil demostrar que cuando los intereses de valoración tienden a cero (infinito) todas las realizaciones del valor actual de las prestaciones tienden a uno (cero), tratándose pues, de variables aleatorias degeneradas, es decir, con las mismas realizaciones con independencia del suceso que se produzca. Como la varianza debe ser siempre positiva, si el tipo de interés de valoración que se aplica a lo largo de toda la vida del contrato es único, debe existir al menos un máximo, i^* , en el intervalo $[0, \infty)$. Como en los casos anteriores, no podemos asegurar la existencia de un único óptimo local en $V[Z]$, ya que para $\frac{dV[Z]}{di}$ pueden existir varios valores que verifiquen la condición necesaria. Sin embargo, en los seguros unitarios que hemos analizado existe sólo un máximo local en $i \in [0, \infty)$. Representamos gráficamente el comportamiento de la varianza para unos seguros mixtos asociados a unas cabezas de 35 y 45 años y una duración de 10 años.



En el primer caso, el máximo se alcanza en un entorno del interés de valoración $i^* \approx 5\%$ y en el segundo caso, para $i^* \approx 10\%$.

CAPÍTULO 3:

ANÁLISIS DE LAS PRINCIPALES ESTRUCTURAS ACTUARIALES CON EL TIPO DE INTERÉS DE VALORACIÓN ESTIMADO A TRAVÉS DE NÚMEROS BORROSOS

3.1. CONSIDERACIONES GENERALES Y METODOLOGÍA

En este apartado estudiaremos las distribuciones de probabilidad de los valores actuales de las estructuras analizadas en el apartado 2 cuando el tipo (los tipos) de interés de valoración vienen estimados a través de números borrosos, siendo por tanto, el valor actual de las estructuras que analizaremos variables borroso aleatorias, que notaremos como $\tilde{Z}$.

En primer lugar, estimaremos la esperanza matemática, que será un número borroso que notaremos como $\tilde{E}[Z]$, y la varianza y desviación estándar también borrosas, que serán notadas, respectivamente, como $\tilde{V}[Z]$. En la determinación de la media, la varianza y la desviación estándar, ya vimos en el apartado 2 que se puede entender que son funciones del tipo o los tipos de interés que se usan para valorar los flujos aleatorios que componen la estructura actuarial que valoremos. Así pues, si los intereses de valoración vienen dados a través de números borrosos, $\tilde{V}[Z]$, $\tilde{D}[Z]$ y $\tilde{E}[Z]$, por supuesto, serán funciones de números borrosos, y por tanto podrán ser evaluadas utilizando el principio de extensión de Zadeh.

Para ello será de gran utilidad definir el subconjunto borroso $\tilde{\Psi}$, que recogerá todas las posibles trayectorias que pueden tomar, según la estimación del asegurador, los intereses de actualización a lo largo de la duración (aleatoria) del contrato.

Si el contrato está pactado a n años, y el asegurador valora el contrato con unos tipos forward borrosos $\tilde{i}_t$, $t=1,2,\dots,n$, una trayectoria x es un vector $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x=(x_1, x_2, \dots, x_t, \dots, x_n)$, siendo x_t un posible valor del interés a aplicar durante el periodo t . En este caso:

$$\mu_{\tilde{\Psi}}(x) = \bigwedge_{t=1}^n \mu_{\tilde{i}_t}(x_t)$$

En el caso en que el asegurador valore el contrato a través de los tipos spot que ha estimado para toda la duración del contrato, $\tilde{i}_t$, $t=1,2,\dots,n$, se obtendrá también una trayectoria de los mismos $x=(x_1, x_2, \dots, x_t, \dots, x_n)$, de forma que:

$$\mu_{\tilde{\Psi}}(x) = \bigwedge_{t=1}^n \mu_{\tilde{\gamma}_t}(x_t)$$

Evidentemente, los α -cortes de $\tilde{\Psi}$, Ψ_α , no serán intervalos de confianza, sino rectángulos de dimensión n o hiperrectángulo, de forma que, si realizamos la valoración a través de los tipos forward:

$$\Psi_\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_t, \dots, x_n) \mid x_t \in i_{t|\alpha} \quad \forall t$$

y si utilizamos los tipos spot:

$$\Psi_\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_t, \dots, x_n) \mid x_t \in i_{t\alpha} \quad \forall t$$

A partir de Ψ_α , que es convexo ya que es una intersección de conjuntos convexos, podemos definir la trayectoria inferior de los intereses $\Psi^1(\alpha)$, y la superior $\Psi^2(\alpha)$, de forma que, si trabajamos con los tipos forward, éstas son:

$$\Psi^1(\alpha) = ({}_0i_1^1(\alpha), {}_1i_1^1(\alpha), \dots, {}_{n-1}i_1^1(\alpha)) \text{ y } \Psi^2(\alpha) = ({}_0i_1^2(\alpha), {}_1i_1^2(\alpha), \dots, {}_{n-1}i_1^2(\alpha))$$

Y si trabajamos con los tipos spot, las trayectorias inferior y superior son, respectivamente:

$$\Psi^1(\alpha) = (i_1^1(\alpha), i_2^1(\alpha), \dots, i_n^1(\alpha)) \text{ y } \Psi^2(\alpha) = (i_1^2(\alpha), i_2^2(\alpha), \dots, i_n^2(\alpha))$$

Evidentemente, si trabajamos con un tipo de interés borroso “constante” a lo largo de toda la vida del contrato, las trayectorias inferior y superior son vectores n -dimensionales de la forma:

$$\Psi^1(\alpha) = (i^1(\alpha), i^1(\alpha), \dots, i^1(\alpha)) \text{ y } \Psi^2(\alpha) = (i^2(\alpha), i^2(\alpha), \dots, i^2(\alpha))$$

De esta forma, podemos hallar las funciones de pertenencia de $\tilde{V}[Z]$, $\tilde{D}[Z]$ y $\tilde{E}[Z]$, a través del principio de extensión de Zadeh. Si denominamos como $\tilde{\Pi}[Z]$ a un parámetro cualquiera de los que pretendemos buscar, y que se halla como función de la trayectoria de los tipos de interés, es decir, para una trayectoria del interés x dada, el parámetro de la variable aleatoria es una función $\Pi[Z](x)$, cuya función de pertenencia se obtiene como:

$$\mu_{\tilde{\Pi}[Z]}(y) = \bigvee_{y = \Pi[Z](x)} \mu_{\tilde{\Psi}}(x)$$

Sin embargo, no es operativo trabajar con la función de pertenencia, ya que salvo excepciones, no se puede hallar. Así pues, normalmente trabajaremos con los α -cortes, hallándose éstos como:

$$\Pi[Z]_\alpha = \{y \mid y = \Pi[Z](x), x \in \Psi_\alpha\}$$

Respecto a la esperanza matemática, $E[Z](x)$ ésta será función de la trayectoria de los tipos de interés y como es monótona decreciente (creciente) respecto a los tipos de interés (factores de actualización) utilizados, obtenemos:

$$E[Z]_{\alpha} = [E^1[Z](\alpha), E^2[Z](\alpha)] = [E[Z](\psi^2(\alpha)), E^2[Z](\psi^1(\alpha))]$$

Sin embargo, dado que no podemos asegurar para todos los tipos de estructuras actuariales que la varianza y la desviación estándar sean monótonas respecto al interés (intereses) de actualización, no podremos hallar para muchas, una expresión analítica de sus α -cortes, siendo estos denotados por $V[Z]_{\alpha}$ y $D[Z]_{\alpha}$ respectivamente.

Por otra parte, si utilizamos un número borroso constante a lo largo de toda la operación, lo cual implicaría, o bien, utilizar una ETTI plana, o bien trabajar con la rentabilidad media de la cartera activa para toda la duración del seguro, ya hemos comprobado a lo largo del apartado 2 que la esperanza, la varianza y la desviación estándar del valor actual de la estructura actuarial es función de una sola variable (tipo de interés de actualización). Si notamos como $\Pi[Z](x)$ al parámetro que queremos hallar, que en este caso es una función de un único interés de actualización, x , a partir de la función de pertenencia del mismo, $\mu_{\tilde{\Gamma}}(x)$ hallamos $\mu_{\tilde{E}[Z]}(x)$, $\mu_{\tilde{V}[Z]}(x)$ y $\mu_{\tilde{D}[Z]}(x)$ como:

$$\mu_{\tilde{\Pi}[Z]}(y) = \bigvee_{y=\Pi[Z](x)} \mu_{\tilde{\Gamma}}(x)$$

y si pretendemos hallar los α -cortes, el resultado que se obtiene entonces es:

$$\Pi[Z]_{\alpha} = \{y \mid y = \Pi[Z](x), x \in i_{\alpha}\}$$

Respecto a la esperanza matemática, si notamos como $E[Z]_{\alpha}$ a sus α -cortes, su expresión, dada que es monótona decreciente respecto al interés de actualización es:

$$E[Z]_{\alpha} = [E^1[Z](\alpha), E^2[Z](\alpha)] = [E[Z](i^2(\alpha)), E^2[Z](i^1(\alpha))]$$

Sin embargo, no podemos asegurar que $V[Z]_{\alpha}$ y $D[Z]_{\alpha}$ puedan ser halladas con la misma facilidad, ya que las funciones univariantes $V[Z](x)$ y $D[Z](x)$ no son monótonas, en muchas estructuras, respecto al interés de valoración. No obstante, propondremos algunas soluciones ad-hoc que faciliten su determinación, dependiendo dichas soluciones de si se aplica o no un único tipo de interés de valoración en la estructura.

Por otra parte, para el cálculo de la varianza y la desviación estándar también podemos optar por el enfoque cierto, y definir las medidas de dispersión como números nítidos. En este caso tomaremos como metodología la propuesta por Feng, basada en la aplicación de la distancia Euclídea. A la varianza y la desviación estándar que obtengamos utilizando este procedimiento las notaremos como $V^*[Z]$ y $D^*[Z]$ respectivamente.

Para la determinación de la varianza de la variable borroso aleatoria de forma cierta, dado que los valores actuales de los capitales y de las rentas son decrecientes respecto a los tipos de interés de valoración, siempre podremos definir para cada nivel de presunción α una variable aleatoria valor actual inferior, y una variable aleatoria valor actual superior, viniendo dadas por los extremos superior e inferior respectivamente de los α -cortes del interés o intereses de valoración con dicho nivel de presunción α ; y por tanto, $V^*[Z]$ y $D^*[Z]$ tendrán un fácil planteamiento.

Asimismo, seguiremos el siguiente orden en el análisis del valor actual de todas las estructuras que estudiemos:

- a) Realizaremos un estudio general, asumiéndose variabilidad en los tipos de interés spot o forward que sean utilizados en la valoración actuarial.
- b) Analizaremos el caso particular en que la valoración se realiza para todo el horizonte planificador mediante un único tipo borroso $\tilde{i}$, es decir, bajo la asunción de una estructura temporal de los tipos de interés plana, lo cual es una hipótesis muy habitual en la práctica actuarial, a la vez que estaría en la línea del análisis que se realiza en el ya mencionado trabajo de Boyle (1976), aunque en ese caso, se considera que los tipos de actualización correspondientes a cada periodo son variables aleatorias idénticamente distribuidas.
- c) Analizaremos el caso particular de que se aplique durante toda la duración de la estructura actuarial un único tipo de actualización estimado a través de un número triangular, de forma que $\tilde{i} = (i^1, i^2, i^3)$.

3.2. CAPITAL DE FALLECIMIENTO

3.2.1. Planteamiento general

En este caso, el valor de la prestación a pagar a un individuo de edad x dentro de $t+1$ años si fallece en el t -ésimo año, viene dado por una variable borroso aleatoria $\tilde{Z}$ que podemos notar como:

$$\tilde{Z} = \begin{cases} \tilde{f}_{t+1} & \text{con } {}_tq_x \\ 0 & \text{con } 1-{}_tq_x \end{cases}$$

la cual, para un nivel de presunción α dado por los α -cortes de $\tilde{f}_t$, $f_{t\alpha}=[f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)]$, podemos caracterizarla por una variable aleatoria inferior $Z^1(\alpha)$ y una superior $Z^2(\alpha)$ que son:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} f_{t+1}^1(\alpha) & \text{con } {}_tq_x \\ 0 & \text{con } 1-{}_tq_x \end{cases} \text{ y } Z^2(\alpha) = \begin{cases} f_{t+1}^2(\alpha) & \text{con } {}_tq_x \\ 0 & \text{con } 1-{}_tq_x \end{cases}$$

Así pues, la esperanza matemática de $\tilde{Z}$, $\tilde{E}[Z]$ y que notaremos como ${}_t\tilde{B}_x$ será un número borroso cuyos α -cortes vienen dados por:

$$\begin{aligned} E[Z]_\alpha = {}_tB_{x\alpha} &= [{}_tB_x^1(\alpha), {}_tB_x^2(\alpha)] = [E^1[Z(\alpha)], E^2[Z(\alpha)]] = [E[Z^1(\alpha)], E[Z^2(\alpha)]] = \\ &= [f_{t+1}^1(\alpha) {}_tq_x, f_{t+1}^2(\alpha) {}_tq_x] = [f_{t+1}^1(\alpha), f_{t+1}^2(\alpha)] {}_tq_x = f_{t+1\alpha} {}_tq_x \end{aligned}$$

Así pues, ${}_t\tilde{B}_x = \tilde{f}_{t+1} {}_tq_x$, y su función de pertenencia se hallará a través de la de $\tilde{f}_{t+1}$ como:

$$\mu_{{}_t\tilde{B}_x}(x) = \mu_{\tilde{f}_{t+1}}\left(\frac{x}{{}_tq_x}\right)$$

Donde ${}_t\tilde{B}_x$ es el factor de descuento de un capital de fallecimiento si utilizamos en la valoración del capital el principio de equivalencia estática cuando el interés o intereses de valoración son borrosos.

Por otra parte, la varianza fuzzy será un número borroso cuyos α -cortes los podemos hallar como:

$$V[Z]_\alpha = \left\{ y \in \mathbb{R}^+ \mid y = x^2 {}_tq_x (1-{}_tq_x), x \in f_{t+1\alpha} \right\}$$

Dado que la función que evaluamos es creciente respecto el factor de actualización, los α -cortes de la varianza se obtienen como:

$$\begin{aligned} V[Z]_\alpha &= \left[\left(f_{t+1}^1(\alpha) \right)^2 {}_tq_x (1-{}_tq_x), \left(f_{t+1}^2(\alpha) \right)^2 {}_tq_x (1-{}_tq_x) \right] = \left[\left(f_{t+1}^1(\alpha) \right)^2, \left(f_{t+1}^2(\alpha) \right)^2 \right] {}_tq_x (1-{}_tq_x) = \\ &= \left(f_{t+1\alpha} \right)^2 {}_tq_x (1-{}_tq_x) \end{aligned}$$

Es decir, el extremo inferior de los α -cortes de la varianza se obtiene como la varianza de la variable aleatoria inferior, y el superior, como la varianza de la variable aleatoria superior.

Asimismo, podemos comprobar que, $\tilde{V}[Z] = \left(\tilde{f}_{t+1}\right)^2 {}_t|q_x (1 - {}_t|q_x)$, siendo por tanto su función de pertenencia deducible a través de la de $\left(\tilde{f}_{t+1}\right)^2$, es decir:

$$\mu_{\tilde{V}[Z]}(x) = \mu_{\left(\tilde{f}_{t+1}\right)^2} \left(\frac{x}{{}_t|q_x (1 - {}_t|q_x)} \right) = \mu_{\tilde{f}_{t+1}} \left(\sqrt{\frac{x}{{}_t|q_x (1 - {}_t|q_x)}} \right)$$

La desviación estándar borrosa, se obtiene de forma inmediata, ya que se halla planteando $\tilde{D}[Z] = \sqrt{\tilde{V}[Z]}$, siendo por tanto su función característica:

$$\mu_{\tilde{D}[Z]}(x) = \mu_{\tilde{V}[Z]}(x^2) = \mu_{\tilde{f}_{t+1}} \left(\frac{x}{\sqrt{{}_t|q_x (1 - {}_t|q_x)}} \right)$$

y sus α -cortes:

$$D[Z]_{\alpha} = \left[f_{t+1}^1(\alpha) \sqrt{{}_t|q_x (1 - {}_t|q_x)}, f_{t+1}^2(\alpha) \sqrt{{}_t|q_x (1 - {}_t|q_x)} \right]$$

Respecto a la varianza de Feng, que notamos como $V^*[Z]$, partiendo de:

$$V[Z^1(\alpha)] = \left(f_{t+1}^1(\alpha)\right)^2 {}_t|q_x (1 - {}_t|q_x) \text{ y } V[Z^2(\alpha)] = \left(f_{t+1}^2(\alpha)\right)^2 {}_t|q_x (1 - {}_t|q_x)$$

se obtiene,

$$\begin{aligned} V^*[Z] &= \frac{1}{2} \int_0^1 \{V[Z^1(\alpha)] + V[Z^2(\alpha)]\} d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \left[f_{t+1}^1(\alpha)\right]^2 + \left[f_{t+1}^2(\alpha)\right]^2 \right\} {}_t|q_x (1 - {}_t|q_x) d\alpha = \\ &= \frac{1}{2} {}_t|q_x (1 - {}_t|q_x) \int_0^1 \left\{ \left[f_{t+1}^1(\alpha)\right]^2 + \left[f_{t+1}^2(\alpha)\right]^2 \right\} d\alpha \end{aligned}$$

Obteniéndose entonces la desviación estándar asociada sin más que realizar $D^*[Z] = \sqrt{V^*[Z]}$.

3.2.2. Análisis cuando el tipo de interés a aplicar es un número borroso constante

En este caso, el factor de actualización de una unidad monetaria con vencimiento a t años es un número borroso $\tilde{f}_t$ que se obtiene como $\tilde{f}_t = (1 + \tilde{i})^{-t}$. De esta forma, y dado que el extremo inferior de $f_{t\alpha}$ viene dado por el extremo superior de i_{α} y viceversa, las variables aleatorias $Z^1(\alpha)$ y $Z^2(\alpha)$ presentan la siguiente distribución de probabilidad:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} (1+i^2(\alpha))^{-(t+1)} & \text{con } {}_t|q_x \\ 0 & \text{con } 1-{}_t|q_x \end{cases} \text{ y } Z^2(\alpha) = \begin{cases} (1+i^1(\alpha))^{-(t+1)} & \text{con } {}_t|q_x \\ 0 & \text{con } 1-{}_t|q_x \end{cases}$$

Siendo entonces los α -cortes de ${}_t\tilde{B}_x$:

$${}_tB_{x_\alpha} = [{}_tB_x^1(\alpha), {}_tB_x^2(\alpha)] = \left[(1+i^2(\alpha))^{-(t+1)} {}_t|q_x, (1+i^1(\alpha))^{-(t+1)} {}_t|q_x \right]$$

Asimismo, la función de pertenencia del factor de actualización financiero-actuarial para el capital de fallecimiento en t puede ser obtenida explícitamente a través de la función de pertenencia de $\tilde{i}$, $\mu_{\tilde{i}}(x)$, de forma que:

$$\mu_{{}_t\tilde{B}_x}(x) = \mu_{\tilde{f}_{t+1}}\left(\frac{x}{{}_t|q_x}\right) = \mu_{\tilde{i}}\left[\left(\frac{x}{{}_t|q_x}\right)^{-\frac{1}{t+1}} - 1\right]$$

La varianza $\tilde{V}[Z]$ se obtendrá como un número borroso cuyos α -cortes son:

$$V[Z]_\alpha = [V^1[Z](\alpha), V^2[Z](\alpha)] = \left[(1+i^2(\alpha))^{-2(t+1)} {}_t|q_x (1-{}_t|q_x), (1+i^1(\alpha))^{-2(t+1)} {}_t|q_x (1-{}_t|q_x) \right]$$

Siendo asimismo su función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{V}[Z]}(x) = \mu_{\tilde{f}_{t+1}}\left(\sqrt{\frac{x}{{}_t|q_x (1-{}_t|q_x)}}\right) = \mu_{\tilde{i}}\left[\left(\frac{x}{{}_t|q_x (1-{}_t|q_x)}\right)^{-\frac{1}{2(t+1)}} - 1\right]$$

Por otra parte, $\tilde{D}[Z]$ podrá ser expresada a través de la función de pertenencia de $\tilde{i}$ como:

$$\mu_{\tilde{D}[Z]}(x) = \mu_{\tilde{f}_{t+1}}\left(\frac{x}{\sqrt{{}_t|q_x (1-{}_t|q_x)}}\right) = \mu_{\tilde{i}}\left[\left(\frac{x}{\sqrt{{}_t|q_x (1-{}_t|q_x)}}\right)^{-\frac{1}{t+1}} - 1\right]$$

Siendo entonces los α -cortes:

$$D[Z]_\alpha = [D^1[Z](\alpha), D^2[Z](\alpha)] = \left[(1+i^2(\alpha))^{-(t+1)} \sqrt{{}_t|q_x (1-{}_t|q_x)}, (1+i^1(\alpha))^{-(t+1)} \sqrt{{}_t|q_x (1-{}_t|q_x)} \right]$$

Asimismo, teniendo en cuenta que $f_{t+1}^1(\alpha) = (1+i^2(\alpha))^{-(t+1)}$ y $f_{t+1}^2(\alpha) = (1+i^1(\alpha))^{-(t+1)}$, la obtención de la varianza y la desviación estándar ciertas es inmediata.

3.2.3. Análisis cuando el tipo de interés a aplicar es un número borroso constante y triangular

En este caso, el tipo de interés efectivo anual que se aplica durante toda la duración del seguro es un tanto $\tilde{i} = (i^1, i^2, i^3)$, de forma, que a partir de sus α -cortes, $i_\alpha = [i^1 + (i^2 - i^1)\alpha, i^3 - (i^3 - i^2)\alpha]$, las variables aleatorias inferior y superior vendrán caracterizadas por:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-(t+1)} & {}_t|q_x \\ 0 & 1 - {}_t|q_x \end{cases} \quad y \quad Z^2(\alpha) = \begin{cases} (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-(t+1)} & {}_t|q_x \\ 0 & 1 - {}_t|q_x \end{cases}$$

y así:

$${}_tB_{x_\alpha} = \left[(1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-(t+1)} {}_t|q_x, (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-(t+1)} {}_t|q_x \right]$$

siendo por tanto la función de pertenencia de ${}_t\tilde{B}_x$:

$$\mu_{{}_t\tilde{B}_x}(x) = \begin{cases} \frac{(1 + i^3) - \left(\frac{x}{{}_t|q_x}\right)^{-\frac{1}{t+1}}}{i^3 - i^2} & \text{si } (1 + i^3)^{-(t+1)} {}_t|q_x \leq x < (1 + i^2)^{-(t+1)} {}_t|q_x \\ \frac{\left(\frac{x}{{}_t|q_x}\right)^{-\frac{1}{t+1}} - (1 + i^1)}{i^2 - i^1} & \text{si } (1 + i^2)^{-(t+1)} {}_t|q_x \leq x < (1 + i^1)^{-(t+1)} {}_t|q_x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por otra parte, los α -cortes de $\tilde{V}[Z]$, son:

$$V[Z]_\alpha = \left[(1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-2(t+1)} {}_t|q_x (1 - {}_t|q_x), (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-2(t+1)} {}_t|q_x (1 - {}_t|q_x) \right]$$

siendo por tanto su función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{V}[Z]}(x) = \begin{cases} \frac{(1+i^3) - \left(\frac{x}{{}_t|q_x(1-{}_t|q_x)}\right)^{-\frac{1}{2(t+1)}}}{i^3 - i^2} & \text{si } (1+i^3)^{-2(t+1)} {}_t|q_x(1-{}_t|q_x) \leq x < (1+i^2)^{-2(t+1)} {}_t|q_x(1-{}_t|q_x) \\ \frac{\left(\frac{x}{{}_t|q_x(1-{}_t|q_x)}\right)^{-\frac{1}{2(t+1)}} - (1+i^1)}{i^2 - i^1} & \text{si } (1+i^2)^{-2(t+1)} {}_t|q_x(1-{}_t|q_x) \leq x < (1+i^1)^{-2(t+1)} {}_t|q_x(1-{}_t|q_x) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Y por tanto, $D[Z]_\alpha$ se obtiene como:

$$D[Z]_\alpha = \left[(1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-(t+1)} \sqrt{{}_t|q_x(1-{}_t|q_x)}, (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-(t+1)} \sqrt{{}_t|q_x(1-{}_t|q_x)} \right]$$

y la función da pertenencia de $\tilde{D}[Z]$ es:

$$\mu_{\tilde{D}[Z]}(x) = \begin{cases} \frac{(1+i^3) - \left(\frac{x}{\sqrt{{}_t|q_x(1-{}_t|q_x)}}\right)^{-\frac{1}{(t+1)}}}{i^3 - i^2} & \text{si } (1+i^3)^{-(t+1)} \sqrt{{}_t|q_x(1-{}_t|q_x)} \leq x < (1+i^2)^{-(t+1)} \sqrt{{}_t|q_x(1-{}_t|q_x)} \\ \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{{}_t|q_x(1-{}_t|q_x)}}\right)^{-\frac{1}{(t+1)}} - (1+i^1)}{i^2 - i^1} & \text{si } (1+i^2)^{-(t+1)} \sqrt{{}_t|q_x(1-{}_t|q_x)} \leq x < (1+i^1)^{-(t+1)} \sqrt{{}_t|q_x(1-{}_t|q_x)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por otra parte, para hallar $V^*[Z]$, teniendo en cuenta que:

$$V^1(\alpha) = (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-2(t+1)} {}_t|q_x(1-{}_t|q_x)$$

$$V^2(\alpha) = (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-2(t+1)} {}_t|q_x(1-{}_t|q_x)$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} V^*[Z] &= \frac{1}{2} {}_t|q_x(1-{}_t|q_x) \int_0^1 \left[(1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-2(t+1)} + (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-2(t+1)} \right] d\alpha = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{{}_t|q_x(1-{}_t|q_x)}{2t+1} \left\{ \frac{[(1+i^2)^{-2t-1} - (1+i^3)^{-2t-1}]}{i^3 - i^2} + \frac{[(1+i^1)^{-2t-1} - (1+i^2)^{-2t-1}]}{i^2 - i^1} \right\} \end{aligned}$$

Siendo $D^*[Z]$ la raíz cuadrada de esta última expresión.

3.2.4. Aplicación numérica

A continuación ejemplificamos los resultados obtenidos en los apartados anteriores, suponiéndose que el interés técnico a aplicar durante toda la vida del contrato viene dado a través de un único número borroso triangular.

Veamos como obtenemos todos los parámetros asociados a un capital de fallecimiento de 1000 unidades monetarias con vencimiento 10 años para un individuo cuya edad actual es de 45 años.

Las bases técnicas a utilizar son:

- * Tablas PEM 82, que también se utilizarán en el resto de apartados.
- * Un interés a aplicar durante toda la vida del contrato estimado a través del número borroso triangular $\tilde{i} = (0,02, 0,03, 0,05)$

En este caso, la función de pertenencia del interés viene dada por:

$$\mu_{\tilde{i}}(x) = \begin{cases} \frac{x - 0'02}{0'01} & \text{si } 0'02 \leq x < 0'03 \\ \frac{0'05 - x}{0'02} & \text{si } 0'03 \leq x < 0'05 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y sus α -cortes:

$$i_{\alpha} = [0'02 + 0'01\alpha, 0'05 - 0'02\alpha]$$

Siendo entonces, para un nivel α dado, las variables aleatorias inferior $Z^1(\alpha)$ y superior, $Z^2(\alpha)$ asociadas a $\tilde{Z}$:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-11} & \text{con } \frac{7.191}{951.683} \\ 0 & \text{con } \frac{944.492}{951.683} \end{cases}, Z^2(\alpha) = \begin{cases} 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-11} & \text{con } \frac{7.191}{951.683} \\ 0 & \text{con } \frac{944.492}{951.683} \end{cases}$$

Así, obtenemos la función de pertenencia de ${}_{10}\tilde{B}_{45}$ como:

$$\mu_{10\tilde{B}_{45}}(x) = \begin{cases} \frac{1'05 - \left(\frac{951.683x}{7.191.000}\right)^{-\frac{1}{11}}}{0'02} & \text{si } 10^3 \cdot 1'05^{-11} \frac{7.191}{951.683} \leq x < 10^3 \cdot 1'03^{-11} \frac{7.191}{951.683} \\ \frac{\left(\frac{951.683x}{7.191.000}\right)^{-\frac{1}{11}} - 1'02}{0'01} & \text{si } 10^3 \cdot 1'03^{-11} \frac{7.191}{951.683} \leq x < 10^3 \cdot 1'02^{-11} \frac{7.191}{951.683} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo sus α -cortes:

$$10B_{45\alpha} = \left[1.000 \cdot \frac{7.191}{951.683} (1'05 - 0'02\alpha)^{-11}, 1.000 \cdot \frac{7.191}{951.683} (1'02 + 0'01\alpha)^{-11} \right]$$

La función de pertenencia de la varianza borrosa es, por otra parte:

$$\mu_{\tilde{V}[Z]}(x) = \begin{cases} \frac{1'05 - \left(\frac{951.683^2 x}{7.191 \cdot 944.492 \cdot 10^6}\right)^{-\frac{1}{22}}}{0'02} & \text{si } 10^6 \cdot 1'05^{-22} \frac{7.191 \cdot 944.492}{951.683^2} \leq x < 10^6 \cdot 1'03^{-22} \frac{7.191 \cdot 944.492}{951.683^2} \\ \frac{\left(\frac{951.683^2 x}{7.191 \cdot 944.492 \cdot 10^6}\right)^{-\frac{1}{22}} - 1'02}{0'01} & \text{si } 10^6 \cdot 1'03^{-22} \frac{7.191 \cdot 944.492}{951.683^2} \leq x < 10^6 \cdot 1'02^{-22} \frac{7.191 \cdot 944.492}{951.683^2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo sus α -cortes:

$$V[Z]_{\alpha} = \left[1.000 \cdot \frac{944.492 \cdot 7.191}{951.683^2} (1'05 - 0'02\alpha)^{-22}, 1.000 \cdot \frac{944.492 \cdot 7.191}{951.683^2} (1'02 + 0'01\alpha)^{-22} \right]$$

y por tanto, la función característica de la desviación estándar es:

$$\mu_{\tilde{D}[Z]}(x) = \begin{cases} \frac{1'05 - \left(\frac{951.683x}{\sqrt{7.191 \cdot 944.492 \cdot 10^3}} \right)^{-\frac{1}{11}}}{0'02} & \text{si } 10^3 \cdot 1'05^{-11} \frac{\sqrt{7.191 \cdot 944.492}}{951.683} \leq x < 10^3 \cdot 1'03^{-11} \frac{\sqrt{7.191 \cdot 944.492}}{951.683} \\ \frac{\left(\frac{951.683x}{\sqrt{7.191 \cdot 944.492 \cdot 10^3}} \right)^{-\frac{1}{11}} - 1'02}{0'01} & \text{si } 10^3 \cdot 1'03^{-11} \frac{\sqrt{7.191 \cdot 944.492}}{951.683} \leq x < 10^3 \cdot 1'02^{-11} \frac{\sqrt{7.191 \cdot 944.492}}{951.683} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y sus α -cortes:

$$V[Z]_{\alpha} = \left[1.000 \cdot \frac{\sqrt{944.492 \cdot 7.191}}{951.683} (1'05 - 0'02\alpha)^{-11}, 1.000 \cdot \frac{\sqrt{944.492 \cdot 7.191}}{951.683} (1'02 + 0'01\alpha)^{-11} \right]$$

Siendo asimismo $V^*[Z] = 3495,84$ y $D^*[Z] = 59,13$.

Puede ser en muchas ocasiones de utilidad, por la mayor facilidad de cálculo que permite, aproximar estos parámetros a través de números borrosos triangulares con el soporte y el núcleo del que provienen, ya que se mantiene la información más importante, a nuestro entender, del número borroso que realmente los representa a la vez que permiten una fácil operatoria. Para analizar la idoneidad de la aproximación triangular, tenemos que calcular el error que como máximo podemos cometer en el nivel de presunción de un valor por el hecho de tomarse dicha aproximación, y por tanto, debemos conocer los niveles $\alpha_I^*(t)$ y $\alpha_D^*(t)$ para los cuales se produce mayor error absoluto en los extremos izquierdo y derecho de los α -cortes respectivamente. Asimismo, $\alpha_I^*(t)$ y $\alpha_D^*(t)$ se obtienen fácilmente a través de las expresiones que dimos para dichos niveles de presunción cuando analizamos la aproximación triangular de los factores de descuento que se obtienen con un tipo de interés constante y triangular en el apartado 4.2.3.2 de la primera parte de la tesis. Para ello deberemos tener en cuenta que para un vencimiento t , los parámetros ${}_t\tilde{B}_x$, $\tilde{V}[Z]$ y $\tilde{D}[Z]$ se obtienen como:

- a) La esperanza matemática y la desviación estándar se hallan a través del producto del factor de descuento a $t+1$ años por unas constantes, obteniéndose por tanto:

$$\alpha_I^*(t) = \frac{1+i^3}{i^3-i^2} - \frac{1}{i^3-i^2} \left[\frac{(1+i^2)^{-(t+1)} - (1+i^3)^{-(t+1)}}{(t+1)(i^3-i^2)} \right]^{-\frac{1}{t+2}}$$

$$\alpha_D^*(t) = -\frac{1+i^1}{i^2-i^1} + \frac{1}{i^2-i^1} \left[\frac{(1+i^1)^{-(t+1)} - (1+i^2)^{-(t+1)}}{(t+1)(i^2-i^1)} \right]^{-\frac{1}{t+2}}$$

b) La varianza para un capital con vencimiento t años se obtiene realizando el producto del factor de descuento a $2(t+1)$ años por unas constantes, y entonces obtenemos:

$$\alpha_I^*(t) = \frac{1+i^3}{i^3-i^2} - \frac{1}{i^3-i^2} \left[\frac{(1+i^2)^{-2(t+1)} - (1+i^3)^{-2(t+1)}}{2(t+1)(i^3-i^2)} \right]^{-\frac{1}{2(t+1)+1}}$$

$$\alpha_D^*(t) = -\frac{1+i^1}{i^2-i^1} + \frac{1}{i^2-i^1} \left[\frac{(1+i^1)^{-2(t+1)} - (1+i^2)^{-2(t+1)}}{2(t+1)(i^2-i^1)} \right]^{-\frac{1}{2(t+1)+1}}$$

Así, la determinación del error máximo que se comete en el nivel de presunción se calcularía, conociendo las desviaciones máximas que se producen en los extremos de los α -cortes, de la forma ya comentada en el apartado 4.2.3.2. de la primera parte de la tesis.

A continuación cuantificamos los errores en la aproximación triangular de la esperanza matemática, varianza y desviación estándar borrosas (que coincidirá con el error cometido en la esperanza matemática) para un asegurado de 45 años y unos vencimientos de los capitales de fallecimiento $t=0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45$, y 50 años con las mismas bases técnicas que las utilizadas anteriormente. También, y para dichos vencimientos, damos el valor de la varianza y la desviación estándar cierta:

Vencimiento	Error en la			
	Error en la Esperanza	Varianza Borrosa	$V^*[Z]$	$D^*[Z]$
0	0,00	0,01	2976,71	54,56
5	0,02	0,03	3308,08	57,52
10	0,03	0,06	3528,07	59,40
15	0,04	0,08	3620,68	60,17
20	0,05	0,10	3807,58	61,71
25	0,06	0,13	4047,32	63,62
30	0,08	0,15	4162,72	64,52
35	0,09	0,17	3912,75	62,55
40	0,10	0,19	3104,83	55,72
45	0,11	0,21	1852,98	43,05
50	0,12	0,24	705,21	26,56

Podemos comprobar que para vencimientos “ceranos”, la aproximación triangular de los parámetros que analizamos está más que justificada, ya que los errores que se cometen en el nivel de presunción por tomar esta son bastante pequeños. Sin embargo, para vencimientos lejanos, por ejemplo en ${}_t\tilde{B}_{45}$ a partir de 40 años – donde el factor financiero de descuento utilizado es el correspondiente a un diferimiento de 41 años-, y por tanto, ya para $\tilde{V}[Z]$ a partir de 20 años, cuyo cálculo implica utilizar el factor de descuento a 42 años, los errores que se cometen al tomar la aproximación triangular son poco admisibles, si tomamos como referencia la escala endecadaria,

ya que existe un salto en la escala de verdad, a la que pertenece el valor o los valores en los que se cometen estos errores máximos. Si el número borroso que utilizamos en la actualización fuera menos incierto, y por tanto más “estrecho”, el error cometido sería menor, tal como observamos cuando se analizó la valoración financiera con intereses borrosos y triangulares. Apuntamos como una alternativa de ajuste de números borrosos triangulares, si ello fuera de interés y en los casos en que no aceptamos la aproximación triangular de los parámetros con el método propuesto, la metodología de Voxman *et al.*, ya comentada en el apartado 1.4.3. de la primera parte de la tesis.

3.3. CAPITAL DE SUPERVIVENCIA

3.3.1. Planteamiento general

En este caso, el individuo asegurado, de edad x , percibe (si se trata de una prestación) o paga (si se trata de una prima) una unidad monetaria dentro de t años si sobrevive, y nada en caso contrario. En el análisis que se realiza suponemos que los vencimiento de los capitales presentan un vencimiento $t > 0$, ya que en $t = 0$ pueden existir ciertos problemas en la definición de los parámetros de la variable borroso aleatoria valor actual. En cualquier caso, el análisis a realizar para $t = 0$ es inmediato, ya que en este caso no existe aleatoriedad, ya que el capital unitario devengará con certeza. Por otra parte, tampoco existe borrosidad en el valor actual de dicha unidad monetaria, ya que al devengar en el momento de valoración, no ha lugar al descuento de dicha cuantía.

En el resto de casos, la variable borroso aleatoria $\tilde{Z}$ que cuantifica el valor de este capital contingente es:

$$\tilde{Z} = \begin{cases} \tilde{f}_t & \text{con } {}_t p_x \\ 0 & \text{con } {}_t q_x \end{cases}$$

la cual a través de los α -cortes de $\tilde{f}_t$, queda caracterizada por las variables aleatorias inferior, $Z^1(\alpha)$, y superior, $Z^2(\alpha)$:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} f_t^1(\alpha) & \text{con } {}_t p_x \\ 0 & \text{con } {}_t q_x \end{cases} \text{ y } Z^2(\alpha) = \begin{cases} f_t^2(\alpha) & \text{con } {}_t p_x \\ 0 & \text{con } {}_t q_x \end{cases}$$

Así pues, la esperanza matemática del valor actual de este capital que notaremos como ${}_t \tilde{E}_x$, será un número borroso cuyos α -cortes vienen dados por:

$$\begin{aligned} E[Z]_{\alpha} &= E_{x\alpha} = [E[Z^1(\alpha)], E[Z^2(\alpha)]] = [{}_tE_x^1(\alpha), {}_tE_x^2(\alpha)] = [f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)]_{{}_tP_x} = \\ &= [f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)]_{{}_tP_x} = f_{t_{\alpha}} {}_tP_x \end{aligned}$$

Así pues, ${}_t\tilde{E}_x = \tilde{f}_t {}_tP_x$, pudiéndose entonces hallar su función de pertenencia como:

$$\mu_{{}_t\tilde{E}_x}(x) = \mu_{\tilde{f}_t}\left(\frac{x}{{}_tP_x}\right)$$

siendo ${}_t\tilde{E}_x$ el factor de actualización financiero-actuarial en base al principio de equivalencia estática en presencia de un interés o intereses de actualización borrosos.

Asimismo, la varianza borrosa será un número borroso $\tilde{V}[Z]$ cuyos α -cortes son:

$$V[Z]_{\alpha} = \left\{ y \in \mathbb{R}^+ \mid y = x^2 {}_tP_x {}_tQ_x, x \in f_{t_{\alpha}} \right\}$$

Dado que y es creciente respecto a x , los α -cortes de la varianza borrosa se obtienen como:

$$\begin{aligned} V[Z]_{\alpha} &= \left[[f_t^1(\alpha)]^2 {}_tP_x {}_tQ_x, [f_t^2(\alpha)]^2 {}_tP_x {}_tQ_x \right] = \left[(f_t^1(\alpha))^2, (f_t^2(\alpha))^2 \right]_{{}_tP_x {}_tQ_x} \\ &= (f_{t_{\alpha}})^2 {}_tP_x {}_tQ_x \end{aligned}$$

Es decir, el extremo inferior de los α -cortes de la varianza se obtiene como la varianza de la variable aleatoria inferior, y viceversa. Asimismo, podemos comprobar que, $\tilde{V}[Z] = (\tilde{f}_t)^2 {}_tP_x {}_tQ_x$, siendo por tanto su función de pertenencia deducible a través de la de $\tilde{f}_t$, es decir:

$$\mu_{\tilde{V}[Z]}(x) = \mu_{\tilde{f}_t}\left(\sqrt{\frac{x}{{}_tP_x {}_tQ_x}}\right)$$

Por otra parte, la desviación estándar $\tilde{D}[Z]$ se hallará como $\sqrt{\tilde{V}[Z]}$, siendo entonces su función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{D}[Z]}(x) = \mu_{\tilde{V}[Z]}(x^2) = \mu_{\tilde{f}_t}\left(\frac{x}{\sqrt{{}_tP_x {}_tQ_x}}\right)$$

y sus α -cortes,

$$D[Z]_{\alpha} = [f_t^1(\alpha)\sqrt{{}_tP_x {}_tQ_x}, f_t^2(\alpha)\sqrt{{}_tP_x {}_tQ_x}] = [f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)]\sqrt{{}_tP_x {}_tQ_x} =$$

$$= f_{t_\alpha} \sqrt{{}_t p_x {}_t q_x}$$

Respecto a la varianza de Feng, que notamos como $V^*[Z]$, partiendo de:

$$V[Z^1(\alpha)] = (f_t^1(\alpha))^2 {}_t p_x {}_t q_x \text{ y } V[Z^2(\alpha)] = (f_t^2(\alpha))^2 {}_t p_x {}_t q_x$$

se obtiene,

$$\begin{aligned} V^*[Z] &= \frac{1}{2} \int_0^1 \{V[Z^1(\alpha)] + V[Z^2(\alpha)]\} d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ [f_t^1(\alpha)]^2 + [f_t^2(\alpha)]^2 \right\} {}_t p_x {}_t q_x d\alpha = \\ &= \frac{1}{2} {}_t p_x {}_t q_x \int_0^1 \left\{ [f_t^1(\alpha)]^2 + [f_t^2(\alpha)]^2 \right\} d\alpha \end{aligned}$$

3.3.2. Análisis cuando el tipo de interés a aplicar es un número borroso constante

En este caso, durante toda la vida del contrato aplicamos un único interés que es el que se supone que el asegurador conseguirá por término medio invirtiendo las primas que percibe por parte del asegurado, y éste viene dado por un número borroso $\tilde{i}$ constante. Así, las variables aleatorias $Z^1(\alpha)$ y $Z^2(\alpha)$ serán:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} (1 + i^2(\alpha))^{-t} & \text{con } {}_t p_x \\ 0 & \text{con } {}_t q_x \end{cases} \text{ y } Z^2(\alpha) = \begin{cases} (1 + i^1(\alpha))^{-t} & \text{con } {}_t p_x \\ 0 & \text{con } {}_t q_x \end{cases}$$

Siendo entonces los α -cortes de ${}_t \tilde{E}_x$:

$${}_t E_{x_\alpha} = [{}_t E_x^1(\alpha), {}_t E_x^2(\alpha)] = \left[(1 + i^2(\alpha))^{-t} {}_t p_x, (1 + i^1(\alpha))^{-t} {}_t p_x \right]$$

Asimismo, la función de pertenencia de ${}_t \tilde{E}_x$ puede ser obtenida explícitamente a través de la función de pertenencia de $\tilde{i}$, $\mu_{\tilde{i}}(x)$, de forma que:

$$\mu_{{}_t \tilde{E}_x}(x) = \mu_{\tilde{i}}\left(\frac{x}{{}_t p_x}\right) = \mu_{\tilde{i}}\left[\left(\frac{x}{{}_t p_x}\right)^{-\frac{1}{t}} - 1\right]$$

Por otra parte, la varianza borrosa $\tilde{V}[Z]$, presentará como α -cortes:

$$V[Z]_\alpha = [V^1[Z](\alpha), V^2[Z](\alpha)] = \left[(1 + i^2(\alpha))^{-2t} {}_t p_x {}_t q_x, (1 + i^1(\alpha))^{-2t} {}_t p_x {}_t q_x \right]$$

Siendo la función de pertenencia de la misma:

$$\mu_{\tilde{V}[Z]}(x) = \mu_{\tilde{f}_t} \left(\sqrt{\frac{x}{{}_t p_x {}_t q_x}} \right) = \mu_{\tilde{i}} \left[\left(\frac{x}{{}_t p_x {}_t q_x} \right)^{-\frac{1}{2t}} - 1 \right]$$

Por otra parte, para $\tilde{D}[Z]$ los α -cortes son:

$$D[Z]_{\alpha} = [D^1[Z](\alpha), D^2[Z](\alpha)] = \left[(1 + i^2(\alpha))^{-t} \sqrt{{}_t p_x {}_t q_x}, (1 + i^1(\alpha))^{-t} \sqrt{{}_t p_x {}_t q_x} \right]$$

y por tanto, su función de pertenencia será:

$$\mu_{\tilde{D}[Z]}(x) = \mu_{\tilde{f}_t} \left(\frac{x}{\sqrt{{}_t p_x {}_t q_x}} \right) = \mu_{\tilde{i}} \left[\left(\frac{x}{\sqrt{{}_t p_x {}_t q_x}} \right)^{-\frac{1}{t}} - 1 \right]$$

Respecto a la varianza y a la desviación estándar que se obtienen aplicando el enfoque de Feng, se deduce inmediatamente a través de la expresión hallada en 3.3.1., sin más que expresar los extremos de los α -cortes de $\tilde{f}_t$ como una función de $i^1(\alpha)$ y $i^2(\alpha)$.

3.3.3. Análisis cuando el tipo de interés a aplicar es un número borroso constante y triangular

Dado que las variables aleatorias inferior y superior para un nivel α vienen determinadas por el tipo de interés superior e inferior respectivamente, éstas son:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-t} & {}_t p_x \\ 0 & {}_t q_x \end{cases} \text{ y } Z^2(\alpha) = \begin{cases} (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-t} & {}_t p_x \\ 0 & {}_t q_x \end{cases}$$

De esta forma, los α -cortes de ${}_t \tilde{E}_x$ toman como expresión:

$${}_t E_{x_{\alpha}} = \left[(1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-t} {}_t p_x, (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-t} {}_t p_x \right]$$

y por tanto, $\mu_{{}_t \tilde{E}_x}(x)$ es:

$$\mu_{\tilde{E}_x}(x) = \begin{cases} \frac{(1+i^3) - \left(\frac{x}{{}_t p_x}\right)^{-\frac{1}{t}}}{i^3 - i^2} & \text{si } (1+i^3)^{-t} {}_t p_x \leq x < (1+i^2)^{-t} {}_t p_x \\ \frac{\left(\frac{x}{{}_t p_x}\right)^{-\frac{1}{t}} - (1+i^1)}{i^2 - i^1} & \text{si } (1+i^2)^{-t} {}_t p_x \leq x < (1+i^1)^{-t} {}_t p_x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por otra parte, los α -cortes de $\tilde{V}[Z]$ se obtienen como:

$$V[Z]_\alpha = \left[(1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-2t} {}_t p_x {}_t q_x, (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-2t} {}_t p_x {}_t q_x \right]$$

y entonces, la función de pertenencia de la varianza será:

$$\mu_{\tilde{V}[Z]}(x) = \begin{cases} \frac{(1+i^3) - \left(\frac{x}{{}_t p_x {}_t q_x}\right)^{-\frac{1}{2t}}}{i^3 - i^2} & \text{si } (1+i^3)^{-2t} {}_t p_x {}_t q_x \leq x < (1+i^2)^{-2t} {}_t p_x {}_t q_x \\ \frac{\left(\frac{x}{{}_t p_x {}_t q_x}\right)^{-\frac{1}{2t}} - (1+i^1)}{i^2 - i^1} & \text{si } (1+i^2)^{-2t} {}_t p_x {}_t q_x \leq x < (1+i^1)^{-2t} {}_t p_x {}_t q_x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De esta forma, los α -cortes de $\tilde{D}[Z]$ y su función de pertenencia se obtienen como:

$$D[Z]_\alpha = \left[(1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-t} \sqrt{{}_t p_x {}_t q_x}, (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-t} \sqrt{{}_t p_x {}_t q_x} \right]$$

y,

$$\mu_{\tilde{D}[Z]}(x) = \begin{cases} \frac{(1+i^3) - \left(\frac{x}{\sqrt{{}_t p_x {}_t q_x}}\right)^{-\frac{1}{t}}}{i^3 - i^2} & \text{si } (1+i^3)^{-t} \sqrt{{}_t p_x {}_t q_x} \leq x < (1+i^2)^{-t} \sqrt{{}_t p_x {}_t q_x} \\ \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{{}_t p_x {}_t q_x}}\right)^{-\frac{1}{t}} - (1+i^1)}{i^2 - i^1} & \text{si } (1+i^2)^{-t} \sqrt{{}_t p_x {}_t q_x} \leq x < (1+i^1)^{-t} \sqrt{{}_t p_x {}_t q_x} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así, es inmediato hallar $V^*[Z]$, sin más que sustituir en su expresión hallada en el apartado 3.2.1:

$$f_t^1(\alpha) = (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-2t} {}_t p_x {}_t q_x$$

$$f_t^2(\alpha) = (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-2t} {}_t p_x {}_t q_x$$

obteniéndose,

$$V^*[Z] = \frac{1}{2} {}_t p_x {}_t q_x \int_0^1 \left[(1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-2t} + (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-2t} \right] d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{{}_t p_x {}_t q_x}{2t-1} \left\{ \frac{[(1+i^2)^{-2t+1} - (1+i^3)^{-2t+1}]}{i^3 - i^2} + \frac{[(1+i^1)^{-2t+1} - (1+i^2)^{-2t+1}]}{i^2 - i^1} \right\}$$

Hallándose entonces $D^*[Z]$ como la raíz cuadrada de la expresión anterior.

3.3.4. Aplicación numérica

A continuación ejemplificamos los resultados obtenidos en este apartado, utilizándose las mismas bases técnicas que en la aplicación efectuada para el capital de fallecimiento del apartado 3.2.4. En este caso hallamos los parámetros asociados a la variable borroso aleatoria del valor actual de un capital de supervivencia de 1000 unidades monetarias con vencimiento 10 años para un individuo cuya edad actual es de 45 años.

Para un nivel α dado, las variables aleatorias inferior $Z^1(\alpha)$ y superior, $Z^2(\alpha)$ asociadas a $\tilde{Z}$ son:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} 10^3 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-10} & \text{con } \frac{906.484}{951.683} \\ 0 & \text{con } \frac{45.199}{951.683} \end{cases} \text{ y } Z^2(\alpha) = \begin{cases} 10^3 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-10} & \text{con } \frac{906.484}{951.683} \\ 0 & \text{con } \frac{45.199}{951.683} \end{cases}$$

Así, obtenemos la función de pertenencia de ${}_{10}\tilde{E}_{45}$ como:

$$\mu_{{}_{10}\tilde{E}_{45}}(x) = \begin{cases} \frac{1'05 - \left(\frac{951.683x}{906.484 \cdot 10^6}\right)^{-\frac{1}{10}}}{0'02} & \text{si } 10^3 \cdot 1'05^{-10} \frac{906.484}{951.683} \leq x < 10^3 \cdot 1'03^{-10} \frac{906.484}{951.683} \\ \frac{\left(\frac{951.683x}{906.484 \cdot 10^6}\right)^{-\frac{1}{10}} - 1'02}{0'01} & \text{si } 10^3 \cdot 1'03^{-10} \frac{906.484}{951.683} \leq x < 10^3 \cdot 1'02^{-10} \frac{906.484}{951.683} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo sus α -cortes:

$${}_{10}E_{45\alpha} = \left[1.000 \cdot \frac{906.484}{951.683} (1'05 - 0'02\alpha)^{-10}, 1.000 \cdot \frac{906.484}{951.683} (1'02 + 0'01\alpha)^{-10} \right]$$

Por otra parte, la función de pertenencia de la varianza borrosa es:

$$\mu_{\tilde{V}[Z]}(x) = \begin{cases} \frac{1'05 - \left(\frac{951.683^2 x}{906.484 \cdot 45.199 \cdot 10^6}\right)^{-\frac{1}{20}}}{0'02} & \text{si } 10^6 \cdot 1'05^{-20} \frac{906.484 \cdot 45.199}{951.683^2} \leq x < 10^6 \cdot 1'03^{-20} \frac{906.484 \cdot 45.199}{951.683^2} \\ \frac{\left(\frac{951.683^2 x}{906.484 \cdot 45.199 \cdot 10^6}\right)^{-\frac{1}{20}} - 1'02}{0'01} & \text{si } 10^6 \cdot 1'03^{-20} \frac{906.484 \cdot 45.199}{951.683^2} \leq x < 10^6 \cdot 1'02^{-20} \frac{906.484 \cdot 45.199}{951.683^2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y sus α -cortes:

$$V[Z]_{\alpha} = \left[1.000 \cdot \frac{906.484 \cdot 45.199}{951.683^2} (1'05 - 0'02\alpha)^{-20}, 1.000 \cdot \frac{906.484 \cdot 45.199}{951.683^2} (1'02 + 0'01\alpha)^{-20} \right]$$

y por tanto, la función característica de la desviación estándar se hallará como:

$$\mu_{\tilde{D}[Z]}(x) = \begin{cases} \frac{1'05 - \left(\frac{951.683x}{\sqrt{906.484 \cdot 45.199 \cdot 10^3}} \right)^{-\frac{1}{20}}}{0'02} & \text{si } 10^3 \cdot 1'05^{-10} \frac{\sqrt{906.484 \cdot 45.199}}{951.683} \leq x < 10^3 \cdot 1'03^{-10} \frac{\sqrt{906.484 \cdot 45.199}}{951.683} \\ \frac{\left(\frac{951.683x}{\sqrt{906.484 \cdot 45.199 \cdot 10^3}} \right)^{-\frac{1}{20}} - 1'02}{0'01} & \text{si } 10^3 \cdot 1'03^{-10} \frac{\sqrt{906.484 \cdot 45.199}}{951.683} \leq x < 10^3 \cdot 1'02^{-10} \frac{\sqrt{906.484 \cdot 45.199}}{951.683} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo sus α -cortes:

$$D[Z]_{\alpha} = \left[1.000 \cdot \frac{\sqrt{906.484 \cdot 45.199}}{951.683^2} (1'05 - 0'02\alpha)^{-10}, 1.000 \cdot \frac{\sqrt{906.484 \cdot 45.199}}{951.683^2} (1'02 + 0'01\alpha)^{-10} \right]$$

La varianza y la desviación estándar ciertas son: $V^*[Z] = 242,17$ y $D^*[Z] = 15,56$.

Para analizar la idoneidad de la aproximación triangular, tenemos que calcular el error que cometemos en el nivel de presunción de un valor por el hecho de tomarse dicha aproximación triangular, y por tanto, debemos conocer los niveles $\alpha_I^*(t)$ y $\alpha_D^*(t)$ para los cuales se produce mayor error en los α -cortes izquierdo y derecho respectivamente. Asimismo, $\alpha_I^*(t)$ y $\alpha_D^*(t)$ se obtienen fácilmente a través de las expresiones que dimos para los mismos parámetros asociados a la actualización monetaria con tipo de interés constante y triangular del apartado 4.2.3.2. de la primera parte de la tesis, como ya hemos comentado. Para ello debemos tener en cuenta que para los parámetros ${}_t\tilde{E}_x$, $\tilde{V}[Z]$ y $\tilde{D}[Z]$ observamos:

- a) La esperanza matemática y la desviación estándar para un vencimiento t se obtienen como producto del factor de descuento a t años por una constante, y por tanto:

$$\alpha_I^*(t) = \frac{1+i^3}{i^3-i^2} - \frac{1}{i^3-i^2} \left[\frac{(1+i^2)^{-t} - (1+i^3)^{-t}}{t(i^3-i^2)} \right]^{-\frac{1}{t+1}}$$

$$\alpha_D^*(t) = -\frac{1+i^1}{i^2-i^1} + \frac{1}{i^2-i^1} \left[\frac{(1+i^1)^{-t} - (1+i^2)^{-t}}{t(i^2-i^1)} \right]^{-\frac{1}{t+1}}$$

- b) La varianza para un vencimiento t se obtiene como producto del factor de descuento a $2t$ años por una constante:

$$\alpha_1^*(t) = \frac{1+i^3}{i^3-i^2} - \frac{1}{i^3-i^2} \left[\frac{(1+i^2)^{-2t} - (1+i^3)^{-2t}}{2t(i^3-i^2)} \right]^{-\frac{1}{2t+1}}$$

$$\alpha_D^*(t) = -\frac{1+i^1}{i^2-i^1} + \frac{1}{i^2-i^1} \left[\frac{(1+i^1)^{-2t} - (1+i^2)^{-2t}}{2t(i^2-i^1)} \right]^{-\frac{1}{2t+1}}$$

A continuación exponemos los errores que se cometen en la aproximación triangular de la esperanza matemática, varianza y desviación estándar borrosas (que coincidirá con el error cometido en la esperanza matemática) para un asegurado de 45 años y unos vencimientos $t=0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45$, y 50 años del capital de supervivencia, con las mismas bases técnicas que hemos venido utilizando. También, y para dichos vencimientos, damos el valor de la varianza y la desviación estándar de Feng:

Vencimiento	Error en la		$V^*[Z]$	$D^*[Z]$
	Error en la Esperanza	Varianza Borrosa		
0	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,01	0,03	136,14	11,67
10	0,03	0,05	242,17	15,56
15	0,04	0,07	317,44	17,82
20	0,05	0,10	363,83	19,07
25	0,06	0,12	384,14	19,60
30	0,07	0,14	371,10	19,26
35	0,09	0,17	312,81	17,69
40	0,10	0,19	210,82	14,52
45	0,11	0,21	100,04	10,00
50	0,12	0,23	28,62	5,35

Podemos comprobar que el comportamiento de la aproximación triangular de la esperanza, varianza y desviación estándar en este tipo de capital es muy similar al comportamiento de dichos parámetros para el capital de fallecimiento. Para vencimientos “cortos” la aproximación es buena, pero no lo es tanto en vencimientos largos. Por otra parte, la aproximación de la varianza es peor que la de la esperanza o de la desviación estándar, ya que implica aproximar triangularmente un factor de descuento de una cuantía con un vencimiento que es el doble del de la esperanza matemática o la desviación estándar borrosa.

3.4. SEGURO VIDA ENTERA

3.4.1. Planteamiento general

En este caso, el valor actual de una unidad monetaria pagadera al final del año de fallecimiento de una cabeza de edad x , es una variable borroso aleatoria que notamos como $\tilde{Z}$, y viene dada por:

$$\tilde{Z} = \tilde{f}_{t+1} \text{ con } {}_tq_x, t=0,1,\dots,w-x-1$$

para la cual, y a un nivel α , a través de $f_{t\alpha}=[f_t^1(\alpha),f_t^2(\alpha)]$, podemos hallar la función de cuantía de la variable aleatoria inferior $Z^1(\alpha)$ y de la superior $Z^2(\alpha)$ como:

$$Z^1(\alpha) = f_{t+1}^1(\alpha) \text{ con } {}_tq_x \text{ y } Z^2(\alpha) = f_{t+1}^2(\alpha) \text{ con } {}_tq_x, t=0,1,\dots,w-x-1$$

Así pues, la esperanza matemática de $\tilde{Z}$, que notaremos como $\tilde{A}_x$ será un número borroso cuyos α -cortes vienen dados por:

$$A_{x\alpha} = [A_x^1(\alpha), A_x^2(\alpha)] = \left[\sum_{t=0}^{w-x-1} f_{t+1}^1(\alpha) {}_tq_x, \sum_{t=0}^{w-x-1} f_{t+1}^2(\alpha) {}_tq_x \right] = \left[\sum_{t=0}^{w-x-1} {}_tB_x^1(\alpha), \sum_{t=0}^{w-x-1} {}_tB_x^2(\alpha) \right]$$

Sin embargo y como ocurrirá en las estructuras actuariales que analizaremos a continuación, no podemos hallar la expresión analítica de la función de pertenencia de la esperanza matemática, la varianza o la desviación estándar, ya que si se utilizan varios tipos de interés, debemos realizar la convolución de las funciones de pertenencia de las funciones de pertenencia de cada uno de los tipos de interés o de los factores de actualización que definen, o bien, si se utiliza un tipo de interés único, no existe expresión analítica de dicho tipo de interés como función del valor actual de una renta.

Asimismo, la varianza borrosa toma como expresión de los α -cortes:

$$V[Z]_{\alpha} = \left\{ y \in \mathbb{R}^+ \mid y = \sum_{t=0}^{w-x-1} (x_{t+1})^2 {}_tq_x - \left(\sum_{t=0}^{w-x-1} x_{t+1} {}_tq_x \right)^2, x_{t+1} \in f_{t+1\alpha} \forall t \right\} =$$

$$=[\text{Min } y, \text{Max } y]$$

En principio, no sólo no podemos dar una expresión de su función de pertenencia, sino que no podemos dar una expresión analítica para sus α -cortes ya que no es una función monótona de los tipos de interés utilizados en la actualización. Sin embargo, para cada nivel α para la que

queramos calcularla, resolveremos el extremo inferior y el superior de ésta sin más que plantear los programas matemáticos:

$$\text{Minimizar (Maximizar)} \quad y = \sum_{t=0}^{w-x-1} (x_{t+1})^2 {}_t|q_x - \left(\sum_{t=0}^{w-x-1} x_{t+1} {}_t|q_x \right)^2$$

s.a.:

$$f_{t+1}^1(\alpha) \leq x_{t+1} \leq f_{t+1}^2(\alpha), \quad t=0, 1, \dots, w-x-1$$

Sin embargo, si aplicamos la aproximación a la varianza propuesta en el apartado 3.6.1. de la primera parte de la tesis, el resultado que obtendremos incluirá el α -corte de la varianza. Los α -cortes de $\tilde{D}[Z]$, como siempre, se obtendrán sin más que calcular la raíz cuadrada de la varianza.

La varianza de Feng se hallará partiendo de:

$$V[Z^1(\alpha)] = \sum_{t=0}^{w-x-1} [f_{t+1}^1(\alpha)]^2 {}_t|q_x - [A_x^1(\alpha)]^2 \quad \text{y} \quad V[Z^2(\alpha)] = \sum_{t=0}^{w-x-1} [f_{t+1}^2(\alpha)]^2 {}_t|q_x - [A_x^2(\alpha)]^2$$

y así,

$$\begin{aligned} V^*[Z] &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \sum_{t=0}^{w-x-1} [f_{t+1}^1(\alpha)]^2 {}_t|q_x + \sum_{t=0}^{w-x-1} [f_{t+1}^2(\alpha)]^2 {}_t|q_x - \left\{ [A_x^1(\alpha)]^2 + [A_x^2(\alpha)]^2 \right\} \right\} d\alpha = \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{t=0}^{w-x-1} {}_t|q_x \int_0^1 \left\{ [f_{t+1}^1(\alpha)]^2 + [f_{t+1}^2(\alpha)]^2 \right\} d\alpha - \left\{ \int_0^1 \left\{ [A_x^1(\alpha)]^2 + [A_x^2(\alpha)]^2 \right\} d\alpha \right\} \right] \end{aligned}$$

3.4.2. Análisis cuando el tipo de interés a aplicar es un número borroso constante

Si el tipo de interés a aplicar a lo largo de toda la vida del contrato es un número borroso $\tilde{i}$ constante para toda la operación, las variables aleatorias $Z^1(\alpha)$ y $Z^2(\alpha)$ vienen dadas por:

$$Z^1(\alpha) = (1 + i^2(\alpha))^{-(t+1)} \quad \text{y} \quad Z^2(\alpha) = (1 + i^1(\alpha))^{-(t+1)} \quad \text{con } {}_t|q_x, \quad t=0, 1, \dots, w-x-1$$

Siendo entonces los α -cortes de $\tilde{A}_x$:

$$A_{x_\alpha} = [A_x^1(\alpha), A_x^2(\alpha)] = \left[\sum_{t=0}^{w-x-1} (1 + i^2(\alpha))^{-(t+1)} {}_t|q_x, \sum_{t=0}^{w-x-1} (1 + i^1(\alpha))^{-(t+1)} {}_t|q_x \right]$$

Asimismo, la varianza, borrosa $\tilde{V}[Z]$, se obtendrá como un número borroso para el cual los extremos de los α -cortes se hallarán resolviendo los programas matemáticos:

$$\text{Min (Max) } y = \sum_{t=0}^{w-x-1} (1+x)^{-2(t+1)} {}_t|q_x - \left(\sum_{t=0}^{w-x-1} (1+x)^{-(t+1)} {}_t|q_x \right)^2$$

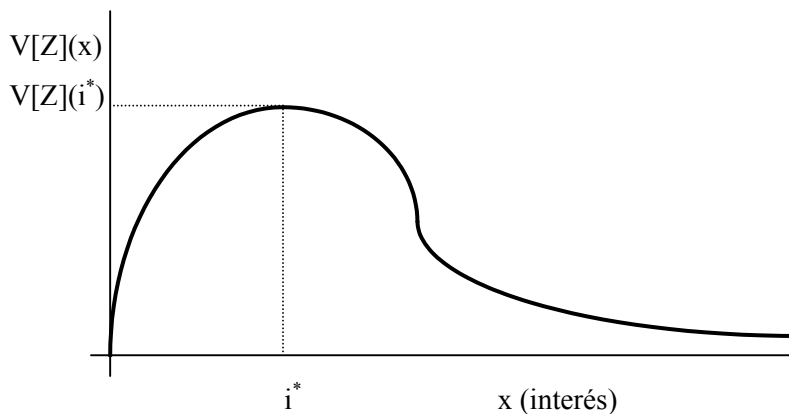
$$\text{s.a., } i^1(\alpha) \leq x \leq i^2(\alpha)$$

De forma que obtendremos el interés para el cual la varianza toma un valor máximo x^{**} y mínimo x^* y el valor de la función objetivo en estos puntos y^{**} , y^* . Por tanto, los α -cortes de la varianza, $V[Z]_\alpha$ son:

$$V[Z]_\alpha = [y^*, y^{**}] = \left[\sum_{t=0}^{w-x^*-1} (1+x^*)^{-2(t+1)} {}_t|q_{x^*} - \left(\sum_{t=0}^{w-x^*-1} (1+x^*)^{-(t+1)} {}_t|q_{x^*} \right)^2, \right. \\ \left. \sum_{t=0}^{w-x^{**}-1} (1+x^{**})^{-2(t+1)} {}_t|q_{x^{**}} - \left(\sum_{t=0}^{w-x^{**}-1} (1+x^{**})^{-(t+1)} {}_t|q_{x^{**}} \right)^2 \right]$$

Sin embargo, como sólo aplicamos un “único” tipo de interés borroso durante toda la vida del contrato, tal como se ha comentado en el apartado 2.8., sólo existe un valor que cumpla las condiciones de extremo relativo de la varianza para un interés $i \in [0, \infty)$. Si dicho interés de actualización que denominaremos como i^* puede ser hallado –a través de métodos numéricos, o con un paquete informático al efecto-, una forma relativamente sencilla de calcular los α -cortes de la varianza es:

Paso I: Determinar el interés cierto i^* para el cual $V[Z](x)$, que es una función del tipo de interés de valoración, presenta un máximo. En este tipo de seguros, y para $x \in [0, \infty)$, ya comentamos en el apartado 2.8. de la primera parte de la tesis que podíamos representar a la varianza como:

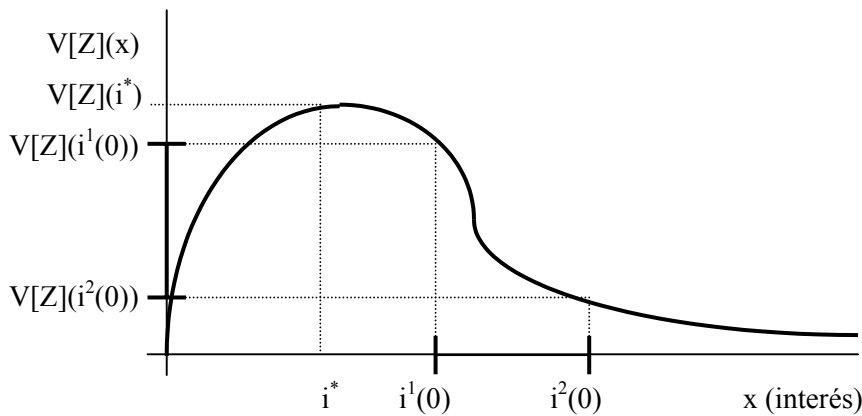


Paso 2: Determinar la escala de verdad para la cual se pretende determinar los α -cortes. La misma es una sucesión de niveles de presunción $\alpha_0=1 \geq \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_k \geq \dots \geq \alpha_n = 0$. Por ejemplo, si se trata de una escala endecadaria, $n=10$, donde $1 \geq 0'9 \geq 0'8 \geq \dots \geq 0$.

Paso 3: Determinar los α -cortes de $\tilde{i}$ para dicha escala, de forma que se obtiene la sucesión de intervalos de números reales positivos: $i_{\alpha_0} = i_1 \subseteq i_{\alpha_1} \subseteq \dots \subseteq i_{\alpha_n} = i_0$.

Paso 4: Calcular $V[Z]_\alpha$ de la siguiente forma:

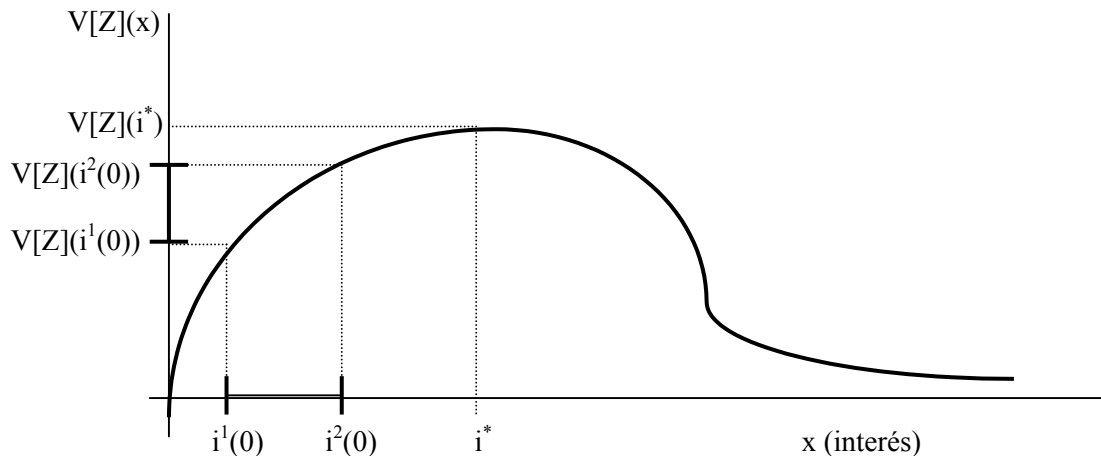
Caso a): $i^1(0) \geq i^*$. En este caso estamos en el tramo decreciente de la varianza. Gráficamente observamos:



Es inmediato que los α -cortes $\forall \alpha$ de $\tilde{V}[Z]$ son:

$$V[Z]_\alpha = \left[\sum_{t=0}^{w-x-1} (1 + i^2(\alpha))^{-2(t+1)} {}_t|q_x - [A_x^1(\alpha)]^2, \sum_{t=0}^{w-x-1} (1 + i^1(\alpha))^{-2(t+1)} {}_t|q_x - [A_x^2(\alpha)]^2 \right]$$

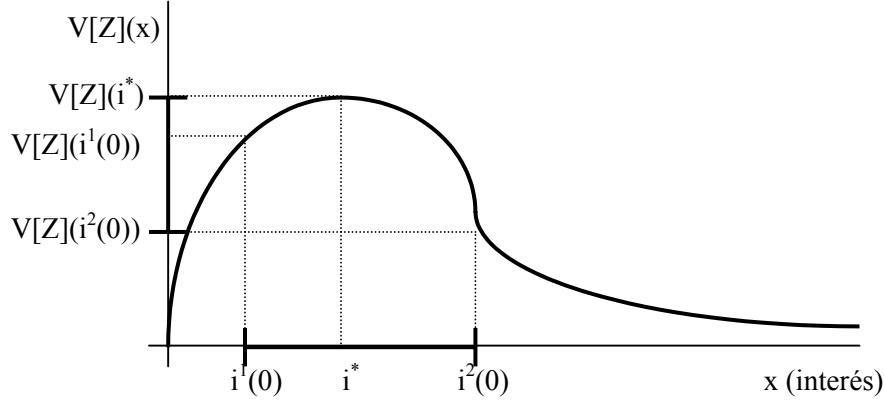
Caso b): $i^2(0) \leq i^*$. En este caso, cualquier interés x a aplicar con $\mu_{\tilde{i}}(x) > 0$ se sitúa en el tramo creciente de la función varianza, lo cual podemos comprobar gráficamente:



de forma que:

$$V[Z]_{\alpha} = \left[\sum_{t=0}^{w-x-1} (1+i^1(\alpha))^{-2(t+1)} {}_tq_x - [A_x^2(\alpha)]^2, \sum_{t=0}^{w-x-1} (1+i^2(\alpha))^{-2(t+1)} {}_tq_x - [A_x^1(\alpha)]^2 \right]$$

Caso c): $i^* \subseteq i_0$. En este caso, la representación gráfica del caso c) es:



En primer lugar, debemos determinar $\text{Min}_k \{\alpha_k\}$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ para el cual $i^* \not\subset i_{\alpha_k}$. Así, calculamos los α -cortes como:

$\forall \alpha < \alpha_k$, como $i^* \subset i_{\alpha}$, los α -cortes de la varianza son $V[Z]_{\alpha} = [V^1[Z](\alpha), V^2[Z](\alpha)]$ donde:

$$V^1[Z](\alpha) = \text{Min} \left\{ \sum_{t=0}^{w-x-1} (1+i^1(\alpha))^{-2(t+1)} {}_tq_x - [A_x^2(\alpha)]^2, \sum_{t=0}^{w-x-1} (1+i^2(\alpha))^{-2(t+1)} {}_tq_x - [A_x^1(\alpha)]^2 \right\}$$

$$V^2[Z](\alpha) = \sum_{t=0}^{w-x-1} (1+i^*)^{-2(t+1)} {}_tq_x - \left(\sum_{t=0}^{w-x-1} (1+i^*)^{-(t+1)} {}_tq_x \right)^2$$

$\forall \alpha \geq \alpha_k$, como $i^* \not\subset i_{\alpha}$, los α -cortes del interés se sitúan en la parte creciente de la varianza (a la izquierda de i^*) o el tramo decreciente de la función varianza, es decir, a la derecha de i^* . Dependiendo del caso en que nos encontremos, computamos los α -cortes de la siguiente manera:

c.1) Si $i^1(\alpha_k) > i^*$, es decir, nos encontramos en el tramo decreciente de la varianza siendo por tanto, su expresión la misma que en a):

$$V[Z]_{\alpha} = \left[\sum_{t=0}^{w-x-1} (1+i^2(\alpha))^{-2(t+1)} {}_tq_x - [A_x^1(\alpha)]^2, \sum_{t=0}^{w-x-1} (1+i^1(\alpha))^{-2(t+1)} {}_tq_x - [A_x^2(\alpha)]^2 \right]$$

c.2) Si $i^2(\alpha_k) < i^*$, es decir, nos encontramos en el tramo creciente de la varianza y por tanto estamos ante el caso b):

$$V[Z]_{\alpha} = \left[\sum_{t=0}^{w-x-1} (1 + i^1(\alpha))^{-2(t+1)} {}_tq_x - [A_x^2(\alpha)]^2, \sum_{t=0}^{w-x-1} (1 + i^2(\alpha))^{-2(t+1)} {}_tq_x - [A_x^1(\alpha)]^2 \right]$$

Asimismo, una vez hemos hallado $V[Z]_{\alpha}$, es inmediato determinar los α -cortes de $\tilde{D}[Z]$. Por otra parte, la varianza de Feng, se calculará a partir de la expresión del apartado 3.4.1., sustituyendo en los extremos de los α -cortes de los factores de actualización por la expresión que corresponda de los extremos de i_{α} . Asimismo, $D^*[Z]$ se hallará como la raíz cuadrada del valor de $V^*[Z]$.

3.4.3. Análisis cuando el tipo de interés a aplicar es un número borroso constante y triangular

Como las variables aleatorias inferior y superior de $\tilde{Z}$ vienen determinadas por el tipo de interés superior e inferior respectivamente, las expresiones correspondientes a su función de cuantía son:

$$Z^1(\alpha) = (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-(t+1)} \text{ con } {}_tq_x, \quad t=0,1,\dots,w-x-1$$

$$Z^2(\alpha) = (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-(t+1)} \text{ con } {}_tq_x, \quad t=0,1,\dots,w-x-1$$

Así, los α -cortes de $\tilde{A}_x$ son:

$$A_{x_{\alpha}} = \left[\sum_{t=0}^{w-x-1} (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-(t+1)} {}_tq_x, \sum_{t=0}^{w-x-1} (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-(t+1)} {}_tq_x \right]$$

Los α -cortes de la varianza borrosa se pueden hallar de la forma explicitada en el apartado anterior, sin más que considerar que $i^1(\alpha) = i^1 + (i^2 - i^1)\alpha$ y $i^2(\alpha) = i^3 - (i^3 - i^2)\alpha$, hallándose inmediatamente, por supuesto, los de la desviación estándar a través de $V[Z]_{\alpha}$.

Asimismo, la varianza de Feng se halla de la siguiente forma:

$$V^*[Z] = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{t=0}^{w-x-1} {}_tq_x \int_0^1 \left[(1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-2(t+1)} + (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-2(t+1)} \right] d\alpha - \right. \\ \left. - \int_0^1 \left\{ \left[\sum_{t=0}^{w-x-1} (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-(t+1)} {}_tq_x \right]^2 + \left[\sum_{t=0}^{w-x-1} (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-(t+1)} {}_tq_x \right]^2 \right\} d\alpha \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{t=0}^{w-x-1} {}_tq_x \int_0^1 \left[(1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-2(t+1)} + (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-2(t+1)} \right] d\alpha - \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^1 \sum_{t=0}^{w-x-1} \sum_{j=0}^{w-x-1} (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-(t+j+2)} {}_tq_{x:j} q_x + \sum_{t=0}^{w-x-1} \sum_{j=0}^{w-x-1} (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-(t+j+1)} {}_tq_{x:j} q_x \right\} d\alpha = \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{t=0}^{w-x-1} \left\{ \frac{[(1+i^2)^{-2t-1} - (1+i^3)^{-2t-1}]}{i^3 - i^2} + \frac{[(1+i^1)^{-2t-1} - (1+i^2)^{-2t-1}]}{i^2 - i^1} \right\} \frac{{}_tq_x}{2t+1} - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{j=0}^{w-x-1} \sum_{t=0}^{w-x-1} \left\{ \frac{[(1+i^2)^{-t-j-1} - (1+i^3)^{-t-j-1}]}{i^3 - i^2} + \frac{[(1+i^1)^{-t-j-1} - (1+i^2)^{-t-j-1}]}{i^2 - i^1} \right\} \frac{{}_tq_{x:j} q_x}{j+t+1} \right\}
 \end{aligned}$$

3.4.4. Aplicación numérica

A continuación realizamos diversas aplicaciones numéricas de esta estructura. Utilizaremos como siempre las tablas de mortalidad PEM 82 y un interés constante a lo largo de toda la vida del contrato $\tilde{i} = (0'02, 0'03, 0'05)$. Suponemos un capital asegurado de 1.000 unidades monetarias. Las edades de los hipotéticos asegurados son $x=35, 45, 60$ y 75 años, de forma que, por ejemplo, para el asegurado de 35 años, las variables borroso aleatorias inferior y superior que para un nivel de presunción α define $\tilde{Z}$ son:

$$Z^1(\alpha) = 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-(t+1)} \text{ con } {}_tq_x, t = 0, 1, \dots, 79$$

y,

$$Z^2(\alpha) = 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-(t+1)} \text{ con } {}_tq_x, t = 0, 1, \dots, 79$$

En primer lugar obtendremos la esperanza matemática de la variable borroso aleatoria asociada a esta estructura actuarial, $\tilde{A}_x$ y la bondad de la aproximación triangular con la metodología que viene siendo utilizada a lo largo de la tesis, asumiéndose como siempre una escala endecadaria. Para ello, y de forma análoga a lo realizado en el apartado 4.3.4. de la primera parte de la tesis,

dado que $\tilde{A}_x$ se halla como $\sum_{t=0}^{w-x-1} {}_t\tilde{B}_x$; y que conocemos el error absoluto máximo que se comete

en los α -cortes de la esperanza matemática del valor actual de los capitales de fallecimiento que intervienen en el cálculo de $\tilde{A}_x$ podemos dar una acotación superior al error que se comete al aproximar $\tilde{A}_x$ triangularmente. Para ${}_t\tilde{B}_x$ notaremos a dichos errores como $D_I^*(t)$ y $D_D^*(t)$, los cuales se establecen en los niveles de presunción obtenidos previamente, $\alpha_I^*(t)$ y $\alpha_D^*(t)$, y cuya expresión puede encontrarse en el apartado 3.2.4. De esta forma, el error máximo que podemos

cometer en el nivel de presunción de un valor por aproximarlos a través de un número borroso triangular a $\tilde{A}_x$ vendrá acotado por:

$$\text{Max} \left\{ \frac{\sum_{t=0}^{w-x-1} D_I^*(t)}{A_x^1(1) - A_x^1(0)}, \frac{\sum_{t=0}^{w-x-1} D_D^*(t)}{A_x^2(0) - A_x^2(1)} \right\}$$

El valor de la esperanza matemática ya aproximado mediante un NBT, la acotación del error cometido por la aproximación triangular y $V^*[Z]$ y $D^*[Z]$ vienen dados en el siguiente cuadro.

Edad x	$\tilde{A}_x$	Error	$V^*[Z]$	$D^*[Z]$
35	(152,51, 301,48, 439,49)	0,10	18906,87	137,50
45	(228,86, 390,66, 524,73)	0,08	24602,82	156,85
60	(392,00, 552,52, 666,13)	0,06	27104,74	164,64
75	(611,24, 734,29, 810,07)	0,03	19653,59	140,19

Podemos comprobar que a medida que la edad del asegurado aumenta, el ajuste triangular a $\tilde{A}_x$ es mejor. Ello es debido a que se incorporan cada vez menos factores de descuento con vencimientos lejanos, que son los que peor quedaban ajustados por un número borroso triangular. En nuestra aplicación numérica, podemos observar que para una escala endecadaria no podríamos aceptar la aproximación triangular de $\tilde{A}_{35}$, ya que puede producir en determinados valores un cambio en la escala de verdad a la que pertenecen. Sin embargo, para edades superiores si que podemos aceptar la aproximación triangular de $\tilde{A}_x$.

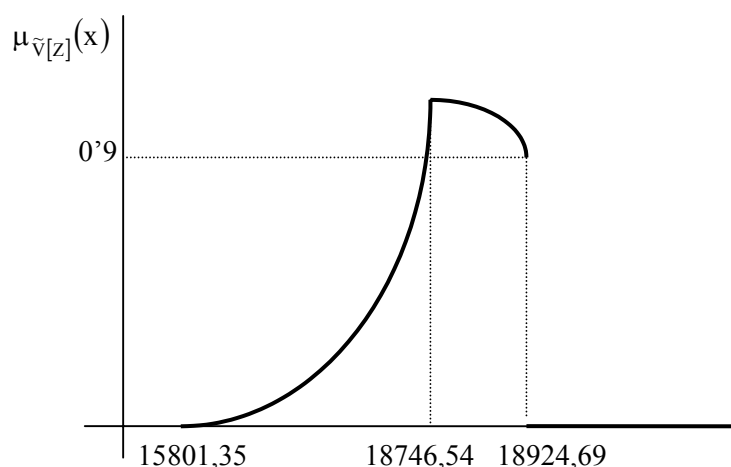
A continuación presentamos para las mismas estructuras anteriormente analizadas, la expresión de los α -cortes de $\tilde{V}[Z]$ y $\tilde{D}[Z]$ en una escala endecadaria y expresamos el interés i^* para el cual la varianza como función del interés alcanza mayor valor.

x=35 años $i^*=0,03372$					x=45 años $i^*=0,04470$			
α	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$
0	15801,35	18924,69	125,70	137,57	17772,53	26242,61	133,31	162,00
0,1	16300,90	18924,69	127,67	137,57	18565,36	26242,61	136,25	162,00
0,2	16749,24	18924,69	129,42	137,57	19313,45	26242,61	138,97	162,00
0,3	17148,26	18924,69	130,95	137,57	20016,72	26238,41	141,48	161,98
0,4	17500,03	18924,69	132,29	137,57	20675,47	26177,10	143,79	161,79
0,5	17806,76	18924,69	133,44	137,57	21290,24	26035,16	145,91	161,35
0,6	18070,76	18924,69	134,43	137,57	21861,82	25802,36	147,86	160,63
0,7	18294,39	18924,69	135,26	137,57	22391,17	25467,79	149,64	159,59

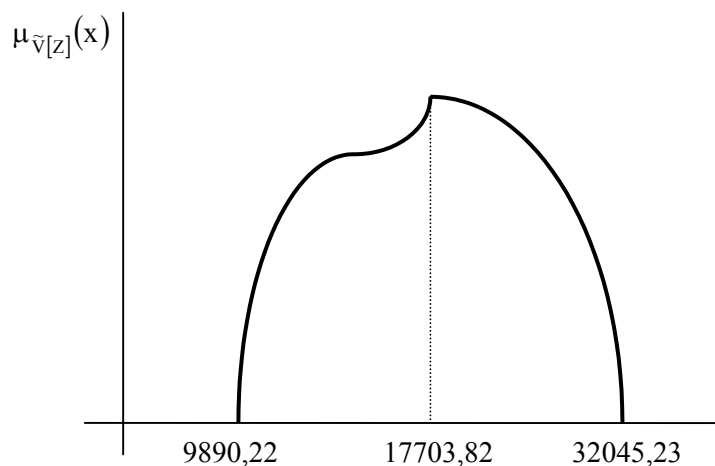
0,8	18479,99	18924,69	135,94	137,57	22879,41	25020,02	151,26	158,18
0,9	18629,94	18888,71	136,49	137,44	23327,78	24447,26	152,73	156,36
1	18746,54	18746,54	136,92	136,92	23737,60	23737,60	154,07	154,07

x=60 años $i^*=0,07224$					x=75 años $i^*=0,13786$			
α	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$
0	16174,56	35836,51	127,18	189,31	9890,22	32045,23	99,45	179,01
0,1	17173,79	35192,63	131,05	187,60	10652,50	30774,32	103,21	175,43
0,2	18156,20	34466,67	134,74	185,65	11422,76	29461,76	106,88	171,64
0,3	19119,79	33654,14	138,27	183,45	12199,41	28108,76	110,45	167,66
0,4	20062,89	32750,68	141,64	180,97	12980,99	26716,92	113,93	163,45
0,5	20984,06	31752,19	144,86	178,19	13766,14	25288,28	117,33	159,02
0,6	21882,12	30654,94	147,93	175,09	14553,58	23825,38	120,64	154,35
0,7	22756,08	29455,72	150,85	171,63	15342,13	22331,34	123,86	149,44
0,8	23605,14	28152,04	153,64	167,79	16130,69	20809,94	127,01	144,26
0,9	24428,70	26742,33	156,30	163,53	16918,23	19265,65	130,07	138,80
1	25226,29	25226,29	158,83	158,83	17703,82	17703,82	133,06	133,06

Siendo por ejemplo, la representación aproximada de $\mu_{\tilde{v}[Z]}(x)$ para un asegurado de 35 años:



y para una edad de 75 años:



No analizaremos en este caso la aproximación triangular a la varianza. Podemos comprobar, que, por los métodos que hemos propuesto, es decir, ajustando un número borroso triangular con el mismo núcleo y soporte, en los casos en que el tanto de interés crítico i^* cumple que $\mu_{\tilde{i}}(i^*) > 0$, por ejemplo, lo que ocurría para una edad de 35 años, dicho ajuste no tiene sentido. Por supuesto, el mismo problema se tendrá con la desviación estándar. Otra cuestión distinta es que i^* no pertenezca al núcleo del número borroso con el que realizamos el cálculo del valor actual, lo cual ocurre, por ejemplo, para una edad de 75 años. En este caso si podría analizarse la bondad del ajuste triangular de la varianza, o de la desviación estándar borrosa, manteniendo el núcleo y el soporte del número borroso de partida.

3.5. SEGURO TEMPORAL

3.5.1. Planteamiento general

En este caso, el asegurado recibe una unidad monetaria al final del año de fallecimiento si este sucede dentro de los próximos n años, en caso contrario no recibe indemnización. El valor actual de este capital contingente unitario es una variable borroso aleatoria que notamos como $\tilde{Z}$, y viene dada por:

$$\tilde{Z} = \begin{cases} \tilde{f}_{t+1} & \text{con } {}_t|q_x \quad t = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0 & \text{con } {}_n p_x \end{cases}$$

la cual, vendrá caracterizada por las correspondientes variables aleatorias inferior, $Z^1(\alpha)$, y superior $Z^2(\alpha)$:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} f_{t+1}^1(\alpha) & \text{con } {}_t|q_x \quad t = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0 & \text{con } {}_n p_x \end{cases} \quad \text{y} \quad Z^2(\alpha) = \begin{cases} f_{t+1}^2(\alpha) & \text{con } {}_t|q_x \quad t = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0 & \text{con } {}_n p_x \end{cases}$$

En cualquier caso, supondremos que la duración será $n > 1$, ya que en caso contrario sería un capital de fallecimiento en $t=0$, y este puede ser analizado según lo expuesto en 3.2.

Así pues, la esperanza matemática de $\tilde{Z}$, que notaremos como ${}_n\tilde{A}_x$, será un número borroso cuyos α -cortes vienen dados por:

$${}_nA_{x\alpha} = [{}_nA_x^1(\alpha), {}_nA_x^2(\alpha)] = \left[\sum_{t=0}^{n-1} f_{t+1}^1(\alpha) {}_t|q_x, \sum_{t=0}^{n-1} f_{t+1}^2(\alpha) {}_t|q_x \right] = \left[\sum_{t=0}^{n-1} {}_tB_x^1(\alpha), \sum_{t=0}^{n-1} {}_tB_x^2(\alpha) \right]$$

Por otra parte, el intervalo de confianza correspondiente a la varianza borrosa para un determinado nivel α será:

$$V[Z]_{\alpha} = \left\{ y \in \mathbb{R}^+ \mid y = \sum_{t=0}^{n-1} (x_{t+1})^2 {}_tq_x - \left(\sum_{t=0}^{n-1} x_{t+1} {}_tq_x \right)^2, x_{t+1} \in f_{t+1,\alpha} \quad t=0,1,\dots,n-1 \right\} =$$

$$=[\text{Min } y, \text{Max } y]$$

No podemos dar una expresión analítica para los α -cortes de la varianza borrosa, por las razones ya comentadas en el apartado 2.8. En cualquier caso, pueden ser obtenidos para cada nivel α que se deseen, planteando los programas siguientes:

$$\text{Minimizar (Maximizar) } y = \sum_{t=0}^{n-1} (x_{t+1})^2 {}_tq_x - \left(\sum_{t=0}^{n-1} x_{t+1} {}_tq_x \right)^2$$

s.a.:

$$f_{t+1}^1(\alpha) \leq x_{t+1} \leq f_{t+1}^2(\alpha) \quad t=0,1,\dots,n-1$$

Siendo el máximo de y , el extremo superior de $V[Z]_{\alpha}$, y el mínimo de y , su extremo inferior. Sin embargo, y tal como comentamos en el apartado 3.6.1. de la primera parte de la tesis, si aplicamos la aproximación a la varianza propuesta por Frühwirth-Schnatter, el resultado que obtendremos incluirá el α -corte real de la varianza, y facilitará la computación de ésta, si bien, a costa de obtenerse un número borroso más incierto.

Por otra parte, para la varianza de Feng, partiendo de:

$$V[Z^1(\alpha)] = \sum_{t=0}^{n-1} [f_{t+1}^1(\alpha)]^2 {}_tq_x - [{}_nA_x^1(\alpha)]^2 \quad \text{y} \quad V[Z^2(\alpha)] = \sum_{t=0}^{n-1} [f_{t+1}^2(\alpha)]^2 {}_tq_x - [{}_nA_x^2(\alpha)]^2$$

se obtiene:

$$V^*[Z] = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \sum_{t=0}^{n-1} [f_{t+1}^1(\alpha)]^2 {}_tq_x + \sum_{t=0}^{n-1} [f_{t+1}^2(\alpha)]^2 {}_tq_x - \left\{ [{}_nA_x^1(\alpha)]^2 + [{}_nA_x^2(\alpha)]^2 \right\} \right\} d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{t=0}^{n-1} {}_tq_x \int_0^1 \left\{ [f_{t+1}^1(\alpha)]^2 + [f_{t+1}^2(\alpha)]^2 \right\} d\alpha - \int_0^1 \left\{ [{}_nA_x^1(\alpha)]^2 + [{}_nA_x^2(\alpha)]^2 \right\} d\alpha \right]$$

Asimismo, las desviaciones estándar ciertas y borrosas se calculan de la forma que ha venido siendo explicitada en el resto de apartados.

3.5.2. Análisis cuando el tipo de interés a aplicar es un número borroso constante

En este supuesto, las variables aleatorias $Z^1(\alpha)$ y $Z^2(\alpha)$ vienen dadas por:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} (1 + i^2(\alpha))^{-(t+1)} & \text{con } {}_t|q_x \quad t = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0 & \text{con } {}_n p_x \end{cases}$$

y,

$$Z^2(\alpha) = \begin{cases} (1 + i^1(\alpha))^{-(t+1)} & \text{con } {}_t|q_x \quad t = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0 & \text{con } {}_n p_x \end{cases}$$

Siendo entonces los α -cortes de ${}_n \tilde{A}_x$:

$${}_n A_{x_\alpha} = [{}_n A_x^1(\alpha), {}_n A_x^2(\alpha)] = \left[\sum_{t=0}^{n-1} (1 + i^2(\alpha))^{-(t+1)} {}_t|q_x, \sum_{t=0}^{n-1} (1 + i^1(\alpha))^{-(t+1)} {}_t|q_x \right]$$

Respecto a los α -cortes de la varianza, ya hemos comprobado que no podemos asegurar su comportamiento monótono (creciente o decreciente) respecto al tipo de interés. Así, a partir de un programa matemático análogo al comentado en el apartado anterior, los extremos de los α -cortes de $\tilde{V}[Z]$ se obtienen planteando:

$$\begin{aligned} \text{Min (Max) } y &= \sum_{t=0}^{n-1} (1+x)^{-2(t+1)} {}_t|q_x - \left(\sum_{t=0}^{n-1} (1+x)^{-(t+1)} {}_t|q_x \right)^2 \\ \text{s.a.: } i^1(\alpha) &\leq x \leq i^2(\alpha) \end{aligned}$$

Sin embargo, podemos calcular $V[Z]_\alpha$ para una escala de verdad dada sin más que aplicar la metodología expuesta en el apartado 3.3.2. y teniéndose en cuenta las peculiaridades de la nueva expresión a evaluar.

Por otra parte, la varianza cierta se obtiene sin más que identificar $f_t^1(\alpha) = (1 + i^2(\alpha))^{-t}$ y $f_t^2(\alpha) = (1 + i^1(\alpha))^{-t}$ y sustituir en su expresión correspondiente, obtenida en el apartado anterior. Asimismo, la obtención de la desviación estándar de Feng, $D^*[Z]$ y los α -cortes de $\tilde{D}[Z]$, es inmediata una vez han sido calculadas las varianzas.

3.5.3. Análisis cuando el tipo de interés a aplicar es un número borroso constante y triangular

En este caso, el tipo de interés anual que se aplica durante toda la duración del seguro es un tanto $\tilde{i} = (i^1, i^2, i^3)$. De esta forma, las variables aleatorias inferior y superior para un nivel α vienen determinadas por el tipo de interés superior e inferior que se obtienen para dicho nivel, siendo:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-(t+1)} & \text{con } {}_t|q_x, t = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0 & \text{con } {}_n p_x \end{cases}$$

y,

$$Z^2(\alpha) = \begin{cases} (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-(t+1)} & \text{con } {}_t|q_x, t = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0 & \text{con } {}_n p_x \end{cases}$$

Así, los α -cortes de ${}_n \tilde{A}_x$ son:

$${}_n A_{x_\alpha} = \left[\sum_{t=0}^{n-1} (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-(t+1)} {}_t|q_x, \sum_{t=0}^{n-1} (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-(t+1)} {}_t|q_x \right]$$

A partir de la metodología comentada en el apartado 3.3.2., hallamos los α -cortes de la varianza y desviación estándar borrosa de $\tilde{Z}$, teniendo en cuenta que $i^1(\alpha) = i^1 + (i^2 - i^1)\alpha$ y $i^2(\alpha) = i^3 - (i^3 - i^2)\alpha$.

Por otra parte, la varianza de Feng es:

$$\begin{aligned} V^*[Z] &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{t=0}^{n-1} {}_t|q_x \int_0^1 \left[(1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-2(t+1)} + (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-2(t+1)} \right] d\alpha - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 \left\{ \left[\sum_{t=0}^{n-1} (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-(t+1)} {}_t|q_x \right]^2 + \left[\sum_{t=0}^{n-1} (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-(t+1)} {}_t|q_x \right]^2 \right\} d\alpha \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{t=0}^{n-1} {}_t|q_x \int_0^1 \left[(1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-2(t+1)} + (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-2(t+1)} \right] d\alpha - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 \left\{ \sum_{t=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-(t+j+2)} {}_t|q_x {}_j|q_x + \sum_{t=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-(t+j+2)} {}_t|q_x {}_j|q_x \right\} d\alpha \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{t=0}^{n-1} \left\{ \frac{[(1 + i^2)^{-2t-1} - (1 + i^3)^{-2t-1}]}{i^3 - i^2} + \frac{[(1 + i^1)^{-2t-1} - (1 + i^2)^{-2t-1}]}{i^2 - i^1} \right\} \frac{{}_t|q_x}{2t+1} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{n-1} \left\{ \frac{[(1 + i^2)^{-t-j-1} - (1 + i^3)^{-t-j-1}]}{i^3 - i^2} + \frac{[(1 + i^1)^{-t-j-1} - (1 + i^2)^{-t-j-1}]}{i^2 - i^1} \right\} \frac{{}_t|q_x {}_j|q_x}{j+t+1} \right\} \end{aligned}$$

siendo $D^*[Z]$ la raíz cuadrada de $V^*[Z]$.

3.5.4. Aplicación numérica

A continuación realizamos diversas aplicaciones numéricas para ejemplificar los resultados obtenidos. Utilizamos las mismas tablas de mortalidad y el mismo interés constante a lo largo de toda la vida del contrato, $\tilde{i} = (0'02, 0'03, 0'05)$ y se sigue suponiendo un capital asegurado de 1.000 unidades monetarias. Consideramos un único asegurado de edad $x=35$, siendo las duraciones del seguro $n=10, 20, 40$ y 65 años. Por ejemplo, si la duración del seguro son 10 años, las variables aleatorias inferior y superior para un α dado son:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-(t+1)} & \text{con } {}_tq_{35}, t = 0, 1, \dots, 9 \\ 0 & \text{con } {}_{10}p_{35} \end{cases}$$

y,

$$Z^2(\alpha) = \begin{cases} 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-(t+1)} & \text{con } {}_tq_{35}, t = 0, 1, \dots, 9 \\ 0 & \text{con } {}_{10}p_{35} \end{cases}$$

En primer lugar obtendremos la esperanza matemática de la variable borroso aleatoria asociada a esta estructura actuarial, que para una edad x y una duración del seguro de n años, es el número borroso que notamos como ${}_n\tilde{A}_x$. Posteriormente analizamos la bondad de la aproximación triangular a ${}_n\tilde{A}_x$ con la metodología que viene siendo utilizada a lo largo de la tesis, y como siempre tomamos como referencia una escala endecadaria. Para ello, y con un razonamiento análogo al realizado en el apartado anterior, partiremos de que ${}_n\tilde{A}_x$ se puede hallar como

$\sum_{t=0}^{n-1} {}_t\tilde{B}_x$. Como conocemos el error máximo en términos absolutos que se comete en los extremos

de los α -cortes de la esperanza matemática del valor actual de los capitales de fallecimiento si la aproximamos mediante números borrosos triangulares, los cuales han sido notados como $D_I^*(t)$ y $D_D^*(t)$; el error máximo que podemos cometer en el nivel de presunción por aproximar a través de un número borroso triangular ${}_n\tilde{A}_x$, con su mismo soporte y núcleo, vendrá acotado por:

$$\text{Max} \left\{ \frac{\sum_{t=0}^{n-1} D_I^*(t)}{{}_nA_x^1(1) - {}_nA_x^1(0)}, \frac{\sum_{t=0}^{n-1} D_D^*(t)}{{}_nA_x^2(0) - {}_nA_x^2(1)} \right\}$$

La expresión del número borroso triangular que queremos ajustar a la esperanza matemática, la acotación del error cometido por tomar dicha aproximación triangular y $V^*[Z]$ y $D^*[Z]$ vienen dados en el siguiente cuadro:

n	${}_n\tilde{A}_{35}$	Error	$V^*[Z]$	$D^*[Z]$
10	(14,79, 16,56, 17,56)	0,02	13287,69	115,27
20	(36,16, 45,54, 51,42)	0,04	28438,77	168,64
40	(96,27, 155,69, 201,88)	0,07	46617,58	215,91
65	(152,14, 300,16, 436,92)	0,10	19396,42	139,27

Podemos comprobar que a medida que la duración del seguro aumenta, el ajuste triangular a ${}_n\tilde{A}_{35}$ es peor. Ello es debido a que se incorporan cada vez factores de descuento con vencimientos más lejanos, que son los que peor se ajustan por un número borroso triangular. En nuestra aplicación numérica, podemos observar que si tomamos como referencia la escala endecadaria no podríamos aceptar la aproximación triangular de ${}_{65}\tilde{A}_{35}$, ya que puede producir en determinados valores un cambio en la escala de verdad a la que pertenecen. Sin embargo, para duraciones inferiores si que podemos aceptar la aproximación triangular de la esperanza matemática de las prestaciones.

A continuación presentamos para las mismas edades que analizamos la expresión de los α -cortes de la $\tilde{V}[Z]$ y $\tilde{D}[Z]$ en una escala endecadaria e indicamos el tanto de interés $i^* \geq 0$ para el cual la varianza alcanza un valor máximo.

α	n=10 años $i^*=0$				n=20 años $i^*=0$			
	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$
0	11031,07	15296,54	105,03	123,68	19943,42	37666,81	141,22	194,08
0,1	11261,08	15121,50	106,12	122,97	20722,53	36797,92	143,95	191,83
0,2	11497,76	14949,11	107,23	122,27	21544,33	35954,44	146,78	189,62
0,3	11741,31	14779,32	108,36	121,57	22411,52	35135,53	149,70	187,44
0,4	11991,98	14612,08	109,51	120,88	23327,06	34340,39	152,73	185,31
0,5	12250,02	14447,36	110,68	120,20	24294,05	33568,24	155,87	183,22
0,6	12515,67	14285,10	111,87	119,52	25315,86	32818,33	159,11	181,16
0,7	12789,20	14125,27	113,09	118,85	26396,09	32089,95	162,47	179,14
0,8	13070,89	13967,82	114,33	118,19	27538,57	31382,41	165,95	177,15
0,9	13361,03	13812,71	115,59	117,53	28747,45	30695,02	169,55	175,20
1	13659,90	13659,90	116,88	116,88	30027,15	30027,15	173,28	173,28

α	n=40 años $i^*=0$				n=65 años $i^*=0,03178$			
	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$
0	25645,83	79712,04	160,14	282,33	17054,19	19402,25	130,59	139,29
0,1	27231,22	76095,65	165,02	275,85	17442,24	19402,25	132,07	139,29
0,2	28973,07	72687,72	170,21	269,61	17815,19	19402,25	133,47	139,29
0,3	30890,52	69474,92	175,76	263,58	18167,35	19402,25	134,79	139,29
0,4	33005,35	66444,81	181,67	257,77	18492,11	19402,25	135,99	139,29
0,5	35342,40	63585,82	188,00	252,16	18781,89	19402,25	137,05	139,29
0,6	37929,93	60887,15	194,76	246,75	18970,19	19402,25	137,73	139,29
0,7	40800,24	58338,70	201,99	241,53	19113,42	19402,25	138,25	139,29
0,8	43990,19	55931,08	209,74	236,50	19225,82	19402,25	138,66	139,29
0,9	47541,97	53655,52	218,04	231,64	19309,11	19402,25	138,96	139,29
1	51503,83	51503,83	226,94	226,94	19365,03	19365,03	139,16	139,16

Tampoco analizaremos en este caso la aproximación triangular a la varianza o a la desviación estándar. Podemos comprobar que, por el método que hemos propuesto, es decir, ajustando un número borroso triangular con el mismo núcleo y soporte, en los casos en que el tanto de interés en que la varianza y la desviación estándar presentan un máximo i^* cumple que $\mu_{\tilde{i}}(i^*) > 0$, lo cual, por ejemplo ocurre para una duración de 65 años, dicho ajuste no tiene sentido. Si fuera necesario, puede utilizarse el enfoque alternativo analizado en el apartado 1.4.3. de la primera parte de la tesis. Otra cuestión distinta es que i^* no pertenezca al núcleo del número borroso con el que realizamos el cálculo del valor actual, como en los tres primeros vencimientos, entonces el ajuste mediante un número borroso triangular podría resultar aceptable.

3.6. SEGURO MIXTO O ENDOWMENT

3.6.1. Planteamiento general

Para este seguro el valor actual de una unidad monetaria pagadera al final del año de fallecimiento de una cabeza de edad x , es una variable borroso aleatoria que notamos como $\tilde{Z}$ y que se construye a partir de un capital de supervivencia con vencimiento n años más la adición de un seguro temporal pagable al final del año de fallecimiento del asegurado de duración también n años. Así, la variable borroso aleatoria que describe esta estructura actuarial es:

$$\tilde{Z} = \begin{cases} \tilde{f}_{t+1} & \text{con } {}_t|q_x \quad t = 0, 1, \dots, n-1 \\ \tilde{f}_n & \text{con } {}_n p_x \end{cases}$$

la cual, para un nivel α , vendrá caracterizada por las variables aleatorias inferior $Z^1(\alpha)$ y superior $Z^2(\alpha)$,

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} f_{t+1}^1(\alpha) & \text{con } {}_t|q_x \quad t = 0, 1, \dots, n-1 \\ f_n^1(\alpha) & \text{con } {}_n p_x \end{cases} \quad y \quad Z^2(\alpha) = \begin{cases} f_{t+1}^2(\alpha) & \text{con } {}_t|q_x \quad t = 0, 1, \dots, n-1 \\ f_n^2(\alpha) & \text{con } {}_n p_x \end{cases}$$

En cualquier caso, deberemos tomar $n > 1$ ya que si $n = 0$, la prestación es el capital cierto 1, no existiendo ningún tipo de aleatoriedad en su devengo y por tanto no tiene sentido su actualización, ya que devenga en el momento actual; y si $n = 1$, el capital unitario devenga con certeza dentro de un año, por lo que su valor es el número borroso $\tilde{f}_1$ y no una variable borroso aleatoria.

Así pues, la esperanza matemática de $\tilde{Z}$, será el número borroso $\tilde{E}[Z] = {}_n \tilde{A}_x + {}_n \tilde{E}_x$, cuyos α -cortes vienen dados por:

$$\begin{aligned} E[Z]_\alpha &= [{}_n A_x^1(\alpha) + {}_n E_x^1(\alpha), {}_n A_x^2(\alpha) + {}_n E_x^2(\alpha)] = \left[\sum_{t=0}^{n-1} f_{t+1}^1(\alpha) {}_t|q_x + f_n^1(\alpha) {}_n p_x, \sum_{t=0}^{n-1} f_{t+1}^2(\alpha) {}_t|q_x + f_n^2(\alpha) {}_n p_x \right] = \\ &= \left[\sum_{t=0}^{n-1} {}_t B_x^1(\alpha) + {}_n E_x^1(\alpha), \sum_{t=0}^{n-1} {}_t B_x^2(\alpha) + {}_n E_x^2(\alpha) \right] \end{aligned}$$

La varianza borrosa tendrá unos α -cortes, que para un nivel α serán el conjunto nítido:

$$\begin{aligned} V[Z]_\alpha &= \left\{ y \in \mathbb{R}^+ \mid y = \sum_{t=0}^{n-1} (x_{t+1})^2 {}_t|q_x + (x_n)^2 {}_n p_x - \left(\sum_{t=0}^{n-1} x_{t+1} {}_t|q_x + x_n {}_n p_x \right)^2, x_{t+1} \in f_{t+1,\alpha} \forall t, x_n \in f_{n,\alpha} \right\} \\ &= [\text{Min } y, \text{Max } y] \end{aligned}$$

Como en las dos últimas estructuras actuariales analizadas, no podemos dar una expresión analítica para los extremos de los α -cortes. Para un α dado, el extremo inferior de $V[Z]_\alpha$, es el mínimo de y ; el superior de $V[Z]_\alpha$ es asimismo el valor máximo de y . Éstos pueden ser obtenidos planteando los programas matemáticos:

$$\text{Minimizar (Maximizar) } y = \sum_{t=0}^{n-1} (x_{t+1})^2 {}_t|q_x + (x_n)^2 {}_n p_x - \left(\sum_{t=0}^{n-1} x_{t+1} {}_t|q_x + x_n {}_n p_x \right)^2$$

s.a.:

$$f_{t+1}^1(\alpha) \leq x_{t+1} \leq f_{t+1}^2(\alpha) \quad t=0, 1, \dots, n-1$$

Respecto a la varianza cierta, ya que las varianzas de las variables aleatorias que describen $f_{t+1}^1(\alpha)$ y $f_{t+1}^2(\alpha)$, $t=0, 1, \dots, n-1$, son:

$$V[Z^1(\alpha)] = \sum_{t=0}^{n-1} [f_{t+1}^1(\alpha)]^2 {}_tq_x + [f_n^1(\alpha)]^2 {}_np_x - [{}_nA_x^1(\alpha) + {}_nE_x^1(\alpha)]^2$$

$$V[Z^2(\alpha)] = \sum_{t=0}^{n-1} [f_{t+1}^2(\alpha)]^2 {}_tq_x + [f_n^2(\alpha)]^2 {}_np_x - [{}_nA_x^2(\alpha) + {}_nE_x^2(\alpha)]^2$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} V^*[Z] &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \sum_{t=0}^{n-1} [f_{t+1}^1(\alpha)]^2 {}_tq_x + [f_n^1(\alpha)]^2 {}_np_x + \sum_{t=0}^{n-1} [f_{t+1}^2(\alpha)]^2 {}_tq_x + [f_n^2(\alpha)]^2 {}_np_x - \right. \\ &\quad \left. - \left[{}_nA_x^1(\alpha) + {}_nE_x^1(\alpha) \right]^2 + \left[{}_nA_x^1(\alpha) + {}_nE_x^2(\alpha) \right]^2 \right\} d\alpha = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{t=0}^{n-1} \int_0^1 \left\{ [f_{t+1}^1(\alpha)]^2 + [f_{t+1}^2(\alpha)]^2 \right\} {}_tq_x d\alpha + \int_0^1 \left\{ [f_n^1(\alpha)]^2 + [f_n^2(\alpha)]^2 \right\} {}_np_x d\alpha - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 \left\{ \left[{}_nA_x^1(\alpha) + {}_nE_x^1(\alpha) \right]^2 + \left[{}_nA_x^2(\alpha) + {}_nE_x^2(\alpha) \right]^2 \right\} d\alpha \right\} \end{aligned}$$

Por otra parte, la obtención de $D[Z]_\alpha$ y $D^*[Z]$ es inmediata una vez hallado $V[Z]_\alpha$ y $V^*[Z]$.

3.6.2. Análisis cuando el tipo de interés a aplicar es un número borroso constante

En este caso, las variables aleatorias $Z^1(\alpha)$ y $Z^2(\alpha)$ vienen dadas por:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} (1 + i^2(\alpha))^{-(t+1)} & \text{con } {}_tq_x \quad t = 0, 1, \dots, n-1 \\ (1 + i^2(\alpha))^{-n} & \text{con } {}_np_x \end{cases}$$

y,

$$Z^2(\alpha) = \begin{cases} (1 + i^1(\alpha))^{-(t+1)} & \text{con } {}_tq_x \quad t = 0, 1, \dots, n-1 \\ (1 + i^1(\alpha))^{-n} & \text{con } {}_np_x \end{cases}$$

Siendo entonces los α -cortes de la esperanza de $\tilde{Z}$, $\tilde{E}[Z]$:

$$\begin{aligned} E[Z]_\alpha &= [{}_nA_x^1(\alpha) + {}_nE_x^1(\alpha), {}_nA_x^2(\alpha) + {}_nE_x^2(\alpha)] = \\ &= \left[\sum_{t=0}^{n-1} (1 + i^2(\alpha))^{-(t+1)} {}_tq_x + (1 + i^2(\alpha))^{-n} {}_np_x, \sum_{t=0}^{n-1} (1 + i^1(\alpha))^{-(t+1)} {}_tq_x + (1 + i^1(\alpha))^{-n} {}_np_x \right] \end{aligned}$$

Dado que no podemos demostrar que la varianza sea una función monótona creciente o decreciente del interés, un α -corte para un nivel α arbitrario se hallará como:

$$V[Z]_{\alpha} = \left\{ y \in \mathbb{R}^+ \mid y = \sum_{t=0}^{n-1} (1+x)^{-2(t+1)} {}_tq_x + (1+x)^{-2n} {}_np_x - \left(\sum_{t=0}^{n-1} (1+x)^{-(t+1)} {}_tq_x + (1+x)^{-n} {}_np_x \right)^2, y \in i_{\alpha} \right\}$$

de forma que el programa planteado en el apartado anterior para hallar $V[Z]_{\alpha}$ se reduce a:

$$\begin{aligned} \text{Min (Max)} \quad & y = \sum_{t=0}^{n-1} (1+x)^{-2(t+1)} {}_tq_x + (1+x)^{-2n} {}_np_x - \left(\sum_{t=0}^{n-1} (1+x)^{-(t+1)} {}_tq_x + (1+x)^{-n} {}_np_x \right)^2 \\ \text{s.a.,} \quad & i^1(\alpha) \leq x \leq i^2(\alpha) \end{aligned}$$

y adaptándonos a la función que define a $V[Z]_{\alpha}$, los α -cortes de $\tilde{V}[Z]$ se pueden hallar aplicando la metodología expuesta en el epígrafe 3.4.2.

En cuanto a la varianza cierta, a través de la expresión hallada en el apartado 3.6.1., expresando los factores de actualización a través de los α -cortes del interés, se obtiene de forma inmediata.

3.6.3. Análisis cuando el tipo de interés a aplicar es un número borroso constante y triangular

Si el tipo de interés borroso a aplicar durante los próximos periodos es un número constante y triangular, las variables aleatorias inferior y superior vienen determinadas por:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-(t+1)} & \text{con } {}_tq_x, t=0,1,\dots,n-1 \\ (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-n} & \text{con } {}_np_x \end{cases}$$

y,

$$Z^2(\alpha) = \begin{cases} (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-(t+1)} & \text{con } {}_tq_x, t=0,1,\dots,n-1 \\ (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-n} & \text{con } {}_np_x \end{cases}$$

de esta forma, los α -cortes de la esperanza matemática de $\tilde{Z}$, toman como expresión:

$$E[Z]_{\alpha} = \left[\sum_{t=0}^{n-1} (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-(t+1)} {}_tq_x + (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-n} {}_np_x, \sum_{t=0}^{n-1} (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-(t+1)} {}_tq_x + (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-n} {}_np_x \right]$$

Los α -cortes de la varianza borrosa, y de forma inmediata, los de $\tilde{D}[Z]$, se obtienen sin más que considerar que $i_{\alpha} = [i^1 + (i^2 - i^1)\alpha, i^3 - (i^3 - i^2)\alpha]$. Asimismo, para hallar la varianza cierta, partiendo de

las varianzas de las variables aleatorias inferior y superior que define el tipo de interés para un nivel α planteamos:

$$\begin{aligned} V[Z^1(\alpha)] &= \sum_{r=0}^{n-1} (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-2(t+1)} {}_t|q_x + (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-2n} {}_n p_x - \\ &- \left[\sum_{r=0}^{n-1} (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-(t+1)} {}_t|q_x + (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-n} {}_n p_x \right]^2 \\ V[Z^2(\alpha)] &= \sum_{r=0}^{n-1} (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-2(t+1)} {}_t|q_x + (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-2n} {}_n p_x - \\ &- \left[\sum_{r=0}^{n-1} (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-(t+1)} {}_t|q_x + (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-n} {}_n p_x \right]^2 \end{aligned}$$

obtendríamos la varianza cierta como:

$$\begin{aligned} V^*[Z]_\alpha &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{t=0}^{n-1} {}_t|q_x \int_0^1 \left[(1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-2(t+1)} + (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-2(t+1)} \right] d\alpha + \right. \\ &+ {}_n p_x \int_0^1 \left[(1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-2n} + (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-2n} \right] d\alpha - \\ &- \int_0^1 \left\{ \left[\sum_{t=0}^{n-1} (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-(t+1)} {}_t|q_x + (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-n} {}_n p_x \right]^2 + \right. \\ &+ \left. \left[\sum_{t=0}^{n-1} (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-(t+1)} {}_t|q_x + (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-n} {}_n p_x \right]^2 \right\} d\alpha = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{t=0}^{n-1} \left\{ \frac{[(1+i^2)^{-2t-1} - (1+i^3)^{-2t-1}]}{i^3 - i^2} + \frac{[(1+i^1)^{-2t-1} - (1+i^2)^{-2t-1}]}{i^2 - i^1} \right\} \frac{{}_t|q_x}{2t+1} + \right. \\ &+ \left\{ \frac{[(1+i^2)^{-2n+1} - (1+i^3)^{-2n+1}]}{i^3 - i^2} + \frac{[(1+i^1)^{-2n+1} - (1+i^2)^{-2n+1}]}{i^2 - i^1} \right\} \frac{{}_n p_x}{2n-1} - \\ &- \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{n-1} \left\{ \frac{[(1+i^2)^{-t-j-1} - (1+i^3)^{-t-j-1}]}{i^3 - i^2} + \frac{[(1+i^1)^{-t-j-1} - (1+i^2)^{-t-j-1}]}{i^2 - i^1} \right\} \frac{{}_t|q_x {}_j|q_x}{t+j+1} - \\ &- 2 \sum_{t=0}^{n-1} \left\{ \frac{[(1+i^2)^{-n-t} - (1+i^3)^{-n-t}]}{i^3 - i^2} + \frac{[(1+i^1)^{-n-t} - (1+i^2)^{-n-t}]}{i^2 - i^1} \right\} \frac{{}_t|q_x {}_n p_x}{t+n} \right\} \end{aligned}$$

Siendo la posterior obtención de $D^*[Z]$, inmediata.

3.6.4. Aplicación numérica

Realizamos como siempre diversos ejemplos numéricos para la estructura que ha sido analizada. Utilizamos las mismas tablas de mortalidad y el mismo interés constante y triangular que en el

resto de aplicaciones y se sigue suponiendo un capital asegurado de 1.000 unidades monetarias. El asegurado, como en el apartado anterior, tendrá una edad $x=35$ y las duraciones del seguro mixto serán $n=5, 10, 25$ y 60 años. Por ejemplo, si la duración del seguro son 5 años, las variables aleatorias inferior y superior para un α dado son:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-(t+1)} & \text{con } {}_tq_{35}, t = 0, 1, \dots, 4 \\ 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-5} & \text{con } {}_5p_{35} \end{cases}$$

y,

$$Z^2(\alpha) = \begin{cases} 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-(t+1)} & \text{con } {}_tq_{35}, t = 0, 1, \dots, 4 \\ 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-5} & \text{con } {}_5p_{35} \end{cases}$$

En primer lugar analizaremos la obtención de la esperanza matemática de la variable borroso aleatoria asociada a esta estructura actuarial, que para una edad x y una duración del seguro n , es la suma de números borrosos ${}_n\tilde{A}_x + {}_n\tilde{E}_x$. También analizamos la bondad de la aproximación triangular con la metodología que viene siendo utilizada a lo largo de la tesis, asumiéndose como siempre una escala endecadaria. Como ${}_n\tilde{A}_x$ se puede hallar como $\sum_{t=0}^{n-1} {}_t\tilde{B}_x$; y como conocemos

el error absoluto máximo que se comete en los α -cortes de la esperanza matemática de los capitales de fallecimiento y supervivencia que lo componen, que hemos notado como $D_I^*(t)$ y $D_D^*(t)$ para ${}_t\tilde{B}_x$, y $D_I^*(n)$ y $D_D^*(n)$ para ${}_n\tilde{E}_x$, el error que podemos cometer en el nivel de pertenencia de un valor cualquiera por tomar la aproximación triangular de la esperanza matemática no será superior a:

$$\text{Max} \left\{ \frac{\sum_{t=0}^{n-1} D_I^*(t) + D_I^*(n)}{{}_nA_x^1(1) + {}_nE_x^1(1) - {}_nA_x^1(0) - {}_nE_x^1(0)}, \frac{\sum_{t=0}^{n-1} D_D^*(t) + D_D^*(n)}{{}_nA_x^2(0) + {}_nE_x^2(0) - {}_nA_x^2(1) - {}_nE_x^2(1)} \right\}$$

Para las estructuras propuestas, el valor del número borroso con el que queremos ajustar la esperanza matemática, la acotación al error cometido por su aproximación triangular y $V^*[Z]$ y $D^*[Z]$, vienen dadas en el siguiente cuadro.

n	${}_n\tilde{A}_{35} + {}_n\tilde{E}_{35}$	Error	$V^*[Z]$	$D^*[Z]$
5	(784,12, 862,99, 906,00)	0,01	34,43	5,87
10	(616,53, 745,90, 821,65)	0,03	296,04	17,21
25	(313,01, 492,54, 621,41)	0,06	3872,46	62,23
60	(152,93, 302,34, 440,55)	0,10	18683,71	136,69

Podemos comprobar que a medida que la duración del seguro aumenta, el ajuste triangular a la esperanza matemática del valor actual de las prestaciones del seguro mixto es peor. Ello es debido a que se incorporan cada vez más factores de descuento con vencimientos lejanos, que son los que peor se ajustan por un número borroso triangular. En nuestra aplicación numérica, podemos observar que para una escala endecadaria no podríamos aceptar la aproximación triangular si la duración del seguro es 65 años, aunque sí para el resto de vencimientos.

Para las estructuras propuestas, expresamos los α -cortes de $\tilde{V}[Z]$ y $\tilde{D}[Z]$ en una escala endecadaria y hallamos el interés $i^* \geq 0$ para el cual la varianza alcanza mayor valor en cada caso.

n=5 años $i^*=0,42$					n=10 años $i^*=0,2059$			
α	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$
0	14,31	71,71	3,78	8,47	132,72	556,78	11,52	23,60
0,1	15,66	67,05	3,96	8,19	144,35	526,59	12,01	22,95
0,2	17,06	62,48	4,13	7,90	156,28	496,36	12,50	22,28
0,3	18,51	58,00	4,30	7,62	168,50	466,14	12,98	21,59
0,4	20,00	53,63	4,47	7,32	181,00	435,99	13,45	20,88
0,5	21,54	49,36	4,64	7,03	193,75	405,99	13,92	20,15
0,6	23,13	45,20	4,81	6,72	206,75	376,20	14,38	19,40
0,7	24,76	41,17	4,98	6,42	219,97	346,70	14,83	18,62
0,8	26,43	37,27	5,14	6,10	233,39	317,58	15,28	17,82
0,9	28,14	33,51	5,30	5,79	247,02	288,92	15,72	17,00
1	29,89	29,89	5,47	5,47	260,82	260,82	16,15	16,15

n=25 años $i^*=0,07686$					n=60 años $i^*=0,03412$			
α	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$
0	2179,16	5423,79	46,68	73,65	15484,55	18714,92	124,44	136,80
0,1	2326,07	5298,16	48,23	72,79	15987,16	18714,92	126,44	136,80
0,2	2471,91	5159,82	49,72	71,83	16439,86	18714,92	128,22	136,80
0,3	2616,36	5008,36	51,15	70,77	16844,35	18714,92	129,79	136,80
0,4	2759,10	4843,47	52,53	69,60	17202,54	18714,92	131,16	136,80
0,5	2899,86	4664,90	53,85	68,30	17516,49	18714,92	132,35	136,80
0,6	3038,41	4472,51	55,12	66,88	17788,36	18714,92	133,37	136,80
0,7	3174,52	4266,26	56,34	65,32	18020,38	18714,92	134,24	136,80
0,8	3308,02	4046,28	57,52	63,61	18214,78	18714,74	134,96	136,80
0,9	3438,74	3812,87	58,64	61,75	18373,83	18660,82	135,55	136,60
1	3566,53	3566,53	59,72	59,72	18499,74	18499,74	136,01	136,01

Valiendo, en este caso, los mismos comentarios efectuados en los dos apartados precedentes.

3.7. RENTA VITALICIA ANTICIPADA

3.7.1. Planteamiento general

Como en el apartado 2.6., suponemos que, de forma general existe un diferimiento de d años hasta el devengo de la primera cuantía de la renta. Si el asegurado fallece durante los d primeros años, la renta no devenga, y si sobrevive, devenga una unidad monetaria al principio de cada año mientras el asegurado se mantiene con vida.

El valor actual de las prestaciones (primas) unitarias correspondientes a esta estructura, viene dada por una variable borroso aleatoria que podemos notar como:

$$\tilde{Z} = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_d q_x \\ \sum_{j=d}^t \tilde{f}_j & \text{con } {}_t | q_x \quad t = d, d+1, \dots, w-x-1 \end{cases}$$

Así, $\sum_{j=d}^t \tilde{f}_j$ es el valor actual de una renta unitaria, diferida d años y anticipada, de $t-d+1$ términos,

cuyo valor notamos como ${}_d | \tilde{a}_{\overline{t-d+1}|}$, siendo sus α -cortes:

$${}_d | \tilde{a}_{\overline{t-d+1}|} \alpha = \left[{}_d | \tilde{a}_{\overline{t-d+1}|}^1(\alpha), {}_d | \tilde{a}_{\overline{t-d+1}|}^2(\alpha) \right] = \left[\sum_{j=d}^t f_j^1(\alpha), \sum_{j=d}^t f_j^2(\alpha) \right]$$

De esta forma, la función de cuantía de las variables aleatorias inferior $Z^1(\alpha)$ y superior $Z^2(\alpha)$ que la definen para un α dado son:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_d q_x \\ {}_d | \tilde{a}_{\overline{t-d+1}|}^1(\alpha) = \sum_{j=d}^t f_j^1(\alpha) & \text{con } {}_t | q_x, t = d, d+1, \dots, w-x-1 \end{cases}$$

y,

$$Z^2(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_d q_x \\ {}_d | \tilde{a}_{\overline{t-d+1}|}^2(\alpha) = \sum_{j=d}^t f_j^2(\alpha) & \text{con } {}_t | q_x, t = d, d+1, \dots, w-x-1 \end{cases}$$

La esperanza matemática de la variable borroso aleatoria valor actual de la renta, será un número borroso que notamos como ${}_d | \tilde{a}_x$ y cuyos α -cortes toman como expresión, a partir de la que finalmente hemos obtenido en el apartado 2.6. de esta parte de la tesis:

$${}_d\ddot{a}_{x:\alpha} = \left[{}_d\ddot{a}_x^1(\alpha), {}_d\ddot{a}_x^2(\alpha) \right] = \left[\sum_{t=d}^{w-x-1} f_t^1(\alpha) {}_t p_x, \sum_{t=d}^{w-x-1} f_t^2(\alpha) {}_t p_x \right] = \left[\sum_{t=d}^{w-x-1} {}_t E_x^1(\alpha), \sum_{t=0}^{w-x-1} {}_t E_x^2(\alpha) \right]$$

Asimismo, la varianza borrosa tendrá unos α -cortes que serán el conjunto nítido para un determinado nivel α , que a partir de la expresión que finalmente hemos obtenido en el apartado 2.6. de esta parte de la tesis podemos notar como:

$$V[Z]_\alpha = \left\{ y \in \mathbb{R}^+ \mid y = \sum_{t=d}^{w-x-1} (x_t)^2 {}_t p_x {}_t q_x - 2 \sum_{t=d+1}^{w-x-1} \sum_{j=d}^{t-1} x_t x_j {}_t p_x {}_j p_x, x_t \in f_{t_\alpha} \forall t \right\} = [\text{Min } y, \text{Max } y]$$

Como ya comprobamos en el apartado 2.8, la varianza – y por tanto la desviación estándar – son decrecientes respecto al tipo de interés de actualización; y por tanto, siempre el extremo superior de los α -cortes de éstas medidas se hallarán a través del extremo superior del factor de descuento y viceversa. De esta forma, sus α -cortes son:

$$\begin{aligned} V[Z]_\alpha &= \left[\sum_{t=d}^{w-x-1} \left[\sum_{j=d}^t f_j^1(\alpha) \right]^2 {}_t q_x - [{}_d\ddot{a}_x^1(\alpha)]^2, \sum_{t=d}^{w-x-1} \left[\sum_{j=d}^t f_j^2(\alpha) \right]^2 {}_t q_x - [{}_d\ddot{a}_x^2(\alpha)]^2 \right] = \\ &= \left[\sum_{t=d}^{w-x-1} f_t^1(\alpha) {}_t p_x {}_t q_x + 2 \sum_{t=d+1}^{w-x-1} \sum_{j=d}^{t-1} f_t^1(\alpha) f_j^1(\alpha) {}_t p_x {}_j q_x, \right. \\ &\quad \left. \sum_{t=d}^{w-x-1} f_t^2(\alpha) {}_t p_x {}_t q_x + 2 \sum_{t=d+1}^{w-x-1} \sum_{j=d}^{t-1} f_t^2(\alpha) f_j^2(\alpha) {}_t p_x {}_j q_x \right] \end{aligned}$$

Por otra parte, la varianza cierta se obtiene sin más que considerar que:

$$V[Z^1(\alpha)] = \sum_{t=d}^{w-x-1} f_t^1(\alpha) {}_t p_x {}_t q_x + 2 \sum_{t=d+1}^{w-x-1} \sum_{j=d}^{t-1} f_t^1(\alpha) f_j^1(\alpha) {}_t p_x {}_j q_x$$

y,

$$V[Z^2(\alpha)] = \sum_{t=d}^{w-x-1} f_t^2(\alpha) {}_t p_x {}_t q_x + 2 \sum_{t=d+1}^{w-x-1} \sum_{j=d}^{t-1} f_t^2(\alpha) f_j^2(\alpha) {}_t p_x {}_j q_x$$

Se obtiene,

$$\begin{aligned} V^*[Z] &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\sum_{t=d}^{w-x-1} f_t^1(\alpha) {}_t p_x {}_t q_x + 2 \sum_{t=d+1}^{w-x-1} \sum_{j=d}^{t-1} f_t^1(\alpha) f_j^1(\alpha) {}_t p_x {}_j q_x + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{t=d}^{w-x-1} f_t^2(\alpha) {}_t p_x {}_t q_x + 2 \sum_{t=d+1}^{w-x-1} \sum_{j=d}^{t-1} f_t^2(\alpha) f_j^2(\alpha) {}_t p_x {}_j q_x \right] d\alpha = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\sum_{t=d}^{w-x-1} \{f_t^1(\alpha) + f_t^2(\alpha)\} {}_t p_x {}_t q_x + 2 \sum_{t=d+1}^{w-x-1} \sum_{j=d}^{t-1} \{f_t^1(\alpha) f_j^1(\alpha) + f_t^2(\alpha) f_j^2(\alpha)\} {}_t p_x {}_j q_x \right] d\alpha = \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{t=d}^{w-x-1} {}_t p_x {}_t q_x \int_0^1 \{f_t^1(\alpha) + f_t^2(\alpha)\} d\alpha + 2 \sum_{t=d+1}^{w-x-1} \sum_{j=d}^{t-1} {}_t p_x {}_j q_x \int_0^1 \{f_t^1(\alpha) f_j^1(\alpha) + f_t^2(\alpha) f_j^2(\alpha)\} d\alpha \right\}
 \end{aligned}$$

3.7.2. Análisis cuando el tipo de interés a aplicar es un número borroso constante

En este caso, las variables aleatorias $Z^1(\alpha)$ y $Z^2(\alpha)$, es decir, la inferior y superior son:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_d q_x \\ {}_{d|} \ddot{a}_{\overline{t-d+1}|i^2(\alpha)} & \text{con } {}_{t|} q_x \quad t = d, d+1, \dots, w-x-1 \end{cases}$$

y,

$$Z^2(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_d q_x \\ {}_{d|} \ddot{a}_{\overline{t-d+1}|i^1(\alpha)} & \text{con } {}_{t|} q_x \quad t = d, d+1, \dots, w-x-1 \end{cases}$$

Siendo los α -cortes de la t -ésima realización de la variable borroso aleatoria ${}_{d|} \ddot{a}_{\overline{t-d+1}|}$, con $t \geq d$:

$$\begin{aligned}
 {}_{d|} \ddot{a}_{\overline{t-d+1}| \alpha} &= \left[{}_{d|} \ddot{a}_{\overline{t-d+1}|}^1(\alpha), {}_{d|} \ddot{a}_{\overline{t-d+1}|}^2(\alpha) \right] = \left[{}_{d|} \ddot{a}_{\overline{t-d+1}|i^2(\alpha)}, {}_{d|} \ddot{a}_{\overline{t-d+1}|i^1(\alpha)} \right] = \\
 &= \left[\frac{1 - (1 + i^2(\alpha))^{-(t-d+1)}}{i^2(\alpha)} (1 + i^2(\alpha))^{-d}, \frac{1 - (1 + i^1(\alpha))^{-(t-d+1)}}{i^1(\alpha)} (1 + i^1(\alpha))^{-d} \right]
 \end{aligned}$$

Asimismo, los α -cortes de la esperanza de $\tilde{Z}$, ${}_{d|} \ddot{a}_x$ son:

$${}_{d|} \ddot{a}_{x \alpha} = \left[{}_{d|} \ddot{a}_x^1(\alpha), {}_{d|} \ddot{a}_x^2(\alpha) \right] = \left[\sum_{t=d}^{w-x-1} (1 + i^2(\alpha))^{-t} {}_t p_x, \sum_{t=d}^{w-x-1} (1 + i^1(\alpha))^{-t} {}_t p_x \right]$$

En cuanto a la varianza borrosa, los α -cortes se obtienen a través de la expresión propuesta en 3.7.1, como función de i_α . De esta forma obtenemos:

$$\begin{aligned}
 V[Z]_\alpha &= \left[\sum_{t=d}^{w-x-1} (1 + i^2(\alpha))^{-2t} {}_t p_x {}_t q_x + 2 \sum_{t=d+1}^{w-x-1} \sum_{j=d}^{t-1} (1 + i^2(\alpha))^{-t-j} {}_t p_x {}_j q_x, \right. \\
 &\quad \left. \sum_{t=d}^{w-x-1} (1 + i^1(\alpha))^{-2t} {}_t p_x {}_t q_x + 2 \sum_{t=d+1}^{w-x-1} \sum_{j=d}^{t-1} (1 + i^1(\alpha))^{-t-j} {}_t p_x {}_j q_x \right]
 \end{aligned}$$

En cuanto a la varianza cierta, a través de su correspondiente expresión, ya hallada en 3.7.1. y expresando los factores de actualización a través de los α -cortes del interés, la integral definida

que debemos resolver es inmediata. Por otra parte, la posterior obtención de $D[Z]_\alpha$ y $D^*[Z]$, también será directa.

3.7.3. Análisis cuando el tipo de interés a aplicar es un número borroso constante y triangular

Si el tipo de interés borroso a aplicar durante los próximos periodos es un número borroso triangular igual, las variables aleatorias inferior y superior vienen determinadas por:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_d q_x \\ {}_{d|} \ddot{a}_{\overline{t-d+1}|i^3-(i^3-i^2)\alpha} & \text{con } {}_t q_x, t = d, \dots, w-x-1 \end{cases}$$

y,

$$Z^2(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_d q_x \\ {}_{d|} \ddot{a}_{\overline{t-d+1}|i^1+(i^2-i^1)\alpha} & \text{con } {}_t q_x, t = d, \dots, w-x-1 \end{cases}$$

de esta forma, los α -cortes de la esperanza matemática de $\tilde{Z}$, toman como expresión:

$${}_{d|} \ddot{a}_{x\alpha} = [{}_{d|} \ddot{a}_x^1(\alpha), {}_{d|} \ddot{a}_x^2(\alpha)] = \left[\sum_{t=d}^{w-x-1} (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-t} {}_t p_x, \sum_{t=d}^{w-x-1} (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-t} {}_t p_x \right]$$

Asimismo, sustituyendo en $V^1[Z](\alpha)$ y $V^2[Z](\alpha)$, $i^2(\alpha) = i^3 - (i^3 - i^2)\alpha$ y $i^1(\alpha) = i^1 + (i^2 - i^1)\alpha$, obtenemos:

$$V[Z]_\alpha = \left[\sum_{t=d}^{w-x-1} (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-2t} {}_t p_x {}_t q_x + 2 \sum_{t=d+1}^{w-x-1} \sum_{j=d}^{t-1} (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-t-j} {}_t p_x {}_j q_x, \right. \\ \left. \sum_{t=d}^{w-x-1} (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-2t} {}_t p_x {}_t q_x + 2 \sum_{t=d+1}^{w-x-1} \sum_{j=d}^{t-1} (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-t-j} {}_t p_x {}_j q_x \right]$$

Y por otra parte, la varianza cierta será entonces:

$$V^*[Z] = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{t=d}^{w-x-1} {}_t p_x {}_t q_x \int_0^1 \left\{ (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-2t} + (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-2t} \right\} d\alpha + \right. \\ \left. + 2 \sum_{t=d+1}^{w-x-1} \sum_{j=d}^{t-1} {}_t p_x {}_j q_x \int_0^1 \left\{ (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-t-j} + (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-t-j} \right\} d\alpha \right\}$$

Deberemos diferenciar los siguientes casos, que dependerán del diferimiento de la renta. El primer caso, es que $d=0$ o bien $d=1$, tratándose en este segundo supuesto de una renta vitalicia, inmediata y vencida. En ambos casos:

$$V^*[Z] = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\ln \frac{1+i^3}{1+i^2}}{i^3-i^2} + \frac{\ln \frac{1+i^2}{1+i^1}}{i^2-i^1} \right] {}_1p_x {}_1q_x + \sum_{t=2}^{w-x-1} \left\{ \frac{\left[\frac{(1+i^2)^{-2t+1} - (1+i^3)^{-2t+1}}{i^3-i^2} \right] + \left[\frac{(1+i^1)^{-2t+1} - (1+i^2)^{-2t+1}}{i^2-i^1} \right]}{2t-1} \right\} {}_t p_x {}_t q_x + \right. \\ \left. + 2 \sum_{t=2}^{w-x-1} \sum_{j=1}^{t-1} \left\{ \frac{\left[\frac{(1+i^2)^{-t-j+1} - (1+i^3)^{-t-j+1}}{i^3-i^2} \right] + \left[\frac{(1+i^1)^{-t-j+1} - (1+i^2)^{-t-j+1}}{i^2-i^1} \right]}{t+j-1} \right\} {}_t p_x {}_j q_x \right\}$$

En el caso en que $d \geq 2$, se obtiene entonces:

$$V^*[Z] = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{t=d}^{w-x-1} \left\{ \frac{\left[\frac{(1+i^2)^{-2t+1} - (1+i^3)^{-2t+1}}{i^3-i^2} \right] + \left[\frac{(1+i^1)^{-2t+1} - (1+i^2)^{-2t+1}}{i^2-i^1} \right]}{2t-1} \right\} {}_t p_x {}_t q_x + \right. \\ \left. + 2 \sum_{t=d+1}^{w-x-1} \sum_{j=d}^{t-1} \left\{ \frac{\left[\frac{(1+i^2)^{-t-j+1} - (1+i^3)^{-t-j+1}}{i^3-i^2} \right] + \left[\frac{(1+i^1)^{-t-j+1} - (1+i^2)^{-t-j+1}}{i^2-i^1} \right]}{t+j-1} \right\} {}_t p_x {}_j q_x \right\}$$

3.7.4. Aplicación numérica

Como siempre, en primer lugar analizaremos la obtención de la esperanza matemática de la variable borroso aleatoria asociada a esta estructura actuarial, que para una edad x es la suma de números borrosos ${}_d|\tilde{a}_x = \sum_{t=d}^{w-x-1} {}_t\tilde{E}_x$, y la bondad de la aproximación triangular con la metodología que viene siendo utilizada a lo largo de la tesis, asumiéndose una escala endecadaria. Es fácil comprobar que ${}_d|\tilde{a}_x$ se obtiene como la suma de la esperanza matemática de capitales de supervivencia; y ya conocemos el error absoluto máximo que se comete en los α -cortes de estos últimos al aproximarlos triangularmente como un número borroso con el mismo soporte y núcleo. Si notamos para ${}_t\tilde{E}_x$ como $D_I^*(t)$ al error que se comete a la izquierda y como $D_D^*(t)$ al que se comete a la derecha, el error que como máximo se incurre en la función característica al aproximar triangularmente ${}_d|\tilde{a}_x$ vendrá dado por:

$$\text{Max} \left\{ \frac{\sum_{t=d}^{w-x-1} D_I^*(t)}{{}_d|\tilde{a}_x^1(1) - {}_d|\tilde{a}_x^1(0)}, \frac{\sum_{t=d}^{w-x-1} D_D^*(t)}{{}_d|\tilde{a}_x^2(0) - {}_d|\tilde{a}_x^2(1)} \right\}$$

Por otra parte, en las rentas, el extremo inferior de los α -cortes de la varianza borrosa viene dado por la trayectoria superior para ese mismo nivel de presunción de los tipos de interés de actualización y viceversa, lo cual también ocurriría con la esperanza matemática. Dado que

normalmente sólo nos interesan los α -cortes del número borroso que estamos hallando para unos determinados niveles de presunción, que vendrán dados por la escala de verdad elegida (en nuestro caso, la endecadaria), analizaremos, siguiendo de forma un poco más laxa la metodología de siempre, hasta que punto es razonable ajustar un número borroso triangular a la varianza y a la desviación estándar borrosas.

Utilizando las mismas tablas de mortalidad y el mismo interés constante y triangular que en el resto de aplicaciones, suponemos una renta de supervivencia de 100 unidades monetarias anuales anticipadas. Los asegurados tendrán unas edades $x=45$ y 65 años y los diferimientos de las mismas serán $d=0$ y 20 años. Por ejemplo, si el asegurado tiene 45 años y el diferimiento del seguro es $d=20$ años, las variables borroso aleatorias inferior y superior para un nivel de presunción α dado son:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_{20}q_{45} \\ 100 \cdot {}_{20|}\ddot{a}_{\overline{t-19|}0'05-0'02\alpha} & \text{con } {}_t|q_{45} \text{ con } t = 20, 21, \dots, 49 \end{cases}$$

y,

$$Z^2(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_{20}q_{45} \\ 100 \cdot {}_{20|}\ddot{a}_{\overline{t-19|}0'02+0'01\alpha} & \text{con } {}_t|q_{45} \text{ con } t = 20, 21, \dots, 49 \end{cases}$$

Para las estructuras de rentas vitalicias anticipadas propuestas, la expresión del número borroso triangular que queremos ajustar a la esperanza matemática, la acotación del error cometido por su aproximación triangular y $V^*[Z]$ y $D^*[Z]$ vienen dados en el siguiente cuadro.

	$\tilde{E}[Z]$	Error	$V^*[Z]$	$D^*[Z]$
$\tilde{a}_{45}$	(1619,39, 2092,08, 2423,86)	0,06	284170,95	533,08
${}_{20 }\tilde{a}_{45}$	(365,08, 629,42, 835,44)	0,07	146784,36	383,12
$\tilde{a}_{65}$	(1132,33, 1328,89, 1451,19)	0,04	274848,01	524,26
${}_{20 }\tilde{a}_{65}$	(76,28, 119,97, 151,20)	0,06	36428,99	190,86

Podemos comprobar que a medida que el diferimiento de la renta aumenta o la edad del rentista disminuye, el ajuste triangular a la esperanza matemática del valor actual de esta estructura es peor. Ello es debido a que el valor actual se compone en mayor medida por valores actuales de capitales con vencimientos lejanos, y tal como se ha venido comentando, el mal ajuste triangular del valor actual de éstos repercute en el ajuste final mediante un número borroso triangular de ${}_d\tilde{a}_x$.

A continuación presentamos para las mismas edades que analizamos el valor de los α -cortes de la $\tilde{V}[Z]$ y $\tilde{D}[Z]$ en una escala endecadaria, analizándose la bondad del ajuste triangular tal como hemos visto al inicio del apartado. Ello es debido a que no podremos, tal como ocurría en el apartado 4.3.4. de la primera parte de la tesis, ajustar de forma casi “perfecta” un polinomio de segundo grado de α , por que hemos optado por “discretizar” el número borroso tomando una escala endecadaria. A partir de aquí, podremos hallar los niveles α donde se produce mayor error en los extremos de los α -cortes, las desviaciones máximas a la izquierda y a la derecha y el error que podemos cometer como máximo en el nivel de presunción de un valor cualquiera por tomar una función de pertenencia lineal de $\tilde{V}[Z]$ y $\tilde{D}[Z]$.

Los α -cortes de las varianzas y de las desviaciones estándar para cada una de las rentas analizadas son:

x=45 años d=0 años					x=45 años d=20 años			
α	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$
0	114793,08	462263,56	338,81	679,90	42184,56	264188,66	205,39	513,99
0,1	124686,72	438850,26	353,11	662,46	47407,88	247754,06	217,73	497,75
0,2	135619,83	416788,95	368,27	645,59	53317,79	232394,24	230,91	482,07
0,3	147717,91	395993,97	384,34	629,28	60009,94	218035,53	244,97	466,94
0,4	161123,31	376385,45	401,40	613,50	67594,04	204609,52	259,99	452,34
0,5	175997,69	357888,95	419,52	598,24	76196,08	192052,71	276,04	438,24
0,6	192524,88	340435,05	438,78	583,47	85960,86	180306,12	293,19	424,62
0,7	210914,14	323959,00	459,25	569,17	97054,97	169314,92	311,54	411,48
0,8	231404,03	308400,38	481,04	555,34	109670,20	159028,20	331,16	398,78
0,9	254266,80	293702,79	504,25	541,94	124027,58	149398,60	352,18	386,52
1	279813,58	279813,58	528,97	528,97	140382,11	140382,11	374,68	374,68

x=65 años d=0 años					x=65 años d=20 años			
α	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$
0	161820,58	377490,12	402,27	614,40	14050,52	59071,08	118,53	243,05
0,1	170471,11	366101,45	412,88	605,06	15427,26	56241,23	124,21	237,15
0,2	179690,93	355118,26	423,90	595,92	16944,17	53551,65	130,17	231,41
0,3	189523,51	344524,28	435,34	586,96	18616,05	50995,17	136,44	225,82
0,4	200016,06	334303,99	447,23	578,19	20459,36	48564,97	143,04	220,37
0,5	211219,85	324442,50	459,59	569,60	22492,36	46254,60	149,97	215,07
0,6	223190,66	314925,60	472,43	561,18	24735,33	44057,94	157,27	209,90
0,7	235989,13	305739,70	485,79	552,94	27210,82	41969,21	164,96	204,86
0,8	249681,27	296871,79	499,68	544,86	29943,86	39982,93	173,04	199,96
0,9	264338,99	288309,41	514,14	536,94	32962,33	38093,90	181,56	195,18
1	280040,67	280040,67	529,19	529,19	36297,19	36297,19	190,52	190,52

Asimismo, los α -cortes de las varianzas y las desviaciones estándar si tomamos para éstas un número borroso triangular con el mismo soporte y núcleo que $\tilde{V}[Z]$ y $\tilde{D}[Z]$ son:

α	x=45 años d=0 años				x=45 años d=20 años			
	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$
0	114793,08	462263,56	338,81	679,90	42184,56	264188,66	205,39	513,99
0,1	131295,13	444018,57	357,83	664,81	52004,32	251808,00	222,32	500,06
0,2	147797,18	425773,57	376,84	649,71	61824,07	239427,35	239,25	486,13
0,3	164299,23	407528,57	395,86	634,62	71643,83	227046,69	256,17	472,20
0,4	180801,28	389283,57	414,88	619,53	81463,58	214666,04	273,10	458,27
0,5	197303,33	371038,57	433,89	604,44	91283,34	202285,38	290,03	444,33
0,6	213805,38	352793,57	452,91	589,34	101103,09	189904,73	306,96	430,40
0,7	230307,43	334548,58	471,93	574,25	110922,85	177524,07	323,89	416,47
0,8	246809,48	316303,58	490,94	559,16	120742,60	165143,42	340,82	402,54
0,9	263311,53	298058,58	509,96	544,07	130562,35	152762,76	357,75	388,61
1	279813,58	279813,58	528,97	528,97	140382,11	140382,11	374,68	374,68

α	x=65 años d=0 años				x=65 años d=20 años			
	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$
0	161820,58	377490,12	402,27	614,40	14050,52	59071,08	118,53	243,05
0,1	173642,59	367745,18	414,96	605,88	16275,18	56793,69	125,73	237,79
0,2	185464,60	358000,23	427,65	597,36	18499,85	54516,30	132,93	232,54
0,3	197286,61	348255,29	440,35	588,84	20724,52	52238,91	140,13	227,29
0,4	209108,62	338510,34	453,04	580,32	22949,19	49961,52	147,33	222,03
0,5	220930,63	328765,40	465,73	571,80	25173,85	47684,13	154,53	216,78
0,6	232752,64	319020,45	478,42	563,27	27398,52	45406,75	161,72	211,53
0,7	244574,65	309275,51	491,11	554,75	29623,19	43129,36	168,92	206,28
0,8	256396,66	299530,56	503,80	546,23	31847,85	40851,97	176,12	201,02
0,9	268218,67	289785,62	516,50	537,71	34072,52	38574,58	183,32	195,77
1	280040,67	280040,67	529,19	529,19	36297,19	36297,19	190,52	190,52

Por tanto, los niveles α en los que se cometen mayores errores en los extremos de los α -cortes a la izquierda y a la derecha, señalados en **negrita** vienen en los siguientes cuadros:

α	x=45 años d=0 años				x=45 años d=20 años			
	Errores absolutos en:				Errores absolutos en:			
	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,1	6608,40	5168,31	4,72	2,35	4596,44	4053,94	4,58	2,31
0,2	12177,34	8984,61	8,58	4,12	8506,28	7033,10	8,34	4,06
0,3	16581,32	11534,60	11,52	5,34	11633,89	9011,16	11,21	5,26

0,4	19677,97	12898,12	13,47	6,03	13869,55	10056,52	13,12	5,93
0,5	21305,63	13149,62	14,37	6,20	15087,26	10232,67	14,00	6,10
0,6	21280,50	12358,52	14,13	5,88	15142,23	9598,61	13,77	5,78
0,7	19393,29	10589,58	12,67	5,08	13867,87	8209,15	12,35	4,99
0,8	15405,45	7903,20	9,90	3,82	11072,40	6115,22	9,65	3,76
0,9	9044,73	4355,79	5,71	2,12	6534,77	3364,17	5,57	2,09
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

α	x=65 años d=0 años				x=65 años d=20 años			
	Errores absolutos en:				Errores absolutos en:			
	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,1	3171,47	1643,73	2,08	0,82	847,92	552,47	1,53	0,64
0,2	5773,66	2881,98	3,75	1,44	1555,68	964,65	2,76	1,13
0,3	7763,09	3731,00	5,00	1,88	2108,47	1243,74	3,69	1,47
0,4	9092,56	4206,36	5,81	2,13	2489,83	1396,55	4,29	1,66
0,5	9710,77	4322,90	6,14	2,20	2681,49	1429,54	4,55	1,71
0,6	9561,97	4094,85	5,99	2,09	2663,19	1348,80	4,45	1,63
0,7	8585,52	3535,81	5,33	1,82	2412,37	1160,14	3,97	1,41
0,8	6715,39	2658,78	4,12	1,37	1903,99	869,04	3,08	1,07
0,9	3879,67	1476,21	2,36	0,77	1110,20	480,68	1,76	0,59
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

En casi todos los casos el error máximo se comete para un nivel de presunción de aproximadamente el 0'5, por lo que el ajuste cuadrático de los α -cortes puede considerarse aceptable.

Por tanto, los errores que cometemos por la aproximación triangular de la varianza y la desviación estándar en cada uno de los seguros es:

	Error en la varianza	Error en la Desviación estándar
x=45 d=0	0,13	0,08
x=45 d=0	0,15	0,08
x=65 d=0	0,08	0,05
x=65 d=20	0,12	0,06

Podemos comprobar que a menor edad del asegurado –y por tanto, mayor duración de la renta-, los ajustes por un número borroso triangular de la varianza y de la desviación estándar son peores y asimismo, también empeoran si aumentamos el diferimiento de la renta; todo ello por las

razones ya conocidas. Así, en principio aceptaríamos en una escala endecadaria, y para todos los seguros, la aproximación triangular de la desviación estándar, pero excepto en la renta donde $x=65$ y $d=0$, no aceptaríamos la aproximación triangular de la varianza.

También puede ser comprobado que para un mismo tipo del seguro, los errores que se cometen por ajustar triangularmente la esperanza matemática y la desviación estándar son menores que los errores que se cometen ajustando triangularmente la varianza, ya que en la varianza incorporamos, al elevar al cuadrado los factores de actualización que intervienen en el cálculo, factores de actualización con un vencimiento multiplicado por dos respecto a los que quedan incorporados en la esperanza matemática y en la desviación estándar.

3.8. RENTA TEMPORAL ANTICIPADA

3.8.1. Planteamiento general

En este caso, el valor actual de las prestaciones unitarias vienen dadas por la variable borroso aleatoria $\tilde{Z}$ que podemos notar como:

$$\tilde{Z} = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_d q_x \\ \sum_{j=d}^t \tilde{f}_j & \text{con } {}_t|q_x \\ \sum_{j=d}^{d+n-1} \tilde{f}_j & \text{con } \sum_{t=d+n-1}^{w-x-1} {}_t|q_x = {}_{d+n} p_x \end{cases} \quad t = d, d+1, \dots, d+n-1$$

la cual, para un nivel α , y a través de los α -cortes de $\tilde{f}_j$, vendrá caracterizada por las correspondientes variables aleatorias inferior $Z^1(\alpha)$, y superior $Z^2(\alpha)$, que serán:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_d q_x \\ {}_{d|}\ddot{a}_{\overline{t-d+1}|}^1(\alpha) = \sum_{r=d}^t f_r^1(\alpha) & \text{con } {}_t|q_x \\ {}_{d|}\ddot{a}_{\overline{n}|}^1(\alpha) = \sum_{r=d}^{d+n-1} f_r^1(\alpha) & \text{con } {}_{d+n} p_x \end{cases} \quad t = d, d+1, \dots, d+n-1$$

y,

$$Z^2(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_d q_x \\ {}_{d|} \ddot{a}_{\overline{t-d+1}|}^2(\alpha) = \sum_{r=d}^t f_r^2(\alpha) & \text{con } {}_t q_x \quad t = d, d+1, \dots, d+n-1 \\ {}_{d|} \ddot{a}_{\overline{n}|}^2(\alpha) = \sum_{r=d}^t f_r^2(\alpha) & \text{con } {}_{d+n} p_x \end{cases}$$

En cualquier caso, el número de términos de la renta debe ser tal que $n \geq 2$, ya que si $n=1$, nos encontraríamos en el caso de un capital diferido, cuyo análisis ya ha sido realizado en 3.3.

Así pues, la esperanza matemática de la variable borroso aleatoria valor actual de la renta, $\tilde{E}[Z]$, será un número borroso que podemos notar como ${}_{d|n} \tilde{a}_x$ y cuyos α -cortes los obtenemos, a partir de la expresión obtenida en el apartado 2.7. con certeza en el tipo de interés como:

$${}_{d|n} \ddot{a}_{x\alpha} = [{}_{d|n} \ddot{a}_x^1(\alpha), {}_{d|n} \ddot{a}_x^2(\alpha)] = \left[\sum_{t=d}^{d+n-1} f_t^1(\alpha) {}_t p_x, \sum_{t=d}^{d+n-1} f_t^2(\alpha) {}_t p_x \right] = \left[\sum_{t=d}^{d+n-1} {}_t E_x^1(\alpha), \sum_{t=d}^{d+n-1} {}_t E_x^2(\alpha) \right]$$

Asimismo, la varianza borrosa para un determinado nivel α tendrá unos α -cortes que, a partir del resultado obtenido con certeza en los tipos de interés en el apartado 2.7., serán el conjunto nítido:

$$V[Z]_\alpha = \left\{ y \in \mathbb{R}^+ \mid y = \sum_{t=d}^{d+n-1} (x_t)^2 {}_t p_x {}_t q_x + 2 \sum_{t=d+1}^{d+n-1} \sum_{j=d}^{t-1} x_t x_j {}_t p_x {}_j p_x, x_t \in f_{t\alpha} \forall t \right\} = \\ = [\text{Min } y, \text{Max } y]$$

Como ya hemos comentado en el apartado 2.8. de esta tesis, la varianza es monótona decreciente (creciente) respecto al tipo de interés de cualquier periodo, (factores de actualización) por lo que los α -cortes de ésta se hallarán como:

$$V[Z]_\alpha = \left[\sum_{t=d}^{d+n-1} [f_t^1(\alpha)]^2 {}_t p_x {}_t q_x + 2 \sum_{t=d+1}^{d+n-1} \sum_{j=d}^{t-1} f_t^1(\alpha) f_j^1(\alpha) {}_t p_x {}_j q_x, \right. \\ \left. \sum_{t=d}^{d+n-1} [f_t^2(\alpha)]^2 {}_t p_x {}_t q_x + 2 \sum_{t=d+1}^{d+n-1} \sum_{j=d}^{t-1} f_t^2(\alpha) f_j^2(\alpha) {}_t p_x {}_j q_x \right]$$

Es decir, el extremo inferior de los α -cortes se obtiene a través de la varianza de $Z^1(\alpha)$, y el superior a través de $Z^2(\alpha)$. Por otra parte, la varianza cierta se obtiene sin más que considerar que:

$$V[Z^1(\alpha)] = \sum_{t=d}^{d+n-1} [f_t^1(\alpha)]^2 {}_t p_x {}_t q_x + 2 \sum_{t=d+1}^{d+n-1} \sum_{j=d}^{t-1} f_t^1(\alpha) f_j^1(\alpha) {}_t p_x {}_j q_x$$

y,

$$V[Z^2(\alpha)] = \sum_{t=d}^{d+n-1} [f_t^2(\alpha)]^2 {}_t p_x {}_t q_x + 2 \sum_{t=d+1}^{d+n-1} \sum_{j=d}^{t-1} f_t^2(\alpha) f_j^2(\alpha) {}_t p_x {}_j q_x$$

De forma que,

$$\begin{aligned} V^*[Z] &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\sum_{t=d}^{d+n-1} f_t^1(\alpha) {}_t p_x {}_t q_x + 2 \sum_{t=d+1}^{d+n-1} \sum_{j=d}^{t-1} f_t^1(\alpha) f_j^1(\alpha) {}_t p_x {}_j q_x + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{t=d}^{d+n-1} f_t^2(\alpha) {}_t p_x {}_t q_x + 2 \sum_{t=d+1}^{d+n-1} \sum_{j=d}^{t-1} f_t^2(\alpha) f_j^2(\alpha) {}_t p_x {}_j q_x \right] d\alpha = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\sum_{t=d}^{d+n-1} \{f_t^1(\alpha) + f_t^2(\alpha)\} {}_t p_x {}_t q_x + 2 \sum_{t=d+1}^{d+n-1} \sum_{j=d}^{t-1} \{f_t^1(\alpha) f_j^1(\alpha) + f_t^2(\alpha) f_j^2(\alpha)\} {}_t p_x {}_j q_x \right] d\alpha = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{t=d}^{d+n-1} {}_t p_x {}_t q_x \int_0^1 \{f_t^1(\alpha) + f_t^2(\alpha)\} d\alpha + 2 \sum_{t=d+1}^{d+n-1} \sum_{j=d}^{t-1} {}_t p_x {}_j q_x \int_0^1 \{f_t^1(\alpha) f_j^1(\alpha) + f_t^2(\alpha) f_j^2(\alpha)\} d\alpha \right\} \end{aligned}$$

3.8.2. Análisis cuando el tipo de interés a aplicar es un número borroso constante

En este caso, las variables aleatorias $Z^1(\alpha)$ y $Z^2(\alpha)$, se pueden expresar como:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_d q_x \\ {}_{d|} \ddot{a}_{\overline{t-d+1}|i^2(\alpha)} & \text{con } {}_t q_x \quad t = d, \dots, d+n-1 \\ {}_{d|} \ddot{a}_{\overline{n}|i^2(\alpha)} & \text{con } {}_{d+n} p_x \end{cases}$$

y,

$$Z^2(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_d q_x \\ {}_{d|} \ddot{a}_{\overline{t-d+1}|i^1(\alpha)} & \text{con } {}_t q_x \quad t = d, \dots, d+n-1 \\ {}_{d|} \ddot{a}_{\overline{n}|i^1(\alpha)} & \text{con } {}_{d+n} p_x \end{cases}$$

Siendo entonces los α -cortes de la esperanza de ${}_{d|} \ddot{a}_x$:

$${}_{d|} \ddot{a}_{x\alpha} = [{}_{d|} \ddot{a}_x^1(\alpha), {}_{d|} \ddot{a}_x^2(\alpha)] = \left[\sum_{t=d}^{d+n-1} (1+i^2(\alpha))^{-t} {}_t p_x, \sum_{t=d}^{d+n-1} (1+i^1(\alpha))^{-t} {}_t p_x \right]$$

En cuanto a la varianza borrosa, sus α -cortes se obtienen como función de i_α , de forma que:

$$V[Z]_\alpha = [V^1[Z](\alpha), V^2[Z](\alpha)] = [V[Z^1(\alpha)], V[Z^2(\alpha)]]$$

y entonces:

$$V^1[Z](\alpha) = \sum_{t=d}^{d+n-1} (1+i^2(\alpha))^{-2t} {}_t p_x {}_t q_x + 2 \sum_{t=d+1}^{d+n-1} \sum_{j=d}^{t-1} (1+i^2(\alpha))^{-t-j} {}_t p_x {}_j q_x$$

$$V^2[Z](\alpha) = \sum_{t=d}^{d+n-1} (1+i^1(\alpha))^{-2t} {}_t p_x {}_t q_x + 2 \sum_{t=d+1}^{d+n-1} \sum_{j=d}^{t-1} (1+i^1(\alpha))^{-t-j} {}_t p_x {}_j q_x$$

En cuanto a la varianza cierta, a través de su expresión más general, propuesta en 3.8.1., y expresando los factores de actualización a través de los α -cortes del interés, la integral definida a resolver es inmediata.

3.8.3. Análisis cuando el tipo de interés a aplicar es un número borroso constante y triangular

Si el tipo de interés borroso a aplicar durante los próximos periodos es un número borroso igual para todos ellos y triangular, las variables aleatorias inferior y superior vienen determinadas por:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_d q_x \\ {}_d | \ddot{a}_{\overline{t-d+1}|i^3-(i^3-i^2)\alpha} & \text{con } {}_t | q_x \\ {}_d | \ddot{a}_{\overline{n}|i^3-(i^3-i^2)\alpha} & \text{con } {}_{d+n} p_x \end{cases} \quad t = d, \dots, d+n-1$$

y,

$$Z^2(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_d q_x \\ {}_d | \ddot{a}_{\overline{t-d+1}|i^1+(i^2-i^1)\alpha} & \text{con } {}_t | q_x \\ {}_d | \ddot{a}_{\overline{n}|i^1+(i^2-i^1)\alpha} & \text{con } {}_{d+n} p_x \end{cases} \quad t = d, \dots, d+n-1$$

de esta forma, los α -cortes de la esperanza matemática de $\tilde{Z}$, toman como expresión:

$${}_d | \ddot{a}_{x\alpha} = [{}_d | \ddot{a}_x^1(\alpha), {}_d | \ddot{a}_x^2(\alpha)] = \left[\sum_{t=d}^{d+n-1} (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-t} {}_t p_x, \sum_{t=d}^{d+n-1} (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-t} {}_t p_x \right]$$

Por otra parte, sustituyendo en $V^1[Z](\alpha)$ y $V^2[Z](\alpha)$, $i^2(\alpha)$ y $i^1(\alpha)$ respectivamente, obtenemos los extremos de la varianza borrosa como:

$$V^1[Z](\alpha) = \sum_{t=d}^{d+n-1} (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-2t} {}_t p_x {}_t q_x + 2 \sum_{t=d+1}^{d+n-1} \sum_{j=d}^{t-1} (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-t-j} {}_t p_x {}_j q_x$$

y,

$$V^2[Z](\alpha) = \sum_{t=d}^{d+n-1} (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-2t} {}_t p_x {}_t q_x + 2 \sum_{t=d+1}^{d+n-1} \sum_{j=d}^{t-1} (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-t-j} {}_t p_x {}_j q_x$$

De esta forma, la varianza cierta se obtendrá como:

$$V^*[Z] = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{t=d}^{d+n-1} {}_t p_x {}_t q_x \int_0^1 \left\{ (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-2t} + (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-2t} \right\} d\alpha + \right. \\ \left. + 2 \sum_{t=d+1}^{d+n-1} \sum_{j=d}^{t-1} {}_t p_x {}_j q_x \int_0^1 \left\{ (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-t-j} + (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-t-j} \right\} d\alpha \right\}$$

En este caso, deberemos diferenciar, como con las rentas vitalicias, diferentes casos. Si $d=0$ estamos ante una renta temporal, inmediata y anticipada o $d=1$, tratándose de una renta temporal, inmediata y vencida:

$$V^*[Z] = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\ln \frac{1+i^3}{1+i^2}}{i^3 - i^2} + \frac{\ln \frac{1+i^2}{1+i^1}}{i^2 - i^1} \right] {}_1 p_x {}_1 q_x + \sum_{t=2}^{n-1} \left\{ \frac{[(1+i^2)^{-2t+1} - (1+i^3)^{-2t+1}]}{i^3 - i^2} + \frac{[(1+i^1)^{-2t+1} - (1+i^2)^{-2t+1}]}{i^2 - i^1} \right\} \frac{{}_t p_x {}_t q_x}{2t-1} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{t=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{t-1} \left\{ \frac{[(1+i^2)^{-t-j+1} - (1+i^3)^{-t-j+1}]}{i^3 - i^2} + \frac{[(1+i^1)^{-t-j+1} - (1+i^2)^{-t-j+1}]}{i^2 - i^1} \right\} \frac{{}_t p_x {}_j q_x}{t+j-1} \right\}$$

En el caso en que $d \geq 2$, se obtiene entonces:

$$V^*[Z] = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{t=d}^{d+n-1} \left\{ \frac{[(1+i^2)^{-2t+1} - (1+i^3)^{-2t+1}]}{i^3 - i^2} + \frac{[(1+i^1)^{-2t+1} - (1+i^2)^{-2t+1}]}{i^2 - i^1} \right\} \frac{{}_t p_x {}_t q_x}{2t-1} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{t=d+1}^{d+n-1} \sum_{j=d}^{t-1} \left\{ \frac{[(1+i^2)^{-t-j+1} - (1+i^3)^{-t-j+1}]}{i^3 - i^2} + \frac{[(1+i^1)^{-t-j+1} - (1+i^2)^{-t-j+1}]}{i^2 - i^1} \right\} \frac{{}_t p_x {}_j q_x}{t+j-1} \right\}$$

3.8.4. Aplicación numérica

Como siempre, en primer lugar obtendremos la esperanza matemática de la variable borroso aleatoria asociada a esta estructura, que para una edad x , un diferimiento d y una duración de la

renta n , es la suma de números borrosos ${}_{d|n} \tilde{a}_x = \sum_{t=d}^{d+n-1} {}_t \tilde{E}_x$. Después estudiaremos la bondad de la

aproximación triangular con la metodología que viene siendo utilizada a lo largo de la tesis.

Como ${}_{d|n} \tilde{a}_x$ se obtiene como la suma de la esperanza matemática de capitales de supervivencia; y dado que conocemos el error máximo en términos absolutos que se comete en los α -cortes de la esperanza matemática de los capitales de supervivencia que lo componen si los aproximamos triangularmente, el error máximo que puede cometerse al tomar como función de pertenencia de ${}_{d|n} \tilde{a}_x$ una triangular con su mismo soporte y núcleo, vendrá acotado superiormente por:

$$\text{Max} \left\{ \frac{\sum_{t=d}^{d+n-1} D_I^*(t)}{{}_{d|n} \ddot{a}_x^1(1) - {}_{d|n} \ddot{a}_x^1(0)}, \frac{\sum_{t=d}^{d+n-1} D_D^*(t)}{{}_{d|n} \ddot{a}_x^2(0) - {}_{d|n} \ddot{a}_x^2(1)} \right\}$$

donde $D_I^*(t)$ y $D_D^*(t)$ son la desviación máxima que se produce en los extremos izquierdo y derecho de los α -cortes de ${}_t \tilde{E}_x$ al tomarse su aproximación triangular.

También analizaremos, por otra parte, la triangularidad de la varianza y de la desviación estándar borrosa de forma análoga al estudio realizado en el apartado 3.7.4.

Consideraremos una renta de supervivencia de 100 unidades monetarias anuales anticipadas asociadas a un único asegurado de 45 años. Las duraciones posibles de esta renta son 10 y 30 años y para ambas duraciones, la renta podrá ser inmediata anticipada o diferida 20 años, aunque también anticipada. Por ejemplo, si el diferimiento de la renta es 20 años, y su duración es 30 años, las variables borroso aleatorias inferior y superior para un α dado son:

$$Z^1(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_{20}q_{45} \\ 100 \cdot {}_{20|} \ddot{a}_{\overline{t-19|0'05-0'02\alpha}} & \text{con } {}_t|q_{45} \\ 100 \cdot {}_{20|} \ddot{a}_{\overline{30|0'05-0'02\alpha}} & \text{con } {}_{50}p_{45} \end{cases} \quad t = 20, \dots, 49$$

y,

$$Z^2(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{con } {}_{20}q_{45} \\ 100 \cdot {}_{20|} \ddot{a}_{\overline{t-19|0'02+0'01\alpha}} & \text{con } {}_t|q_{45} \\ 100 \cdot {}_{20|} \ddot{a}_{\overline{30|0'02+0'01\alpha}} & \text{con } {}_{50}p_{45} \end{cases} \quad t = 20, \dots, 49$$

En las rentas temporales propuestas, la expresión del número borroso triangular que queremos ajustar a la esperanza matemática, la acotación del error cometido por su aproximación triangular y $V^*[Z]$ y $D^*[Z]$ vienen dados en el siguiente cuadro.

	$\tilde{E}[Z]$	Error	$V^*[Z]$	$D^*[Z]$
${}_{10} \tilde{a}_{45}$	(797,44, 863,53, 900,17)	0,02	7177,28	84,72
${}_{20 10} \tilde{a}_{45}$	(240,26, 381,06, 482,07)	0,06	31913,14	178,64
${}_{30} \tilde{a}_{45}$	(1494,57, 1843,72, 2070,49)	0,04	132984,55	364,67
${}_{20 30} \tilde{a}_{45}$	(363,59, 625,38, 828,73)	0,07	134524,97	366,78

Podemos comprobar que a medida que la duración de la renta, su diferimiento, o ambos aumentan, el ajuste triangular a la esperanza matemática del valor actual de la renta temporal empeora, lo cual era de esperar, ya que en esos casos se incorporan en la valoración factores de descuento con vencimientos asociados cada vez más lejanos, pero en cualquiera de los supuestos estudiados, el ajuste es suficientemente bueno.

A continuación presentamos para estas rentas la expresión de los α -cortes de $\tilde{V}[Z]$ y $\tilde{D}[Z]$, analizándose posteriormente la bondad de su ajuste mediante un número borroso triangular.

Los α -cortes de las varianzas y de las desviaciones estándar para cada una de las rentas analizadas son:

α	n=10 años d=0 años				n=10 años d=20 años			
	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$
0	5863,86	8241,07	76,58	90,78	12881,88	53210,94	113,50	230,67
0,1	5994,64	8145,40	77,43	90,25	14135,11	50707,44	118,89	225,18
0,2	6128,88	8051,04	78,29	89,73	15514,01	48324,82	124,56	219,83
0,3	6266,68	7957,95	79,16	89,21	17031,55	46057,10	130,50	214,61
0,4	6408,16	7866,13	80,05	88,69	18702,09	43898,59	136,76	209,52
0,5	6553,41	7775,54	80,95	88,18	20541,50	41843,91	143,32	204,56
0,6	6702,57	7686,17	81,87	87,67	22567,37	39887,93	150,22	199,72
0,7	6855,73	7598,01	82,80	87,17	24799,16	38025,79	157,48	195,00
0,8	7013,03	7511,02	83,74	86,67	27258,42	36252,87	165,10	190,40
0,9	7174,59	7425,21	84,70	86,17	29969,02	34564,80	173,12	185,92
1	7340,54	7340,54	85,68	85,68	32957,40	32957,40	181,54	181,54

α	n=30 años d=0 años				n=30 años d=20 años			
	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$
0	71955,05	195149,78	268,24	441,76	41400,93	253514,95	203,47	503,50
0,1	76568,58	188336,93	276,71	433,98	46479,52	237994,14	215,59	487,85
0,2	81528,31	181790,56	285,53	426,37	52217,27	223468,34	228,51	472,72
0,3	86863,16	175499,37	294,73	418,93	58704,47	209870,97	242,29	458,12
0,4	92604,67	169452,58	304,31	411,65	66044,45	197140,09	256,99	444,00
0,5	98787,24	163639,91	314,30	404,52	74355,50	185218,07	272,68	430,37
0,6	105448,45	158051,52	324,73	397,56	83773,22	174051,24	289,44	417,19
0,7	112629,30	152678,02	335,60	390,74	94453,08	163589,65	307,33	404,46
0,8	120374,60	147510,44	346,95	384,07	106573,55	153786,81	326,46	392,16
0,9	128733,34	142540,19	358,79	377,54	120339,64	144599,38	346,90	380,26
1	137759,09	137759,09	371,16	371,16	135987,01	135987,01	368,76	368,76

Asimismo, los α -cortes de las varianzas y las desviaciones estándar si tomamos para éstas un número borroso triangular con el mismo soporte y núcleo que $\tilde{V}[Z]$ y $\tilde{D}[Z]$, se hallarán como:

α	n=10 años d=0 años				n=10 años d=20 años			
	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$
0	5863,86	8241,07	76,58	90,78	12881,88	53210,94	113,50	230,67
0,1	6011,53	8151,01	77,49	90,27	14889,43	51185,58	120,30	225,76
0,2	6159,19	8060,96	78,40	89,76	16896,99	49160,23	127,11	220,85
0,3	6306,86	7970,91	79,31	89,25	18904,54	47134,88	133,91	215,93
0,4	6454,53	7880,86	80,22	88,74	20912,09	45109,52	140,72	211,02
0,5	6602,20	7790,81	81,13	88,23	22919,64	43084,17	147,52	206,11
0,6	6749,87	7700,75	82,04	87,72	24927,19	41058,81	154,32	201,20
0,7	6897,54	7610,70	82,95	87,21	26934,74	39033,46	161,13	196,28
0,8	7045,21	7520,65	83,86	86,70	28942,30	37008,11	167,93	191,37
0,9	7192,88	7430,60	84,77	86,19	30949,85	34982,75	174,74	186,46
1	7340,54	7340,54	85,68	85,68	32957,40	32957,40	181,54	181,54

α	n=30 años d=0 años				n=30 años d=20 años			
	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$
0	71955,05	195149,78	268,24	441,76	41400,93	253514,95	203,47	503,50
0,1	78535,46	189410,71	278,54	434,70	50859,54	241762,15	220,00	490,03
0,2	85115,86	183671,64	288,83	427,64	60318,15	230009,36	236,53	476,55
0,3	91696,26	177932,57	299,12	420,58	69776,75	218256,57	253,06	463,08
0,4	98276,67	172193,50	309,41	413,52	79235,36	206503,77	269,59	449,61
0,5	104857,07	166454,43	319,70	406,46	88693,97	194750,98	286,12	436,13
0,6	111437,47	160715,37	329,99	399,40	98152,58	182998,19	302,65	422,66
0,7	118017,88	154976,30	340,28	392,34	107611,19	171245,39	319,18	409,19
0,8	124598,28	149237,23	350,58	385,28	117069,80	159492,60	335,71	395,71
0,9	131178,69	143498,16	360,87	378,22	126528,40	147739,81	352,23	382,24
1	137759,09	137759,09	371,16	371,16	135987,01	135987,01	368,76	368,76

Por tanto, los niveles α en los que se cometen mayores errores en los extremos de los α -cortes y la aproximación triangular, vienen señalados en negrita en los siguientes cuadros:

α	n=10 años d=0 años				n=10 años d=20 años			
	Errores absolutos en:				Errores absolutos en:			
	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,1	16,89	5,61	0,06	0,02	754,32	478,15	1,41	0,58
0,2	30,32	9,92	0,11	0,03	1382,97	835,41	2,55	1,02
0,3	40,18	12,96	0,14	0,04	1872,99	1077,78	3,41	1,33
0,4	46,37	14,73	0,17	0,05	2210,00	1210,93	3,96	1,50

0,5	48,79	15,27	0,17	0,05	2378,14	1240,26	4,20	1,55
0,6	47,30	14,58	0,17	0,05	2359,82	1170,88	4,10	1,48
0,7	41,81	12,70	0,15	0,04	2135,58	1007,67	3,65	1,28
0,8	32,18	9,62	0,11	0,03	1683,87	755,23	2,83	0,97
0,9	18,28	5,39	0,06	0,02	980,83	417,96	1,62	0,54
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

α	n=30 años d=0 años				n=30 años d=20 años			
	Errores absolutos en:				Errores absolutos en:			
	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$	$V^1(\alpha)$	$V^2(\alpha)$	$D^1(\alpha)$	$D^2(\alpha)$
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,1	1966,87	1073,78	1,83	0,72	4380,01	3768,01	4,41	2,18
0,2	3587,55	1881,08	3,30	1,27	8100,87	6541,02	8,02	3,83
0,3	4833,10	2433,20	4,39	1,65	11072,28	8385,59	10,77	4,96
0,4	5672,00	2740,92	5,10	1,87	13190,92	9363,68	12,60	5,60
0,5	6069,83	2814,52	5,40	1,93	14338,47	9532,91	13,44	5,76
0,6	5989,03	2663,84	5,26	1,84	14379,36	8946,95	13,21	5,47
0,7	5388,58	2298,27	4,68	1,60	13158,11	7655,74	11,84	4,72
0,8	4223,68	1726,79	3,63	1,21	10496,24	5705,79	9,25	3,56
0,9	2445,34	957,97	2,07	0,67	6188,76	3140,43	5,33	1,98
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

En todos los casos el error máximo se comete para un nivel de presunción de aproximadamente el 0'5.

Los errores que podemos cometer como máximo en el nivel de presunción de un valor por la aproximación triangular propuesta para la varianza y la desviación estándar, vienen dados en el siguiente cuadro:

	Error en la varianza	Error en la Desviación estándar
n=10 d=0	0,03	0,02
n=10 d=20	0,12	0,06
n=30 d=0	0,09	0,05
n=30 d=20	0,15	0,08

Podemos comprobar que los ajustes mediante un número borroso triangular de la varianza y de la desviación estándar son peores a medida que aumenta la duración de la renta, y también empeoran si aumentamos el diferimiento de la renta, todo ello por las razones ya conocidas. Así, para una escala endecadaria aceptaríamos en todos los casos la aproximación triangular de la

desviación estándar, pero en las rentas diferidas no aceptaríamos la aproximación triangular de la varianza.

Asimismo, podemos ver que, para una misma de renta, los errores que se cometen por ajustar triangularmente la esperanza matemática y la desviación estándar son menores, como siempre, que los errores que se cometen ajustando triangularmente la varianza, lo cual era de esperar.

CAPÍTULO 4:

FIJACIÓN DE LAS PRIMAS Y ANÁLISIS DE LA VARIABLE BORROSO ALEATORIA PÉRDIDA PARA DIVERSAS MODALIDADES DE ESTRUCTURAS ACTUARIALES BAJO LA HIPÓTESIS DE UN ÚNICO ASEGURADO EN CARTERA

4.1. PLANTEAMIENTO GENERAL

4.1.1. Consideraciones previas

A continuación analizaremos la fijación de la prima única pura, y posteriormente, recargada, cuando las prestaciones que contemple vengan dadas por las estructuras actuariales unitarias analizadas en el apartado 3. En concreto, analizaremos la fijación de primas para:

- a) Capitales de fallecimiento con vencimiento en el año actual. En este caso, esta estructura corresponde a un seguro de fallecimiento renovable cada año. el análisis de esta estructura debe entenderse como la correspondiente a un seguro de vida entera o temporal pactado a primas periódicas (al inicio de cada año se paga una prima), siendo esta prima variable en función de la probabilidad de fallecimiento del asegurado en cada uno de los años.
- b) Capital diferido. Se trata de un capital de supervivencia con vencimiento a t años, siendo esta la prestación básica de la mayoría de seguros de ahorro a medio plazo que en muchas ocasiones son comercializados por las entidades financieras como depósitos a plazo. También es la prestación básica de algunos seguros de jubilación, si la contraprestación contemplada para tal contingencia es un capital. Los seguros que toman esta forma en su estado más puro son los seguros dotales. Asimismo, supondremos que el vencimiento del capital es $t > 0$, ya que en otro caso no tiene sentido este tipo de cobertura: no existe fenómeno financiero, ya que el capital devenga en el momento de contratación, ni fenómeno aleatorio, pues la probabilidad de cobro del capital es 1.
- c) Seguros de fallecimiento temporales y vitalicios.
- d) Seguros mixtos: En este caso se trata de una combinación de un seguro capital diferido y un seguro temporal, y suele ser la forma que toman habitualmente los depósitos a plazo que ya han sido mencionados o los planes de jubilación con una prestación de jubilación en forma

de capital, ya que en este caso el asegurado no corre el riesgo de perder toda la prima en caso de fallecer antes del vencimiento del contrato. Nosotros contemplaremos únicamente el caso en que el capital de fallecimiento sea igual al capital de supervivencia, es decir, la modalidad comúnmente conocida como 1x1.

- e) Rentas de supervivencia anticipadas. Este tipo de estructura, si es vitalicia, suele estar ligada, en muchas ocasiones, a una renta destinada a cubrir la contingencia de jubilación, siendo en este caso diferidas si el asegurado no se ha jubilado, e inmediatas si dicha contingencia ha acontecido, o en operaciones de vivienda-pensión. Asimismo, si se busca obtener una renta periódica invirtiendo una determinada cuantía monetaria, las rentas actuariales, temporales o vitalicias también pueden ser buenos productos como alternativas a otros existentes en el mercado como los depósitos a plazo, bonos y obligaciones del estado, fondos de inversión con rendimientos periódicos, etc.

Como ya comentamos en el apartado 1.5.2. de esta parte de la tesis, nuestro análisis se va a centrar en el cálculo de las primas únicas correspondientes a las estructuras actuariales ya descritas, desglosándose dentro de la misma, la prima pura del recargo de seguridad. En un seguro ya iniciado, el cálculo de la provisión matemática a dotar para dicho contrato en el momento de valoración y el margen de seguridad que debe considerarse sobre las misma, para asegurar cierto nivel de solvencia se realizará de forma análoga. Bastará con identificar la provisión matemática con la prima pura, y el margen de solvencia al recargo de seguridad que se aplique al seguro para hacer frente a desviaciones de siniestralidad.

4.1.2. Determinación de la prima pura única

Como ya fue comentado en el apartado 2.5.2, definimos la variable borroso aleatoria pérdida para el asegurador, que notamos como $\tilde{L}$, a la variable aleatoria cuyas realizaciones borrosas son la diferencia entre el valor actual de las prestaciones que satisface el asegurador y de las primas que se percibe en cada uno de los años en los que puede fallecer el asegurado. En el supuesto de primas únicas, si suponemos que la prima única puede venir dada a través de un número borroso $\tilde{P}$, tal que:

$$\tilde{P} = \{x / \mu_{\tilde{P}}(x)\} = \{P_{\alpha} = [P^1(\alpha), P^2(\alpha)] / 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

la variable borroso aleatoria pérdida vendrá dada por:

$$\tilde{L} = \tilde{Z} - \tilde{P}$$

donde $\tilde{Z}$ es la variable borroso aleatoria que cuantifica el valor actual de las prestaciones que contemple el contrato.

Asimismo, $\tilde{L}$ puede ser caracterizada, para un nivel α , a través de las variables aleatorias inferior y superior $L^1(\alpha)$ y $L^2(\alpha)$:

$$L^1(\alpha) = Z^1(\alpha) - P^2(\alpha)$$

$$L^2(\alpha) = Z^2(\alpha) - P^1(\alpha)$$

donde $Z^1(\alpha)$ y $Z^2(\alpha)$ son variables aleatorias cuya forma dependerá de la estructura actuarial que analicemos. En este apartado únicamente estudiaremos las estructuras ya descritas en el apartado 4.1.1.

Asimismo, y dado que $\tilde{P}$ se convierte en una constante para cada nivel α para el que trabajemos con $\tilde{L}$ es fácil comprobar que $\tilde{L}$ cumple:

- 1) $\tilde{E}[L] = \tilde{E}[Z] - \tilde{P}$, siendo “-” la sustracción habitual para números borrosos.
- 2) $\tilde{V}[L] = \tilde{V}[Z]$ y $\tilde{D}[L] = \tilde{D}[Z]$
- 3) $V^*[L] = V^*[Z]$ y $V^*[L] = V^*[Z]$

A partir de $\tilde{L}$, definimos como prima pura única y borrosa, al número borroso $\tilde{P}_p$ que hace que la esperanza matemática de la variable borroso aleatoria pérdida se anule, es decir, $\tilde{E}[L] = 0$. De esta forma, para hallar $\tilde{P}_p$, deberemos plantear la ecuación borrosa $\tilde{E}[Z] - \tilde{P}_p = 0$, la cual no tiene solución en sentido clásico. Pero si utilizamos el concepto de solución de Buckley y Qu, podemos identificar $\tilde{E}[Z] = \tilde{P}_p$, de esta forma, los α -cortes de $\tilde{P}_p$ se podrán hallar como: $P_{p\alpha} = E[Z]_\alpha$, siendo entonces la función de pertenencia de $\tilde{P}_p$, $\mu_{\tilde{P}_p}(x) = \mu_{\tilde{E}[Z]}(x)$.

Evidentemente, a la hora de fijar un precio del seguro de vida, el asegurador deberá exigir al asegurado una cuantía cierta con vencimiento en el momento actual. De esta forma denominaremos como prima pura única cierta y sin recargos, P_p , a un valor nítido y representativo de $\tilde{P}_p$ que proponemos hallar a través de su valor esperado. Dado que el intervalo esperado de la prima pura a cobrar se calcularía, a partir de los α -cortes, como:

$$E[\tilde{P}_p] = [E^1[\tilde{P}_p], E^2[\tilde{P}_p]] = \left[\int_0^1 P_p^1(\alpha) d\alpha, \int_0^1 P_p^2(\alpha) d\alpha \right]$$

entonces, para $\beta \in [0,1]$, el valor esperado de la prima pura se hallaría:

$$EV[\tilde{P}_p, \beta] = P_p = (1 - \beta) E^1[\tilde{P}_p] + \beta E^2[\tilde{P}_p]$$

El parámetro β cuantifica la aversión al riesgo de interés de la compañía de seguros, de tal forma que, a una mayor aversión al riesgo, se asigna una β mayor. Teniendo en cuenta que uno de los objetivos de la compañía debe ser su solvencia, la prudencia le llevaría a considerar valores de β mayores que 0'5.

4.1.3. Determinación de la función de distribución y los cuantiles de la variable borroso aleatoria pérdida si se cobra la prima pura única, y determinación del recargo a aplicar para carteras de un único asegurado

Tras haber cobrado la prima pura única, P_p , el asegurador puede definir, para el contrato que está analizando, una variable borroso aleatoria pérdida que notamos como $\tilde{L}_p$, a través de la cual estudiaremos la probabilidad de pérdida (o de insuficiencia de las primas cobradas) si el asegurado cobra únicamente la prima pura única P_p . Así, a través de $\tilde{L}_p$ determinaremos el recargo a aplicar para asegurar un cierto nivel de solvencia. Evidentemente, podemos utilizar otros criterios usuales en la práctica actuarial para determinar dicho recargo, los cuales se basan en la aplicación de un porcentaje más o menos arbitrario sobre la prima pura, la varianza o la desviación estándar de la variable aleatoria pérdida. Si bien, el camino que seguiremos no será éste, ya que consideramos que el que propondremos es conceptualmente mucho más potente, a la vez que los recargos son fijados de forma mucho más fiable. Las herramientas que necesitamos en el primer caso ya han sido proporcionadas y son:

- a) Ya hemos propuesto como calcular P_p , por lo que el cálculo del pertinente recargo es inmediato una vez ha sido fijado el porcentaje que este supone sobre P_p .
- b) Como ya hemos comentado en 1.2.1., sea cual sea la prima $\tilde{P}$ cargada, la varianza o la desviación estándar de Feng de la variable borroso aleatoria pérdida para el asegurador sigue siendo la del valor actual de las prestaciones que el contrato contemple. La forma de cálculo de estos parámetros ha sido analizada en todos los casos que plantearemos en este apartado. De esta forma, conociendo $V^*[Z]$ y $D^*[Z]$, y determinando el porcentaje que sobre la varianza o la desviación estándar de Feng queremos recargar, el recargo de seguridad que finalmente debe satisfacerse al asegurador se halla de forma inmediata.

Ya hemos comentado que para el análisis que pretendemos llevar a cabo, deberemos partir de la variable borroso aleatoria pérdida suponiéndose que se ha cobrado la prima pura. A dicha variable borroso aleatoria la notaremos como $\tilde{L}_p$ con $\tilde{P} = P_p$. Al ser P_p un número crisp, que no es más que un caso particular de número borroso, su función característica de dicha cuantía es

$$\mu_{P_p}(x) = \begin{cases} 1 & x = P_p \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \text{ podemos hallar la variable borroso aleatoria pérdida } \tilde{L}_p \text{ como:}$$

$$\tilde{L}_p = \tilde{Z} - P_p$$

Siendo las variables aleatorias ciertas, inferior y superior, $L_p^1(\alpha)$ y $L_p^2(\alpha)$, para un nivel de presunción α dado:

$$L_p^1(\alpha) = Z^1(\alpha) - P_p$$

$$L_p^2(\alpha) = Z^2(\alpha) - P_p$$

Para esta variable borroso aleatoria se cumple que:

- 1) $0 \in \text{sop}[\tilde{L}_p]$, siendo sop el soporte del número borroso.
- 2) $\tilde{V}[\tilde{L}_p] = \tilde{V}[Z]$ y $\tilde{D}[\tilde{L}_p] = \tilde{D}[Z]$
- 3) $V^*[\tilde{L}_p] = V^*[Z]$ y $D^*[\tilde{L}_p] = D^*[Z]$

Asimismo para estudiar la función de distribución y los cuantiles de $\tilde{L}_p$, recurriremos a su representación a través de las variables aleatorias inferior y superior que definen los extremos inferiores y superiores de sus realizaciones. De forma general, podemos representar $L_p^1(\alpha)$ y $L_p^2(\alpha)$ como:

$$L_p^1(\alpha) = L_{P_t}^1(\alpha) \text{ con } t|q_x, t \in \{0, 1, \dots, w-x-1\} \text{ y } L_p^2(\alpha) = L_{P_t}^2(\alpha) \text{ con } t|q_x, t \in \{0, 1, \dots, w-x-1\}$$

donde $L_{P_t}^1(\alpha)$ y $L_{P_t}^2(\alpha)$ son los extremos inferiores y superiores respectivamente del α -corte del número borroso $\tilde{L}_{P_t}$ que se calcularía como la diferencia entre la t -ésima realización de la variable borroso aleatoria $\tilde{Z}$ y P_p . Asimismo, será de gran utilidad presentar las realizaciones de $L_p^1(\alpha)$ y $L_p^2(\alpha)$ en orden creciente. Es fácil comprobar que en las estructuras que hemos analizado se cumple que si $L_{P_t}^1(\alpha) \leq L_{P_r}^1(\alpha) \Rightarrow L_{P_t}^2(\alpha) \leq L_{P_r}^2(\alpha)$. De esta forma, la ordenación realizada en una de las dos variables aleatorias que definen a $\tilde{L}_p$ para un nivel α es idéntica en la otra, es decir, el número de orden que ocupe el extremo del α -corte –inferior o superior– de una realización correspondiente a una de las variables aleatorias, será el mismo que ocupe el otro extremo dentro del conjunto de realizaciones de la otra variable aleatoria.

A partir de las variables “pérdida” inferior y superior, podremos hallar, la función de distribución para un valor X , $\tilde{F}[X]$, la cual indicará la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores inferiores a X , $P[\tilde{L}_p \leq X]$. Para un nivel α , el α -corte de $\tilde{F}[X]$, que notaremos como $F[X]_\alpha$, no vendrá dada por un conjunto convexo –un intervalo de confianza-, sino por una serie de probabilidades discretas, ya que $\tilde{L}_p$ es discreta. Asimismo, la función de distribución inferior vendrá determinada por la variable aleatoria superior, y viceversa. Es evidente que, dadas dos variables aleatorias x e y , que suponiéndolas discretas, cuyo campo de variación ordenado en orden creciente sea, $\{x_i\}_{i=1..n}$ y $\{y_i\}_{i=1..n}$ respectivamente y con $P[x=x_i]=P[y=y_i]=p_i$, si $x_i \geq y_i \forall i$, se cumple siempre que $P[x \leq X] \leq P[y \leq X]$.

Por ejemplo, si disponemos de las variables aleatorias “ x ” e “ y ”, siendo las dos posibles realizaciones de x $\{2, 3\}$ y las de y $\{1, 2\}$, y en ambos casos las realizaciones son equiprobables (es decir, con probabilidad $1/2$), si tomamos un valor $X=2.5$, podemos observar que el valor de la función de distribución de la variable aleatoria con realizaciones menores (y) es $P[y \leq 2.5]=1$. En cambio, la probabilidad que acumula el valor $X=2.5$ a su izquierda en la variable aleatoria x es: $P[x \leq 2.5]=1/2$.

Así, la función de distribución superior para un nivel α , $F^2[X](\alpha)=P[L_p^1(\alpha) \leq X]$ y la función de distribución inferior para X , $F^1[X](\alpha)=P[L_p^2(\alpha) \leq X]$, vendrán dadas por:

$$F^2[X](\alpha) = \sum_{t_l / L_{pt}^1(\alpha) \leq X} t_l q_x \quad \text{y} \quad F^1[X](\alpha) = \sum_{t_l / L_{pt}^2(\alpha) \leq X} t_l q_x$$

De forma que los α -cortes de la función de distribución $F[X]_\alpha$ serán un conjunto de valores discretos cuyo envoltorio convexo es el intervalo $[F^1[X](\alpha), F^2[X](\alpha)]$, tal como comentamos en el apartado 3.6.3. de la primera parte de la tesis, siendo no obstante $\tilde{F}[X]$ un subconjunto borroso que cumple:

- $F[X]_{\alpha'} \subseteq F[X]_\alpha$ si $\alpha \leq \alpha'$, ya que $L_{pt}^1(\alpha) \leq L_{pt}^1(\alpha')$ y $L_{pt}^2(\alpha) \geq L_{pt}^2(\alpha') \forall t$, por lo que $F^1[X](\alpha) \leq F^1[X](\alpha')$ y $F^2[X](\alpha) \geq F^2[X](\alpha')$
- $\exists F[X]_1$, ya que $\exists L_p^1(1) \leq L_{pt}^2(1)$, que vendrán definidas por las trayectorias de los intereses de actualización superior e inferior, respectivamente, con el máximo nivel de verdad. De forma que $\tilde{F}[X]$ es un subconjunto borroso normal. Sin embargo, no es un número borroso, ya que su función de pertenencia no está definida en los reales.

Por supuesto, la función de pertenencia de $\tilde{F}[X]$ podremos hallarla a través de $F[X]_\alpha$ como:

$$\mu_{\tilde{F}[X]}(x) = \{\text{Max } \alpha \mid x \in F[X]_\alpha\}, \text{ con } x \in [0,1]$$

La función de distribución de $\tilde{L}_p$, $\tilde{F}[X]$ nos indicará cual es la probabilidad de que el asegurador incurra en pérdidas si fija un recargo de seguridad X sobre la prima pura, P_p . Evidentemente, esta probabilidad no puede ser conocida con certeza, pues la suficiencia o no del recargo de cuantía X dependerá no tan sólo del momento de fallecimiento del asegurado sino también de la trayectoria que tomen los tipos de interés de actualización. Un comportamiento desfavorable de la mortalidad puede ser compensado con un comportamiento favorable en el interés que se obtiene invirtiendo las primas y viceversa. Asimismo, si $X=0$, $\tilde{F}[0]$ nos indicará cual es la probabilidad de que la prima pura, sin recargos, sea suficiente para cubrir las prestaciones del seguro.

Al concepto de función de distribución, podemos asociar el concepto de cuantil, que no se trata más que de la función inversa de la función de distribución. Así, el $1-\varepsilon$ cuantil de $\tilde{L}_p$, que denominaremos como $\tilde{Q}^\varepsilon$, indicará la cuantía borrosa con que se debe recargar la prima pura, para que el asegurador no sufra ninguna pérdida con una probabilidad $\varepsilon \in [0,1]$.

De esta forma, y a pesar de que los α -cortes de la función de distribución no vienen estrictamente dados mediante un intervalo de confianza, los α -cortes del $1-\varepsilon$ percentil de $\tilde{L}_p$, Q_α^ε , si lo serán, tal como se muestra en los mencionados trabajos de Kruse y Meyer y de Frühwirth-Schnatter. De esta forma para hallar Q_α^ε deberemos partir de $F[X]_\alpha$, obteniéndose:

$$Q_\alpha^\varepsilon = [Q^{1\varepsilon}(\alpha), Q^{2\varepsilon}(\alpha)]$$

donde:

$$Q^{1\varepsilon}(\alpha) = \inf X \mid F^2[X](\alpha) \geq 1 - \varepsilon \quad \text{y} \quad Q^{2\varepsilon}(\alpha) = \inf X \mid F^1[X](\alpha) \geq 1 - \varepsilon$$

Es decir, a partir de la inversa de la función de distribución inferior, para un nivel α , que es la de $L_p^2(\alpha)$, obtendremos el extremo superior del correspondiente α -corte de $\tilde{Q}^\varepsilon$ y viceversa.

Ya hemos comentado, en los seguros que analizaremos, que el extremo inferior del α -corte de la variable aleatoria pérdida para el asegurador si el asegurado sobrevive únicamente t años enteros, $L_{pt}^1(\alpha)$ ocupa la misma posición en la ordenación sobre las realizaciones de la variable aleatoria inferior, $L_p^1(\alpha)$, que el extremo superior, $L_{pt}^2(\alpha)$, dentro de las realizaciones de la variable

aleatoria superior $L_p^2(\alpha)$. De esta forma, también podemos obtener para un nivel α los α -cortes de $\tilde{Q}^\varepsilon$, como los α -cortes de la realización $\tilde{L}_{pt}$, $L_{pt\alpha}$ tal que sus extremos inferior y superior son:

$$\text{Min } L_{pt}^i(\alpha) \mid \sum_{\forall r \mid L_{pt}^i(\alpha) \leq L_{pt}^i(\alpha)} q_x \geq 1 - \varepsilon, i = 1, 2$$

Es decir, los α -cortes de la t-ésima realización de $\tilde{L}_p$, $\tilde{L}_{pt}$ que cumple la condición anterior, pueden ser identificados como Q_α^ε , de forma que:

$$Q_\alpha^\varepsilon = [Q^{1\varepsilon}(\alpha), Q^{2\varepsilon}(\alpha)] = [L_{pt}^1(\alpha), L_{pt}^2(\alpha)]$$

y por tanto, si conociéramos la expresión analítica de $\mu_{\tilde{L}_{pt}}(x)$, como $\tilde{L}_{pt} = \tilde{Q}^\varepsilon$ ya que coinciden sus α -cortes, $\mu_{\tilde{Q}^\varepsilon}(x) = \mu_{\tilde{L}_{pt}}(x)$.

Para acabar de determinar la prima a repercutir al asegurado, deberemos de fijar de forma nítida el recargo a aplicar sobre P_p , que denominaremos como Q^ε y se halla desfuzzyficando $\tilde{Q}^\varepsilon$. Como siempre, proponemos el criterio del valor esperado. Dado que el intervalo esperado de $\tilde{Q}^\varepsilon$ se obtiene como:

$$E[\tilde{Q}^\varepsilon] = [E^1[\tilde{Q}^\varepsilon], E^2[\tilde{Q}^\varepsilon]] = \left[\int_0^1 Q^{1\varepsilon}(\alpha) d\alpha, \int_0^1 Q^{2\varepsilon}(\alpha) d\alpha \right]$$

para un grado de aversión al riesgo al riesgo $\beta' \in [0, 1]$, el recargo a aplicar Q^ε se obtiene a través del valor esperado de $\tilde{Q}^\varepsilon$, de forma que:

$$EV[\tilde{Q}^\varepsilon, \beta'] = Q^\varepsilon = (1 - \beta') E^1[\tilde{Q}^\varepsilon] + \beta' E^2[\tilde{Q}^\varepsilon]$$

Evidentemente, Q^ε no acumulará exactamente una probabilidad de $1 - \varepsilon$ o más a su izquierda, sino aproximadamente una igual o superior a $1 - \varepsilon$. La probabilidad de pérdida para el asegurador tras fijarse el recargo cierto sobre P_p , Q^ε , vendrá dada por el subconjunto borroso $\tilde{F}[Q^\varepsilon]$, para el cual ya ha sido analizada la forma de cálculo de sus α -cortes y su función de pertenencia.

De esta forma, la prima única recargada, P_R , a cobrar al asegurado para la que la probabilidad de insolvencia en esa hipotética cartera compuesta por un único asegurado sea “aproximadamente ε ” se obtendrá sumando la prima actuarialmente justa más el recargo, es decir:

$$P_R = P_p + Q^\varepsilon$$

4.2. ANÁLISIS DEL CAPITAL DE FALLECIMIENTO CON VENCIMIENTO EN EL AÑO ACTUAL

4.2.1. Determinación de la prima pura única

En este caso el asegurado percibe una unidad monetaria al final del año actual si fallece en éste y nada en otro caso. Para una prima única borrosa pagable en el momento actual, que notamos como $\tilde{P}$, el valor actual de las pérdidas para el asegurador es:

$$\tilde{L} = \begin{cases} \tilde{f}_1 - \tilde{P} & \text{con } {}_0|q_x \\ 0 - \tilde{P} & \text{con } {}_1|q_x = {}_1p_x \end{cases}$$

donde “-” es la sustracción habitual entre números borrosos.

Planteando $\tilde{E}[L] = 0$, es decir, $\tilde{E}[Z] = P_p$, obtendremos que $\tilde{E}[L] = \tilde{f}_1 {}_0|q_x - \tilde{P} = 0$, es decir, $\tilde{P}_p = {}_0\tilde{B}_x$, de forma que los α -cortes de $\tilde{P}_p$ serán:

$$P_{p\alpha} = {}_0B_{x\alpha} = [{}_0B_x^1(\alpha), {}_0B_x^2(\alpha)] = [f_1^1(\alpha) {}_0|q_x, f_1^2(\alpha) {}_0|q_x]$$

Y por tanto $\mu_{{}_0\tilde{B}_x}(x) = \mu_{\tilde{P}_p}(x)$, por lo que todas las expresiones de los α -cortes y función de pertenencia obtenidas en el apartado 3.2. para ${}_t\tilde{B}_x$ también son aplicables a $\tilde{P}_p$.

De esta forma, la prima pura cierta P_p se obtiene, una vez se ha fijado β como:

$$EV[\tilde{P}_p, \beta] = P_p = (1 - \beta) \int_0^1 f_1^1(\alpha) {}_0|q_x d\alpha + \beta \int_0^1 f_1^2(\alpha) {}_0|q_x d\alpha = \left[(1 - \beta) \int_0^1 f_1^1(\alpha) d\alpha + \beta \int_0^1 f_1^2(\alpha) d\alpha \right] {}_0|q_x$$

4.2.2. Análisis de la función de distribución y los cuantiles de la variable borroso aleatoria pérdida si se cobra la prima pura única.

En este caso, la variable borroso aleatoria pérdida, $\tilde{L}_p$ vendrá caracterizada, para un nivel α por una variable aleatoria inferior y por una variable aleatoria superior las cuales, tras ordenar sus realizaciones de forma creciente, observamos que presentan la siguiente forma:

$$L_p^i(\alpha) = \begin{cases} 0 - P_p & \text{con } {}_1p_x \\ f_1^i(\alpha) - P_p & \text{con } {}_0|q_x \end{cases}, i=1,2.$$

Asimismo, la función de distribución, $\tilde{F}[X]$ puede ser expresada, a un nivel α por la función de distribución inferior, $F^1[X](\alpha)$ y superior $F^2[X](\alpha)$, de forma que:

$$F^{3-i}[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -P_p \\ {}_1p_x & \text{si } -P_p \leq X < f_1^i(\alpha) - P_p, i=1,2. \\ 1 & \text{si } X \geq f_1^i(\alpha) - P_p \end{cases}$$

Así, el $1-\varepsilon$ percentil, de la variable borroso aleatoria $\tilde{L}_p$, $\tilde{Q}^\varepsilon$, será un número borroso, que dependiendo del nivel ε para el que queramos fijar la solvencia del asegurador, presenta como α -cortes:

- Si $0 < 1-\varepsilon \leq {}_1p_x$, lo cual implica que $1 > \varepsilon \geq 1-{}_1p_x = {}_1q_x$, $Q_\alpha^\varepsilon = [-P_p, -P_p]$, es decir, se trata del número cierto $-P_p$.
- Si ${}_1p_x < 1-\varepsilon \leq 1$, es decir, $1-{}_1p_x = {}_1q_x > \varepsilon \geq 0$, $Q_\alpha^\varepsilon = [f_1^1(\alpha), f_1^2(\alpha)] - P_p$, es decir, $\tilde{Q}^\varepsilon = \tilde{f}_t - P_p$.

De esta forma, Q^ε , o el recargo a cobrar, vendrá dado para un determinado nivel de aversión al riesgo β' :

- Si $0 < 1-\varepsilon \leq {}_1p_x$, $Q^\varepsilon = -P_p$
- Si ${}_1p_x < 1-\varepsilon \leq 1$,

$$EV[\tilde{Q}^\varepsilon, \beta'] = Q^\varepsilon = (1-\beta') \int_0^1 f_1^1(\alpha) d\alpha + \beta' \int_0^1 f_1^2(\alpha) d\alpha - P_p$$

Donde, si $\beta = \beta'$

$$Q^\varepsilon = \left[(1-\beta) \int_0^1 f_1^1(\alpha) d\alpha + \beta \int_0^1 f_1^2(\alpha) d\alpha \right] {}_1p_x$$

4.2.3. Determinación de las primas cuando el interés de valoración viene dado a través de un único número borroso triangular a lo largo de todo el contrato

Si el interés aplicar durante todos los períodos viene dado por un número borroso triangular $\tilde{i} = (i^1, i^2, i^3)$, podemos comprobar que:

$$P_{p\alpha} = {}_0B_{x_\alpha} = \left[(1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-1} {}_0q_x, (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-1} {}_0q_x \right]$$

Por lo que:

$$P_p = \left[(1-\beta) \int_0^1 (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-1} d\alpha + \beta \int_0^1 (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-1} d\alpha \right] {}_0q_x =$$

$$P_p = \left[(1-\beta) \frac{\ln \frac{1+i^3}{1+i^2}}{i^3-i^2} + \beta \frac{\ln \frac{1+i^2}{1+i^1}}{i^2-i^1} \right] {}_0q_x$$

De esta forma, la determinación de la variables aleatoria inferior y superior correspondientes a $\tilde{L}_p$ es inmediata. A partir de estas, la función de distribución vendrá dada para un nivel de presunción α por las correspondientes funciones de distribución inferior y superior:

$$F^l[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -P_p \\ {}_1p_x & \text{si } -P_p \leq X < (1+i^1 + (i^2-i^1)\alpha)^{-1} - P_p \\ 1 & \text{si } X \geq (1+i^2 + (i^2-i^1)\alpha)^{-1} - P_p \end{cases}$$

$$F^u[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -P_p \\ {}_1p_x & \text{si } -P_p \leq X < (1+i^3 - (i^3-i^2)\alpha)^{-1} - P_p \\ 1 & \text{si } X \geq (1+i^3 - (i^3-i^2)\alpha)^{-1} - P_p \end{cases}$$

Asimismo, el $1-\varepsilon$ percentil de $\tilde{L}_p$, $\tilde{Q}^\varepsilon$, será un número borroso cuyos α -cortes son, en este caso:

- Si $0 < 1-\varepsilon \leq {}_1p_x$, lo cual implica que $1 > \varepsilon \geq 1-{}_1p_x = {}_1q_x$, $Q_\alpha^\varepsilon = [-P_p, -P_p] = -P_p$
- Si ${}_1p_x < 1-\varepsilon \leq 1$, es decir, $1-{}_1p_x = {}_1q_x > \varepsilon \geq 0$, $Q_\alpha^\varepsilon = [(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-1}, (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-1}] - P_p$, es decir, $\tilde{Q}^\varepsilon = \tilde{f}_1 - P_p$.

De esta forma, Q^ε , o el recargo a cobrar, se hallará, una vez ha fijado β' como:

- Si $0 < 1-\varepsilon \leq {}_1p_x$, $Q^\varepsilon = -P_p$
- Si ${}_1p_x < 1-\varepsilon \leq 1$,

$$Q^\varepsilon = (1-\beta') \int_0^1 (1+i^3 - (i^3-i^2)\alpha)^{-1} d\alpha + \beta' \int_0^1 (1+i^1 + (i^2-i^1)\alpha)^{-1} d\alpha - P_p =$$

$$= (1-\beta') \frac{\ln \frac{1+i^3}{1+i^2}}{i^3-i^2} + \beta' \frac{\ln \frac{1+i^2}{1+i^1}}{i^2-i^1} - P_p$$

4.2.4. Aplicación numérica

A continuación analizamos el caso en que un individuo de 45 años suscriba un seguro de fallecimiento para el presente año, siendo la cuantía asegurada de 1.000 u.m.. Asimismo, el tipo de interés borroso a aplicar y las tablas de mortalidad que utilizaremos son las ya utilizadas en

anteriores ejemplos, es decir, $\tilde{i} = (0'02, 0'03, 0'05)$ y las tablas de mortalidad son las PEM-82 para población masculina.

En primer lugar, podemos observar que la prima única borrosa se obtiene como $\tilde{P}_p = {}_0\tilde{B}_{45}$, siendo su función de pertenencia, la calculada en el apartado 3.2.4. Respecto a P_p , podemos observar que para un β dado, y teniendo en cuenta que ${}_0B_{45\alpha}$ se obtiene como:

$${}_0B_{45\alpha} = \left[1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-1} \frac{3.029}{951.683}, 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-1} \frac{3.029}{951.683} \right]$$

P_p se obtendrá como:

$$P_p = (1 - \beta)3'06 + \beta 3'12$$

de forma que para $\beta = 0'75$, $P_p = 3'09$.

Analicemos la función de distribución de las pérdidas para el asegurador, $\tilde{L}_p$, si cobra la prima pura única. Podemos observar que para un nivel α , las variables aleatorias inferior y superior son, con sus realizaciones ya ordenadas en orden creciente:

$$L_p^1(\alpha) = \begin{cases} -3'09 & \text{con } \frac{948.654}{951.683} \\ 10^3 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-1} - 3'09 & \text{con } \frac{3.029}{951.683} \end{cases} \text{ y,}$$

$$L_p^2(\alpha) = \begin{cases} -3'09 & \text{con } \frac{948.654}{951.683} \\ 10^3 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-1} - 3'09 & \text{con } \frac{3.029}{951.683} \end{cases}$$

Así, las funciones de distribución inferior y superior son:

$$F^1[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -3'09 \\ \frac{948.654}{951.683} & \text{si } -3'09 \leq X < 1000(1'02 + 0,01\alpha)^{-1} - 3'09 \\ 1 & \text{si } X \geq 1000(1'02 + 0,01\alpha)^{-1} - 3'09 \end{cases}$$

$$F^2[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -3'09 \\ \frac{948.654}{951.683} & \text{si } -3'09 \leq X < 1000(1'05 - 0,02\alpha)^{-1} - 3'09 \\ 1 & \text{si } X \geq 1000(1'05 - 0,02\alpha)^{-1} - 3'09 \end{cases}$$

De esta forma, si el asegurador no cobra ningún recargo, y cobra a su único asegurado en cartera la prima pura, la probabilidad de que esta prima sea suficiente vendrá dada por $\tilde{F}[0]$, la cual presenta como función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{F}[0]}(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x = \frac{948.654}{951.683} \approx 0.9968 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

Respecto a la probabilidad de quiebra ε que presenta un asegurador, cobrando un recargo borroso $\tilde{Q}^\varepsilon$, podemos observar que Q_α^ε viene dado por:

- a) Si $0 < 1 - \varepsilon \leq 0.9968$, $Q_\alpha^\varepsilon = -3.09$
- b) Si $0.9968 < 1 - \varepsilon \leq 1$, $Q_\alpha^\varepsilon = [1000 \cdot (1.05 - 0.02\alpha)^{-1}, 1000 \cdot (1.02 + 0.01\alpha)^{-1}] - 3.09$

Si buscamos asegurar una probabilidad de insolvencia del 0%, el recargo cierto que fijará para un β' dado es $Q^0 = (1 - \beta')961.57 + \beta'975.62 - 3.09$. Si tomamos $\beta = 0.75$, $Q^0 = 969.01$. Expresamos el recargo, como es habitual en la práctica actuarial, como un porcentaje sobre la prima pura, sobre la desviación estándar cierta y sobre la varianza cierta de $\tilde{L}_p$.

$\frac{P_p}{313.79\%}$	$\frac{V^*[Z]}{0.33\%}$	$\frac{D^*[Z]}{17.76\%}$

En este caso, la prima única recargada será: $P_R = 972.11$.

Es importante comentar que, estrictamente, el cobro de esta prima no asegura que el asegurador no esté expuesto a la quiebra. Aunque se ha considerado un $\beta' > 0.75$ y se ha supuesto que el individuo fallece al año que cubre el seguro y sus sucesores cobran al final del año 1000 u.m., un escenario muy adverso respecto al tipo de interés podría hacer que el recargo fuera insuficiente. De hecho, si $X=969.01$, $\tilde{F}[969.01]$ vendrá dada a través de su función de pertenencia como:

$$\mu_{\tilde{F}[969.01]}(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 0.87 & x = 0.9968 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Es decir, el nivel de presunción 1 nos indica que lo más posible es que el recargo de 969.01 ptas. sea suficiente para no tener pérdidas, pero al mismo tiempo, al trabajar con la variable borroso aleatoria pérdida, y mantener conjuntamente la borrosidad y la aleatoriedad, disponemos de más información. En concreto conocemos de que existe un nivel de posibilidad de 0.87 de que exista una probabilidad de pérdida después de cobrar el recargo de 0.0032.

De esta forma, no podemos afirmar categóricamente que un recargo sobre la prima pura de 969'01 ptas. asegure una probabilidad de insolvencia del 0%, ya que dependerá de la rentabilidad que finalmente sea capaz de conseguir el asegurador invirtiendo las primas. Supongamos que el interés que finalmente sea capaz de conseguir el asegurador fuera del 3% anual, donde $\mu_{\tilde{r}}(0'03)=1$, es decir, es la trayectoria del interés más posible. La variable aleatoria pérdida tras cobrar la prima pura (3'09 unidades monetarias) en este caso sería:

$$L_p = \begin{cases} -3'09 & \text{con } \frac{948.654}{951.683} \\ 1.000 \cdot 1'03^{-1} - 3'09 = 967'78 & \text{con } \frac{3.029}{951.683} \end{cases}$$

Así, la función de distribución asociada a la variable aleatoria pérdida después de ser cobrada la prima pura es:

$$F[X] = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 3'09 \\ \frac{948.654}{951.683} & \text{si } -3'09 \leq X < 967'78 \\ 1 & \text{si } X \geq 967'78 \end{cases}$$

Así pues, $F[969'01]=1$, es decir, bajo la hipótesis de que el asegurador sea capaz de invertir las primas a un 3%, la probabilidad de que el recargo sobre la prima pura de 969'01 unidades monetarias sea suficiente es del 100%. Como el nivel de presunción de esta trayectoria de los tipos de interés es máximo, es decir, 1, el nivel de pertenencia de que la probabilidad acumulada por el recargo establecido sea del 100% seguirá siendo 1, es decir:

$$\mu_{\tilde{F}[969'01]}(1) = 1$$

Sin embargo, tomemos ahora una trayectoria del interés del 2'87%, que si bien es algo pesimista, presenta un nivel de verdad muy elevado, en concreto $\mu_{\tilde{r}}(0'0287)=0'87$. En este caso, el nivel de la variable pérdida si el asegurador consigue este tipo de interés, también tiene asociada un nivel de presunción de 0'87, y es:

$$L_p = \begin{cases} -3'09 & \text{con } \frac{948.654}{951.683} \\ 1.000 \cdot 1'0287^{-1} - 3'09 = 969'011 & \text{con } \frac{3.029}{951.683} \end{cases}$$

Por tanto, el valor de la función de distribución de esta variable aleatoria también tendrá un nivel de presunción del 0'87. En este caso, ésta es:

$$F[X] = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 3'09 \\ \frac{948.654}{951.683} & \text{si } -3'09 \leq X < 969'011 \\ 1 & \text{si } X \geq 969'011 \end{cases}$$

En este escenario, el valor 960'01 ptas. (el recargo que aplicaremos sobre la prima pura) acumula una probabilidad de 0'9968, no del 100%, y por tanto, ello conlleva una probabilidad de insolvencia de 0'0032. Como la presunción de este escenario del tipo de interés es de 0'87, podemos observar que $\mu_{F[969'01]}(0'9968) = 0'87$, que es como mínimo, el nivel de presunción de que este recargo sobre la prima pura sea suficiente con una probabilidad del 99'68% -y por tanto, la probabilidad de insolvencia sea del 0'32%- siendo por tanto la prima finalmente cobrada que es de $969'01 + 3'09 = 972'1$ unidades monetarias.

4.3. ANÁLISIS DEL SEGURO DE CAPITAL DIFERIDO

4.3.1. Determinación de la prima pura única

Las prestación asociada a un seguro de capital diferido es un capital de supervivencia con vencimiento a t años. Asimismo, supondremos que $t > 0$, ya que en caso contrario el seguro no tendría sentido, como ya comentamos. En este caso, para una prima única borrosa que notamos como $\tilde{P}$, el valor actual de las pérdidas para el asegurador, es:

$$\tilde{L} = \begin{cases} \tilde{f}_t - \tilde{P} & \text{con } {}_t p_x \\ 0 - \tilde{P} & \text{con } {}_t q_x \end{cases}$$

donde “-“ sería la sustracción habitual entre números borrosos.

Planteando $\tilde{E}[L] = \tilde{f}_t {}_t p_x - \tilde{P} = 0$, obtendremos que $\tilde{P}_p = {}_t \tilde{E}_x$, de forma que los α -cortes de $\tilde{P}_p$ serán:

$$P_{p\alpha} = {}_t E_{x\alpha} = \left[{}_t E_x^1(\alpha), {}_t E_x^2(\alpha) \right] = \left[f_t^1(\alpha) {}_t p_x, f_t^2(\alpha) {}_t p_x \right]$$

Por tanto $\mu_{{}_t \tilde{E}_x}(x) = \mu_{\tilde{P}_p}(x)$, por lo que todas las expresiones de los α -cortes y función de pertenencia obtenidas en el apartado 3.3. para ${}_t \tilde{E}_x$ corresponden a las de $\tilde{P}_p$.

De esta forma, la prima pura cierta P_p se calcula, para una aversión al riesgo de interés prefijada β , como:

$$EV[\tilde{P}_p, \beta] = P_p = (1 - \beta) \int_0^1 f_t^1(\alpha) {}_t p_x d\alpha + \beta \int_0^1 f_t^2(\alpha) {}_t p_x d\alpha = \left[(1 - \beta) \int_0^1 f_t^1(\alpha) d\alpha + \beta \int_0^1 f_t^2(\alpha) d\alpha \right] {}_t p_x$$

4.3.2. Análisis de la función de distribución y los cuantiles de la variable borroso aleatoria pérdida si se cobra la prima pura única

En este caso, la variable borroso aleatoria pérdida, $\tilde{L}_p$ vendrá caracterizada, para un nivel α , por una variable aleatoria inferior y por una variable aleatoria superior las cuales presentan la siguiente forma, una vez han sido ordenadas sus realizaciones en orden creciente:

$$L_p^i(\alpha) = \begin{cases} 0 - P_p & \text{con } {}_t q_x \\ f_t^i(\alpha) - P_p & \text{con } {}_t p_x \end{cases}, i=1,2.$$

Asimismo, la función de distribución, $\tilde{F}[X]$ puede ser expresada, a un nivel α , por la función de distribución inferior, $F^1[X](\alpha)$ y superior $F^2[X](\alpha)$, de forma que:

$$F^{3-i}[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -P_p \\ {}_t q_x & \text{si } -P_p \leq X < f_t^i(\alpha) - P_p, i=1,2. \\ 1 & \text{si } X \geq f_t^i(\alpha) - P_p \end{cases}$$

Asimismo, el $1-\varepsilon$ percentil, de la variable borroso aleatoria $\tilde{L}_p$, $\tilde{Q}^\varepsilon$, será un número borroso, que dependiendo del nivel ε para el que queramos asegurar la solvencia del asegurador, presenta como α -cortes:

- Si $0 < 1-\varepsilon \leq {}_t q_x$, es decir, $1 > \varepsilon \geq 1 - {}_t q_x = {}_t p_x$, $Q_\alpha^\varepsilon = [-P_p, -P_p]$, es decir, se trata del número cierto $-P_p$.
- Si ${}_t q_x < 1-\varepsilon \leq 1$, es decir, ${}_t p_x > \varepsilon \geq 0$, entonces $Q_\alpha^\varepsilon = [f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)] - P_p$, es decir, $\tilde{Q}^\varepsilon = \tilde{f}_t - P_p$.

De esta forma, el recargo a cobrar, Q^ε , vendrá dado para un determinado nivel β' :

- Si $0 < 1-\varepsilon \leq {}_t q_x$ o $1 > \varepsilon \geq {}_t p_x$, $Q^\varepsilon = -P_p$
- Si ${}_t q_x < 1-\varepsilon \leq 1$ o ${}_t p_x > \varepsilon \geq 0$:

$$EV[\tilde{Q}^\varepsilon, \beta'] = Q^\varepsilon = (1 - \beta') \int_0^1 f_t^1(\alpha) d\alpha + \beta' \int_0^1 f_t^2(\alpha) d\alpha - P_p$$

Donde, si $\beta = \beta'$

$$Q^e = \left[(1-\beta) \int_0^1 f_t^1(\alpha) d\alpha + \beta \int_0^1 f_t^2(\alpha) d\alpha \right] {}_t q_x$$

4.3.3. Determinación de las primas cuando el interés de valoración viene dado a través de un único número borroso triangular a lo largo de todo el contrato

Si el interés aplicar durante todos los períodos viene dado por un número borroso triangular $\tilde{i} = (i^1, i^2, i^3)$, podemos comprobar que:

$$P_{p\alpha} = {}_t E_{x_\alpha} = \left[(1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-t} {}_t p_x, (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-t} {}_t p_x \right]$$

Por lo que:

$$P_p = \left[(1-\beta) \int_0^1 (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-t} d\alpha + \beta \int_0^1 (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-t} d\alpha \right] {}_t p_x$$

En este contexto, deberemos diferenciar dos supuestos:

a) Si $t=1$, entonces:

$$P_p = \left[(1-\beta) \frac{\ln \frac{1+i^3}{1+i^2}}{i^3 - i^2} + \beta \frac{\ln \frac{1+i^2}{1+i^1}}{i^2 - i^1} \right] {}_t p_x$$

b) Si $t>1$, entonces:

$$P_p = \left[(1-\beta) \frac{(1+i^2)^{-t+1} - (1+i^3)^{-t+1}}{(t-1)(i^3 - i^2)} + \beta \frac{(1+i^1)^{-t+1} - (1+i^2)^{-t+1}}{(t-1)(i^2 - i^1)} \right] {}_t p_x$$

De esta forma, la determinación de la variables aleatoria inferior y superior correspondientes a $\tilde{L}_p$ es inmediata. A partir de estas, su función de probabilidad acumulada, vendrá dada para un nivel de presunción α dado por:

$$F^1[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -P_p \\ {}_t q_x & \text{si } -P_p \leq X < (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-t} - P_p \\ 1 & \text{si } X \geq (1+i^2 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-t} - P_p \end{cases}$$

$$F^2[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -P_p \\ {}_t q_x & \text{si } -P_p \leq X < \left(1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha\right)^{-t} - P_p \\ 1 & \text{si } X \geq \left(1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha\right)^{-t} - P_p \end{cases}$$

Asimismo, el $1-\varepsilon$ percentil de $\tilde{L}_p$, $\tilde{Q}^\varepsilon$, será un número borroso cuyos α -cortes son, para cada probabilidad de pérdida ε :

a) Si $0 < 1-\varepsilon \leq {}_t q_x$, $Q_\alpha^\varepsilon = [-P_p, -P_p]$

b) Si ${}_t q_x < 1-\varepsilon \leq 1$, $Q_\alpha^\varepsilon = [(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-t}, (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-t}] - P_p$, es decir, $\tilde{Q}^\varepsilon = \tilde{f}_t - P_p$.

De esta forma, Q^ε , o el recargo a cobrar, se hallará una vez ha fijado el decisor su nivel de aversión al riesgo de interés, β' como:

a) Si $0 < 1-\varepsilon \leq {}_t q_x$, $Q^\varepsilon = -P_p$

b) Si ${}_t q_x < 1-\varepsilon \leq 1$,

$$Q^\varepsilon = (1-\beta') \int_0^1 (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-t} d\alpha + \beta' \int_0^1 (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-t} d\alpha - P_p$$

b.1) De esta forma, si $t = 1$:

$$Q^\varepsilon = (1-\beta') \frac{\ln \frac{1+i^3}{1+i^2}}{i^3-i^2} + \beta' \frac{\ln \frac{1+i^2}{1+i^1}}{i^2-i^1} - P_p$$

b.2) Y si $t > 1$

$$Q^\varepsilon = (1-\beta') \frac{(1+i^2)^{-t+1} - (1+i^3)^{-t+1}}{(t-1)(i^3-i^2)} + \beta' \frac{(1+i^1)^{-t+1} - (1+i^2)^{-t+1}}{(t-1)(i^2-i^1)} - P_p$$

4.3.4. Aplicación numérica

A continuación desarrollaremos una aplicación suponiendo que un individuo de 45 años suscriba un seguro de capital diferido con una cuantía asegurada de 1.000 u.m. y el diferimiento del capital de supervivencia es 10 años. Asimismo, el tipo de interés borroso a aplicar y las tablas de mortalidad que utilizaremos son las ya utilizadas en el resto de apartados. Recordamos que la estructura actuarial de las prestaciones ha sido analizada en la aplicación numérica del apartado 3.3.4.

En primer lugar, podemos observar que la prima única borrosa se obtiene como $\tilde{P}_p = {}_{10}\tilde{E}_{45}$, siendo su función de pertenencia, la calculada en el apartado 3.2.4. Respecto a P_p , podemos observar que para un β dado, y teniendo en cuenta que ${}_{10}E_{45\alpha}$ se obtiene como:

$${}_{10}E_{45\alpha} = [1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-10} \frac{906.484}{951.683}, 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-10} \frac{906.484}{951.683}]$$

P_p será:

$$P_p = (1 - \beta)644,57 + \beta 744,42$$

de forma que para $\beta = 0'75$, $P_p = 719,46$.

Analicemos la función de distribución de las pérdidas para el asegurador, $\tilde{L}_p$, si cobra la prima pura única. Podemos observar que para un nivel α , las variables aleatorias inferior y superior son:

$$L_p^1(\alpha) = \begin{cases} -719'46 & \text{con } \frac{45.199}{951.683} \\ 10^3 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-10} - 719'46 & \text{con } \frac{906.484}{951.683} \end{cases} \text{ y,}$$

$$L_p^2(\alpha) = \begin{cases} -719'46 & \text{con } \frac{45.199}{951.683} \\ 10^3 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-10} - 719'46 & \text{con } \frac{906.484}{951.683} \end{cases}$$

Así, las funciones de distribución inferior y superior son:

$$F^1[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -719'46 \\ \frac{45199}{951683} & \text{si } -719'46 \leq X < 1000(1'02 + 0,01\alpha)^{-10} - 719'46 \\ 1 & \text{si } X \geq 1000(1'02 + 0,01\alpha)^{-10} - 719'46 \end{cases}$$

$$F^2[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -719'46 \\ \frac{45199}{951683} & \text{si } -719'46 \leq X < 1000(1'05 - 0,02\alpha)^{-10} - 719'46 \\ 1 & \text{si } X \geq 1000(1'05 - 0,02\alpha)^{-10} - 719'46 \end{cases}$$

De esta forma, si el asegurador no cobra ningún recargo, y cobra a su único asegurado en cartera la prima pura, la probabilidad de que esta prima sea suficiente vendrá dada por $\tilde{F}[0]$, la cual presenta como función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{F}[0]}(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x = \frac{45199}{951683} \approx 0'0475 \\ 0'83 & x = 1 \end{cases}$$

Respecto a la probabilidad de quiebra ε que presenta un asegurador, cobrando un recargo borroso $\tilde{Q}^\varepsilon$, podemos observar que Q^ε_α viene dado por:

- a) Si $0 < 1 - \varepsilon \leq 0'0485$, $Q^\varepsilon_\alpha = -719'46$
- b) Si $0'0485 < 1 - \varepsilon \leq 1$, $Q^\varepsilon_\alpha = [1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-10}, 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-10}] - 719'46$

Supongamos que el asegurador busca conseguir una probabilidad de insolvencia del 0%. En este caso, el recargo cierto que fijará para un β dado será:

$$Q^0 = (1 - \beta')676'71 + \beta'781,54 - 719'46$$

y si tomamos $\beta' = 0'75$, $Q^0 = 35'87$. Expresamos el recargo, como es habitual en la práctica actuarial, como un porcentaje sobre la prima pura, la desviación estándar cierta y la varianza cierta de $\tilde{L}_p$, coincidiendo las dos últimas, como ya comentamos, con las que se deducen de la variable borroso aleatoria correspondiente al capital de supervivencia.

P_p	$V^*[Z]$	$D^*[Z]$
4,99%	0,15%	23,05%

En este caso, la prima única recargada será: $P_R = 755'33$.

Como ha sido comentado con anterioridad, el cobro de $P_R = 755'33$ no asegura que el asegurador no esté expuesto a la quiebra. Aunque se ha considerado un $\beta = 0'75$ y se ha supuesto que el individuo sobrevive los 10 años que dura el seguro y por tanto, cobra al vencimiento del seguro 1000 u.m., un escenario muy adverso respecto al tipo de interés podría hacer que el recargo fuera insuficiente. De hecho, a partir de las funciones de distribución inferior y superior de $\tilde{L}_p$, del recargo a aplicar se puede hallar la función de pertenencia de la función de distribución. Si $X = 35'87$, $\tilde{F}[35'87]$ vendrá dada por:

$$\mu_{\tilde{F}[35'87]}(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 0'84 & x = 0'0475 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

es decir, si bien, cobrando un recargo sobre la prima pura de 35'87 u.m. es cierto que la probabilidad de que la prima recargada sea suficiente es 1, también es prácticamente cierto que la probabilidad de que sea insuficiente es del 95'25%.

Como realizamos con el ejemplo del seguro de vida analizado en el apartado 4.2., analizaremos a continuación el nivel de solvencia conseguido por el asegurador, tras cobrar el recargo 35'87 unidades monetarias, para dos escenarios del tipo de interés que éste ha considerado como posibles al estimar $\tilde{i}$.

Supongamos en primer lugar que el asegurador consiguiera finalmente, el interés más posible invirtiendo las primas, es decir, el 3%, donde $\mu_{\tilde{i}}(0'03)=1$. En este caso, la variable aleatoria pérdida después de cobrarse la prima pura es:

$$L_p = \begin{cases} -719'46 & \text{con } \frac{45.199}{951.683} \\ 1.000 \cdot 1'03^{-10} - 719'46 = 24'63 & \text{con } \frac{906.484}{951.683} \end{cases}$$

siendo su nivel de posibilidad el del tipo de interés que define a dicha variable aleatoria, es decir, 1. Asimismo, la función de distribución de dicha variable aleatoria es:

$$F[X] = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -719'46 \\ \frac{45.199}{951.683} & \text{si } -719'46 \leq X < 24'63 \\ 1 & \text{si } X \geq 24'63 \end{cases}$$

Para esta trayectoria, si el recargo es de 35'87 unidades monetarias, y por tanto, la prima recargada es de 755'33 unidades monetarias, la función de distribución asociada al recargo es de $F[35'87]=1$, y por tanto, en esta trayectoria, el recargo asegura con una probabilidad del 100% la solvencia del asegurador. Como el nivel de pertenencia de esta trayectoria es 1, obtenemos que $\mu_{\tilde{F}[35'87]}(1)=1$.

Supongamos ahora que el interés que es capaz de conseguir finalmente el asegurador invirtiendo las primas es del 2'84%, y por tanto, en este escenario el tipo de interés tiene un nivel de presunción de $\mu_{\tilde{i}}(0'0284)=0'84$, es decir, es un escenario más pesimista que optimista respecto al tipo de interés, pero con un nivel de verdad asociado muy elevado. La variable aleatoria pérdida después de cobrar la prima pura asociada a este escenario tiene un nivel de presunción del 0'84 y es:

$$L_p = \begin{cases} -719'46 & \text{con } \frac{45.199}{951.683} \\ 1.000 \cdot 1'0284^{-10} - 719'46 = 36'29 & \text{con } \frac{906.484}{951.683} \end{cases}$$

Asimismo, la función de distribución de dicha variable aleatoria es:

$$F[X] = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -719'46 \\ \frac{45.199}{951.683} & \text{si } -719'46 \leq X < 36'29 \\ 1 & \text{si } X \geq 36'29 \end{cases}$$

De esta forma, $F[35'87] = \frac{45.199}{951.683}$, es decir, 0'0475 para esta trayectoria del tipo de interés (que posee un nivel de presunción del 0'84) y por tanto, el nivel de presunción de que la probabilidad de suficiencia de la prima recargada de 755'33 unidades monetarias sea del 4'75% -o de que la probabilidad de quiebra sea del 95'25% con dicha prima- será al menos de 0'84, y ello ocurre si el asegurador sólo puede conseguir invirtiendo la prima a un 2'84% anual o un tipo menor.

4.4. ANÁLISIS DEL SEGURO VIDA ENTERA

4.4.1. Determinación de la prima pura única

En este caso, para una prima única borrosa que notamos como $\tilde{P}$, la variable borroso aleatoria pérdida es:

$$\tilde{L} = \tilde{f}_t - \tilde{P} \text{ con } {}_t|q_x, t = 0, 1, \dots, w - x - 1$$

Planteando $\tilde{E}[L] = 0 \Rightarrow \tilde{A}_x - \tilde{P}_p = 0$, obtendremos que $\tilde{P}_p = \tilde{A}_x$, de forma que los α -cortes de $\tilde{P}_p$, $P_{p\alpha}$ serán:

$$P_{p\alpha} = A_{x\alpha} = [A_x^1(\alpha), A_x^2(\alpha)]$$

Así, también se cumple que $\mu_{\tilde{A}_x}(x) = \mu_{\tilde{P}_p}(x)$, por lo que todas las expresiones y consideraciones realizadas para $\tilde{A}_x$ en el apartado 3.4. se hacen extensibles a $\tilde{P}_p$.

Asimismo, la prima única cierta, P_p se calcula para una aversión al riesgo de interés β dada, como:

$$\begin{aligned} EV[\tilde{P}_p, \beta] &= P_p = (1 - \beta) \int_0^1 A_x^1(\alpha) d\alpha + \beta \int_0^1 A_x^2(\alpha) d\alpha = \\ &= (1 - \beta) \int_0^1 \left[\sum_{t=0}^{w-x-1} f_{t+1}^1(\alpha) {}_t|q_x \right] d\alpha + \beta \int_0^1 \left[\sum_{t=0}^{w-x-1} f_{t+1}^2(\alpha) {}_t|q_x \right] d\alpha = \\ &= (1 - \beta) \sum_{t=0}^{w-x-1} {}_t|q_x \int_0^1 f_{t+1}^1(\alpha) d\alpha + \beta \sum_{t=0}^{w-x-1} {}_t|q_x \int_0^1 f_{t+1}^2(\alpha) d\alpha \end{aligned}$$

4.4.2. Análisis de la función de distribución y los cuantiles de la variable borroso aleatoria pérdida si se cobra la prima pura única

En este caso, la variable borroso aleatoria pérdida, $\tilde{L}_p$ vendrá caracterizada, para un nivel α , por una variable aleatoria inferior y por una variable aleatoria superior las cuales presentarán la siguiente forma tras ordenar sus realizaciones en orden creciente:

$$L_p^i(\alpha) = f_{w-x-t}^i(\alpha) - P_p \text{ con } q_x \text{ siendo } t=0,1,\dots,w-x-1 \text{ e } i=1,2.$$

Asimismo, la función de distribución, $\tilde{F}[X]$ puede ser expresada, para un α prefijado, por la función de distribución inferior, $F^1[X](\alpha)$ y superior $F^2[X](\alpha)$. Éstas tienen la siguiente forma:

$$F^{3-i}[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < f_{w-x}^i(\alpha) - P_p \\ \sum_{r=0}^t q_x & \text{si } f_{w-x-t}^i(\alpha) - P_p \leq X < f_{w-x-(t+1)}^i(\alpha) - P_p, t=0,1,\dots, w-x-2, \\ 1 & \text{si } X \geq f_1^i(\alpha) - P_p \end{cases}$$

$i=1,2.$

Asimismo, el $1-\varepsilon$ percentil, de la variable borroso aleatoria $\tilde{L}_p$, $\tilde{Q}^\varepsilon$, será un número borroso, que presenta como α -cortes:

- Si $0 < 1-\varepsilon \leq q_x$, $Q_{\alpha^\varepsilon} = [f_{w-x}^1(\alpha), f_{w-x}^2(\alpha)] - P_p$.
- Si $\sum_{r=0}^t q_x < 1-\varepsilon \leq \sum_{r=0}^{t+1} q_x$, $Q_{\alpha^\varepsilon} = [f_{w-x-(t+1)}^1(\alpha), f_{w-x-(t+1)}^2(\alpha)] - P_p$, donde $t \in \{0,1,\dots,w-x-2\}$

De esta forma, el recargo de seguridad cierto que debe repercutirse para asegurar un nivel de solvencia ε , vendrá dado para un nivel de aversión al riesgo de interés β' , y si $0 < 1-\varepsilon \leq q_x$, como:

$$Q^\varepsilon = (1-\beta') \int_0^1 f_{w-x}^1(\alpha) d\alpha + \beta' \int_0^1 f_{w-x}^2(\alpha) d\alpha - P_p$$

y en el supuesto en que $\sum_{r=0}^t q_x < 1-\varepsilon \leq \sum_{r=0}^{t+1} q_x$, para $t \in \{0,1,\dots,w-x-2\}$, se obtiene:

$$Q^\varepsilon = (1-\beta) \int_0^1 f_{w-x-(t+1)}^1(\alpha) d\alpha + \beta \int_0^1 f_{w-x-(t+1)}^2(\alpha) d\alpha - P_p$$

4.4.3. Determinación de las primas cuando el interés de actualización viene dado a través de un único número borroso triangular para toda la duración del contrato

Los α -cortes de la prima pura borrosa, si el interés técnico es un número $\tilde{i}$ constante a lo largo de toda la operación financiera, se obtienen sin más que sustituir $i^1(\alpha)=i^1+(i^2-i^1)\alpha$ en el extremo superior de los factores de actualización e $i^2(\alpha)=i^3-(i^3-i^2)\alpha$ en el inferior, de forma que:

$$P_{p_\alpha} = A_{x_\alpha} = \left[\sum_{t=0}^{w-x-1} (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(t+1)} {}_tq_x, \sum_{t=0}^{w-x-1} (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-(t+1)} {}_tq_x \right]$$

Así, la prima pura para una aversión al riesgo dada a través de un parámetro β será:

$$\begin{aligned} P_p &= (1-\beta) \sum_{t=0}^{w-x-1} {}_tq_x \int_0^1 (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(t+1)} d\alpha + \beta \sum_{t=0}^{w-x-1} {}_tq_x \int_0^1 (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-(t+1)} d\alpha = \\ &= (1-\beta) \left[\frac{\ln \frac{1+i^3}{1+i^2}}{i^3-i^2} {}_0q_x + \sum_{t=1}^{w-x-1} \frac{(1+i^2)^{-t} - (1+i^3)^{-t}}{t(i^3-i^2)} {}_tq_x \right] + \beta \left[\frac{\ln \frac{1+i^2}{1+i^1}}{i^2-i^1} {}_0q_x + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{t=1}^{w-x-1} \frac{(1+i^1)^{-t} - (1+i^2)^{-t}}{t(i^2-i^1)} {}_tq_x \right] \end{aligned}$$

Una vez obtenidos los α -cortes de las variables aleatorias inferior y superior que se deducen para P_p , $L^1_p(\alpha)$ y $L^2_p(\alpha)$, podemos hallar las funciones de distribución superior e inferior como:

$$\begin{aligned} F^1[X](\alpha) &= \begin{cases} 0 & \text{si } X < (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-(w-x)} - P_p \\ \sum_{r=0}^t {}^{w-x-1-r}q_x & \text{si } (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-(w-x-t)} - P_p \leq X < (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-(w-x-(t+1))} - P_p, t=0, \dots, w-x-2 \\ 1 & \text{si } X \geq (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-1} - P_p \end{cases} \\ F^2[X](\alpha) &= \begin{cases} 0 & \text{si } X < (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(w-x)} - P_p \\ \sum_{r=0}^t {}^{w-x-1-r}q_x & \text{si } (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(w-x-t)} - P_p \leq X < (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(w-x-(t+1))} - P_p, t=0, \dots, w-x-2 \\ 1 & \text{si } X \geq (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-1} - P_p \end{cases} \end{aligned}$$

De esta forma, los α -cortes de $\tilde{Q}^\varepsilon$, son:

$$\begin{aligned} - \text{ Si } 0 < 1-\varepsilon \leq {}^{w-x-1}q_x, Q_\alpha^\varepsilon &= \left[(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(w-x)}, (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-(w-x)} \right] - P_p \\ - \text{ Si } \sum_{r=0}^t {}^{w-x-1-r}q_x < 1-\varepsilon \leq \sum_{r=0}^{t+1} {}^{w-x-1-r}q_x, & \end{aligned}$$

$$Q_{\alpha}^{\varepsilon} = \left[(1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-(w-x-(t+1))}, (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-(w-x-(t+1))} \right] - P_p \quad \text{donde}$$

$$t \in \{0, 1, \dots, w-x-2\}$$

Por tanto el recargo de seguridad cierto a repercutir, Q^{ε} , de forma que se obtenga a un nivel ε de estabilidad, para un parámetro β' prefijado se halla como:

- Si $0 < 1 - \varepsilon \leq \sum_{r=0}^{w-x-1} q_x$:

$$Q^{\varepsilon} = (1 - \beta') \int_0^1 (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-(w-x)} d\alpha + \beta' \int_0^1 (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-(w-x)} d\alpha - P_p =$$

$$= (1 - \beta') \frac{(1 + i^2)^{-w+x+1} - (1 + i^3)^{-w+x+1}}{(w-x-1)(i^3 - i^2)} + \beta' \frac{(1 + i^1)^{-w+x+1} - (1 + i^2)^{-w+x+1}}{(w-x-1)(i^2 - i^1)} - P_p$$

Si buscamos Q^{ε} tal que $\sum_{r=0}^t \sum_{w-x-1-r} q_x < 1 - \varepsilon \leq \sum_{r=0}^{t+1} \sum_{w-x-1-r} q_x$, para $t \in \{0, 1, \dots, w-x-3\}$, se obtiene:

$$Q^{\varepsilon} = (1 - \beta') \int_0^1 (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-w+x+t+1} d\alpha + \beta' \int_0^1 (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-w+x+t+1} d\alpha - P_p =$$

$$= (1 - \beta') \frac{(1 + i^2)^{-w+x+t+2} - (1 + i^3)^{-w+x+t+2}}{(w-x-t-2)(i^3 - i^2)} + \beta' \frac{(1 + i^1)^{-w+x+t+2} - (1 + i^2)^{-w+x+t+2}}{(w-x-t-2)(i^2 - i^1)} - P_p$$

Evidentemente, si $w-x-3 < 0$, $\{0, \dots, w-x-3\}$ es un conjunto vacío.

Y para Q^{ε} tal que $\sum_{r=0}^{w-x-2} \sum_{w-x-1-r} q_x < 1 - \varepsilon \leq \sum_{r=0}^{w-x-1} \sum_{w-x-1-r} q_x$, entonces el resultado es:

$$Q^{\varepsilon} = (1 - \beta') \int_0^1 (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-1} d\alpha + \beta' \int_0^1 (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-1} d\alpha - P_p =$$

$$= (1 - \beta') \frac{\ln \frac{1 + i^3}{1 + i^2}}{i^3 - i^2} + \beta' \frac{\ln \frac{1 + i^2}{1 + i^1}}{i^2 - i^1} - P_p$$

4.4.4. Aplicación numérica

Ejemplificamos el análisis efectuado para un seguro de vida entera correspondiente a un asegurado de 35 años, usándose el mismo interés de valoración y las mismas tablas que las que venimos utilizando a lo largo de toda esta parte de la tesis para realizar el análisis. Asimismo, el

capital asegurado es de 1000 unidades monetarias. Es inmediato comprobar que la prima pura borrosa es $\tilde{P}_p = \tilde{A}_{35}$, por tanto los α -cortes $P_{p\alpha}$ se hallan como:

$$P_{p\alpha} = \left[1000 \cdot \sum_{t=0}^{79} (1'05 - 0'02\alpha)^{-(t+1)} {}_{t|}q_{35}, 1000 \cdot \sum_{t=0}^{79} (1'02 + 0'01\alpha)^{-(t+1)} {}_{t|}q_{35} \right]$$

y, entonces, es inmediato comprobar que para una aversión al riesgo β dada, la prima pura, P_p , se obtiene como:

$$P_{p\alpha} = (1-\beta)210 + 357'94\beta$$

de forma que para $\beta = 0'75$, $P_p = 320'95$.

De esta forma, la variable borroso aleatoria pérdida $\tilde{L}_p$, vendrá dada por la variable aleatoria pérdida inferior, $L_p^1(\alpha)$ y superior $L_p^2(\alpha)$, para cada nivel de presunción α con el que trabajemos, siendo éstas respectivamente:

$$L_p^1(\alpha) = 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-80+t} - 320'95 \text{ con } {}_{79-t|}q_{35}, t = 0, 1, \dots, 79$$

y,

$$L_p^2(\alpha) = 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-80+t} - 320'95 \text{ con } {}_{79-t|}q_{35}, t = 0, 1, \dots, 79$$

De esta forma, las funciones de distribución inferior y superior vienen dadas por:

$$F^1[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-80} - 320'95 \\ \sum_{r=0}^t {}_{79-r|}q_{35} & \text{si } 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-80+t} - 320'95 \leq X \\ & < 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-80+(t+1)} - 320'95, t = 0, 1, \dots, 78 \\ 1 & \text{si } X \geq 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-1} - 320'95 \end{cases}$$

$$F^2[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-80} - 320'95 \\ \sum_{r=0}^t {}_{79-r|}q_{35} & \text{si } 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-80+t} - 320'95 \leq X \\ & < 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-80+(t+1)} - 320'95, t = 0, 1, \dots, 78 \\ 1 & \text{si } X \geq 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-1} - 320'95 \end{cases}$$

Podríamos obtener los α -cortes y la función de pertenencia para $X=0$, la cual nos indicaría, como ya señalamos anteriormente, la probabilidad de que la prima pura única cobrada en una cartera de un único asegurado sea suficiente para hacer frente a los compromisos adquiridos. Su función de pertenencia, $\mu_{\tilde{F}[0]}(x)$, es la correspondiente al siguiente subconjunto borroso discreto que toma como forma:

x	0,162	0,191	0,223	0,256	0,29	0,325	0,361	0,396	0,431	0,466	0,499	0,532	0,563	0,593	0,621	0,648	0,673
$\mu(x)$	0,01	0,05	0,08	0,12	0,17	0,21	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,51	0,56	0,62	0,69	0,75	0,82

x	0,697	0,719	0,74	0,759	0,778	0,794	0,81	0,825	0,838	0,851	0,863	0,874	0,884	0,894	0,903	0,911	0,919
$\mu(x)$	0,9	1	0,97	0,93	0,88	0,83	0,78	0,73	0,67	0,61	0,54	0,47	0,39	0,31	0,22	0,12	0,02

Respecto a la expresión de los α -cortes de los cuantiles borrosos, podemos observar dependiendo del nivel de solvencia elegido, que sus expresiones son:

- Si $0 < 1 - \varepsilon \leq {}_{79}q_{35}$:

$$Q_{\alpha}^{\varepsilon} = [1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-80}, 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-80}] - 320'95$$

- Si $\sum_{r=0}^t {}_{79-r}q_{35} < 1 - \varepsilon \leq \sum_{r=0}^{t+1} {}_{79-r}q_{35}$, $t \in \{0, 1, \dots, 78\}$

$$Q_{\alpha}^{\varepsilon} = [1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-80+(t+1)}, 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-80+(t+1)}] - 320'95$$

Así, los α -cortes de $\tilde{Q}^{0'1}$, $\tilde{Q}^{0'05}$ y $\tilde{Q}^{0'01}$ que son los valores que reducen la probabilidad de insuficiencia de la prima finalmente repercutida al 10%, 5% y 1% y son, respectivamente:

$$Q_{\alpha}^{0'1} = [1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-25}, 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-25}] - 320'95$$

$$Q_{\alpha}^{0'05} = [1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-18}, 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-18}] - 320'95$$

$$Q_{\alpha}^{0'01} = [1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-7}, 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-7}] - 320'95$$

Para obtener los α -cortes del cuantil borroso que deseamos buscar, y que será el que nos permita calcular el recargo a aplicar sobre la prima pura, deberemos fijar, en primer lugar, la probabilidad de insolvencia que pretendemos obtener tras repercutir el recargo, ε (por ejemplo, 0'1). De esta forma, la probabilidad que debe acumular el cuantil borroso que buscamos es de $1 - \varepsilon$ (en nuestro caso el 90%). Posteriormente hallamos t tal que, en nuestro ejemplo:

$$\sum_{r=0}^t {}_{79-r}q_{35} < 0'9 \leq \sum_{r=0}^{t+1} {}_{79-r}q_{35}$$

y de esta forma, la obtención del cuantil es inmediata. Por ejemplo, para este nivel de solvencia elegido, en nuestro ejemplo, $t=54$.

Asimismo, el valor de $Q^{0'1}$, $Q^{0'05}$ y $Q^{0'01}$, con $\beta' = 0'75$, la prima recargada, y la proporción que ésta representa sobre la prima pura, la desviación estándar y la varianza vienen dadas en el siguiente cuadro:

ε	Q^e	P_R	P_p	$V^*[L_P]$	$D^*[L_P]$
0'1	172,01	500,31	52,40%	0,91%	125,10%
0'05	277,29	605,59	84,46%	1,47%	201,67%
0'01	492,94	821,23	150,15%	2,61%	358,50%

A través de los α -cortes de $\tilde{F}[X]$, podremos obtener para $X=492'94$, $277'29$ y $172'01$, $\mu_{\tilde{F}[492'94]}(x)$, $\mu_{\tilde{F}[277'29]}(x)$ y $\mu_{\tilde{F}[172'01]}(x)$. Ello nos permitirá analizar hasta que punto estos recargos aseguran la no existencia de pérdidas para el asegurador para unas probabilidades del 1%, 5% y 10% respectivamente:

$Q^{0'1}=172'01$		$Q^{0'05}=277'29$		$Q^{0'01}=492'94$	
x	$\mu(x)$	x	$\mu(x)$	x	$\mu(x)$
0,7944	0,06	0,9193	0,20	0,9856	0,21
0,8102	0,12	0,9267	0,31	0,9880	0,49
0,8248	0,19	0,9336	0,42	0,9902	1,00
0,8385	0,26	0,9401	0,54	0,9922	0,83
0,8512	0,34	0,9461	0,67	0,9940	0,49
0,8630	0,42	0,9516	0,83		
0,8740	0,50	0,9568	1,00		
0,8843	0,60	0,9615	0,91		
0,8939	0,70	0,9659	0,80		
0,9029	0,81	0,9699	0,68		
0,9114	1,00	0,9737	0,53		
0,9193	0,97	0,9771	0,37		
0,9267	0,90	0,9802	0,17		
0,9336	0,82				
0,9401	0,74				
0,9461	0,64				
0,9516	0,54				
0,9568	0,42				
0,9615	0,29				
0,9659	0,14				

4.5. ANÁLISIS DEL SEGURO TEMPORAL

4.5.1. Determinación de la prima pura única

En este caso, para una prima única borrosa, $\tilde{P}$, la pérdida del asegurador vendrá dada por:

$$\tilde{L} = \begin{cases} \tilde{f}_{t+1} - \tilde{P} & \text{con } {}_t|q_x \text{ } t = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0 - \tilde{P} & \text{con } {}_n p_x \end{cases}$$

Planteando $\tilde{E}[L] = 0$, obtendremos que $\tilde{P}_p = {}_n \tilde{A}_x$. De esta forma obtenemos $P_{p\alpha}$ como:

$$P_{p\alpha} = {}_n A_{x\alpha} = [{}_n A_x^1(\alpha), {}_n A_x^2(\alpha)]$$

Y por tanto, también se obtiene que $\mu_{{}_n \tilde{A}_x}(x) = \mu_{\tilde{P}_p}(x)$. Así, las expresiones y cuestiones apuntadas en el apartado 3.5. para la esperanza de esta estructura actuarial también corresponden a $\tilde{P}_p$.

Asimismo, P_p se calcula para un β dado como:

$$\begin{aligned} EV[\tilde{P}_p, \beta] &= P_p = (1 - \beta) \int_0^1 {}_n A_x^1(\alpha) d\alpha + \beta \int_0^1 {}_n A_x^2(\alpha) d\alpha = \\ &= (1 - \beta) \int_0^1 \left[\sum_{t=0}^{n-1} f_{t+1}^1(\alpha) {}_t|q_x \right] d\alpha + \beta \int_0^1 \left[\sum_{t=0}^{n-1} f_{t+1}^2(\alpha) {}_t|q_x \right] d\alpha = \\ &= (1 - \beta) \left[\sum_{t=0}^{n-1} {}_t|q_x \int_0^1 f_{t+1}^1(\alpha) d\alpha \right] + \beta \left[\sum_{t=0}^{n-1} {}_t|q_x \int_0^1 f_{t+1}^2(\alpha) d\alpha \right] \end{aligned}$$

4.5.2. Análisis de la función de distribución y los cuantiles de la variable borroso aleatoria pérdida si se cobra la prima pura única

Para un nivel α de la variable borroso aleatoria pérdida, $\tilde{L}_p$, se obtiene la correspondiente variable aleatoria inferior y superior con sus realizaciones ordenadas de la forma habitual como:

$$L_p^i(\alpha) = \begin{cases} 0 - P_p & \text{con } {}_n p_x \\ f_{n-t}^i(\alpha) - P_p & \text{con } {}_{n-1-t}|q_x, t = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad i=1, 2.$$

Los α -cortes de $\tilde{F}[X]$ quedan caracterizados por la función de distribución inferior $F^1[X](\alpha)$ y la superior $F^2[X](\alpha)$, de forma que si $i=1, 2$ se obtiene:

$$F^{3-i}[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -P_p \\ {}_n p_x & \text{si } -P_p \leq X < f_n^i(\alpha) - P_p \\ {}_n p_x + \sum_{r=0}^t {}_{n-1-r}|q_x & \text{si } f_{n-t}^i(\alpha) - P_p \leq X < f_{n-(t+1)}^i(\alpha) - P_p, t = 0, 1, \dots, n-2 \\ 1 & X \geq f_1^i(\alpha) - P_p \end{cases}$$

Asimismo, el $1-\varepsilon$ percentil, de $\tilde{L}_p$, presentará como α -cortes, para cada uno de los niveles ε para los que se analice la solvencia:

- Si $0 < 1-\varepsilon \leq {}_n p_x$, $Q_\alpha^\varepsilon = [-P_p, -P_p]$, es decir, es el número crisp $-P_p$.
- Si ${}_n p_x < 1-\varepsilon \leq {}_n p_x + {}_{n-1} q_x$, $Q_\alpha^\varepsilon = [f_n^1(\alpha), f_n^2(\alpha)] - P_p$
- Si ${}_n p_x + \sum_{r=0}^t {}_{n-1-r} q_x < 1-\varepsilon \leq {}_n p_x + \sum_{r=0}^{t+1} {}_{n-1-r} q_x$, $Q_\alpha^\varepsilon = [f_{n-(t+1)}^1(\alpha), f_{n-(t+1)}^2(\alpha)] - P_p$, donde $t \in \{0, 1, \dots, n-2\}$

De esta forma, el valor cierto Q^ε de $\tilde{Q}^\varepsilon$, vendrá dado para un parámetro β' dado como:

Si $0 < 1-\varepsilon \leq {}_n p_x$,

$$Q^\varepsilon = -P_p$$

En el caso en que ${}_n p_x < 1-\varepsilon \leq {}_n p_x + {}_{n-1} q_x$, se obtiene:

$$Q^\varepsilon = (1 - \beta') \int_0^1 f_n^1(\alpha) d\alpha + \beta' \int_0^1 f_n^2(\alpha) d\alpha - P_p$$

Y por último, si consideramos un nivel de estabilidad tal que ${}_n p_x + \sum_{r=0}^t {}_{n-1-r} q_x < 1-$

$\varepsilon \leq {}_n p_x + \sum_{r=0}^{t+1} {}_{n-1-r} q_x$, para $t \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ se obtiene:

$$Q^\varepsilon = (1 - \beta') \int_0^1 f_{n-(t+1)}^1(\alpha) d\alpha + \beta' \int_0^1 f_{n-(t+1)}^2(\alpha) d\alpha - P_p$$

4.5.3. Determinación de las primas cuando el interés de actualización viene dado a través de un único número borroso triangular para toda la duración del seguro

Planteando en este caso $\tilde{E}[L] = 0$, obtendremos la prima pura borrosa cuyos α -cortes serán:

$$P_{p_\alpha} = {}_n A_{x_\alpha} = \left[\sum_{t=0}^{n-1} (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-(t+1)} {}_t q_x, \sum_{t=0}^{n-1} (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-(t+1)} {}_t q_x \right]$$

De esta forma, P_p se calcula para un β dado como:

$$\begin{aligned}
 P_p &= (1-\beta) \sum_{t=0}^{n-1} {}_t|q_x \int_0^1 (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-(t+1)} d\alpha + \beta \sum_{t=0}^{n-1} {}_t|q_x \int_0^1 (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-(t+1)} d\alpha = \\
 &= (1-\beta) \left[\frac{\ln \frac{1+i^3}{1+i^2}}{i^3 - i^2} {}_0|q_x + \sum_{t=1}^{n-1} \frac{(1+i^2)^{-t} - (1+i^3)^{-t}}{t(i^3 - i^2)} {}_t|q_x \right] + \beta \left[\frac{\ln \frac{1+i^2}{1+i^1}}{i^2 - i^1} {}_0|q_x + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{t=1}^{n-1} \frac{(1+i^1)^{-t} - (1+i^2)^{-t}}{t(i^2 - i^1)} {}_t|q_x \right]
 \end{aligned}$$

Dado que, en este caso, las funciones de distribución inferior y superior para un nivel de presunción α determinado, son:

$$\begin{aligned}
 F^1[X](\alpha) &= \begin{cases} 0 & \text{si } X < -P_p \\ {}_n p_x & \text{si } -P_p \leq X < (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-n} - P_p \\ {}_n p_x + \sum_{r=0}^t {}_{n-1-r}|q_x & \text{si } (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-(n-t)} - P_p \leq X \\ & < (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-(n-(t+1))} - P_p, t=0, \dots, n-2 \\ 1 & \text{si } X \geq (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-1} - P_p \end{cases} \\
 F^2[X](\alpha) &= \begin{cases} 0 & \text{si } X < -P_p \\ {}_n p_x & \text{si } -P_p \leq X < (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-n} - P_p \\ {}_n p_x + \sum_{r=0}^t {}_{n-1-r}|q_x & \text{si } (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-(n-t)} - P_p \leq X \\ & < (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-(n-(t+1))} - P_p, t=0, \dots, n-2 \\ 1 & \text{si } X \geq (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-1} - P_p \end{cases}
 \end{aligned}$$

El valor de los α -cortes de $\tilde{Q}^\varepsilon$, que es el número borroso que acumula a su izquierda una probabilidad al menos igual a $1-\varepsilon$ vendrá dado por:

- Si $0 < 1-\varepsilon \leq {}_n p_x$, $Q_\alpha^\varepsilon = [-P_p, -P_p]$, es decir, es el número crisp $-P_p$.
- Si ${}_n p_x < 1-\varepsilon \leq {}_n p_x + {}_{n-1}|q_x$, $Q_\alpha^\varepsilon = [(1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-n}, (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-n}] - P_p$
- Si ${}_n p_x + \sum_{r=0}^t {}_{n-1-r}|q_x < 1-\varepsilon \leq {}_n p_x + \sum_{r=0}^{t+1} {}_{n-1-r}|q_x$,
 $Q_\alpha^\varepsilon = [(1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-(n-(t+1))}, (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-(n-(t+1))}] - P_p$ con $t \in \{0, 1, \dots, n-2\}$

Así, el recargo de seguridad cierto a repercutir, Q^ε , de forma que se obtenga a un nivel ε de estabilidad, y para un parámetro β' prefijado se halla como:

- Si $0 < 1-\varepsilon \leq {}_n p_x$: $-P_p$.
- Si ${}_n p_x < 1-\varepsilon \leq {}_n p_x + {}_{n-1}|q_x$:

$$Q^e = (1 - \beta') \int_0^1 (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-n} d\alpha + \beta' \int_0^1 (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-n} d\alpha - P_p =$$

$$= (1 - \beta') \frac{(1 + i^2)^{-n+1} - (1 + i^3)^{-n+1}}{(n-1)(i^3 - i^2)} + \beta' \frac{(1 + i^1)^{-n+1} - (1 + i^2)^{-n+1}}{(n-1)(i^2 - i^1)} - P_p$$

- Si ${}_n p_x + \sum_{r=0}^t {}_{n-1-r} q_x < 1 - \varepsilon \leq {}_n p_x + \sum_{r=0}^{t+1} {}_{n-1-r} q_x$, para $t \in \{0, 1, \dots, n-3\}$, se obtiene:

$$Q^e = (1 - \beta') \int_0^1 (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-n+t+1} d\alpha + \beta' \int_0^1 (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-n+t+1} d\alpha - P_p =$$

$$= (1 - \beta') \frac{(1 + i^2)^{-n+t+2} - (1 + i^3)^{-n+t+2}}{(n-t-2)(i^3 - i^2)} + \beta' \frac{(1 + i^1)^{-n+t+2} - (1 + i^2)^{-n+t+2}}{(n-t-2)(i^2 - i^1)} - P_p$$

Donde si $n-3 < 0$, $\{0, 1, \dots, n-3\}$ está vacío, y por tanto, no tiene sentido.

Para tal que ${}_n p_x + \sum_{r=0}^{n-2} {}_{n-1-r} q_x < 1 - \varepsilon \leq {}_n p_x + \sum_{r=0}^{n-1} {}_{n-1-r} q_x$, el resultado de Q^e es:

$$Q^e = (1 - \beta') \int_0^1 (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-1} d\alpha + \beta' \int_0^1 (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-1} d\alpha - P_p =$$

$$= (1 - \beta') \frac{\ln \frac{1 + i^3}{1 + i^2}}{i^3 - i^2} + \beta' \frac{\ln \frac{1 + i^2}{1 + i^1}}{i^2 - i^1} - P_p$$

4.5.4. Aplicación numérica

A continuación realizamos el análisis de un seguro temporal cuya duración son 40 años, con una cuantía asegurada de 1000 unidades monetarias suscrito por un individuo de 35 años. Se utiliza el mismo interés de valoración y las mismas tablas de mortalidad de siempre. Es inmediato comprobar que la prima pura borrosa es $\tilde{P}_p = {}_{40}\tilde{A}_{35}$, por lo que los α -cortes $P_{p\alpha}$ se hallan como:

$$P_{p\alpha} = \left[1000 \cdot \sum_{t=0}^{39} (1'05 - 0'02\alpha)^{-(t+1)} {}_t q_{35}, 1000 \cdot \sum_{t=0}^{39} (1'02 + 0'01\alpha)^{-(t+1)} {}_t q_{35} \right]$$

y, entonces, para un β dado, P_p es:

$$P_{p\alpha} = (1 - \beta)123,07 + \beta 177,60$$

y tomándose $\beta = 0'75$, se obtiene la prima pura $P_p = 163,97$.

De esta forma, la variable borroso aleatoria $\tilde{L}_p$ vendrá dada por las variables aleatorias convencionales inferior, $L_p^1(\alpha)$ y superior $L_p^2(\alpha)$, siendo éstas respectivamente, y ya con las realizaciones ordenadas de forma creciente:

$$L_p^1(\alpha) = \begin{cases} -163'97 & \text{con } {}_{40}P_{35} \\ 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-40+t} - 163'97 & \text{con } {}_{39-t}q_{35}, t = 0, 1, \dots, 39 \end{cases}$$

y,

$$L_p^2(\alpha) = \begin{cases} -163'97 & \text{con } {}_{40}P_{35} \\ 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-40+t} - 163'97 & \text{con } {}_{39-t}q_{35}, t = 0, 1, \dots, 39 \end{cases}$$

De esta forma, las funciones de distribución $F^1[X](\alpha)$ y $F^2[X](\alpha)$ son:

$$F^1[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -163'97 \\ {}_{40}P_{35} & \text{si } -163'97 \leq X < 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-40} - 163'97 \\ {}_{40}P_{35} + \sum_{r=0}^t {}_{39-r}q_{35} & \text{si } 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-40+t} - 163'97 \leq X < 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-40+(t+1)} - 163'97, t = 0, 1, \dots, 38 \\ 1 & X \geq 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-1} - 163'97 \end{cases}$$

$$F^2[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -163'97 \\ {}_{40}P_{35} & \text{si } -163'97 \leq X < 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-40} - 163'97 \\ {}_{40}P_{35} + \sum_{r=0}^t {}_{39-r}q_{35} & \text{si } 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-40+t} - 163'97 \leq X < 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-40+(t+1)} - 163'97, t = 0, 1, \dots, 38 \\ 1 & X \geq 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-1} - 163'97 \end{cases}$$

Podemos analizar el nivel de solvencia del asegurador si cobra únicamente la prima pura con $\beta=0'75$, sin mas que analizar $\tilde{F}[0]$. Su función de pertenencia, $\mu_{\tilde{F}[0]}(x)$, es la correspondiente a un número borroso discreto que se obtiene como:

x	0,6477	0,6730	0,6967	0,7190
$\mu(x)$	1,00	0,19	0,13	0,06

Respecto a la expresión de los α -cortes de los cuantiles borrosos, podemos observar que Q_α^ε toman como expresión:

- Si $0 < 1 - \varepsilon \leq {}_{40}P_{35}$, $Q_\alpha^\varepsilon = [-163'97, -163'97]$, es decir, es el número crisp $-163'97$.
- Si ${}_{40}P_{35} < 1 - \varepsilon \leq {}_{40}P_{35} + {}_{39}q_{35}$,
 $Q_\alpha^\varepsilon = [1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-40}, 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-40}] - 163'97$
- Si ${}_{40}P_{35} + \sum_{r=0}^t {}_{39-r}q_{35} < 1 - \varepsilon \leq {}_{40}P_{35} + \sum_{r=0}^{t+1} {}_{39-r}q_{35}$,

$$Q_{\alpha}^{\varepsilon} = [1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-40+(t+1)}, 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-40+(t+1)}] - 163'97 \quad t \in \{0, 1, \dots, 38\}$$

Así, los α -cortes de $\tilde{Q}^{0'1}$, $\tilde{Q}^{0'05}$ y $\tilde{Q}^{0'01}$ que son los valores que teóricamente reducen la probabilidad de insuficiencia de la prima pura al 10%, 5% y 1% respectivamente son:

$$Q_{\alpha}^{0'1} = [1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-25}, 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-25}] - 163'97$$

$$Q_{\alpha}^{0'05} = [1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-18}, 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-18}] - 163'97$$

$$Q_{\alpha}^{0'01} = [1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-7}, 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-7}] - 163'97$$

Asimismo, el valor de $Q^{0'1}$, $Q^{0'05}$ y $Q^{0'01}$, con $\beta' = 0'75$, el valor de la prima recargada, P_R , y el porcentaje que el recargo supone sobre la prima pura, la desviación estándar y la varianza son:

ε	Q^{ε}	P_R	P_P	$V^*[L_P]$	$D^*[L_P]$
0'1	336,34	500,31	205,13%	0,72%	155,78%
0'05	441,62	605,59	269,34%	0,95%	204,54%
0'01	657,27	821,23	400,86%	1,41%	304,42%

Damos a continuación las expresiones de $\mu_{\tilde{F}[336'34]}(x)$, $\mu_{\tilde{F}[441'62]}(x)$ y $\mu_{\tilde{F}[657'27]}(x)$, lo cual nos indicará la probabilidad de no existencia de pérdidas y el nivel de presunción de dicha probabilidad:

$Q^{0'1}=336'34$		$Q^{0'05}=441'62$		$Q^{0'01}=657'27$	
x	$\mu(x)$	x	$\mu(x)$	x	$\mu(x)$
0,9659	0,14	0,9802	0,17	0,9940	0,49
0,9615	0,29	0,9771	0,37	0,9922	0,83
0,9568	0,42	0,9737	0,53	0,9902	1,00
0,9516	0,54	0,9699	0,68	0,9880	0,49
0,9461	0,64	0,9659	0,80	0,9856	0,21
0,9401	0,74	0,9615	0,91		
0,9336	0,82	0,9568	1,00		
0,9267	0,90	0,9516	0,83		
0,9193	0,97	0,9461	0,67		
0,9114	1,00	0,9401	0,54		
0,9029	0,81	0,9336	0,42		
0,8939	0,70	0,9267	0,31		
0,8843	0,60	0,9193	0,20		
0,8740	0,50	0,9114	0,11		
0,8630	0,42	0,9029	0,03		
0,8512	0,34				
0,8385	0,26				
0,8248	0,19				
0,8102	0,12				
0,7944	0,06				

4.6. ANÁLISIS DEL SEGURO MIXTO

4.6.1. Determinación de la prima pura única

En este caso, para una prima única borrosa $\tilde{P}$, la pérdida en una cartera compuesta por un único asegurado vendrá dada por la variable borroso aleatoria:

$$\tilde{L} = \begin{cases} \tilde{f}_{t+1} - \tilde{P} & \text{con } {}_tq_x \quad t=0,1,\dots,n-1 \\ \tilde{f}_n - \tilde{P} & \text{con } {}_np_x \end{cases}$$

Planteando $\tilde{E}[L]=0$, obtendremos que $\tilde{P}_p = {}_n\tilde{A}_x + {}_n\tilde{E}_x$, de forma que $P_{p\alpha}$ es:

$$P_{p\alpha} = {}_nA_{x\alpha} + {}_nE_{x\alpha} = \left[{}_nA_x^1(\alpha) + {}_nE_x^1(\alpha), {}_nA_x^2(\alpha) + {}_nE_x^2(\alpha) \right]$$

De esta forma, las cuestiones comentadas sobre la esperanza matemática de la estructura actuarial, se pueden hacer extensibles a la prima borrosa.

La prima pura cierta, P_p se calcula para un β dado como:

$$\begin{aligned} EV[\tilde{P}_p, \beta] &= P_p = (1-\beta) \int_0^1 \left[{}_nA_x^1(\alpha) + {}_nE_x^1(\alpha) \right] d\alpha + \beta \int_0^1 \left[{}_nA_x^2(\alpha) + {}_nE_x^2(\alpha) \right] d\alpha = \\ &= (1-\beta) \int_0^1 \left[\sum_{t=0}^{n-1} f_{t+1}^1(\alpha) {}_tq_x + f_n^1(\alpha) {}_np_x \right] d\alpha + \beta \int_0^1 \left[\sum_{t=0}^{n-1} f_{t+1}^2(\alpha) {}_tq_x + f_n^2(\alpha) {}_np_x \right] d\alpha = \\ &= (1-\beta) \left[\sum_{t=0}^{n-1} {}_tq_x \int_0^1 f_{t+1}^1(\alpha) d\alpha + {}_np_x \int_0^1 f_n^1(\alpha) d\alpha \right] + \beta \left[\sum_{t=0}^{n-1} {}_tq_x \int_0^1 f_{t+1}^2(\alpha) d\alpha + {}_np_x \int_0^1 f_n^2(\alpha) d\alpha \right] \end{aligned}$$

4.6.2. Análisis de la función de distribución y los cuantiles de la variable borroso aleatoria pérdida si se cobra la prima pura única

En este caso, la variable borroso aleatoria pérdida, $\tilde{L}_p$ vendrá caracterizada, para un nivel α por una variable aleatoria inferior y por una variable aleatoria superior. Si ordenamos, como siempre, sus realizaciones en orden creciente, $L_p^1(\alpha)$ y $L_p^2(\alpha)$ presentan la siguiente forma:

$$L_p^i(\alpha) = \begin{cases} f_n^i(\alpha) - P_p & \text{con } {}_np_x \\ f_{n-(t+1)}^i(\alpha) - P_p & \text{con } {}_tq_x, t=0,1,\dots,n-2 \end{cases} \quad i=1,2.$$

Obsérvese que al construir esta función de distribución hemos considerado como el mismo suceso que una persona fallezca durante el n -ésimo año del contrato (probabilidad ${}_{n-1}q_x$) o que sobreviva n años (probabilidad ${}_np_x$). En ambos casos, la pérdida para el asegurador después de cobrar la prima pura es $\tilde{f}_n - P_p$, y la probabilidad de ocurrencia de esta realización ${}_{n-1}q_x + {}_np_x = {}_{n-1}p_x$.

Asimismo, los α -cortes de la función de distribución, $F[X]_\alpha$, quedan determinados por la función de distribución inferior, $F^1[X](\alpha)$ y la superior $F^2[X](\alpha)$, de forma que éstas tienen la siguiente expresión :

$$F^{3-i}[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < f_n^i(\alpha) - P_p \\ {}_{n-1}p_x & \text{si } f_n^i(\alpha) - P_p \leq X < f_{n-1}^i(\alpha) - P_p \\ {}_{n-1}p_x + \sum_{r=1}^t {}_{n-1-r}q_x & \text{si } f_{n-t}^i(\alpha) - P_p \leq X < f_{n-(t+1)}^i(\alpha) - P_p, t = 1, 2, \dots, n-2 \\ 1 & X \geq f_1^i(\alpha) - P_p \end{cases}$$

Donde $i=1,2$.

Asimismo, el $1-\varepsilon$ percentil, de $\tilde{L}_p$, $\tilde{Q}^\varepsilon$, presentará como α -cortes, para cada uno de los niveles ε para los que se analice la solvencia:

- Si $0 < 1-\varepsilon \leq {}_{n-1}p_x$, $Q_\alpha^\varepsilon = [f_n^1(\alpha), f_n^2(\alpha)] - P_p$
- Si ${}_{n-1}p_x < 1-\varepsilon \leq {}_{n-1}p_x + {}_{n-2}q_x$, $Q_\alpha^\varepsilon = [f_{n-1}^1(\alpha), f_{n-1}^2(\alpha)] - P_p$
- Si ${}_{n-1}p_x + \sum_{r=0}^t {}_{n-1-r}q_x < 1-\varepsilon \leq {}_{n-1}p_x + \sum_{r=0}^{t+1} {}_{n-1-r}q_x$, $Q_\alpha^\varepsilon = [f_{n-(t+1)}^1(\alpha), f_{n-(t+1)}^2(\alpha)] - P_p$, donde $t \in \{1, \dots, n-2\}$. Si $n-2 < 1$, entonces $\{1, \dots, n-2\}$ es vacío.

De esta forma, el recargo a aplicar, Q^ε , si se busca un nivel de estabilidad ε , vendrá dado para una aversión al riesgo dada β' , y $0 < 1-\varepsilon \leq {}_{n-1}p_x$,

$$Q^\varepsilon = (1 - \beta') \int_0^1 f_n^1(\alpha) d\alpha + \beta' \int_0^1 f_n^2(\alpha) d\alpha - P_p$$

Si ${}_{n-1}p_x < 1-\varepsilon \leq {}_{n-1}p_x + {}_{n-2}q_x$,

$$Q_\alpha^\varepsilon = (1 - \beta') \int_0^1 f_{n-1}^1(\alpha) d\alpha + \beta' \int_0^1 f_{n-1}^2(\alpha) d\alpha.$$

Asimismo, si buscamos Q^ε tal que ${}_{n-1}p_x + \sum_{r=0}^t {}_{n-1-r}q_x < 1-\varepsilon \leq {}_{n-1}p_x + \sum_{r=0}^{t+1} {}_{n-1-r}q_x$, $t \in \{1, \dots, n-2\}$, se

obtiene:

$$Q^{\varepsilon} = (1 - \beta') \int_0^1 f_{n-(t+1)}^1(\alpha) d\alpha + \beta' \int_0^1 f_{n-(t+1)}^2(\alpha) d\alpha - P_p$$

4.6.3. Determinación de las primas cuando el interés de actualización viene dado a través de un único número borroso triangular para toda la duración del contrato

En este caso, los α -cortes de $\tilde{P}_p$, $P_{p\alpha}$, se obtiene sin más que sustituir $i^1(\alpha) = i^1 + (i^2 - i^1)\alpha$ en $f_t^2(\alpha)$, y $i^2(\alpha) = i^3 - (i^3 - i^2)\alpha$ en $f_t^1(\alpha)$, de forma que:

$$P_{p_\alpha} = \left[\sum_{t=0}^{n-1} (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-(t+1)} {}_tq_x + (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-n} {}_np_x, \right. \\ \left. \sum_{t=0}^{n-1} (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-(t+1)} {}_tq_x + (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-n} {}_np_x \right]$$

De esta forma, P_p se calcula para un β dado como:

$$P_p = (1 - \beta) \left[\sum_{t=0}^{n-1} {}_tq_x \int_0^1 (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-(t+1)} d\alpha + {}_np_x \int_0^1 (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-n} d\alpha \right] + \\ + \beta \left[\sum_{t=0}^{n-1} {}_tq_x \int_0^1 (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-(t+1)} d\alpha + {}_np_x \int_0^1 (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-n} d\alpha \right] = \\ = (1 - \beta) \left[\frac{\ln \frac{1 + i^3}{1 + i^2}}{i^3 - i^2} {}_0q_x + \sum_{t=1}^{n-1} \frac{(1 + i^2)^{-t} - (1 + i^3)^{-t}}{t(i^3 - i^2)} {}_tq_x + \frac{(1 + i^2)^{-n+1} - (1 + i^3)^{-n+1}}{(n-1)(i^3 - i^2)} {}_np_x \right] + \\ + \beta \left[\frac{\ln \frac{1 + i^2}{1 + i^1}}{i^2 - i^1} {}_0q_x + \sum_{t=1}^{n-1} \frac{(1 + i^1)^{-t} - (1 + i^2)^{-t}}{t(i^2 - i^1)} {}_tq_x + \frac{(1 + i^1)^{-n+1} - (1 + i^2)^{-n+1}}{(n-1)(i^2 - i^1)} {}_np_x \right]$$

En este caso, las funciones de distribución inferior y superior para un nivel α prefijado, vendrán dadas por:

$$F^1[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-n} - P_p \\ n-1 p_x & \text{si } (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-n} - P_p \leq X < (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-(n-1)} - P_p \\ n-1 p_x + \sum_{r=1}^t n-1-r q_x & \text{si } (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-(n-t)} - P_p \leq X < (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-(n-(t+1))} - P_p, t=1, \dots, n-2 \\ 1 & \text{si } X \geq (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-1} - P_p \end{cases}$$

$$F^2[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-n} - P_p \\ n-1 p_x & \text{si } (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-n} - P_p \leq X < (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-(n-1)} - P_p \\ n-1 p_x + \sum_{r=1}^t n-1-r q_x & \text{si } (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-(n-t)} - P_p \leq X < (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-(n-(t+1))} - P_p, t=1, \dots, n-2 \\ 1 & \text{si } X \geq (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-1} - P_p \end{cases}$$

Así, la expresión de los α -cortes del $1-\varepsilon$ cuantil borroso, $\tilde{Q}^\varepsilon$, el cual acumula a su izquierda una probabilidad al menos igual a $1-\varepsilon$, vendrá dado por:

- Si $0 < 1-\varepsilon \leq n-1 p_x$, $Q_\alpha^\varepsilon = \left[(1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-n}, (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-n} \right] - P_p$
- Si $n-1 p_x < 1-\varepsilon \leq n-1 p_x + n-2 q_x$,
 $Q_\alpha^\varepsilon = \left[(1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-n+1}, (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-n+1} \right] - P_p$
- Si $n-1 p_x + \sum_{r=0}^t n-1-r q_x < 1-\varepsilon \leq n-1 p_x + \sum_{r=0}^{t+1} n-1-r q_x$,
 $Q_\alpha^\varepsilon = \left[(1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-(n-(t+1))}, (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-(n-(t+1))} \right] - P_p$ donde $t \in \{1, \dots, n-2\}$. Si $n-2 < 1, \{1, \dots, n-2\}$ es vacío.

Siendo por tanto, el recargo de seguridad cierto a repercutir, Q^ε , de forma que se obtenga a un nivel ε de estabilidad, y para un parámetro β' prefijado:

- Si $0 < 1-\varepsilon \leq n-1 p_x$:

$$Q^\varepsilon = (1 - \beta') \int_0^1 (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-n} d\alpha + \beta' \int_0^1 (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-n} d\alpha - P_p =$$

$$= (1 - \beta') \frac{(1 + i^2)^{-n+1} - (1 + i^3)^{-n+1}}{(n-1)(i^3 - i^2)} + \beta' \frac{(1 + i^1)^{-n+1} - (1 + i^2)^{-n+1}}{(n-1)(i^2 - i^1)} - P_p$$
- Si $n-1 p_x < 1-\varepsilon \leq n-1 p_x + n-2 q_x$:

$$Q^{\varepsilon} = (1 - \beta') \int_0^1 (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-n+1} d\alpha + \beta' \int_0^1 (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-n+1} d\alpha - P_p =$$

en este caso, deberemos realizar dos supuestos. En primer lugar, si $n > 2$, se observa que:

$$Q^{\varepsilon} = (1 - \beta') \frac{(1 + i^2)^{-n+2} - (1 + i^3)^{-n+2}}{(n-2)(i^3 - i^2)} + \beta' \frac{(1 + i^1)^{-n+2} - (1 + i^2)^{-n+2}}{(n-2)(i^2 - i^1)} - P_p$$

y en cambio, si $n=2$:

$$Q^{\varepsilon} = (1 - \beta') \frac{\ln \frac{1 + i^3}{1 + i^2}}{i^3 - i^2} + \beta' \frac{\ln \frac{1 + i^2}{1 + i^1}}{i^2 - i^1} - P_p$$

- Si ${}_n p_x + \sum_{r=1}^t {}_{n-1-r|} q_x < 1 - \varepsilon \leq {}_n p_x + \sum_{r=1}^{t+1} {}_{n-1-r|} q_x$, para $t \in \{1, \dots, n-3\}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} Q^{\varepsilon} &= (1 - \beta') \int_0^1 (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-n+t+1} d\alpha + \beta' \int_0^1 (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-n+t+1} d\alpha - P_p = \\ &= (1 - \beta') \frac{(1 + i^2)^{-n+t+2} - (1 + i^3)^{-n+t+2}}{(n-t-2)(i^3 - i^2)} + \beta' \frac{(1 + i^1)^{-n+t+2} - (1 + i^2)^{-n+t+2}}{(n-t-2)(i^2 - i^1)} - P_p \end{aligned}$$

donde para $n-3 < 1$, $\{1, \dots, n-3\}$ es un conjunto vacío.

Y para Q^{ε} tal que ${}_n p_x + \sum_{r=1}^{n-2} {}_{n-1-r|} q_x < 1 - \varepsilon \leq {}_n p_x + \sum_{r=1}^{n-1} {}_{n-1-r|} q_x$, es decir, para $t=n-2$ entonces el

resultado es:

$$\begin{aligned} Q^{\varepsilon} &= (1 - \beta') \int_0^1 (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-1} d\alpha + \beta' \int_0^1 (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-1} d\alpha - P_p = \\ &= (1 - \beta') \frac{\ln \frac{1 + i^3}{1 + i^2}}{i^3 - i^2} + \beta' \frac{\ln \frac{1 + i^2}{1 + i^1}}{i^2 - i^1} - P_p \end{aligned}$$

aunque este supuesto no será considerado para $n-2 < 1$.

4.6.4. Aplicación numérica

Analicemos un seguro mixto con una cuantía asegurada en todos los casos de 1000 u.m. si el asegurado tiene 35 años, su duración es 10 años, y se utilizan las bases técnicas de siempre. Es

inmediato comprobar que la prima pura borrosa es $\tilde{P}_p = {}_{10}\tilde{A}_{35} + {}_{10}\tilde{E}_{45}$, por lo que los α -cortes $P_{p\alpha}$ se hallan como:

$$P_{p\alpha} = \left[1000 \cdot \left(\sum_{t=0}^9 (1'05 - 0'02\alpha)^{-(t+1)} {}_{t|}q_{35} + (1'05 - 0'02\alpha)^{-10} {}_{10}p_{35} \right) \right. \\ \left. 1000 \cdot \left(\sum_{t=0}^9 (1'02 + 0'01\alpha)^{-(t+1)} {}_{t|}q_{35} + (1'02 + 0'01\alpha)^{-10} {}_{10}p_{35} \right) \right]$$

y, entonces, para un parámetro β dado P_p , es:

$$P_p = (1 - \beta)678,95 + \beta 783,10$$

Si como siempre tomamos $\beta = 0'75$, $P_p = 757,06$.

De esta forma, la función pérdida $\tilde{L}_p$ vendrá dada por la función pérdida inferior, $L_p^1(\alpha)$ y superior $L_p^2(\alpha)$, siendo éstas respectivamente:

$$L_p^1(\alpha) = \begin{cases} 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-10} - 757'06 & \text{con } {}_9p_{35} \\ 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-10+(t+1)} - 757'06 & \text{con } {}_{8-t|}q_{35}, t = 1, \dots, 8 \end{cases}$$

y,

$$L_p^2(\alpha) = \begin{cases} 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-10} - 757'06 & \text{con } {}_9p_{35} \\ 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-10+(t+1)} - 757'06 & \text{con } {}_{8-t|}q_{35}, t = 1, \dots, 8 \end{cases}$$

De esta forma, las funciones de distribución inferior y superior para un nivel de presunción α dado, $F^1[X](\alpha)$ y $F^2[X](\alpha)$, son:

$$F^1[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-10} - 757'06 \\ {}_9p_{35} & \text{si } 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-10} - 757'06 \leq X < \\ & < 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-9} - 757'06 \\ {}_9p_{35} + \sum_{r=1}^t {}_{9-r|}q_{35} & \text{si } 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-10+t} - 757'06 \leq X < \\ & < 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-10+(t+1)} - 757'06, t = 1, \dots, 8 \\ 1 & X \geq 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-1} - 757'06 \end{cases},$$

y,

$$F^2[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-10} - 757'06 \\ {}_9p_{35} & \text{si } 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-10} - 757'06 \leq X < \\ & < 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-9} - 757'06 \\ {}_9p_{35} + \sum_{r=1}^t {}_{9-r|}q_{35} & \text{si } 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-10+t} - 757'06 \leq X < \\ & < 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-10+(t+1)} - 757'06, t=1,\dots,8 \\ 1 & X \geq 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-1} - 757'06 \end{cases}$$

Así, la probabilidad de que la prima pura calculada sea suficiente, puede ser analizada a través de $\tilde{F}[0]$. Su función de pertenencia corresponde a la de un número borroso discreto cuyas realizaciones son:

x	0,9830	0,9856	0,9880	0,9902	0,9922
$\mu(x)$	1,00	0,93	0,73	0,47	0,13

Respecto a la expresión de los α -cortes de $\tilde{Q}^\varepsilon$, Q_α^ε , éstos se obtiene, dependiendo del nivel ε de solvencia que busquemos:

- Si $0 < 1 - \varepsilon \leq {}_9p_{35}$, $Q_\alpha^\varepsilon = [1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-10}, 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-10}] - 757'06$
- Si ${}_9p_{35} < 1 - \varepsilon \leq {}_9p_{35} + {}_8q_{35}$:
 $Q_\alpha^\varepsilon = [1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-9}, 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-9}] - 757'06$
- Si ${}_9p_{35} + \sum_{r=1}^t {}_{9-r|}q_{35} < 1 - \varepsilon \leq {}_9p_{35} + \sum_{r=1}^{t+1} {}_{9-r|}q_{35}$, $t \in \{1, \dots, 8\}$:
 $Q_\alpha^\varepsilon = [1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-10+(t+1)}, 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-10+(t+1)}] - 757'06$

Así, los α -cortes de $\tilde{Q}^{0'1}$, $\tilde{Q}^{0'05}$ y $\tilde{Q}^{0'01}$, que son los valores que teóricamente reducen la probabilidad de insuficiencia de la prima finalmente repercutida al 10%, 5% y 1% respectivamente, son:

$$Q_\alpha^{0'05} = Q_\alpha^{0'1} = [1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-10}, 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-10}] - 757'06$$

$$Q_\alpha^{0'01} = [1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-7}, 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-7}] - 757'06$$

Obsérvese que en este caso, para asegurar una probabilidad de insolvencia del 10% o del 5% el recargo a aplicar es igual. Ello es debido a que, en este supuesto, se considera en la fijación de la prima final el escenario más favorable, es decir, que las 1.000 unidades monetarias son satisfechas por el asegurador dentro de 10 años, suceso que acumula una probabilidad superior al 95%. Por esa misma razón, dicho recargo es negativo, ya que la prima pura es superior al valor de las prestaciones asociadas al suceso más favorable para el asegurador -el valor actual de la prestación a satisfacer es menor-, escenario que asimismo acumula más del 95% de probabilidad.

Asimismo, el valor de $Q^{0'1}$, $Q^{0'05}$ y $Q^{0'01}$, con $\beta' = 0'75$, y la prima recargada con el porcentaje que el recargo implica sobre la prima pura, la desviación estándar y la varianza de $\tilde{L}_p$ vienen dados en el siguiente cuadro:

ε	Q^ε	P_R	P_P	$V^*[L_P]$	$D^*[L_P]$
0'01	64,17	821,23	8,48%	21,68%	372,87%
0'05/0'1	-1,73	755,33	-0,23%	-0,58%	-10,05%

Damos a continuación las expresiones de $\mu_{\tilde{F}[-1'73]}(x)$ y $\mu_{\tilde{F}[64'17]}(x)$, permitiéndonos estas funciones de pertenencia hallar la probabilidad de que no haya pérdidas en el caso en que se repercute sobre la prima pura cada uno de los recargos hallados anteriormente:

$Q^{0'1}=Q^{0'05}=-1'73$		$Q^{0'01}=64'17$	
x	$\mu(x)$	x	$\mu(x)$
0,9830	1,00	0,9940	0,49
0,9856	0,92	0,9922	0,83
0,9880	0,72	0,9902	1,00
0,9902	0,45	0,9880	0,49
0,9922	0,11	0,9856	0,21

4.7. ANÁLISIS DE LAS RENTAS VITALICIAS ANTICIPADAS

4.7.1. Determinación de la prima pura única

En este caso, para una prima única borrosa, $\tilde{P}$, el valor actual de la pérdida para el asegurador correspondiente a una póliza viene dada por la variable borroso aleatoria:

$$\tilde{L} = \begin{cases} 0 - \tilde{P} & \text{con } {}_d q_x \\ {}_{d|}\tilde{a}_{\overline{t-d+1}|} - \tilde{P} & \text{con } {}_{t|} q_x \end{cases} \quad t = d, d+1, \dots, w-x-1$$

Y como siempre, planteando $\tilde{E}[L] = 0$, obtenemos la prima pura única borrosa, que en este caso es $\tilde{P}_p = {}_{d|}\tilde{a}_x$. De esta forma, $P_{p\alpha}$ será:

$$P_{p\alpha} = {}_{d|}\ddot{a}_{x\alpha} = \left[{}_{d|}\ddot{a}_x^1(\alpha), {}_{d|}\ddot{a}_x^2(\alpha) \right]$$

Así, para un β dado, P_p se calculará como:

$$EV[\tilde{P}_p, \beta] = P_p = (1-\beta) \int_0^1 {}_{d|}\ddot{a}_x^1(\alpha) d\alpha + \beta \int_0^1 {}_{d|}\ddot{a}_x^2(\alpha) d\alpha =$$

$$\begin{aligned}
 &= (1-\beta) \int_0^1 \left[\sum_{t=d}^{w-x-1} {}_tE_x^1(\alpha) \right] d\alpha + \beta \int_0^1 \left[\sum_{t=d}^{w-x-1} {}_tE_x^2(\alpha) \right] d\alpha = \\
 &= (1-\beta) \left[\sum_{t=d}^{w-x-1} {}_tP_x \int_0^1 f_t^1(\alpha) d\alpha \right] + \beta \left[\sum_{t=d}^{w-x-1} {}_tP_x \int_0^1 f_t^2(\alpha) d\alpha \right]
 \end{aligned}$$

4.7.2. Análisis de la función de distribución y los cuantiles de la variable borroso aleatoria pérdida si se cobra la prima pura única

La variable borroso aleatoria pérdida $\tilde{L}_p$ vendrá caracterizada, para un nivel α , por una variable aleatoria inferior y por una variable aleatoria superior las cuales, si ordenamos sus realizaciones en orden creciente, presentan la siguiente forma:

$$L_p^i(\alpha) = \begin{cases} 0 - P_p & \text{con } {}_dP_x \\ \ddot{a}_{\overline{t-d+1}|}^i(\alpha) - P_p & \text{con } {}_tq_x, t = d, d+1, \dots, w-x-1 \end{cases} \quad i=1,2.$$

Asimismo, para un nivel α , la función de distribución $\tilde{F}[X]$ vendrá dada por la función de distribución inferior, $F^1[X](\alpha)$ y la superior $F^2[X](\alpha)$, de forma que para $i=1,2$ toman la siguiente forma:

$$F^{3-i}[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -P_p \\ {}_dq_x & \text{si } -P_p \leq X < f_d^i(\alpha) - P_p \\ {}_dq_x + \sum_{r=d}^t {}_r q_x & \text{si } \ddot{a}_{\overline{t-d+1}|}^i(\alpha) - P_p \leq X < \ddot{a}_{\overline{t-d+2}|}^i(\alpha) - P_p, t = d, \dots, w-x-2 \\ 1 & X \geq \ddot{a}_{\overline{w-x-d}|}^i(\alpha) - P_p \end{cases}$$

Asimismo, el $1-\varepsilon$ percentil de $\tilde{L}_p$, presentará los siguientes α -cortes, en cada uno de los niveles ε para los que se analice la solvencia:

- Si $0 < 1-\varepsilon \leq {}_dq_x$, $Q_\alpha^\varepsilon = [-P_p, -P_p]$, es decir, es el número crisp P_p .
- Si ${}_dq_x < 1-\varepsilon \leq {}_dq_x + {}_d q_x$, $Q_\alpha^\varepsilon = [f_d^1(\alpha), f_d^2(\alpha)] - P_p$
- Si ${}_dq_x + \sum_{r=d}^t {}_r q_x < 1-\varepsilon \leq {}_dq_x + \sum_{r=d}^{t+1} {}_r q_x$, $Q_\alpha^\varepsilon = [\ddot{a}_{\overline{(t+1)-d+1}|}^1(\alpha), \ddot{a}_{\overline{(t+1)-d+1}|}^2(\alpha)] - P_p$, donde $t \in \{d, d+1, \dots, w-x-2\}$

De esta forma, el recargo cierto a aplicar, Q^ε , de forma que quede asegurado un nivel de solvencia ε , vendrá dado, para una aversión al riesgo β' , si $0 < 1-\varepsilon \leq {}_dq_x$,

$$Q^\varepsilon = -P_p$$

Si ${}_d q_x < 1 - \varepsilon \leq {}_d q_x + {}_d | q_x$:

$$Q^\varepsilon = (1 - \beta') \int_0^1 f_d^1(\alpha) d\alpha + \beta' \int_0^1 f_d^2(\alpha) d\alpha - P_p$$

Asimismo, si buscamos Q^ε tal que ${}_d q_x + \sum_{r=d}^t {}_r | q_x < 1 - \varepsilon \leq {}_d q_x + \sum_{r=d}^{t+1} {}_r | q_x$ para $t \in \{d, \dots, w-x-2\}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} Q^\varepsilon &= (1 - \beta') \int_0^1 {}_d | \ddot{a}_{\overline{(t+1)-d+1}|}^1(\alpha) d\alpha + \beta' \int_0^1 {}_d | \ddot{a}_{\overline{(t+1)-d+1}|}^2(\alpha) d\alpha - P_p = (1 - \beta') \int_0^1 \sum_{r=d}^{t+1} f_r^1(\alpha) d\alpha + \\ &+ \beta' \int_0^1 \sum_{r=d}^{t+1} f_r^2(\alpha) d\alpha - P_p = (1 - \beta') \sum_{r=d}^{t+1} \int_0^1 f_r^1(\alpha) d\alpha + \beta' \sum_{r=d}^{t+1} \int_0^1 f_r^2(\alpha) d\alpha - P_p \end{aligned}$$

4.7.3. Determinación de las primas cuando el interés de actualización viene dado a través de un único número borroso triangular para toda la duración del contrato

La prima pura borrosa $\tilde{P}_p$, se obtiene, como siempre, planteando $\tilde{E}[L] = 0$, sus α -cortes $P_{p\alpha}$, serán entonces:

$$P_{p\alpha} = \left[\sum_{t=d}^{w-x-1} \left(1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha \right)^{-t} {}_t p_x, \sum_{t=d}^{w-x-1} \left(1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha \right)^{-t} {}_t p_x \right]$$

De esta forma, su valor cierto, P_p , se hallará para un α para un valor β dado como:

$$P_p = (1 - \beta) \sum_{t=d}^{w-x-1} {}_t p_x \int_0^1 (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-t} d\alpha + \beta \sum_{t=d}^{w-x-1} {}_t p_x \int_0^1 (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-t} d\alpha$$

Para hallar la expresión analítica de P_p deberemos tener en cuenta tres supuestos:

a) Si $d=0$, la renta es vitalicia, inmediata y anticipada:

$$\begin{aligned} P_p &= 1 + (1 - \beta) \left[\frac{\ln \frac{1+i^3}{1+i^2}}{i^3 - i^2} {}_1 p_x + \sum_{t=2}^{w-x-1} \frac{(1+i^2)^{-t+1} - (1+i^3)^{-t+1}}{(t-1)(i^3 - i^2)} {}_t p_x \right] + \\ &+ \beta \left[\frac{\ln \frac{1+i^2}{1+i^1}}{i^2 - i^1} {}_1 p_x + \sum_{t=2}^{w-x-1} \frac{(1+i^1)^{-t+1} - (1+i^2)^{-t+1}}{(t-1)(i^2 - i^1)} {}_t p_x \right] \end{aligned}$$

b) Si $d=1$, siendo en este caso una renta inmediata y vencida:

$$P_p = (1 - \beta) \left[\frac{\ln \frac{1+i^3}{1+i^2}}{i^3 - i^2} {}_1p_x + \sum_{t=2}^{w-x-1} \frac{(1+i^2)^{-t+1} - (1+i^3)^{-t+1}}{(t-1)(i^3 - i^2)} {}_tp_x \right] +$$

$$+ \beta \left[\frac{\ln \frac{1+i^2}{1+i^1}}{i^2 - i^1} {}_1p_x + \sum_{t=2}^{w-x-1} \frac{(1+i^1)^{-t+1} - (1+i^2)^{-t+1}}{(t-1)(i^2 - i^1)} {}_tp_x \right]$$

c) Y si $d \geq 2$, se obtiene entonces:

$$P_p = \left[(1 - \beta) \sum_{t=d}^{w-x-1} \frac{(1+i^2)^{-t+1} - (1+i^3)^{-t+1}}{(t-1)(i^3 - i^2)} + \beta \sum_{t=d}^{w-x-1} \frac{(1+i^1)^{-t+1} - (1+i^2)^{-t+1}}{(t-1)(i^2 - i^1)} \right] {}_tp_x$$

Respecto a la función de distribución de $\tilde{L}_p$, si las realizaciones han sido ordenadas en forma creciente, la función de distribución inferior y superior son, para un α dado:

$$F^1[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -P_p \\ {}_dq_x & \text{si } -P_p \leq X < (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-d} - P_p \\ {}_dq_x + \sum_{r=d}^t {}_r|q_x & \text{si } {}_d|\ddot{a}_{\overline{t-d+1}|i^1+(i^2-i^1)\alpha} - P_p \leq X \\ 1 & \text{si } X \geq {}_d|\ddot{a}_{\overline{t-d+2}|i^1+(i^2-i^1)\alpha} - P_p, t = d, \dots, w-x-2 \end{cases}$$

$$F^2[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -P_p \\ {}_dq_x & \text{si } -P_p \leq X < (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-d} - P_p \\ {}_dq_x + \sum_{r=d}^t {}_r|q_x & \text{si } {}_d|\ddot{a}_{\overline{t-d+1}|i^3-(i^3-i^2)\alpha} - P_p \leq X \\ 1 & \text{si } X \geq {}_d|\ddot{a}_{\overline{t-d+2}|i^3-(i^3-i^2)\alpha} - P_p, t = d, \dots, w-x-2 \end{cases}$$

Obteniéndose entonces los cuantiles de $\tilde{L}_p$, $\tilde{Q}^\varepsilon$, a través de sus α -cortes como:

- Si $0 < 1 - \varepsilon \leq {}_dq_x$, $Q_\alpha^\varepsilon = [-P_p, -P_p]$, es decir, $-P_p$.

- Si ${}_dq_x < 1 - \varepsilon \leq {}_dq_x + {}_d|q_x$,

$$Q_\alpha^\varepsilon = \left[(1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-d}, (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-d} \right] - P_p$$

- Si ${}_dq_x + \sum_{r=d}^t {}_r|q_x < 1 - \varepsilon \leq {}_dq_x + \sum_{r=d}^{t+1} {}_r|q_x$, donde $t \in \{d, d+1, \dots, w-x-2\}$

$$Q_{\alpha}^{\varepsilon} = \left[{}^d\ddot{a}_{\overline{(t+1)-d+1}|i^3-(i^3-i^2)\alpha} : {}^d\ddot{a}_{\overline{(t+1)-d+1}|i^1+(i^2-i^1)\alpha} \right] - P_p$$

Siendo por tanto, el recargo de seguridad cierto a repercutir, Q^{ε} , de forma que se obtenga un nivel ε de estabilidad, se halla, para un parámetro β' prefijado como:

- Si $0 < 1 - \varepsilon \leq {}^d q_x$: $-P_p$

- Si ${}^d q_x < 1 - \varepsilon \leq {}^d q_x + {}^d q_x$,

$$Q^{\varepsilon} = (1 - \beta') \int_0^1 (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-d} d\alpha + \beta' \int_0^1 (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-d} d\alpha - P_p$$

Debiéndose contemplar en esta circunstancia tres casos posibles:

a) Si $d=0$, $Q^{\varepsilon} = 1 - P_p$

b) Si $d=1$:

$$Q^{\varepsilon} = (1 - \beta') \frac{\ln \frac{1+i^3}{1+i^2}}{i^3 - i^2} + \beta' \frac{\ln \frac{1+i^2}{1+i^1}}{i^2 - i^1} - P_p$$

c) Si $d \geq 2$:

$$Q^{\varepsilon} = (1 - \beta') \frac{(1+i^2)^{-d+1} - (1+i^3)^{-d+1}}{(d-1)(i^3 - i^2)} + \beta' \frac{(1+i^1)^{-d+1} - (1+i^2)^{-d+1}}{(d-1)(i^2 - i^1)} - P_p$$

- Si ${}^d q_x + \sum_{r=d}^t {}^r q_x < 1 - \varepsilon \leq {}^d q_x + \sum_{r=d}^{t+1} {}^r q_x$, para $t \in \{d, d+1, \dots, w-x-2\}$, se obtiene:

$$Q^{\varepsilon} = (1 - \beta') \sum_{r=d}^{t+1} \int_0^1 (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-r} d\alpha + \beta' \sum_{r=d}^{t+1} \int_0^1 (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-r} d\alpha - P_p$$

Debiéndose contemplar asimismo, tres casos:

a) Si $d=0$:

$$Q^{\varepsilon} = 1 + (1 - \beta') \left[\frac{\ln \frac{1+i^3}{1+i^2}}{i^3 - i^2} + \sum_{r=2}^{t+1} \frac{(1+i^2)^{-r+1} - (1+i^3)^{-r+1}}{(r-1)(i^3 - i^2)} \right] +$$

$$+ \beta' \left[\frac{\ln \frac{1+i^2}{1+i^1}}{i^2 - i^1} + \sum_{r=2}^{t+1} \frac{(1+i^1)^{-r+1} - (1+i^2)^{-r+1}}{(r-1)(i^2 - i^1)} \right] - P_p$$

b) Si $d=1$:

$$Q^e = (1 - \beta') \left[\frac{\ln \frac{1+i^3}{1+i^2}}{i^3 - i^2} + \sum_{r=2}^{t+1} \frac{(1+i^2)^{-r+1} - (1+i^3)^{-r+1}}{(r-1)(i^3 - i^2)} \right] +$$

$$+ \beta' \left[\frac{\ln \frac{1+i^2}{1+i^1}}{i^2 - i^1} + \sum_{r=2}^{t+1} \frac{(1+i^1)^{-r+1} - (1+i^2)^{-r+1}}{(r-1)(i^2 - i^1)} \right] - P_p$$

c) Y si $d \geq 2$, se obtiene entonces:

$$Q^e = (1 - \beta') \sum_{r=d}^{t+1} \frac{(1+i^2)^{-r+1} - (1+i^3)^{-r+1}}{(r-1)(i^3 - i^2)} + \beta' \sum_{r=d}^{t+1} \frac{(1+i^1)^{-r+1} - (1+i^2)^{-r+1}}{(r-1)(i^2 - i^1)} - P_p$$

4.7.4. Aplicación numérica

En este epígrafe ejemplificamos las cuestiones analizadas en los apartados anteriores si el asegurado tiene 45 años y suscribe una renta inmediata ($d=0$), vitalicia y anticipada de 100 unidades monetarias y usándose las bases técnicas de siempre. Es inmediato comprobar que la prima pura borrosa es $\tilde{P}_p = \tilde{a}_{45}$, por lo que los α -cortes $P_{p\alpha}$ son:

$$P_{p\alpha} = \left[100 \cdot \sum_{t=0}^{69} (1'05 - 0'02\alpha)^{-t} {}_t p_{45}, 100 \cdot \sum_{t=0}^{69} (1'02 + 0'01\alpha)^{-t} {}_t p_{45} \right]$$

y, entonces, P_p se hallará para una β determinada como:

$$P_p = (1-\beta)1838,36 + \beta 2251,30$$

Y si tomamos como en anteriores aplicaciones $\beta = 0'75$, se obtiene $P_p = 2148,06$.

La función pérdida $\tilde{L}_p$, vendrá dada para un nivel α dado, por la función de pérdida inferior $L_p^1(\alpha)$ y superior $L_p^2(\alpha)$. Si las realizaciones han sido ordenadas en orden creciente, éstos toman la siguiente forma:

$$L_p^1(\alpha) = 100 \cdot \ddot{a}_{t+1|0'05-0'02\alpha} - 2148'06 \text{ con } {}_t|q_{45}, t = 0, 1, \dots, 69$$

y,

$$L_p^2(\alpha) = 100 \cdot \ddot{a}_{t+1|0'02+0'01\alpha} - 2148'06 \text{ con } {}_t|q_{45}, t = 0, 1, \dots, 69$$

De esta forma, $F^1[X](\alpha)$ y $F^2[X](\alpha)$ se hallan a partir de $L_p^1(\alpha)$ y $L_p^2(\alpha)$ respectivamente, siendo el rendimiento que se obtiene:

$$F^1[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 100 - 2148'06 \\ \sum_{r=0}^t r! q_{45} & \text{si } 100\ddot{a}_{\overline{t+1}|0'02+0'01\alpha} - 2148'06 \leq X < 100\ddot{a}_{\overline{t+2}|0'02+0'01\alpha} - 2148'06, t = 0, \dots, 68 \\ 1 & \text{si } 100\ddot{a}_{\overline{70}|0'02+0'01\alpha} - 2148'06 \leq X \end{cases}$$

y,

$$F^2[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 100 - 2148'06 \\ \sum_{r=0}^t r! q_{45} & \text{si } 100\ddot{a}_{\overline{t+1}|0'05-0'02\alpha} - 2148'06 \leq X < 100\ddot{a}_{\overline{t+2}|0'05-0'02\alpha} - 2148'06, t = 0, \dots, 68 \\ 1 & \text{si } 100\ddot{a}_{\overline{70}|0'05-0'02\alpha} - 2148'06 \leq X \end{cases}$$

Obtenemos a continuación los α -cortes de $\tilde{F}[0]$ en una escala endecadaria, de forma que hallar su función de pertenencia, al menos de forma aproximada, sería inmediato a través de éstos:

α	$F^1[0](\alpha)$	$F^2[0](\alpha)$
0	0,2892	1
0,1	0,3134	1
0,2	0,3134	1
0,3	0,3392	0,9900
0,4	0,3392	0,9291
0,5	0,3666	0,8348
0,6	0,3666	0,7388
0,7	0,3955	0,6320
0,8	0,3955	0,5600
0,9	0,4258	0,4907
1	0,4576	0,4576

Respecto a la expresión de los α -cortes de $\tilde{Q}^\varepsilon$, Q_α^ε dependiendo de la probabilidad de pérdida ε que fijemos, se obtiene:

- Si $0 < 1 - \varepsilon \leq {}_1q_{45}$, $Q_\alpha^\varepsilon = [100, 100] - 2148'06 = -2.048'06$.
- Si $\sum_{r=0}^t r! q_{45} < 1 - \varepsilon \leq \sum_{r=0}^{t+1} r! q_{45}$, $Q_\alpha^\varepsilon = \left[100 \cdot \ddot{a}_{\overline{t+1}|0'05-0'02\alpha}, 100 \cdot \ddot{a}_{\overline{t+2}|0'02+0'01\alpha} \right] - 2148'06$, donde $t \in \{1, \dots, 69\}$

Así, los α -cortes de $\tilde{Q}^{0'1}$, $\tilde{Q}^{0'05}$ y $\tilde{Q}^{0'01}$, que son los valores del recargo a aplicar para fijar la probabilidad de insolvencia del asegurador al 10%, 5% y 1% son respectivamente:

$$Q_{\alpha}^{0'1} = \left[100 \cdot \ddot{a}_{\overline{48|0'05-0'02\alpha}}^{-}, 100 \cdot \ddot{a}_{\overline{48|0'02+0'01\alpha}}^{-} \right] - 2148'06$$

$$Q_{\alpha}^{0'05} = \left[100 \cdot \ddot{a}_{\overline{51|0'05-0'02\alpha}}^{-}, 100 \cdot \ddot{a}_{\overline{51|0'02+0'01\alpha}}^{-} \right] - 2148'06$$

$$Q_{\alpha}^{0'01} = \left[100 \cdot \ddot{a}_{\overline{55|0'05-0'02\alpha}}^{-}, 100 \cdot \ddot{a}_{\overline{55|0'02+0'01\alpha}}^{-} \right] - 2148'06$$

Asimismo, el valor de $Q^{0'1}$, $Q^{0'05}$ y $Q^{0'01}$, con $\beta' = 0'75$, la prima recargada asociada y el porcentaje que ésta representa sobre la prima pura, la desviación estándar y la varianza vienen dados en el siguiente cuadro:

ε	Q^{ε}	P_R	P_P	$V^*[L_P]$	$D^*[L_P]$
0'1	546,59	2694,65	22,45%	0,20%	103,33%
0'05	625,76	2773,82	25,70%	0,22%	118,30%
0'01	722,09	2870,15	29,66%	0,26%	136,51%

A continuación damos el valor de las funciones de distribución inferiores y superiores en una escala endecadaria para los recargos que en cada caso se han establecido, es decir, $F[722'09]_{\alpha}$, $F[675'76]_{\alpha}$, $F[546,59]_{\alpha}$:

α	$F^1[546,59](\alpha)$	$F^2[546,59](\alpha)$	$F^1[675'76](\alpha)$	$F^2[675'76](\alpha)$	$F^1[722'09](\alpha)$	$F^2[722'09](\alpha)$
0	0,5958	1	0,6681	1	0,7388	1
0,1	0,6320	1	0,7039	1	0,7726	1
0,2	0,6681	1	0,7388	1	0,8348	1
0,3	0,7039	1	0,7726	1	0,8625	1
0,4	0,7726	1	0,8348	1	0,9098	1
0,5	0,8047	1	0,8625	1	0,9291	1
0,6	0,8348	1	0,9098	1	0,9591	1
0,7	0,8876	1	0,9455	1	0,9786	1
0,8	0,9098	1	0,9700	1	0,9935	1
0,9	0,9455	0,9975	0,9852	0,9999	0,9975	1
1	0,9700	0,9700	0,9935	0,9935	0,9997	0,9997

4.8. ANÁLISIS DE LAS RENTAS TEMPORALES ANTICIPADAS

4.8.1. Determinación de la prima pura única

Para una prima borrosa dada, el valor actual de la pérdida para el asegurador correspondiente a una renta temporal viene dada por:

$$\tilde{L} = \begin{cases} 0 - \tilde{P} & \text{con } {}_d q_x \\ {}_d \tilde{a}_{\overline{t-d+1|}} - \tilde{P} & \text{con } {}_t | q_x \\ {}_d \tilde{a}_{\overline{n|}} - \tilde{P} & \text{con } {}_{d+n} p_x \end{cases} \quad t = d, d+1, \dots, d+n-1$$

Y planteando $\tilde{E}[L]=0$, obtenemos la prima pura única borrosa, que será $\tilde{P}_p = {}_{d|n}\tilde{a}_x$. Así, obtenemos $P_{p\alpha}$ como:

$$P_{p\alpha} = {}_{d|n}\ddot{a}_{x\alpha} = \left[{}_{d|n}\ddot{a}_x^1(\alpha), {}_{d|n}\ddot{a}_x^2(\alpha) \right]$$

De forma que las cuestiones analizadas en el apartado 3.8. para ${}_{d|n}\tilde{a}_x$ son aplicables, por supuesto, a $\tilde{P}_p$.

Para un β dado, la prima pura P_p se calculará de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} EV[\tilde{P}_p, \beta] &= P_p = (1-\beta) \int_0^1 {}_{d|n}\ddot{a}_x^1(\alpha) d\alpha + \beta \int_0^1 {}_{d|n}\ddot{a}_x^2(\alpha) d\alpha = \\ &= (1-\beta) \int_0^1 \left[\sum_{t=d}^{d+n-1} {}_tE_x^1(\alpha) \right] d\alpha + \beta \int_0^1 \left[\sum_{t=d}^{d+n-1} {}_tE_x^2(\alpha) \right] d\alpha = \\ &= (1-\beta) \left[\sum_{t=d}^{d+n-1} {}_tP_x \int_0^1 f_t^1(\alpha) d\alpha \right] + \beta \left[\sum_{t=d}^{d+n-1} {}_tP_x \int_0^1 f_t^2(\alpha) d\alpha \right] \end{aligned}$$

4.8.2. Análisis de la función de distribución y los cuantiles de la variable borroso aleatoria pérdida si se cobra la prima pura única

En este caso, la variable borroso aleatoria pérdida $\tilde{L}_p$ vendrá caracterizada, tomándose un nivel de verdad α , por una variable aleatoria inferior y por una variable aleatoria superior las cuales, si ordenamos sus realizaciones de la forma acostumbrada, toman la siguiente forma:

$$L_p^i(\alpha) = \begin{cases} 0 - P_p & \text{con } {}_d q_x \\ \ddot{a}_{t-d+1|}^i(\alpha) - P_p & \text{con } {}_t|q_x, t = d, d+1, \dots, d+n-2 \quad i=1,2. \\ \ddot{a}_{n|}^i(\alpha) - P_p & \text{con } {}_{d+n-1}p_x \end{cases}$$

A dicho nivel α , la función de distribución inferior, $F^1[X](\alpha)$ y la superior $F^2[X](\alpha)$ que definen a $F[X]_\alpha$ vienen dadas por la siguiente expresión, donde $i \in \{1,2\}$:

$$F^{3-i}[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -P_p \\ {}_d q_x & \text{si } -P_p \leq X < \ddot{a}_d^i(\alpha) - P_p \\ {}_d q_x + \sum_{r=d}^t {}_r|q_x & \text{si } {}_{d|}\ddot{a}_{t-d+1|}^i(\alpha) - P_p \leq X < {}_{d|}\ddot{a}_{t-d+2|}^i(\alpha) - P_p, t = d, \dots, d+n-2 \\ 1 & X \geq {}_{d|}\ddot{a}_{n|}^i(\alpha) - P_p \end{cases}$$

Asimismo, los α -cortes del $1-\varepsilon$ percentil, dependiendo del cuantil de $\tilde{L}_p$ en que nos encontremos, vendrán dados por:

- Si $0 < 1-\varepsilon \leq {}_d q_x$, $Q_\alpha^\varepsilon = [-P_p, -P_p]$, es decir, es el número crisp $-P_p$
- Si ${}_d q_x < 1-\varepsilon \leq {}_d q_x + {}_d | q_x$, $Q_\alpha^\varepsilon = [f_d^1(\alpha), f_d^2(\alpha)] - P_p$
- Si ${}_d q_x + \sum_{r=d}^t {}_r | q_x < 1-\varepsilon \leq {}_d q_x + \sum_{r=d}^{t+1} {}_r | q_x$, $Q_\alpha^\varepsilon = [\ddot{a}_{\frac{1}{t-d+2}|}(\alpha), \ddot{a}_{\frac{2}{t-d+2}|}(\alpha)] - P_p$, donde $t \in \{d, d+1, \dots, d+n-3\}$. Si $d+n-3 < d$, entonces $\{d, d+1, \dots, d+n-3\}$ es conjunto vacío.
- Si ${}_d q_x + \sum_{r=d}^{d+n-2} {}_r | q_x < 1-\varepsilon \leq 1$, $Q_\alpha^\varepsilon = [\ddot{a}_{\frac{1}{n}|}(\alpha), \ddot{a}_{\frac{2}{n}|}(\alpha)] - P_p$

De esta forma, Q^ε , vendrá dado para una aversión al riesgo de interés β' , como:

- Para $0 < 1-\varepsilon \leq {}_d q_x$,

$$Q^\varepsilon = -P_p$$

- Si ${}_d q_x < 1-\varepsilon \leq {}_d q_x + {}_d | q_x$

$$Q^\varepsilon = (1 - \beta') \int_0^1 f_d^1(\alpha) d\alpha + \beta' \int_0^1 f_d^2(\alpha) d\alpha - P_p$$

- Si ${}_d q_x + \sum_{r=d}^t {}_r | q_x < 1-\varepsilon \leq {}_d q_x + \sum_{r=d}^{t+1} {}_r | q_x$ para $t \in \{d, \dots, d+n-3\}$, se obtiene:

$$Q^\varepsilon = (1 - \beta') \int_0^1 \ddot{a}_{\frac{1}{t-d+2}|}(\alpha) d\alpha + \beta' \int_0^1 \ddot{a}_{\frac{2}{t-d+2}|}(\alpha) d\alpha - P_p = (1 - \beta') \int_0^1 \sum_{r=d}^{t+1} f_r^1(\alpha) d\alpha + \beta' \int_0^1 \sum_{r=d}^{t+1} f_r^2(\alpha) d\alpha - P_p = (1 - \beta') \sum_{r=d}^{t+1} \int_0^1 f_r^1(\alpha) d\alpha + \beta' \sum_{r=d}^{t+1} \int_0^1 f_r^2(\alpha) d\alpha - P_p$$

- Para ${}_d q_x + \sum_{r=d}^{d+n-2} {}_r | q_x < 1-\varepsilon \leq 1$:

$$Q^\varepsilon = (1 - \beta') \int_0^1 \ddot{a}_{\frac{1}{n}|}(\alpha) d\alpha + \beta' \int_0^1 \ddot{a}_{\frac{2}{n}|}(\alpha) d\alpha - P_p = (1 - \beta') \int_0^1 \sum_{r=d}^{d+n-1} f_r^1(\alpha) d\alpha + \beta' \int_0^1 \sum_{r=d}^{d+n-1} f_r^2(\alpha) d\alpha - P_p = (1 - \beta') \sum_{r=d}^{d+n-1} \int_0^1 f_r^1(\alpha) d\alpha + \beta' \sum_{r=d}^{d+n-1} \int_0^1 f_r^2(\alpha) d\alpha - P_p$$

4.8.3. Determinación de las primas cuando el interés de actualización viene dado a través de un único número borroso triangular para toda la duración del contrato

Respecto a los α -cortes de la prima borrosa, $\tilde{P}_p$, se hallan sin más que sustituir el extremo superior del α -corte del interés en el extremo inferior del factor de los factores de actualización y viceversa, de forma que se obtiene:

$$P_{p\alpha} = \left[\sum_{t=d}^{d+n-1} (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-t} {}_t p_x, \sum_{t=d}^{d+n-1} (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-t} {}_t p_x \right]$$

De esta forma, la prima única y ya desfuzzyficada es, para un valor β dado:

$$P_p = (1-\beta) \sum_{t=d}^{d+n-1} {}_t p_x \int_0^1 (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-t} d\alpha + \beta \sum_{t=0}^{d+n-1} {}_t p_x \int_0^1 (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-t} d\alpha$$

Como con las rentas vitalicias, deberemos considerar varios casos, dependiendo del diferimiento de la renta actuarial:

a) Si $d=0$, entonces:

$$P_p = 1 + (1-\beta) \left[\frac{\ln \frac{1+i^3}{1+i^2}}{i^3 - i^2} {}_1 p_x + \sum_{t=2}^{n-1} \frac{(1+i^2)^{-t+1} - (1+i^3)^{-t+1}}{(t-1)(i^3 - i^2)} {}_t p_x \right] +$$

$$+ \beta \left[\frac{\ln \frac{1+i^2}{1+i^1}}{i^2 - i^1} {}_1 p_x + \sum_{t=2}^{n-1} \frac{(1+i^1)^{-t+1} - (1+i^2)^{-t+1}}{(t-1)(i^2 - i^1)} {}_t p_x \right]$$

b) Para $d=1$ se obtendrá, por otra parte:

$$P_p = (1-\beta) \left[\frac{\ln \frac{1+i^3}{1+i^2}}{i^3 - i^2} {}_1 p_x + \sum_{t=2}^n \frac{(1+i^2)^{-t+1} - (1+i^3)^{-t+1}}{(t-1)(i^3 - i^2)} {}_t p_x \right] +$$

$$+ \beta \left[\frac{\ln \frac{1+i^2}{1+i^1}}{i^2 - i^1} {}_1 p_x + \sum_{t=2}^n \frac{(1+i^1)^{-t+1} - (1+i^2)^{-t+1}}{(t-1)(i^2 - i^1)} {}_t p_x \right]$$

c) Y finalmente, si $d \geq 2$ el resultado que se obtiene es:

$$P_p = (1 - \beta) \sum_{t=d}^{d+n-1} \frac{(1+i^2)^{-t+1} - (1+i^3)^{-t+1}}{(t-1)(i^3 - i^2)} {}_t p_x + \beta \sum_{t=d}^{d+n-1} \frac{(1+i^1)^{-t+1} - (1+i^2)^{-t+1}}{(t-1)(i^2 - i^1)} {}_t p_x$$

Tras construirse la variable borroso aleatoria $\tilde{L}_p$ para los niveles α que fueran precisos, y habiéndose ordenado de forma creciente sus realizaciones, la obtención de la función de distribución a través de sus α -cortes es inmediata. Las funciones de distribución inferior y superior vendrán dadas para un α prefijado por $F^1[X](\alpha)$ y $F^2[X](\alpha)$ que son:

$$F^1[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -P_p \\ {}_d q_x & \text{si } -P_p \leq X < (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-d} - P_p \\ {}_d q_x + \sum_{r=d}^t {}_r q_x & \text{si } {}_d | \ddot{a}_{\overline{t-d+1}|i^1 + (i^2 - i^1)\alpha} - P_p \leq X \\ & < {}_d | \ddot{a}_{\overline{t-d+2}|i^1 + (i^2 - i^1)\alpha} - P_p, t = d, \dots, d+n-2 \\ 1 & \text{si } X \geq {}_d | \ddot{a}_{\overline{n}|i^1 + (i^2 - i^1)\alpha} - P_p \end{cases}$$

$$F^2[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < -P_p \\ {}_d q_x & \text{si } -P_p \leq X < (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-d} - P_p \\ {}_d q_x + \sum_{r=d}^t {}_r q_x & \text{si } {}_d | \ddot{a}_{\overline{t-d+1}|i^3 - (i^3 - i^2)\alpha} - P_p \leq X \\ & < {}_d | \ddot{a}_{\overline{t-d+2}|i^3 - (i^3 - i^2)\alpha} - P_p, t = d, \dots, d+n-2 \\ 1 & \text{si } X \geq {}_d | \ddot{a}_{\overline{n}|i^3 - (i^3 - i^2)\alpha} - P_p \end{cases}$$

A través de las funciones de distribución podemos hallar los cuantiles borrosos. Los α -cortes de los mismos, Q_α^ε en función del nivel de solvencia ε elegido, vendrán dados por:

- Si $0 < 1 - \varepsilon \leq {}_d q_x$, $Q_\alpha^\varepsilon = \lfloor -P_p, -P_p \rfloor$, es decir, el número cierto $-P_p$.
- Si ${}_d q_x < 1 - \varepsilon \leq {}_d q_x + {}_d | q_x$,
 $Q_\alpha^\varepsilon = \left[(1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-d}, (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-d} \right] - P_p$
- Si ${}_d q_x + \sum_{r=d}^t {}_r q_x < 1 - \varepsilon \leq {}_d q_x + \sum_{r=d}^{t+1} {}_r q_x$, donde $t \in \{d, d+1, \dots, d+n-3\}$, y si $d+n-3 < d$, entonces $\{d, d+1, \dots, d+n-3\}$ es vacío:
 $Q_\alpha^\varepsilon = \left[{}_d | \ddot{a}_{\overline{t-d+2}|i^3 - (i^3 - i^2)\alpha}, {}_d | \ddot{a}_{\overline{t-d+2}|i^1 + (i^2 - i^1)\alpha} \right] - P_p$
- Para ${}_d q_x + \sum_{r=d}^{d+n-2} {}_r q_x < 1 - \varepsilon \leq 1$: $Q_\alpha^\varepsilon = \left[{}_d | \ddot{a}_{\overline{n}|i^3 - (i^3 - i^2)\alpha}, {}_d | \ddot{a}_{\overline{n}|i^1 + (i^2 - i^1)\alpha} \right] - P_p$

Siendo por tanto, el recargo de seguridad cierto a repercutir, Q^ε , para llegar a un nivel ε de estabilidad, para un parámetro β prefijado se halla como:

- Si $0 < 1 - \varepsilon \leq {}_d q_x$: $-P_p$

- Si ${}_d q_x < 1 - \varepsilon \leq {}_d q_x + {}_d | q_x$,

$$Q^\varepsilon = (1 - \beta') \int_0^1 (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-d} d\alpha + \beta' \int_0^1 (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-d} d\alpha - P_p$$

Debiéndose contemplar en este caso, como siempre, tres posibilidades:

a) Si $d=0$, $Q^\varepsilon = 1 - P_p$

b) Si $d=1$:

$$Q^\varepsilon = (1 - \beta') \frac{\ln \frac{1+i^3}{1+i^2}}{i^3 - i^2} + \beta' \frac{\ln \frac{1+i^2}{1+i^1}}{i^2 - i^1} - P_p$$

c) Si $d \geq 2$:

$$Q^\varepsilon = (1 - \beta') \frac{(1+i^2)^{-d+1} - (1+i^3)^{-d+1}}{(d-1)(i^3 - i^2)} + \beta' \frac{(1+i^1)^{-d+1} - (1+i^2)^{-d+1}}{(d-1)(i^2 - i^1)} - P_p$$

- Si ${}_d q_x + \sum_{r=d}^t {}_r | q_x < 1 - \varepsilon \leq {}_d q_x + \sum_{r=d}^{t+1} {}_r | q_x$, para $t \in \{d, d+1, \dots, d+n-3\}$, donde si $n < 3$,

$\{d, d+1, \dots, d+n-3\}$ es conjunto vacío, se obtiene:

$$\begin{aligned} Q^\varepsilon &= (1 - \beta') \int_0^1 {}_d | \ddot{a}_{\overline{t-d+2}| i^3 - (i^3 - i^2)\alpha} d\alpha + \beta' \int_0^1 {}_d | \ddot{a}_{\overline{t-d+2}| i^1 + (i^2 - i^1)\alpha} d\alpha - P_p = \\ &= (1 - \beta') \sum_{r=d}^{t+1} \int_0^1 (1 + i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-r} d\alpha + \beta' \sum_{r=d}^{t+1} \int_0^1 (1 + i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-r} d\alpha - P_p \end{aligned}$$

a) Si $d=0$:

$$\begin{aligned} Q^\varepsilon &= 1 + (1 - \beta') \left[\frac{\ln \frac{1+i^3}{1+i^2}}{i^3 - i^2} + \sum_{r=2}^{t+1} \frac{(1+i^2)^{-r+1} - (1+i^3)^{-r+1}}{(r-1)(i^3 - i^2)} \right] + \\ &+ \beta' \left[\frac{\ln \frac{1+i^2}{1+i^1}}{i^2 - i^1} + \sum_{r=2}^{t+1} \frac{(1+i^1)^{-r+1} - (1+i^2)^{-r+1}}{(r-1)(i^2 - i^1)} \right] - P_p \end{aligned}$$

b) Si $d=1$:

$$Q^{\varepsilon} = (1 - \beta') \left[\frac{\ln \frac{1+i^3}{1+i^2}}{i^3 - i^2} + \sum_{r=2}^{t+1} \frac{(1+i^2)^{-r+1} - (1+i^3)^{-r+1}}{(r-1)(i^3 - i^2)} \right] +$$

$$+ \beta' \left[\frac{\ln \frac{1+i^2}{1+i^1}}{i^2 - i^1} + \sum_{r=2}^{t+1} \frac{(1+i^1)^{-r+1} - (1+i^2)^{-r+1}}{(r-1)(i^2 - i^1)} \right] - P_p$$

c) Y si $d \geq 2$, se obtiene entonces:

$$Q^{\varepsilon} = (1 - \beta') \sum_{r=d}^{t+1} \frac{(1+i^2)^{-r+1} - (1+i^3)^{-r+1}}{(r-1)(i^3 - i^2)} + \beta' \sum_{r=d}^{t+1} \frac{(1+i^1)^{-r+1} - (1+i^2)^{-r+1}}{(r-1)(i^2 - i^1)} - P_p$$

- Para $dQ_x + \sum_{r=d}^{d+n-2} r! q_x < 1 - \varepsilon \leq 1$:

$$Q^{\varepsilon} = (1 - \beta') \int_0^1 \ddot{a}_{n|i^3 - (i^3 - i^2)\alpha} d\alpha + \beta' \int_0^1 \ddot{a}_{n|i^1 + (i^2 - i^1)\alpha} d\alpha - P_p =$$

$$= (1 - \beta') \sum_{r=d}^{d+n-1} \int_0^1 (1+i^3 - (i^3 - i^2)\alpha)^{-r} d\alpha + \beta' \sum_{r=d}^{d+n-1} \int_0^1 (1+i^1 + (i^2 - i^1)\alpha)^{-r} d\alpha - P_p$$

a) Si $d=0$:

$$Q^{\varepsilon} = 1 + (1 - \beta') \left[\frac{\ln \frac{1+i^3}{1+i^2}}{i^3 - i^2} + \sum_{r=2}^{n-1} \frac{(1+i^2)^{-r+1} - (1+i^3)^{-r+1}}{(r-1)(i^3 - i^2)} \right] +$$

$$+ \beta' \left[\frac{\ln \frac{1+i^2}{1+i^1}}{i^2 - i^1} + \sum_{r=2}^{n-1} \frac{(1+i^1)^{-r+1} - (1+i^2)^{-r+1}}{(r-1)(i^2 - i^1)} \right] - P_p$$

b) Si $d=1$:

$$Q^{\varepsilon} = (1 - \beta') \left[\frac{\ln \frac{1+i^3}{1+i^2}}{i^3 - i^2} + \sum_{r=2}^n \frac{(1+i^2)^{-r+1} - (1+i^3)^{-r+1}}{(r-1)(i^3 - i^2)} \right] +$$

$$+ \beta' \left[\frac{\ln \frac{1+i^2}{1+i^1}}{i^2 - i^1} + \sum_{r=2}^n \frac{(1+i^1)^{-r+1} - (1+i^2)^{-r+1}}{(r-1)(i^2 - i^1)} \right] - P_p$$

c) Y si $d \geq 2$, se obtiene entonces:

$$Q^e = (1 - \beta') \sum_{r=d}^{d+n-1} \frac{(1+i^2)^{-r+1} - (1+i^3)^{-r+1}}{(r-1)(i^3 - i^2)} + \beta' \sum_{r=d}^{d+n-1} \frac{(1+i^1)^{-r+1} - (1+i^2)^{-r+1}}{(r-1)(i^2 - i^1)} - P_p$$

4.8.4. Aplicación numérica

En la aplicación numérica con que concluiremos el análisis de este tipo de seguro, supondremos que un asegurado de 65 años suscribe una renta temporal de 30 años inmediata de 100 unidades monetarias anuales pagables por anticipado, utilizándose las bases técnicas de siempre.

Para este seguro, la prima pura borrosa es $\tilde{P}_p = {}_{30}\tilde{a}_{65}$, por lo que los α -cortes $P_{p\alpha}$ son:

$$P_{p\alpha} = \left[100 \cdot \sum_{t=0}^{29} (1'05 - 0'02\alpha)^{-t} {}_t p_{65}, 100 \cdot \sum_{t=0}^{29} (1'02 + 0'01\alpha)^{-t} {}_t p_{65} \right]$$

y, entonces, P_p se hallará para una determinada aversión al riesgo β como:

$$P_p = (1-\beta)1316,77 + \beta 1502,96$$

Donde si $\beta = 0'75$, $P_p = 1456,41$.

Para un nivel α dado, la variable aleatoria pérdida inferior $L_p^1(\alpha)$ y superior $L_p^2(\alpha)$ vienen dadas por:

$$L_p^1(\alpha) = \begin{cases} 100 \cdot \ddot{a}_{\overline{t+1}|0'05-0'02\alpha} - 1456'41 & \text{con } {}_t q_{65}, t = 0, 1, \dots, 28 \\ 100 \cdot \ddot{a}_{\overline{30}|0'05-0'02\alpha} - 1456'41 & \text{con } {}_{29}p_{65} \end{cases}$$

y,

$$L_p^2(\alpha) = \begin{cases} 100 \cdot \ddot{a}_{\overline{t+1}|0'02+0'01\alpha} - 1456'41 & \text{con } {}_t q_{65}, t = 0, 1, \dots, 28 \\ 100 \cdot \ddot{a}_{\overline{30}|0'02+0'01\alpha} - 1456'41 & \text{con } {}_{29}p_{65} \end{cases}$$

De esta forma, $F^1[X](\alpha)$ y $F^2[X](\alpha)$ se hallan respectivamente a partir de $L_p^1(\alpha)$ y $L_p^2(\alpha)$ como:

$$F^1[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 100 - 1456'41 \\ \sum_{r=0}^t {}_r q_{65} & \text{si } 100\ddot{a}_{\overline{t+1}|0'02+0'01\alpha} - 1456'41 \leq X < 100\ddot{a}_{\overline{t+2}|0'02+0'01\alpha} - 1456'41, t = 0, \dots, 28 \\ 1 & \text{si } 100\ddot{a}_{\overline{30}|0'02+0'01\alpha} - 1456'41 \leq X \end{cases}$$

y,

$$F^2[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 100 - 1456'41 \\ \sum_{r=0}^t {}_r|q_{65} & \text{si } 100\ddot{a}_{\overline{t+1}|0'05-0'02\alpha} - 1456'41 \leq X < 100\ddot{a}_{\overline{t+2}|0'05-0'02\alpha} - 1456'41, t = 0, \dots, 28 \\ 1 & \text{si } 100\ddot{a}_{\overline{30}|0'05-0'02\alpha} - 1456'41 \leq X \end{cases}$$

De esta forma, podemos obtener los α -cortes de $\tilde{F}[0]$, en una escala endecadaria como:

α	$F^1[0](\alpha)$	$F^2[0](\alpha)$
0	0,4857	0,8069
0,1	0,5275	0,7717
0,2	0,5275	0,7342
0,3	0,5275	0,7342
0,4	0,5275	0,6947
0,5	0,5275	0,6538
0,6	0,5275	0,6538
0,7	0,5698	0,6120
0,8	0,5698	0,6120
0,9	0,5698	0,6120
1	0,5698	0,5698

Siendo posible por tanto, a partir de éstos, analizar la estabilidad del asegurador en el caso en que únicamente repercute al asegurado la prima pura fijada anteriormente. Respecto a la expresión de los α -cortes de $\tilde{Q}^\varepsilon$, Q_α^ε , dependiendo de la probabilidad de pérdida ε que fijemos se obtiene:

- Si $0 < 1 - \varepsilon \leq {}_0|q_{65}$, $Q_\alpha^\varepsilon = [100, 100] - 1456'41 = -1356'41$
- Si $\sum_{r=0}^t {}_r|q_{65} < 1 - \varepsilon \leq \sum_{r=0}^{t+1} {}_r|q_{65}$, $Q_\alpha^\varepsilon = [100 \cdot \ddot{a}_{\overline{t+2}|0'05-0'02\alpha}, 100 \cdot \ddot{a}_{\overline{t+2}|0'02+0'01\alpha}] - 1456'41$, donde $t \in \{0, 1, \dots, 27\}$
- Si $\sum_{r=0}^{28} {}_r|q_{65} < 1 - \varepsilon \leq 1$, $Q_\alpha^\varepsilon = [100 \cdot \ddot{a}_{\overline{30}|0'05-0'02\alpha}, 100 \cdot \ddot{a}_{\overline{30}|0'02+0'01\alpha}] - 1456'41$, donde

Así, los α -cortes de $\tilde{Q}^{0'1}$, $\tilde{Q}^{0'05}$ y $\tilde{Q}^{0'01}$, son:

$$Q_\alpha^{0'1} = [100 \cdot \ddot{a}_{\overline{29}|0'05-0'02\alpha}, 100 \cdot \ddot{a}_{\overline{29}|0'02+0'01\alpha}] - 1456'41$$

$$Q_\alpha^{0'05} = [100 \cdot \ddot{a}_{\overline{30}|0'05-0'02\alpha}, 100 \cdot \ddot{a}_{\overline{30}|0'02+0'01\alpha}] - 1456'41$$

$$Q_\alpha^{0'01} = [100 \cdot \ddot{a}_{\overline{30}|0'05-0'02\alpha}, 100 \cdot \ddot{a}_{\overline{30}|0'02+0'01\alpha}] - 1456'41$$

Es decir, $\tilde{Q}^{0'05} = \tilde{Q}^{0'01}$

Asimismo, el valor de $Q^{0'1}$, $Q^{0'05} = Q^{0'01}$, con $\beta' = 0'75$, la prima recargada y el porcentaje que dichos recargos representan sobre las prima pura, la desviación estándar y la varianza vienen dados en la siguiente tabla:

ε	Q^e	P_R	P_P	$V^*[L_P]$	$D^*[L_P]$
0'1	560,37	2016,79	27,18%	0,21%	109,65%
0'05/0'01	605,27	2061,69	29,36%	0,23%	118,43%

Damos a continuación las expresiones de los α -cortes en una escala endecadaria para $\tilde{F}[605'27]$, $\tilde{F}[560'37]$, lo cual nos orientará sobre el nivel de estabilidad efectivamente ha conseguido el asegurador si aplicara cada uno de los dos recargos propuestos:

α	$F^1[560'37](\alpha)$	$F^2[560'37](\alpha)$	$F^1[605'27](\alpha)$	$F^2[605'27](\alpha)$
0	0,8393	1	0,8686	1
0,1	0,8393	1	0,8686	1
0,2	0,8686	1	0,8686	1
0,3	0,8686	1	0,8946	1
0,4	0,8686	1	0,8946	1
0,5	0,8946	1	0,9172	1
0,6	0,8946	1	0,9172	1
0,7	0,9172	1	0,9363	1
0,8	0,9172	1	0,9363	1
0,9	0,9363	1	1	1
1	0,9363	0,9363	1	1

CAPÍTULO 5:

FIJACIÓN DE LA PRIMA ÚNICA Y ANÁLISIS DE LA VARIABLE ALEATORIA

PÉRDIDA A TRAVÉS DE LA TEORÍA CLÁSICA DEL RIESGO

5.1. CONSIDERACIONES GENERALES Y METODOLOGÍA

En este epígrafe analizaremos la fijación de las primas a repercutir a un asegurado, suponiendo que para cada clase de seguro, el número de asegurados es elevado. Entenderemos como clase de seguro a un tipo de contrato determinado, con los asegurados de la misma edad y sexo y los mismos capitales asegurados ante las contingencias que contemple el contrato, y suscritos en, aproximadamente, el mismo instante temporal.

En el apartado anterior, analizamos como calcular, en una cartera compuesta por un único asegurado, y con un enfoque borroso aleatorio de la operación, la prima pura única, P_p . En este caso, los resultados son idénticos a los que se obtienen con la teoría de equivalencia estática. En segundo lugar, analizamos como calcular el recargo a aplicar sobre P_p , Q^ε , para obtener una prima recargada, P_R , de forma que se asegure un nivel de solvencia ε . Ya comprobamos que con intereses inciertos el cobro de dicha prima implicaba obtener una probabilidad de insolvencia de “aproximadamente ε ” y no exactamente de ε . En el apartado 4 sólo existía un único asegurado en la cartera, lo cual es evidentemente irreal. El asegurador, aún teniendo un conjunto de pólizas idénticas, puede tratar estas como individuales, aplicando los resultados obtenidos en el apartado anterior. Ello sin embargo, implicará no tener en cuenta la ley de los grandes números, según la cual a medida que el número de asegurados se incrementa, el riesgo de que se produzcan desviaciones en la mortalidad esperada debe disminuir, de forma que el recargo dirigido a evitar dichas desviaciones desfavorables también debe disminuir. Al tratamiento de este problema le dedicaremos este epígrafe 5 y el siguiente. En cualquier caso, consideraremos que cada clase de seguro es un negocio absolutamente independiente del resto, o dicho de otra forma, que el negocio del asegurador se compone de una única clase de seguro; no considerándose pues, en ningún caso, la heterogeneidad de la cartera asegurada.

La consideración de dicha heterogeneidad, implicaría reducir más el riesgo de mortalidad del asegurador, porque desviaciones desfavorables de la siniestralidad en una clase de seguro pueden ser compensadas por desviaciones favorables en otro. Ello permite la posibilidad de fijar recargos todavía menores que los que deben aplicarse si los calculamos separadamente. Evidentemente,

ello llevaría a establecer una prima menor para el asegurado, ya que se le acabaría repercutiendo finalmente un recargo menor. El problema reside en como repartir este “beneficio” –esto es, la disminución del recargo, y por tanto, la prima recargada-. Esta cuestión no tiene en absoluto una resolución trivial, ya que en principio, unas clases de seguros incorporan mayor riesgo para el asegurador que otros, y por tanto, el reparto de esta “bonificación” entre los asegurados no debe realizarse a partes iguales. En Alegre y Claramunt (1989) y Alegre y Claramunt (1995) se proponen diversos criterios, suponiéndose certeza en el tipo de interés de valoración. Todo ello se complica si el recargo es a priori borroso y dicha disminución se manifiesta a través de un subconjunto borroso. Este problema excede de los objetivos de esta tesis, aunque, sin embargo, creemos que será de interés su análisis y que puede ser motivo de trabajos posteriores a éste.

En nuestro análisis, dado que el pasivo se compone de N pólizas idénticas, el valor actual de las pérdidas, tras cobrar la prima pura, para el asegurador por toda la cartera es una variable borroso aleatoria $\tilde{L}_p^C$ que se halla como la suma de las N variables borroso aleatorias pérdida correspondientes a cada asegurado, que deberán estar idénticamente distribuidas. Si notamos a la correspondiente al j -ésimo asegurado como $\tilde{L}_p^j$, con $\tilde{L}_p^1 = \tilde{L}_p^2 = \dots = \tilde{L}_p^N = \tilde{L}_p$, $\tilde{L}_p^C$ se obtiene como:

$$\tilde{L}_p^C = \tilde{L}_p^1 + \tilde{L}_p^2 + \dots + \tilde{L}_p^N = \tilde{Z}^1 + \tilde{Z}^2 + \dots + \tilde{Z}^N - N \cdot P_p$$

Donde debemos tener en cuenta que $\tilde{Z}^1 = \tilde{Z}^2 = \dots = \tilde{Z}^N = \tilde{Z}$ y son las variables borroso aleatorias valor actual de las prestaciones correspondientes a cada uno de los asegurados. De esta forma, para un nivel de presunción α de las realizaciones borrosas de dichas variables borroso aleatorias, podemos comprobar que las variables aleatorias inferior y superior (nítidas) que define $\tilde{L}_p^C$, $L_p^{1,C}(\alpha)$ y $L_p^{2,C}(\alpha)$ respectivamente, vendrán dadas por las variables aleatorias nítidas:

$$L_p^{1,C}(\alpha) = L_p^{1,1}(\alpha) + L_p^{1,2}(\alpha) + \dots + L_p^{1,N}(\alpha) = Z^{1,1}(\alpha) + Z^{1,2}(\alpha) + \dots + Z^{1,N}(\alpha) - N \cdot P_p$$

$$L_p^{2,C}(\alpha) = L_p^{2,1}(\alpha) + L_p^{2,2}(\alpha) + \dots + L_p^{2,N}(\alpha) = Z^{2,1}(\alpha) + Z^{2,2}(\alpha) + \dots + Z^{2,N}(\alpha) - N \cdot P_p$$

Respecto al comportamiento de la mortalidad, en estadística actuarial tradicionalmente se ha considerado que el comportamiento de ésta en un individuo cualquiera es independiente respecto al resto, a fin de simplificar los modelos actuariales, hipótesis que también aceptaremos¹. De esta

¹ Somos conscientes que esta hipótesis no es necesariamente cierta. Supongamos que la totalidad de los individuos asegurados residen en una misma región. Es evidente que muchos de ellos tienen similares hábitos alimenticios, viven en un entorno con un mismo nivel de contaminación etc. lo cual influye en el comportamiento de la mortalidad para las personas de dicha región. En este caso será difícil considerar que la variable aleatoria T_x correspondiente a cada individuo sea independiente con respecto al resto que componen la cartera de asegurados.

forma, las variables aleatorias nítidas $L_p^{i,j}(\alpha)$, $i=1,2$, y $j=1,2,\dots,N$, quedan definidas por un interés o intereses nítidos, están idénticamente distribuidas y son independientes. Sin embargo, las trayectorias posibles que pueden tomar los tipos de interés al contado futuros, y por tanto, los que pueden tomar para cada vencimiento, serán comunes para toda la cartera. Así, la variable borroso aleatoria "valor actual de las prestaciones", si bien es independiente para dos asegurados cualquiera respecto a la mortalidad será interactivo, ya que el interés de actualización para cada periodo debe ser común para todas las cabezas aseguradas.

La independencia del comportamiento de la mortalidad para cada asegurado, y el hecho de que partamos de la hipótesis de que la cartera se compone de suficientes pólizas homogéneas, nos permitirá aplicar la Teoría Clásica del Riesgo, que se puede consultar con mayor profundidad en Vegas Asensio y Nieto de Alba (1993, p. 253-257), la cual se basa en el Teorema Central del Límite, y por tanto, en la hipótesis de que el colectivo asegurado es elevado.

Para el análisis que llevaremos a cabo en este epígrafe, será de gran utilidad el subconjunto borroso $\tilde{\Psi}$, que recoge todas las posibles trayectorias que pueden tomar, según la estimación del asegurador, los intereses de actualización a lo largo de la duración del contrato (que es aleatorio). Éste subconjunto borroso, fue construido y analizado en el apartado 3.1. de esta parte de la tesis.

Denominamos como x a una trayectoria del tipo de interés (forward o spot) a lo largo de toda la vida del contrato con un nivel de presunción $\mu_{\tilde{\Psi}}(x)$, y α -cortes Ψ_{α} .

Si se aplica un único tipo de interés $\tilde{i}$ a lo largo de toda la vida del contrato, bastará con tener en consideración su función de pertenencia $\mu_{\tilde{i}}(x)$ y sus α -cortes, que son notados como i_{α} , y son intervalos de confianza. En este caso, identificaremos $\mu_{\tilde{i}}(x)$ con $\mu_{\tilde{\Psi}}(x)$ e i_{α} con Ψ_{α} . Así, $\mu_{\tilde{\Psi}}(x)$ será una función de pertenencia monodimensional y Ψ_{α} un intervalo de confianza delimitado por el interés de actualización mínimo y máximo, es decir, un rectángulo en R^+ .

Para una trayectoria cualquiera del tipo de interés, x , cuyo nivel de presunción es $\mu_{\tilde{\Psi}}(x)$, obtenemos una variable aleatoria pérdida para cada individuo asegurado tras cobrar la prima pura P_p , $L_p^j(x)$. Para toda la cartera, la trayectoria del interés debe ser común, de forma que la pérdida del asegurador en esta cartera y trayectoria, $L_p^C(x)$, será:

$$L_p^C(x) = L_p^1(x) + L_p^2(x) + \dots + L_p^N(x) = Z^1(x) + Z^2(x) + \dots + Z^N(x) - N \cdot P_p$$

Donde notamos como $Z^j(x)$ al valor actual de las prestaciones del contrato para el j -ésimo asegurado bajo la hipótesis de una trayectoria del interés x dada, siendo por tanto $Z^1(x), Z^2(x), \dots, Z^N(x)$ variables aleatorias idénticamente distribuidas. De esta forma, la esperanza, la varianza y la desviación estándar de $Z^j(x)$ son funciones de x –multidimensional en general, y de una única variable si se utiliza un único tipo de actualización- que notamos como $E[Z](x)$, $V[Z](x)$ y $D[Z](x)$ respectivamente.

Como las variables aleatorias pérdida individuales están idénticamente distribuidas, $L_p^1(x) = L_p^2(x) = \dots = L_p^N(x) = L_p(x)$ ya que $Z^1(x) = Z^2(x) = \dots = Z^N(x) = Z(x)$ y son independientes, bajo la hipótesis de la teoría clásica del riesgo $L_p^C(x)$ será aproximadamente una variable aleatoria normal de media $m(x)$, varianza $v(x)$ y desviación estándar $d(x)$, es decir $L_p^C(x) \sim \text{Normal}(m(x), d(x))$ siendo respectivamente²:

$$m(x) = N \cdot \{E[Z](x) - P_p\}, v(x) = N \cdot V[Z](x) \text{ y } d(x) = \sqrt{N} \cdot D[Z](x)$$

Si las prestaciones son unitarias, la obtención de la esperanza matemática, la varianza y la desviación estándar para un tipo o tipos de interés utilizados en la valoración del contrato ya fue analizado en el apartado 2 de la presente parte de la tesis, por lo que bastará con aplicar los resultados obtenidos.

Sin embargo, las trayectorias del interés no son ciertas, sino que son borrosas y para una concreta, x , podemos asociar a la misma un grado de verdad de la misma $\mu_{\tilde{\varphi}}(x)$. Así, la esperanza matemática de la siniestralidad para toda la clase de seguros que analicemos, es un número borroso que notamos como $\tilde{m}$, cuya función de pertenencia será:

$$\mu_{\tilde{m}}(y) = \bigvee_{y = N \cdot \{E[Z](x) - P_p\}} \mu_{\tilde{\varphi}}(x)$$

Asimismo, las funciones de pertenencia de la varianza borrosa, $\tilde{v}$ y la desviación estándar borrosa, $\tilde{d}$ para todo el colectivo vendrán dadas por:

$$\mu_{\tilde{v}}(y) = \bigvee_{y = N \cdot V[Z](x)} \mu_{\tilde{\varphi}}(x) \text{ y } \mu_{\tilde{d}}(y) = \bigvee_{y = \sqrt{N} \cdot D[Z](x)} \mu_{\tilde{\varphi}}(x)$$

Respecto a los α -cortes de estos parámetros borrosos, podemos observar que los α -cortes de la media, m_α vendrán dados por:

$$m_\alpha = [\underline{m}(\alpha), \overline{m}(\alpha)] = \{y \mid y = N \cdot \{E[Z](x) - P_p\}, x \in \psi_\alpha\}$$

² Si la trayectoria x que realmente van a tomar los intereses de actualización fuera conocida de antemano por el asegurador, puede observarse que $P_p = E[Z](x)$, por lo que $m(x) = 0$.

y como en todas las estructuras actuariales, la media del valor actual de las prestaciones son decrecientes respecto al tipo (o los tipos) de interés de actualización, el extremo inferior $\underline{m}(\alpha)$ vendrá dado por la trayectoria superior de los intereses a éste nivel de presunción, $\psi^2(\alpha)$, y viceversa. De esta forma:

$$m_{\alpha} = [N \cdot \{E[Z](\psi^2(\alpha)) - P_p\}, N \cdot \{E[Z](\psi^1(\alpha)) - P_p\}] = [N \cdot \{E^1[Z](\alpha) - P_p\}, N \cdot \{E^2[Z](\alpha) - P_p\}]$$

Respecto a los α -cortes de la varianza borrosa $\tilde{v}$, v_{α} , éstos se obtienen como:

$$v_{\alpha} = [\underline{v}(\alpha), \bar{v}(\alpha)] = \{y \mid y = N \cdot V[Z](x), x \in \psi_{\alpha}\}$$

En este caso, no podemos dar una expresión más precisa de los α -cortes, ya que, como comprobamos a lo largo del apartado 3, no podemos asegurar para algunos tipos de prestaciones, que la varianza del valor actual de los mismos tenga un comportamiento monótono respecto al interés o intereses de actualización. Por otra parte, los α -cortes de $\tilde{d}$, d_{α} , serán:

$$d_{\alpha} = [\underline{d}(\alpha), \bar{d}(\alpha)] = [\sqrt{\underline{v}(\alpha)}, \sqrt{\bar{v}(\alpha)}]$$

Así la variable borroso aleatoria $\tilde{L}_p^C$ tiene una función de pertenencia que se puede hallar como:

$$\mu_{\tilde{L}_p^C}(y) = \bigvee_{y = \text{Normal}(\underline{m}(x), \underline{d}(x))} \mu_{\tilde{\Psi}}(x)$$

Es decir, $\tilde{L}_p^C$ es un subconjunto borroso cuyas realizaciones son variables aleatorias normales, de forma que se trata de una aplicación $\mu: \eta \rightarrow [0,1]$, siendo η el conjunto de variables aleatorias normales.

Como venimos comprobando a lo largo de toda la tesis, será útil partir de la caracterización de la variable aleatoria $\tilde{L}_p^C$ a través de sus α -cortes, es decir, mediante una variable borroso aleatoria inferior y una superior. Éstas se hallan, respectivamente, a partir de la suma de N variables aleatorias inferiores, independientes e idénticamente distribuidas correspondientes a la pérdida para el asegurador de cada individuo y de la suma de las N variables aleatorias superiores, asociadas a la pérdida de cada individuo que también son independientes e idénticamente distribuidas. Asimismo, las variables aleatorias inferiores vienen determinadas, en todos los casos que hemos analizado, por la trayectoria superior de los intereses de actualización y viceversa. De esta forma, y para un α cualquiera, siendo $i=\{1,2\}$, y teniendo en cuenta que:

$$L_p^C(\Psi^{3-i}(\alpha)) = L_p^{i,C}(\alpha), L_p^j(\Psi^{3-i}(\alpha)) = L_p^{i,j}(\alpha) \text{ y } Z^j(\Psi^{3-i}(\alpha)) = Z^{i,j}(\alpha)$$

Obtenemos, con $i=1,2$:

$$L_p^{i,C}(\alpha) = L_p^{i,1}(\alpha) + L_p^{i,2}(\alpha) + \dots + L_p^{i,N}(\alpha) = Z^{i,1}(\alpha) + Z^{i,2}(\alpha) + \dots + Z^{i,N}(\alpha) - N \cdot P_p$$

Y $L_p^{i,C}(\alpha)$, $i=1,2$ tenderán, para un número de pólizas N suficientemente elevado a una variable aleatoria normal de media $m^i(\alpha)$, varianza $v^i(\alpha)$ y desviación estándar $d^i(\alpha)$, las cuales se hallan como:

$$m^i(\alpha) = N \cdot \{E[Z^i(\alpha)] - P_p\} = N \cdot \{E^i[Z(\alpha)] - P_p\}, v^i(\alpha) = N \cdot V[Z^i(\alpha)] \text{ y } d^i(\alpha) = \sqrt{N} \cdot d[Z^i(\alpha)]$$

Obsérvese que $m^1(\alpha) = \underline{m}(\alpha)$ y $m^2(\alpha) = \overline{m}(\alpha)$. Sin embargo, no necesariamente se cumple que $v^1(\alpha) = \underline{v}(\alpha)$ y $v^2(\alpha) = \overline{v}(\alpha)$ y por tanto que $d^1(\alpha) = \underline{d}(\alpha)$ y $d^2(\alpha) = \overline{d}(\alpha)$.

5.2. ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE LA VARIABLE BORROSO ALEATORIA PÉRDIDA PARA UNA CARTERA DE PÓLIZAS IDÉNTICAS TRAS HABERSE COBRADO LA PRIMA PURA ÚNICA

El valor de la función de distribución de la pérdida del asegurador para todo el colectivo asegurado $\tilde{L}_p^C$, nos indicará, para un valor cierto X^C , que podemos interpretar como el recargo aplicado a todo el colectivo, y por tanto el recargo aplicado a cada individuo es $X = \frac{X^C}{N}$, la probabilidad (borrosa) de que al aplicar dicho recargo sobre la prima pura el asegurador no sufra pérdidas en dicho colectivo. De esta forma, la función de distribución es, como siempre, $P[\tilde{L}_p^C \leq X^C] = \tilde{F}^C[X^C]$. Si $X^C=0$, no se está recargando la prima pura P_p , por lo que el asegurador únicamente percibirá de los asegurados dicha prima pura única.

Para realizar este análisis estudiaremos los pasos a seguir para determinar la función de distribución asociada a la variable aleatoria pérdida de todo el colectivo que define una trayectoria concreta de los tipos de interés de actualización, x . Notamos a la función de distribución asociada a dicha trayectoria como $F^C[X^C](x) = P[L_p^C(x) \leq X^C]$.

Para dicha trayectoria, dado que $L_p^C(x) \sim \text{Normal}(m(x), d(x))$, la variable aleatoria (cierta) $z = \frac{L_p^C(x) - m(x)}{d(x)} \sim \text{Normal}(0,1)$.

De esta forma, podemos definir el valor estandarizado de X^C para dicha trayectoria, $u[X^C](x)$, como:

$$u[X^C](x) = \frac{X^C - m(x)}{d(x)}$$

Así el valor de la probabilidad acumulada por X^C puede hallarse a través del que $u[X^C](x)$ acumula en z , de forma que:

$$P[L_p^C(x) \leq X^C] = P[z \leq u[X^C](x)] = \Phi[u[X^C](x)]$$

donde denotamos como $\Phi(\cdot)$ a la función de distribución de una normal de media cero y varianza 1. Asimismo, podemos comprobar que tanto $u[X^C](x)$ como $\Phi(u[X^C](x))$ son funciones continuas de la trayectoria de los tipos de interés, y por tanto funciones continuas de variables de n dimensiones –o unidimensionales si se valora el contrato con un único tipo de interés-. Dado que las trayectorias de los tipos de interés vienen dadas a través de un subconjunto borroso, el valor estandarizado de X^C y su probabilidad acumulada también serán números borrosos, los cuales denotamos como $\tilde{U}[X^C]$ y $\tilde{\Phi}(U[X^C])$ respectivamente. Su función de pertenencia puede ser fácilmente definida utilizando el principio de extensión de Zadeh, obteniéndose:

$$\mu_{\tilde{U}[X^C]}(u) = \bigvee_{u = \frac{X^C - m(x)}{d(x)}} \mu_{\tilde{\Psi}}(x)$$

Asimismo, $\tilde{\Phi}(U[X^C]) = \tilde{F}^C[X^C]$, siendo su función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{\Phi}(U[X^C])}(v) = \bigvee_{v = \Phi(u)} \mu_{\tilde{U}[X^C]}(u) = \bigvee_{v = \Phi\left(\frac{X^C - m(x)}{d(x)}\right)} \mu_{\tilde{\Psi}}(x)$$

Evidentemente, esta definición no será operativa para nuestros fines, ya que, al estar definidos los intereses de actualización en el continuo, rara vez podremos conocer la expresión analítica de las funciones de pertenencia de las magnitudes analizadas. Será más cómodo trabajar con las variables aleatorias inferior y superior que define $\tilde{L}_p^C$ para cada uno de los niveles de presunción α con los que estemos trabajando, esto es, operar con α -cortes. De esta forma, los α -cortes de

$\tilde{F}^C[X^C]$, $F^C[X^C]_\alpha$, serán intervalos de confianza, que teniendo en cuenta que a través de $L_p^{i,C}(\alpha)$, debemos hallar $F^{3-i,C}[X^C](\alpha)$, con $i=1,2$, tomarán la siguiente expresión:

$$F^C[X^C]_\alpha = [F^{1,C}[X^C](\alpha), F^{2,C}[X^C](\alpha)] = [P(L_p^{2,C}(\alpha) \leq X^C), P(L_p^{1,C}(\alpha) \leq X^C)]$$

Para hallar los α -cortes de la función de distribución, que es no decreciente respecto a las realizaciones para las que midamos la probabilidad acumulada, deberemos hallar los α -cortes de el valor estandarizado de X^C , $U[X^C]_\alpha$. Dado que $U[X^C](x)$ es una función continua respecto a x y asimismo debe ser monótona decreciente respecto al tipo (o los tipos) de interés, obtenemos sus α -cortes como:

$$\begin{aligned} U[X^C]_\alpha &= \left\{ u \mid u = \frac{X^C - m(x)}{d(x)}, x \in \Psi_\alpha \right\} = [U^1[X^C](\alpha), U^2[X^C](\alpha)] = \left[\frac{X^C - m^2(\alpha)}{d^2(\alpha)}, \frac{X^C - m^1(\alpha)}{d^1(\alpha)} \right] = \\ &= \left[\frac{X^C - N \cdot \{E^2[Z](\alpha) - P_p\}}{\sqrt{N} \cdot D[Z^2(\alpha)]}, \frac{X^C - N \cdot \{E^1[Z](\alpha) - P_p\}}{\sqrt{N} \cdot D[Z^1(\alpha)]} \right] \end{aligned}$$

Por otra parte, las variables aleatorias de la pérdida inferiores y superiores asociadas a toda la clase de seguro, y ya estandarizadas son:

$$z^1(\alpha) = \frac{L_p^{1,C}(\alpha) - m^1(\alpha)}{d^1(\alpha)} \text{ y } z^2(\alpha) = \frac{L_p^{2,C}(\alpha) - m^2(\alpha)}{d^2(\alpha)}$$

son variables aleatorias normales de media 0 y varianza 1. Dado que la variable aleatoria pérdida inferior determina la función de distribución superior y viceversa, los α -cortes de $\tilde{F}^C[X^C]$ pueden ser hallados a través de $U[X^C]_\alpha$, como:

$$F^C[X^C]_\alpha = \Phi(U[X^C]_\alpha) = \left[\Phi\left(\frac{X^C - N \cdot \{E^2[Z](\alpha) - P_p\}}{\sqrt{N} \cdot D[Z^2(\alpha)]}\right), \Phi\left(\frac{X^C - N \cdot \{E^1[Z](\alpha) - P_p\}}{\sqrt{N} \cdot D[Z^1(\alpha)]}\right) \right]$$

Obsérvese que $F^C[X^C]_\alpha$ también será un intervalo de confianza, por tanto, un conjunto compacto de $[0,1]$, ya que se define a través de una función continua respecto al tipo o los tipos de interés de actualización, los cuales, para dicho nivel α , están definidos en un conjunto convexo Ψ_α .

Así, y al contrario de lo que ocurría cuando la cartera que analizamos estaba compuesta por una sola cabeza, podemos comprobar que los α -cortes son intervalos de confianza, ya que las variables aleatorias que reconstruyen la variable borroso aleatoria pérdida original están definidas en el continuo.

5.3. FIJACIÓN DEL RECARGO DE SEGURIDAD PARA CONSEGUIR UN NIVEL DE SOLVENCIA DADO POR EL ASEGURADOR

Nuestro objetivo final es hallar el recargo a repercutir sobre la prima pura correspondiente a cada asegurado, Q^ε , de forma que para la cartera que analicemos, el asegurador obtenga una probabilidad de que las primas finalmente cobradas sean suficiente sea $1-\varepsilon$. Para ello, deberemos hallar en primer lugar un recargo borroso $\tilde{Q}^{\varepsilon,C}$ a satisfacer por parte de todos los elementos del colectivo asegurado, que será el valor que acumula a su izquierda una probabilidad $1-\varepsilon$. Asimismo, $\tilde{Q}^{\varepsilon,C}$ será un número borroso que puede ser definido a través de su función de pertenencia y sus α -cortes como:

$$\tilde{Q}^{\varepsilon,C} = \{q / \mu_{\tilde{Q}^{\varepsilon,C}}(q)\} = \{Q_\alpha^{\varepsilon,C} = [Q^{1\varepsilon,C}(\alpha), Q^{2\varepsilon,C}(\alpha)] / 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

Posteriormente, y dado que el colectivo de los N asegurados que componen la cartera es homogéneo, a cada asegurado se le deberá repercutir la misma parte de $\tilde{Q}^{\varepsilon,C}$. Así, el recargo borroso individual $\tilde{Q}^\varepsilon$ deberá ser hallado como $\tilde{Q}^\varepsilon = \frac{1}{N} \tilde{Q}^{\varepsilon,C}$. De esta forma, la función de pertenencia de $\tilde{Q}^\varepsilon$, será $\mu_{\tilde{Q}^\varepsilon}(q) = \mu_{\tilde{Q}^{\varepsilon,C}}(Nq)$, y sus α -cortes:

$$Q_\alpha^\varepsilon = [Q^{1\varepsilon}(\alpha), Q^{2\varepsilon}(\alpha)] = \left[\frac{Q^{1\varepsilon,C}(\alpha)}{N}, \frac{Q^{2\varepsilon,C}(\alpha)}{N} \right]$$

Para finalizar, deberemos hallar el recargo que finalmente debe ser repercutido. Éste quedará cuantificado a través del valor esperado de $\tilde{Q}^\varepsilon$, Q^ε , el cual será hallado de la forma acostumbrada. La determinación de la prima recargada será inmediata, hallándose $P_R = P_p + Q^\varepsilon$.

El $1-\varepsilon$ percentil que buscamos al repercutir a la totalidad de los asegurados asociados a una determinada trayectoria x del interés, será el $1-\varepsilon$ percentil de $L_p^C(x)$. Notamos a dicho valor como $Q^{\varepsilon,C}(x)$ y se obtiene planteando:

$$Q^{\varepsilon,C}(x) = \{X^C / F^C[X^C] = 1-\varepsilon\}$$

y despejando X^C se obtiene:

$$Q^{\varepsilon,C}(x) = F^{C^{-1}}[1-\varepsilon](x)$$

donde hemos notado con el superíndice “-1” a la función inversa de la función de distribución. Si planteamos la ecuación anterior en términos de normal tipificada, se obtiene:

$$\Phi\left(\frac{Q^{\varepsilon,C}(x) - m(x)}{d(x)}\right) = 1 - \varepsilon$$

y despejando $Q^{\varepsilon,C}(x)$:

$$Q^{\varepsilon,C}(x) = m(x) + \Phi^{-1}(1 - \varepsilon)d(x)$$

De esta forma, podemos entender el $1-\varepsilon$ cuantil de la variable aleatoria pérdida de toda la cartera como una función de la trayectoria de los tipos de actualización, la cual es continua respecto a las n variables (o la variable) que conforman la trayectoria de los tipos de actualización. Así, a través de la función de pertenencia del subconjunto borroso $\tilde{\Psi}$, podremos hallar la función de pertenencia de $\tilde{Q}^{\varepsilon,C}$ aplicando el principio de extensión de Zadeh:

$$\mu_{\tilde{Q}^{\varepsilon,C}}(q) = \bigvee_{q=m(x)+\Phi^{-1}(1-\varepsilon)d(x)} \mu_{\tilde{\Psi}}(x)$$

Evidentemente, rara vez podremos hallar la expresión analítica de $\mu_{\tilde{Q}^{\varepsilon,C}}(q)$, pero si que podremos hallar sus α -cortes. Éstos vendrán dados por:

$$Q_{\alpha}^{\varepsilon,C} = [Q^{1\varepsilon,C}(\alpha), Q^{2\varepsilon,C}(\alpha)] = \{q \mid q = m(x) + \Phi^{-1}(1 - \varepsilon)d(x), x \in \Psi_{\alpha}\}$$

Y dado que el cuantil inferior debe hallarse a través de la función de distribución superior de la variable aleatoria nítida que define $\tilde{L}_p^C$, $L_p^{1,C}(\alpha)$, la cual se construye a partir de $\psi^2(\alpha)$, y el cuantil superior se debe hallar a través de $L_p^{2,C}(\alpha)$, que se construye, asimismo, a través de $\psi^1(\alpha)$, $Q_{\alpha}^{\varepsilon,C}$ debe tomar finalmente la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} Q_{\alpha}^{\varepsilon,C} &= [m^1(\alpha) + \Phi^{-1}(1 - \varepsilon)d^1(\alpha), m^2(\alpha) + \Phi^{-1}(1 - \varepsilon)d^2(\alpha)] = \\ &= \left[N \cdot \{E^1[Z](\alpha) - P_p\} + \Phi^{-1}(1 - \varepsilon)\sqrt{N} \cdot D[Z^1(\alpha)], N \cdot \{E^2[Z](\alpha) - P_p\} + \Phi^{-1}(1 - \varepsilon)\sqrt{N} \cdot D[Z^2(\alpha)] \right] \end{aligned}$$

De esta forma, los α -cortes del recargo individual, Q_{α}^{ε} se hallarán como:

$$Q_{\alpha}^{\varepsilon} = \frac{Q_{\alpha}^{\varepsilon,C}}{N} = \left[E^1[Z](\alpha) + \frac{\Phi^{-1}(1 - \varepsilon)}{\sqrt{N}} D[Z^1(\alpha)], E^2[Z](\alpha) + \frac{\Phi^{-1}(1 - \varepsilon)}{\sqrt{N}} D[Z^2(\alpha)] \right] - P_p$$

De esta forma, el recargo cierto a aplicar a cada asegurado, Q^{ε} , puede hallarse para un parámetro β prefijado como:

$$\begin{aligned}
 Q^\varepsilon &= (1-\beta') \int_0^1 \left\{ E^1[Z](\alpha) + \frac{\Phi^{-1}(1-\varepsilon)}{\sqrt{N}} D[Z^1(\alpha)] \right\} d\alpha + \beta' \int_0^1 \left\{ E^2[Z](\alpha) + \frac{\Phi^{-1}(1-\varepsilon)}{\sqrt{N}} D[Z^2(\alpha)] \right\} d\alpha - P_p = \\
 &= (1-\beta') \int_0^1 E^1[Z](\alpha) d\alpha + \beta' \int_0^1 E^2[Z](\alpha) d\alpha + \frac{\Phi^{-1}(1-\varepsilon)}{\sqrt{N}} \left\{ \begin{aligned} &(1-\beta') \int_0^1 D[Z^1(\alpha)] d\alpha + \\ &+ \beta' \int_0^1 D[Z^2(\alpha)] d\alpha \end{aligned} \right\} - \\
 &- \left[(1-\beta) \int_0^1 E^1[Z](\alpha) d\alpha + \beta \int_0^1 E^2[Z](\alpha) d\alpha \right] = (\beta - \beta') \int_0^1 E^1[Z](\alpha) d\alpha + (\beta' - \beta) \int_0^1 E^2[Z](\alpha) d\alpha + \\
 &+ \frac{\Phi^{-1}(1-\varepsilon)}{\sqrt{N}} \left\{ (1-\beta') \int_0^1 D[Z^1(\alpha)] d\alpha + \beta' \int_0^1 D[Z^2(\alpha)] d\alpha \right\}
 \end{aligned}$$

Así, podemos observar, que si $\beta=\beta'$, el recargo a aplicar es:

$$Q^\varepsilon = \frac{\Phi^{-1}(1-\varepsilon)}{\sqrt{N}} \left\{ (1-\beta') \int_0^1 D[Z^1(\alpha)] d\alpha + \beta' \int_0^1 D[Z^2(\alpha)] d\alpha \right\}$$

Asimismo, para $\beta=\beta'$, podemos comprobar que si $N \rightarrow \infty$, $Q^\varepsilon \rightarrow 0$, ya que a medida que aumentemos el colectivo asegurado, el riesgo de desviaciones desfavorables de la mortalidad debe disminuir.

5.4. APLICACIONES NUMÉRICAS

Para ejemplificar las cuestiones planteadas a lo largo del apartado 5, analizamos a continuación el proceso a seguir para la fijación de las primas únicas correspondientes a un seguro de vida entera asociado a un colectivo de 35 años, y un capital asegurado en caso de fallecimiento de 1000 unidades monetarias. Como siempre, se ha supuesto el interés técnico $\tilde{i} = (0'02, 0'03, 0'05)$ y se han tomado las tablas de mortalidad PEM-82. Éste contrato ya fue analizado, bajo la hipótesis de un único asegurado en cartera, en el apartado 4.4. de esta parte de la tesis. Ahora analizaremos las magnitudes estudiadas para unos colectivos de $N_1=50$ y $N_2=100$ personas. En concreto, estudiaremos:

- La solvencia del asegurado en el caso en que únicamente cobre a cada individuo del colectivo la prima pura con un coeficiente $\beta=0'75$.
- La determinación del recargo para desviaciones de siniestralidad, tomándose también $\beta'=0'75$. En este caso, buscaremos una probabilidad de insolvencia del 5%, es decir, $\varepsilon=0'05$.
- La posición de solvencia del asegurador, después de haber cargado Q^ε .

Respecto a los datos más relevantes de este seguro, si la cartera se componía de un único individuo, ya obtenidos en anteriores epígrafes son:

$P_p(\beta=0'75)$	$V^*[L_p]$	$D^*[L_p]$	$Q^{0'05}$	$Q^{0'05}/P_p \cdot 100$	$Q^{0'05}/V^*[L_p] \cdot 100$	$Q^{0'05}/D^*[L_p] \cdot 100$
320'95	18906'87	137'5	277'29	84'46%	1'47%	201'67%

Así, para los dos colectivos que analizaremos, observamos que el encaje de primas puras es, para $N1=50$, $320'95 \cdot 50 = 16.047'5$ y para $N2=100$, $320'95 \cdot 100 = 32.095$.

Analizamos a continuación $\tilde{F}^C[0]$, en ambas clases de seguros, expresándose la función de distribución a través de sus α -cortes. Esta función nos indicará la probabilidad de que las primas puras únicas cobradas sean suficientes en cada uno de los colectivos

α	N1=50		N2=100	
	$F^{1,C}[0](\alpha)$	$F^{2,C}[0](\alpha)$	$F^{1,C}[0](\alpha)$	$F^{2,C}[0](\alpha)$
0	0	1	0	1
0,1	0	1	0	1
0,2	0	1	0	1
0,3	0,0001	1	0	1
0,4	0,0014	1	0	1
0,5	0,013	1	0,0008	1
0,6	0,0662	1	0,0167	1
0,7	0,2046	1	0,1215	1
0,8	0,4273	0,9990	0,3977	1
0,9	0,6649	0,9815	0,7265	0,9984
1	0,8426	0,8426	0,9224	0,9224

En la interpretación de $F^C[0]_\alpha$ debemos tener en cuenta que si únicamente se carga la prima pura única, estamos implícitamente considerando que la mortalidad se va a comportar conforme a lo esperado, y al tomarse $\beta=0'75$, se consideran escenarios del interés relativamente prudentes, es decir, estamos asegurando un tipo de interés inferior al 3%. Si se hubiera garantizado un interés del 3%, en este caso $P_p = 301'48$. Asimismo, los escenarios de tipos de interés inferiores al de máxima presunción (del 2% al 3%) determinan los extremos inferiores de los α -cortes de $F^C[0]_\alpha$ y viceversa. Asimismo, el escenario más posible, es decir, que se obtenga con la inversión de las primas un interés del 3%, determinará $F^C[0]_1$.

Un análisis de la solvencia del asegurador en el escenario más posible nos indica que, el exceso de rendimientos financieros obtenidos sobre el interés asegurado permite que ciertas desviaciones desfavorables de la mortalidad sean compensadas. En concreto, para el colectivo de 50 asegurados, la probabilidad de que el encaje de primas puras sea suficiente es del 84'26%, y en el

segundo colectivo, del 92'24%. Asimismo, puede observarse que la solvencia del asegurador cobrando únicamente las primas puras en este escenario es superior a medida que aumenta el colectivo asegurado, ya que las probables desviaciones de siniestralidad se reducen, siendo por tanto más fácil la compensación a través del exceso de rendimientos financieros.

En escenarios en los que el rendimiento obtenido invirtiendo la prima pura es mayor al 3%, se comprueba que el exceso de rentabilidad permite compensar cualquier desviación desfavorable de la siniestralidad. En escenarios en los que se obtenga un rendimiento del 3'2%, con $\mu_{\tilde{\tau}}(0'032)=0'9$ o del 3'4%, con $\mu_{\tilde{\tau}}(0'034)=0'8$, los cuales presentan para el asegurador un nivel de verdad muy elevado, la probabilidad de no sufrir pérdidas es prácticamente del 0%. Si se obtienen rendimientos superiores, la probabilidad de no sufrir pérdidas es del 100%.

Por otra parte, podemos observar que en escenarios desfavorables en el tipo de interés y con niveles de verdad también elevados, por ejemplo, para rendimientos obtenidos del 2'8-2'7%, para los cuales $\mu_{\tilde{\tau}}(0'028)=0'8$ y $\mu_{\tilde{\tau}}(0'027)=0'7$, la solvencia del asegurador se sitúa por debajo del 50%. Ello implica que, aunque la mortalidad se comporte respecto a lo esperado, con los rendimientos financieros obtenidos de las primas no se podría hacer frente a la rentabilidad ofrecida. Sólo desviaciones favorables en la mortalidad podrían compensar el déficit de los rendimientos de las primas. Asimismo, en escenarios con niveles de verdad relativamente bajos, y desfavorables –a partir del 2'6%, donde $\mu_{\tilde{\tau}}(0'026)=0'6$, la insuficiencia de los rendimientos que se obtienen con las primas puras no pueden ser, en ningún caso, compensados por desviaciones de la siniestralidad favorables, es decir, la probabilidad de que el asegurador pierda es 1.

A continuación analizamos como el asegurador fija los recargos para “asegurar” una probabilidad de insolvencia $\varepsilon=0'05$ para lo cual hallamos $Q_{\alpha}^{0'05,C}$ y $Q_{\alpha}^{0'05}$ para cada uno de los colectivos:

N1=50

α	$Q^{1,0'05,C}(\alpha)$	$Q^{2,0'05,C}(\alpha)$	$Q^{1,0'05}(\alpha)$	$Q^{2,0'05}(\alpha)$
0	-6907,64	7389,11	-138,15	147,78
0,1	-6389,47	6576,93	-127,79	131,54
0,2	-5830,72	5798,55	-116,61	115,97
0,3	-5227,78	5052,45	-104,56	101,05
0,4	-4576,65	4337,16	-91,53	86,74
0,5	-3872,98	3651,30	-77,46	73,03
0,6	-3111,97	2993,54	-62,24	59,87
0,7	-2288,34	2362,61	-45,77	47,25
0,8	-1396,30	1757,33	-27,93	35,15
0,9	-429,47	1176,55	-8,59	23,53
1	619,17	619,17	12,38	12,38

N2=100

α	$Q^{1,0'05,C}(\alpha)$	$Q^{2,0'05,C}(\alpha)$	$Q^{1,0'05}(\alpha)$	$Q^{2,0'05}(\alpha)$
0	-14702,50	13921,78	-147,03	139,22
0,1	-13675,74	12283,98	-136,76	122,84
0,2	-12.567,25	10715,34	-125,67	107,15
0,3	-11369,62	9212,70	-113,70	92,13
0,4	-10074,72	7773,02	-100,75	77,73
0,5	-8673,62	6393,43	-86,74	63,93
0,6	-7156,5	5071,19	-71,57	50,71
0,7	-5512,54	3803,69	-55,13	38,04
0,8	-3729,84	2588,47	-37,30	25,88
0,9	-1795,32	1423,15	-17,95	14,23
1	305,48	305,48	3,05	3,05

Hemos aproximado el valor del recargo cierto a aplicar, Q^{ε} , partiendo de que en el cálculo del intervalo esperado, se supone que el nivel de presunción, α , sigue una distribución de probabilidad uniforme, lo cual fue comentado en el apartado 1.5.3 de la parte instrumental de la tesis. Así, podemos aproximar el intervalo esperado a través de los extremos de los α -cortes de $\tilde{Q}^{\varepsilon}$, si consideramos para estos una escala que contiene $n+1$ niveles de verdad, suponiéndose que el número borroso que pretendemos defuzzyficar es discreto, y suponiéndose que los niveles de verdad considerados ($\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$) son equiprobables. Así:

$$E^i[\tilde{Q}^{\varepsilon}] \approx \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n Q^{i\varepsilon}\left(\frac{j}{n}\right), i=1,2.$$

En nuestro caso, al ser endecadaria, habremos obtenido:

$$E^i[\tilde{Q}^{\varepsilon}] \approx \frac{1}{11} \sum_{j=0}^{10} Q^{i\varepsilon}\left(\frac{j}{10}\right), i=1,2.$$

Utilizando esta aproximación, los resultados que se obtienen son:

	$EI[\tilde{Q}^{\varepsilon}]$	$Q^{0,05}$	P_R	$Q^{0,05}/P_p \cdot 100$	$Q^{0,05}/V^*[L_p] \cdot 100$	$Q^{0,05}/D^*[L_p] \cdot 100$
N1=50	[-71,66, 75,84]	38,97	359,92	12%	0,21%	28%
N2=100	[-80,87, 66,81]	29,89	350,84	9%	0,16%	22%

Podemos observar en este cuadro, y en el que resumíamos el valor de las magnitudes más relevantes respecto al recargo a aplicar para un único asegurado en cartera, que a medida que aumenta el colectivo asegurado, el recargo a aplicar en concepto de desviaciones de siniestralidad debe disminuir.

Será interesante, asimismo, analizar la solvencia realmente conseguida por el asegurador al aplicar los recargos finalmente propuestos. Es decir, realizar el análisis de $\tilde{F}^C[38'97 \cdot 50]$ y $\tilde{F}^C[28'89 \cdot 100]$, en los colectivos con $N1=50$ y $N2=100$ asegurados respectivamente.

Para ello calculamos los α -cortes de dichas funciones de distribución. Estos son:

	N1=50		N2=100	
α	$F^{1,C}[1948'5](\alpha)$	$F^{2,C}[1948'5](\alpha)$	$F^{1,C}[2889](\alpha)$	$F^{2,C}[2889](\alpha)$
0	0	1	0	1
0,1	0,0002	1	0	1
0,2	0,0052	1	0	1
0,3	0,0439	1	0,0009	1
0,4	0,1817	1	0,0243	1
0,5	0,4365	1	0,1824	1
0,6	0,7073	1	0,5382	1
0,7	0,8872	1	0,8514	1
0,8	0,9674	1	0,9738	1
0,9	0,9928	1	0,9974	1
1	0,9987	0,9987	0,9998	0,9998

Al tomarse para calcular el recargo de seguridad $\beta'=0,75$, se ha considerado implícitamente un escenario moderadamente prudente respecto al interés que la compañía conseguirá invirtiendo las primas. Asimismo, al fijarse un nivel de solvencia $\varepsilon=5\%$, a priori, las primas recargadas que ha encajado el asegurado permiten hacer frente al 95% de las trayectorias de la mortalidad de los asegurados mas favorables.

Al ofrecer el asegurador, implícitamente, un interés inferior al que la compañía espera conseguir invirtiendo las primas con mayor presunción, el 3%, analizando en cada caso $F[Q^{0,05}]_1$, -N1=50 y N2=100-, se observa que no únicamente reducimos la probabilidad de insolvencia al 5%, sino que el exceso de rendimientos financieros permite reducir la probabilidad de insolvencia hasta prácticamente el 0%. Por supuesto, para escenarios de rentabilidades conseguidas favorables, -a partir del 3,2%, donde $\mu_{\tilde{\tau}}(0'032) = 0'9$, es decir, escenarios optimistas pero prácticamente ciertos, cualquier fluctuación desfavorable de la siniestralidad es compensada con los rendimientos financieros.

Podemos observar, que, por otra parte, para escenarios pesimistas respecto al tipo de interés, pero con alto nivel de presunción, entorno al 2,8% y 2,7%, con niveles de verdad del 0,8 y 0,7 respectivamente, el grado de solvencia se sitúa en el 95% buscado. Es decir, el asegurador ha

contemplado implícitamente al determinar la prima a repercutir finalmente, escenarios razonablemente pesimistas en el tipo de interés que obtendrá con su cartera activa.

Si el asegurado obtiene unos rendimientos con las inversiones realizadas del 2,5% o menor, cuyos niveles de presunción no va más allá del 0'5, aunque en la fijación del precio final del seguro ha sido prudente tanto en el rendimiento garantizado como en las probables desviaciones desfavorables de la mortalidad, los rendimientos financieros no permiten asegurar un nivel de solvencia que pueda hacer frente, ni siquiera a la mortalidad esperada, siendo necesario un comportamiento de la mortalidad más favorable que el esperado para que los rendimientos obtenidos de las primas recargadas permitan hacer frente a los compromisos adquiridos. Asimismo, para escenarios en el tipo de interés muy desfavorables –del 2,4% hasta el 2%, por tanto, con niveles de presunción inferiores a 0'4- el margen de intermediación, que es negativo para la compañía, provoca que la probabilidad de insuficiencia de las primas sea muy elevado –en el mayor de los casos es el 100%-, siendo entonces casi improbable, o improbable, compensar dicho déficit de rendimientos con un comportamiento benigno en la mortalidad del colectivo.

CAPÍTULO 6:

FIJACIÓN DE LA PRIMA ÚNICA Y ANÁLISIS DE LA VARIABLE BORROSO ALEATORIA PÉRDIDA UTILIZANDO LA SIMULACIÓN ESTOCÁSTICA

6.1. CONSIDERACIONES GENERALES Y METODOLOGÍA

Como en el epígrafe anterior, analizaremos en éste la fijación de la prima única para negocios compuestos únicamente por una clase de seguro, es decir, de seguros con el mismo tipo de prestaciones, asegurados de la misma edad y el mismo sexo, las mismas cuantías aseguradas y habiéndose suscrito aproximadamente en la misma fecha. Si el grupo de asegurados es suficientemente amplio, en el estudio de la siniestralidad del colectivo podemos aplicar el Teorema Central del Límite, lo cual implica asumir la normalidad de la pérdida para el asegurador en cada una de las clases de seguros. Por tanto, si quisiéramos analizar y fijar recargos considerando la totalidad de todas las clases de seguros, la suma de las variables aleatorias pérdida asociadas a cada clase sería también una variable aleatoria normal, y por tanto, el valor actual de las pérdidas que generarán todos los seguros en cartera también sería una variable aleatoria normal. Sin embargo, aunque las compañías disponen de una gran cantidad de riesgos asegurados, debemos ser muy cautos a la hora de aplicar el Teorema Central del Límite, pues el número de pólizas que se pueden agrupar en una clase de seguro, tal como ha sido definido ésta, suele ser bastante reducido. En este caso, el supuesto de la normalidad en la siniestralidad es bastante irreal, ya que, aunque el número de seguros que componen la cartera pasiva del asegurador puede ser bastante elevado, suelen ser muy heterogéneos entre ellos. Es necesario, por tanto, la búsqueda de otras alternativas, la que proponemos está basada en la simulación estocástica. Como en el apartado anterior, supondremos que cada clase de seguro o grupo de variables borroso aleatorias pérdida idénticamente distribuidas es un negocio absolutamente distinto para el asegurador.

Como siempre, partiremos de que el asegurador ha hallado la prima pura única borrosa, $\tilde{P}_p$, que para el j -ésimo individuo que compone el colectivo se habrá hallado como $\tilde{P}_p = \tilde{E}[Z^j]$, siendo por tanto $\tilde{Z}^j$ el valor actual de las prestaciones asociadas al individuo j con $j=1,2,\dots,N$. Estas variables borroso aleatorias son independientes y están idénticamente distribuidas. Posteriormente, a partir de $\tilde{P}_p$ habrá sido calculada la prima pura cierta, P_p .

Asimismo la variable borroso aleatoria pérdida de todo el colectivo después de haberse cargado la prima pura, es la suma de las variables aleatorias pérdida individuales, y puede ser hallada como:

$$\tilde{L}_p^C = \tilde{L}_p^1 + \tilde{L}_p^2 + \dots + \tilde{L}_p^N = \tilde{Z}^1 + \tilde{Z}^2 + \dots + \tilde{Z}^N - N \cdot P_p$$

De esta forma, la variable aleatoria pérdida, tras haberse cargado la prima pura única, y para una trayectoria del interés que el asegurador conseguirá invirtiendo las primas, será:

$$L_p^C(x) = L_p^1(x) + L_p^2(x) + \dots + L_p^N(x) = Z^1(x) + Z^2(x) + \dots + Z^N(x) - N \cdot P_p$$

Como podemos definir una variable aleatoria inferior y superior para un nivel de presunción dado α , en todas las variables borroso aleatorias individuales, podemos comprobar que las variables aleatorias inferior y superior (nítidas) que define $\tilde{L}_p^C$, $L_p^{1,C}(\alpha)$ y $L_p^{2,C}(\alpha)$ para dicho nivel vendrán dadas por la suma de las variables aleatorias nítidas individuales asociadas a dicho nivel, de forma que:

$$L_p^{1,C}(\alpha) = L_p^{1,1}(\alpha) + L_p^{1,2}(\alpha) + \dots + L_p^{1,N}(\alpha) = Z^{1,1}(\alpha) + Z^{1,2}(\alpha) + \dots + Z^{1,N}(\alpha) - N \cdot P_p$$

$$L_p^{2,C}(\alpha) = L_p^{2,1}(\alpha) + L_p^{2,2}(\alpha) + \dots + L_p^{2,N}(\alpha) = Z^{2,1}(\alpha) + Z^{2,2}(\alpha) + \dots + Z^{2,N}(\alpha) - N \cdot P_p$$

donde $L_p^{1,C}(\alpha)$ vendrá dada por la trayectoria superior de los intereses de actualización de ψ_α , $\psi^2(\alpha)$, y $L_p^{2,C}(\alpha)$ por la trayectoria inferior, $\psi^1(\alpha)$.

En cualquier caso, si N no es lo suficientemente elevado —a efectos prácticos suele entenderse que el número de variables aleatorias idénticamente distribuidas que se suman es elevado cuando el número de sumandos es superior a 30 aproximadamente—, $L_p^C(x)$, y por tanto, $L_p^{1,C}(\alpha)$ y $L_p^{2,C}(\alpha)$ quedarán muy burdamente aproximados por una variable aleatoria normal. Así, los resultados que han sido presentados en el epígrafe anterior no pueden ser aplicados en este caso.

Por supuesto, la determinación de la varianza y la desviación estándar de $\tilde{L}_p^C$, sean borrosas o las de Feng, bajo la hipótesis de la independencia de la mortalidad entre los individuos que componen cada grupo es inmediata. Las varianzas se hallarán como la suma de las varianzas de las variables borroso aleatoria pérdida individuales. Así, podemos aceptar que al menos es posible obtener una medida del riesgo de pérdida que soporta el asegurador al cargar P_p . Sin embargo, no será este el camino que seguiremos, ya que la determinación del porcentaje a cargar de esta forma, no está exento de arbitrariedad. Como siempre, proponemos hallar el recargo a fijar y el estudio de la solvencia del asegurador a través de los cuantiles de $\tilde{L}_p^C$.

Sin embargo, en este supuesto la obtención de $L_p^C(x)$ y por tanto de $L_p^{i,C}(\alpha)$, $i=1,2$, es prácticamente imposible. Por tanto, también será imposible la determinación de la función de distribución de $\tilde{L}_p^C$, ya que las realizaciones de las variables aleatorias inferior y superior de la variable borroso aleatoria se hallarán a través de la combinación de las diferentes trayectorias que puede tomar la mortalidad dentro del colectivo, es decir, de las realizaciones de T_x para cada uno de los componentes del colectivo. Tal como apunta Sarrasí (1995), si el colectivo se compone de N asegurados de edad x_j , $j=1,2,\dots,N$, el total de trayectorias que deberemos evaluar para hallar todas las realizaciones que puede tomar $\tilde{L}_p^C$ es:

$$\prod_{j=1}^N (w - x_j)$$

siendo x_j la edad del j -ésimo asegurado. En nuestro caso, dado que el grupo es homogéneo, el número de trayectorias a evaluar es $(w-x)^N$. Por ejemplo, si la clase de seguros que analizamos se compone de 10 asegurados de 35 años y si la ley de mortalidad utilizada estipula que la primera edad no alcanzable son 114 años, el número de trayectorias a evaluar sería 79^{10} , siendo éste a priori, el número de realizaciones de $\tilde{L}_p^C$ que debieran ser evaluadas. Evidentemente se trata de un número exagerado de trayectorias. Cuando menos, la computación de la pérdida para el asegurador para todas ellas exige una capacidad de cálculo (informático) muy elevada. Asimismo, aunque ello fuera posible, creemos que el decisor podría manejar muy difícilmente tanta información.

Como alternativa, podemos utilizar la simulación estocástica. Es decir, proponemos crear una muestra artificial de la variable borroso aleatoria pérdida para todo el colectivo, trabajándose por tanto con una aproximación a $\tilde{L}_p^C$, $\hat{\tilde{L}}_p^C$, que será por supuesto discreta. Esta podrá ser analizada, de forma análoga a las variables pérdida de cada uno de los individuos que componen el colectivo asegurado.

Al trabajarse con una simulación de $\tilde{L}_p^C$ y no directamente con la pérdida de toda la clase de seguros, que sería lo realmente deseable, un elemento que puede permitir al asegurador determinar la fiabilidad de la simulación empleada puede ser calcular la del estimador de la media y la varianza borrosa de $\tilde{L}_p^C$, a partir de la muestra artificial $\hat{\tilde{L}}_p^C$, para lo cual utilizaremos como siempre el principio de extensión de Zadeh. Esta cuestión ya fue analizada en el apartado 3.6.4.1.

de la primera parte de la tesis, a partir del ya mencionado trabajo de Frühwirth-Schnatter. Posteriormente confrontaríamos los resultados de estos estimadores con los valores que realmente toman éstos para el colectivo, ya que el valor de $\tilde{E}[L_p^C]$ y $\tilde{V}[L_p^C]$ es conocido. En la medida en que el estimador diverja más de su valor real, nos indicará que es preciso simular más trayectorias, ya que en la simulación existe un sesgo evidente, seguramente provocado por la insuficiencia de las trayectorias de la mortalidad simuladas.

6.2. DETERMINACIÓN MEDIANTE SIMULACIÓN ESTOCÁSTICA CIERTA DE LA VARIABLE BORROSO ALEATORIA PÉRDIDA PARA TODO EL COLECTIVO ASEGURADO TRAS COBRARSE LA PRIMA PURA

Si bien, existen diversos métodos para simular la trayectoria que toma la mortalidad en un colectivo, como ya fue comentado en 1.5.2., utilizaremos la metodología propuesta en Pitacco (1986), que ha sido utilizada, entre otros, en el ya mencionado trabajo de Sarrasí.

Para ello, deberemos empezar por determinar la función de probabilidad acumulada de T_x . Dado que T_x tiene como función de cuantía:

Realizaciones	0	1	...	t	...	w-x-1
$P[T_x=t]$	${}_0q_x$	${}_1q_x$	...	${}_tq_x$	...	${}_{w-x-1}q_x$

su función de distribución, $F_{T_x}[X]$, será entonces:

$$F_{T_x}[X] = \begin{cases} 0 & \text{Si } X < 0 \\ \sum_{r=0}^t {}_r q_x & t \leq X < t+1 \quad t = 0, 1, \dots, w-x-2 \\ 1 & X \geq w-x-1 \end{cases}$$

A continuación debemos simular M trayectorias de eliminación del colectivo, que está compuesto por N individuos. Para ello generaremos $N \cdot M$ números aleatorios uniformemente distribuidos en $[0,1]$. Si denominamos como ς_i^j al número aleatorio asociado al momento de fallecimiento del individuo j en la trayectoria i , los números aleatorios que deberemos generar tendría la estructura que se observa en la siguiente tabla:

		Asegurado					
		1	2	...	j	...	N
1		ς_1^1	ς_2^1	...	ς_j^1	...	ς_N^1
2		ς_1^2	ς_2^2	...	ς_j^2	...	ς_N^2

Trayectoria	...	...	...	...	...	...
i	ς_i^1	ς_i^2	...	ς_i^j	...	ς_i^N
...	...	...	...	...	...	...
M	ς_M^1	ς_M^2	...	ς_M^j	...	ς_M^N

A partir de $F_{T_x}[X]$ y de la tabla de números aleatorios, asignamos para cada asegurado y en cada trayectoria de la mortalidad un número determinado de años de supervivencia. De esta forma, a partir de ς_i^j hallaremos el número de años de supervivencia del j-ésimo asegurado en la trayectoria i-ésima, t_i^j , siendo éste:

$$t_i^j = \text{Min}_t \left| \sum_{r=0}^t q_x \geq \varsigma_i^j \right|$$

De esta forma, para cada una de las M trayectorias que son simuladas obtenemos los años enteros de supervivencia de cada uno de los N componentes del colectivo. Ello vendrá recogido en la siguiente tabla:

		Asegurado					
		1	2	...	j	...	N
Trayectoria	1	t_1^1	t_1^2	...	t_1^j	...	t_1^N
	2	t_2^1	t_2^2	...	t_2^j	...	t_2^N
	...	...	...	...	...	...	...
	i	t_i^1	t_i^2	...	t_i^j	...	t_i^N
	...	...	...	...	...	...	...
	M	t_M^1	t_M^2	...	t_M^j	...	t_M^N

A partir de este cuadro, para cada asegurado y cada trayectoria, deberemos cuantificar la pérdida que produce al asegurador que el asegurado j se mantenga con vida t_i^j años. Para el asegurado j en la trayectoria i, ésta vendrá dada por:

$$\tilde{L}_{pt_i^j} = \tilde{Z}_i^j - P_p$$

donde hemos notado a $\tilde{Z}_i^j$ al valor actual de las prestaciones que cobra el asegurado si vive t_i^j años, el cual vendrá dado por un número borroso, ya que el interés de valoración es borroso. De esta forma, $\tilde{L}_{pt_i^j}$ es un número borroso cuyos α -cortes y función de pertenencia son:

$$\tilde{L}_{pt_i^j} = \left\{ x / \mu_{\tilde{L}_{pt_i^j}}(x) \right\} = \left\{ L_{pt_i^j \alpha} = \left[L_{pt_i^j}^1(\alpha), L_{pt_i^j}^2(\alpha) \right] / 0 \leq \alpha \leq 1 \right\}$$

Hallándose sus α -cortes a través de los de $\tilde{Z}_i^j$, donde $Z_{i\alpha}^j = [Z_i^{1,j}(\alpha), Z_i^{2,j}(\alpha)]$, como:

$$L_{pt_i^j \alpha} = \left[L_{pt_i^j}^1(\alpha), L_{pt_i^j}^2(\alpha) \right] = [Z_i^{1,j}(\alpha), Z_i^{2,j}(\alpha)] - P_p$$

De esta forma, para los seguros unitarios estudiados, obtendríamos:

a) Para un capital de fallecimiento con vencimiento a la vista y duración 1 año:

$$\tilde{L}_{pt_i^j} = \begin{cases} \tilde{f}_1 - P_p & \text{si } t_i^j = 0 \\ -P_p & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo por tanto los extremos de sus α -cortes:

$$L_{pt_i^j}^r(\alpha) = \begin{cases} f_1^r(\alpha) - P_p & \text{si } t_i^j = 0 \\ -P_p & \text{en otro caso} \end{cases}, r=1,2.$$

b) Para un capital diferido con vencimiento a t años:

$$\tilde{L}_{pt_i^j} = \begin{cases} \tilde{f}_t - P_p & \text{si } t_i^j \geq t \\ -P_p & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo entonces los extremos de sus α -cortes para $r=1,2$:

$$L_{pt_i^j}^r(\alpha) = \begin{cases} f_t^r(\alpha) - P_p & \text{si } t_i^j \geq t \\ -P_p & \text{en otro caso} \end{cases}$$

c) Para un seguro de vida entera:

$$\tilde{L}_{pt_i^j} = \tilde{f}_{t_i^j+1} - P_p$$

siendo entonces los extremos de sus α -cortes:

$$L_{pt_i^j}^r(\alpha) = f_{t_i^j+1}^r(\alpha) - P_p, r=1,2.$$

d) Para un seguro temporal de duración n años:

$$\tilde{L}_{pt_i^j} = \begin{cases} \tilde{f}_{t_i^j+1} - P_p & \text{si } t_i^j \leq n-1 \\ -P_p & \text{en otro caso} \end{cases}$$

obteniéndose entonces:

$$L_{pt_i^j}^r(\alpha) = \begin{cases} f_{t_i^j+1}^r(\alpha) - P_p & \text{si } t_i^j \leq n-1 \\ -P_p & \text{en otro caso} \end{cases}, r=1,2$$

e) Para un seguro mixto de duración n años:

$$\tilde{L}_{pt_i^j} = \begin{cases} \tilde{f}_{t_i^j+1} - P_p & \text{si } t_i^j \leq n-1 \\ \tilde{f}_n - P_p & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y los extremos de los α -cortes de $\tilde{L}_{pt_i^j}$ son:

$$L_{pt_i^j}^r(\alpha) = \begin{cases} f_{t_i^j+1}^r(\alpha) - P_p & \text{si } t_i^j \leq n-1 \\ f_n^r(\alpha) - P_p & \text{en otro caso} \end{cases}, r=1,2$$

f) Para una renta anticipada, vitalicia y que presenta un diferimiento de d años:

$$\tilde{L}_{pt_i^j} = \begin{cases} -P_p & \text{si } t_i^j < d \\ \sum_{j=d}^{t_i^j} \tilde{f}_j - P_p & \text{en otro caso} \end{cases}$$

viniendo dados entonces $L_{pt_i^j, \alpha}$ por su extremo inferior y superior, que son:

$$\tilde{L}_{pt_i^j}^r(\alpha) = \begin{cases} -P_p & \text{si } t_i^j < d \\ \sum_{j=d}^{t_i^j} f_j^r(\alpha) - P_p & \text{en otro caso} \end{cases}$$

g) Para una renta anticipada, temporal, de duración n años, y que presenta un diferimiento de d años:

$$\tilde{L}_{pt_i^j} = \begin{cases} -P_p & \text{si } t_i^j < d \\ \sum_{j=d}^{t_i^j} \tilde{f}_j - P_p & \text{si } d \leq t_i^j < d+n-1 \\ \sum_{j=d}^{d+n-1} \tilde{f}_j - P_p & \text{si } t_i^j \geq d+n-1 \end{cases}, r=1,2.$$

Y sus α -cortes se obtienen como:

$$L_{pt_i^j}^r(\alpha) = \begin{cases} -P_p & \text{si } t_i^j < d \\ \sum_{j=d}^{t_i^j} f_j^r(\alpha) - P_p & \text{si } d \leq t_i^j < d+n-1 \\ \sum_{j=d}^{d+n-1} f_j^r(\alpha) - P_p & \text{si } t_i^j \geq d+n-1 \end{cases} \quad r=, 1, 2.$$

De esta forma, las pérdidas que sufre cada asegurador para cada trayectoria y asegurado vendrán dadas en la siguiente tabla:

		Asegurado					
		1	2	...	j	...	N
Trayectoria	1	$\tilde{L}_{pt_1^1}$	$\tilde{L}_{pt_1^2}$	...	$\tilde{L}_{pt_1^j}$	...	$\tilde{L}_{pt_1^N}$
	2	$\tilde{L}_{pt_2^1}$	$\tilde{L}_{pt_2^2}$	...	$\tilde{L}_{pt_2^j}$	...	$\tilde{L}_{pt_2^N}$
	...	...	...	...	...	...	...
	i	$\tilde{L}_{pt_i^1}$	$\tilde{L}_{pt_i^2}$	...	$\tilde{L}_{pt_i^j}$	...	$\tilde{L}_{pt_i^N}$
	...	...	...	...	...	...	...
	M	$\tilde{L}_{pt_M^1}$	$\tilde{L}_{pt_M^2}$	...	$\tilde{L}_{pt_M^j}$	...	$\tilde{L}_{pt_M^N}$

Así, estamos en disposición de hallar el valor actual de las pérdidas que sufre el asegurador con el colectivo si la siniestralidad siguiera la trayectoria número i. Éste será un número borroso $\tilde{L}_{pi}^C$, el cual se obtiene como:

$$\tilde{L}_{pi}^C = \sum_{j=1}^N \tilde{L}_{pt_i^j} = \sum_{j=1}^N \tilde{Z}_i^j - N \cdot P_p$$

siendo sus α -cortes, $L_{pi\alpha}^C$:

$$L_{pi\alpha}^C = [L_{pi}^{1,C}(\alpha), L_{pi}^{2,C}(\alpha)] = \left[\sum_{j=1}^N L_{pt_i^j}^1(\alpha), \sum_{j=1}^N L_{pt_i^j}^2(\alpha) \right] = \left[\sum_{j=1}^N Z_i^{1,j}(\alpha), \sum_{j=1}^N Z_i^{2,j}(\alpha) \right] - NP_p$$

De esta forma, la variable borroso aleatoria $\hat{\tilde{L}}_p^C$, la cual no es más que una aproximación de $\tilde{L}_p^C$, vendrá dada por sus realizaciones, $\tilde{L}_{pi}^C$, $i=1,2,\dots,M$, que son equiprobables, es decir, tienen como probabilidad asociada $\frac{1}{M}$. Así, las funciones de cuantía inferiores y superiores para un nivel α de $\hat{\tilde{L}}_p^C$, vendrán dadas por:

$$\hat{L}_p^{1,C}(\alpha) = \hat{L}_{pi}^{1,C}(\alpha) \text{ con } \frac{1}{M}, i = 1, \dots, M.$$

$$\hat{L}_p^{2,C}(\alpha) = \hat{L}_{pi}^{2,C}(\alpha) \text{ con } \frac{1}{M}, i = 1, \dots, M.$$

6.3. ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE LA VARIABLE BORROSO ALEATORIA PÉRDIDA PARA UNA CARTERA DE PÓLIZAS IDÉNTICAS TRAS HABERSE COBRADO LA PRIMA PURA ÚNICA. FIJACIÓN DEL RECARGO DE SEGURIDAD

Como en el caso de un único asegurado, utilizaremos en nuestro análisis las variables aleatorias inferior y superior que definen a $\hat{\tilde{L}}_p^C$, $\hat{L}_p^{1,C}(\alpha)$ y $\hat{L}_p^{2,C}(\alpha)$ respectivamente. Para el análisis que pretendemos llevar a cabo, será útil presentar sus funciones de cuantía con las realizaciones ya expresadas en orden creciente. Así reformularemos las variables aleatorias inferior y superior de la pérdida para el asegurador con todo el colectivo como:

$$\hat{L}_p^{i,C}(\alpha) = \hat{L}_{pr}^{i,C}(\alpha) \text{ con } \frac{1}{M}, r = 1, \dots, M, \quad i = 1, 2.$$

y donde $\hat{L}_{pr}^{1,C}(\alpha) \leq \hat{L}_{pr+1}^{1,C}(\alpha)$. En esta variable borroso aleatoria no podemos asegurar que el extremo inferior (o superior) del α -corte de una determinada realización ocupe la misma posición en la ordenación para todos los niveles de presunción que sean tomados, y por supuesto, el orden que ocupe uno de los extremos (por ejemplo el inferior) no necesariamente coincidirá con el orden que ocupe el otro (por ejemplo, el superior).

Así, la función de distribución borrosa de la pérdida que genera el colectivo asegurado para un valor del recargo colectivo X^C dado y cierto, $\hat{F}^C[X^C]$, será un número borroso discreto, ya que su referencial es $\{0, \frac{1}{M}, \frac{2}{M}, \dots, \frac{M}{M}\}$. Para un nivel de presunción dado, la probabilidad acumulada

por X^C vendrá dada por sus α -cortes, $\hat{F}^C[X^C]_\alpha$. La función de distribución inferior de dicho α -corte $\hat{F}^{1,C}[X^C](\alpha)$, vendrá dada por la variable aleatoria superior $\hat{L}_p^{2,C}(\alpha)$, y la superior $\hat{F}^{2,C}[X^C](\alpha)$, vendrá dada por la variable aleatoria inferior asociada a dicho nivel de presunción $\hat{L}_p^{1,C}(\alpha)$. Así, para $i=1,2$, obtenemos las funciones de distribución inferior y superior como:

$$F^{3-i}[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X^C < L_{pr}^i(\alpha) \\ \frac{r}{M} & \text{si } L_{pr}^i(\alpha) \leq X < L_{p(r+1)}^i(\alpha), r = 1, 2, \dots, M-1 \\ 1 & X^C \geq L_{pM}^i(\alpha), r = M \end{cases}$$

Y a partir de ésta, hallamos los α -cortes de los $1-\varepsilon$ cuantiles, $\hat{Q}^{\varepsilon,C}$ notándose estos intervalos de confianza como $\hat{Q}_\alpha^{\varepsilon,C} = [\hat{Q}^{1\varepsilon,C}(\alpha), \hat{Q}^{2\varepsilon,C}(\alpha)]$. En concreto, $\hat{Q}_\alpha^{\varepsilon,C}$ es, dependiendo de la probabilidad de insolvencia ε que se tome:

$$\text{Si } \frac{r}{M} < 1-\varepsilon \leq \frac{r+1}{M} : \\ \hat{Q}_\alpha^{\varepsilon,C} = [L_{p(r+1)}^{1,C}(\alpha), L_{p(r+1)}^{2,C}(\alpha)](\alpha), r=0, \dots, M-1.$$

Una vez hemos elegido el nivel ε para el cual pretendemos asegurar la solvencia del asegurador, deberemos hallar la cuantía borrosa a repercutir al asegurado, $\tilde{Q}^\varepsilon = \frac{\hat{Q}^{\varepsilon,C}}{N}$. Para un nivel de aversión al riesgo de interés β' del asegurador, la cuantía a repercutir en concepto de recargo para desviaciones de siniestralidad, vendrá dada por su valor esperado para dicho nivel de aversión β' , y será, si hemos tomado un ε tal que $\frac{r}{M} < 1-\varepsilon \leq \frac{r+1}{M}$:

$$Q^\varepsilon = \frac{1}{N} \left[(1-\beta') \int_0^1 L_{p(r+1)}^{1,C}(\alpha) d\alpha + \beta' \int_0^1 L_{p(r+1)}^{2,C}(\alpha) d\alpha \right], r=0, \dots, M-1.$$

6.4. APLICACIONES NUMÉRICAS

Analizamos a continuación el proceso a seguir para la fijación de las primas únicas correspondientes a un seguro de vida entera asociado a unos colectivos de $N_1=5$ y $N_2=10$ individuos de 35 años y con un capital asegurado en caso de fallecimiento de 1000 unidades monetarias. La fijación de la prima única para éste contrato ya fue analizado, bajo la hipótesis de un único asegurado en cartera, en el apartado 4.4. de esta parte de la tesis, y suponiendo un

colectivo elevado en el apartado 5.4. Como siempre, se ha supuesto un interés técnico $\tilde{i} = (0'02, 0'03, 0'05)$ aplicable durante toda la vida del contrato y se han tomado las tablas de mortalidad PEM-82. Asimismo, el número de trayectorias simuladas para ambos colectivos han sido $M=100$. Como en el apartado 5.4., analizaremos:

- La solvencia del asegurador en el caso en que únicamente cobre a cada individuo del colectivo la prima pura con un coeficiente $\beta=0'75$.
- La determinación del recargo para desviaciones de siniestralidad, tomándose también $\beta'=0'75$. En este caso consideraremos una probabilidad de insolvencia $\varepsilon=0'05$.
- La posición de solvencia del asegurador después de haber cargado $Q^{0'05}$ a la prima pura de todos los asegurados.

Respecto a los datos más relevantes de este seguro, ya presentados en anteriores epígrafes, si la cartera se componía de un único individuo, es:

$P_p(\beta=0'75)$	$V^*[L_p]$	$D^*[L_p]$	$Q^{0'05}$	$Q^{0'05}/P_p \cdot 100$	$Q^{0'05}/V^*[L_p] \cdot 100$	$Q^{0'05}/D^*[L_p] \cdot 100$
320'95	18906'87	137'5	277'29	84'46%	1'47%	201'67%

Asimismo los resultados obtenidos para colectivos de 50 y 100 personas eran:

	$Q^{0'05}$	$Q^{0'05}/P_p \cdot 100$	$Q^{0'05}/V^*[L_p] \cdot 100$	$Q^{0'05}/D^*[L_p] \cdot 100$
$N1=50$	38,97	12%	0,21%	28%
$N2=100$	29,89	9%	0,16%	22%

Para los dos colectivos que analizaremos, observamos que el encaje de primas puras es, en el primero ($N1=5$): $320'95 \cdot 5 = 1604'75$; y para el segundo ($N2=10$): $320'95 \cdot 10 = 3209'5$.

Hallamos a continuación $\hat{F}^C[0]$, para ambos colectivos. Esta función será expresada a través de sus α -cortes, $\hat{F}^C[0]_\alpha$, que vendrán delimitados por el extremo inferior $\hat{F}^{1,C}[0](\alpha)$ y el superior $\hat{F}^{2,C}[0](\alpha)$. Así, la función de distribución, $\hat{F}^C[0]$, nos informará sobre la solvencia del asegurador si no cobra ningún recargo para desviaciones de siniestralidad.

	$N1=5$		$N2=10$	
α	$\hat{F}^{1,C}[0](\alpha)$	$\hat{F}^{2,C}[0](\alpha)$	$\hat{F}^{1,C}[0](\alpha)$	$\hat{F}^{2,C}[0](\alpha)$
0	0'01	0'98	0	1
0,1	0'01	0'98	0	1
0,2	0'02	0'98	0	1
0,3	0'06	0'98	0'4	0'99
0,4	0'1	0'98	0'11	0'99

0,5	0'15	0'97	0'17	0'97
0,6	0'23	0'93	0'27	0'96
0,7	0'32	0'88	0'43	0'96
0,8	0'47	0'84	0'49	0'92
0,9	0'55	0'78	0'62	0'81
1	0'63	0'63	0'68	0'68

A continuación analizamos como fijar los recargos para conseguir que la probabilidad de pérdida sea $\varepsilon=5\%$. Para ello obtenemos en los dos casos $Q_{\alpha}^{0'05,C}$ y $Q_{\alpha}^{0'05}$.

N1=5

α	$\hat{Q}^{1,0'05,C}(\alpha)$	$\hat{Q}^{2,0'05,C}(\alpha)$	$Q^{1,0'05}(\alpha)$	$Q^{2,0'05}(\alpha)$
0	-359,65	1055,99	-108,63	180,67
0,1	-315,63	980,48	-97,38	164,94
0,2	-252,57	907,75	-85,35	149,82
0,3	-182,76	837,69	-72,49	135,27
0,4	-109,57	770,19	-58,73	121,28
0,5	-34,96	705,14	-43,98	107,82
0,6	41,44	642,43	-28,18	94,86
0,7	124,95	581,98	-11,21	82,39
0,8	214,40	523,67	7,01	70,38
0,9	310,29	467,44	26,60	58,82
1	413,18	413,18	47,68	47,68

N2=10

α	$\hat{Q}^{1,0'05,C}(\alpha)$	$\hat{Q}^{2,0'05,C}(\alpha)$	$Q^{1,0'05}(\alpha)$	$Q^{2,0'05}(\alpha)$
0	-1086,31	1806,70	-71,93	211,20
0,1	-973,75	1649,40	-63,13	196,10
0,2	-853,50	1498,16	-50,51	181,55
0,3	-724,90	1352,71	-36,55	167,54
0,4	-587,27	1212,80	-21,91	154,04
0,5	-439,85	1078,18	-6,99	141,03
0,6	-281,78	948,62	8,29	128,49
0,7	-112,14	823,90	24,99	116,40
0,8	70,06	703,82	42,88	104,73
0,9	265,96	588,17	62,06	93,49
1	476,76	476,76	82,64	82,64

Para hallar el valor del recargo a aplicar, aproximamos el intervalo esperado de $\tilde{Q}^{\varepsilon}$, Q^{ε} , de la forma comentada en el epígrafe 6.4. Como trabajaremos con una escala endecadaria, observamos que los extremos inferior y superior del intervalo esperado vendrán dados aproximadamente por:

$$E^i[\tilde{Q}^{\varepsilon}] \approx \frac{1}{11} \sum_{i=0}^n Q^{i\varepsilon} \left(\frac{i}{10} \right), i=1,2.$$

De esta forma, los resultados que se obtienen, si el recargo individual, $Q^{0'05}$, se fija aplicando un parámetro $\beta'=0'75$ sobre $EI[\tilde{Q}^{0'05}]$:

	$EI[\tilde{Q}^e]$	$Q^{0'05}$	P_R	$Q^{0'05}/P_p \cdot 100$	$Q^{0'05}/V^*[L_p] \cdot 100$	$Q^{0'05}/D^*[L_p] \cdot 100$
N1=5	[-2,74, 143,38]	106,85	427,8	33,29%	0,57%	77,71%
N2=10	[-38,61, 110,36]	73,12	394,07	22,78%	0,39%	53,18%

Podemos observar en este cuadro, y en los que resumíamos el valor de las magnitudes más relevantes respecto al recargo a aplicar para un único asegurado en cartera, y las obtenidas en el apartado 5.4., que a medida que aumenta el colectivo asegurado, el recargo a aplicar siempre tiende a disminuir.

A continuación hallamos los extremos de los α -cortes de $\hat{F}^c[106'85 \cdot 5]$ y $\hat{F}^c[73'12 \cdot 10]$ en los colectivos que estamos analizando. Éstos son:

	N1=5		N2=10	
α	$\hat{F}^{1,C}[534,25](\alpha)$	$\hat{F}^{2,C}[534,25](\alpha)$	$\hat{F}^{1,C}[73'12](\alpha)$	$\hat{F}^{2,C}[73'12](\alpha)$
0	0'33	1	0'16	1
0,1	0'52	1	0'24	1
0,2	0'65	1	0'44	1
0,3	0'76	1	0'57	1
0,4	0'82	0'99	0'67	1
0,5	0'85	0'99	0'76	1
0,6	0'9	0'99	0'85	1
0,7	0'93	0'99	0'92	1
0,8	0'95	0'98	0'96	0'98
0,9	0'98	0'98	0'96	0'97
1	0'98	0'98	0'96	0'96

Podemos comprobar nuevamente que, al elegirse $\beta'=0'75$, aseguramos un nivel de solvencia del 95% para escenarios moderadamente adversos en la rentabilidad obtenida con la inversión de las primas. Si fueran muy adversos (rentabilidades bajas, dentro de las que el asegurador estima como posibles), éste sufre un margen de intermediación negativo, y por tanto, su solvencia disminuye, pudiéndose enjugar únicamente el insuficiente rendimiento de la cartera activa con un comportamiento extremadamente benigno en la mortalidad. Esto es más acusado para el colectivo N2=10, ya que las pérdidas que en términos absolutos se producen por un escenario adverso del tipo de interés es mayor, y por tanto, la posición de solvencia de la compañía acaba siendo peor.

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

A continuación sintetizamos los resultados obtenidos en esta tesis que consideramos más importantes. Este apartado de conclusiones ha sido dividido, asimismo, en dos secciones: en la primera de ellas señalamos aquellas conclusiones que se pueden desprender directamente del trabajo realizado y en la segunda, exponemos las vías de investigación que, a nuestro juicio, han quedado abiertas para posteriores desarrollos.

1. CONCLUSIONES PROPIAS DE LA TESIS

Presentamos en este epígrafe las conclusiones que propiamente se pueden extraer de la tesis presentada, diferenciándose cada una de las tres partes que la conforman.

Parte I: Instrumentos matemáticos de la teoría de los subconjuntos borrosos

1. En la primera parte de la tesis hemos expuesto el instrumental matemático que utilizaremos para el desarrollo de la segunda y tercera parte, las cuales conforman el cuerpo del trabajo. Algunos tópicos como la aproximación triangular de números borrosos, resolución de ecuaciones borrosas, etc. o el apartado de valoración financiera con incertidumbre en las magnitudes, son necesarios para el desarrollo de toda la tesis, y otros, como la regresión borrosa o el concepto de variable borroso aleatoria son específicos de alguna de las partes de la tesis. En cualquier caso, no hemos pretendido ser exhaustivos ya que nuestro interés se centraba, únicamente, en exponer los instrumentos matemáticos necesarios para llevar a cabo el desarrollo de las dos últimas partes del trabajo.
2. La única aportación de esta parte de la tesis es el estudio realizado sobre la viabilidad de la aproximación triangular del valor actual de capitales y de las rentas financieras cuando partimos de un interés o intereses de valoración triangulares, de forma que dicha aproximación mantenga el núcleo y el soporte del número borroso original. Para ello hemos utilizado la metodología propuesta por Jiménez y Rivas complementada con algunos resultados obtenidos por Terceño *et al.* (1994), (1995) y (1997) respecto a la aproximación triangular de determinadas magnitudes financieras cuando los datos de partida vienen dados por números borrosos triangulares.

Hemos observado que, aunque la aproximación triangular al valor actual de las rentas es buena, dicha aproximación para el valor actual de capitales con vencimientos alejados (a partir de 30 años, por ejemplo) y si tomamos como referencia una escala de verdad relativamente detallada, puede no ser válida, vencimientos por otra parte típicos, por ejemplo, en los seguros de vida. Sin embargo, este problema no es tan acusado para el valor actual de rentas financieras, ya que en este caso, los errores que se comenten al aproximar triangularmente el valor actual de los capitales con mayor diferimiento, que serán más elevados, son compensados con los cometidos al aproximar triangularmente el valor actual de los capitales con vencimiento más cercano en el tiempo, más pequeños.

Parte II: Estimación de la estructura temporal de los tipos de interés a través de subconjuntos borrosos y estimación de los tipos de interés futuros

1. Aunque ya hemos señalado que la valoración financiera y financiero-actuarial utilizando tipos de interés borrosos ya había sido tratada, creemos que el problema que implica la estimación de dichos intereses había sido objeto de poca atención. En la segunda parte de la tesis se ha pretendido, en la medida de lo posible, dar una solución a este problema ofreciéndose una serie de propuestas. Éstas se han basado en la estimación de una estructura temporal de los tipos de interés borrosa para los instrumentos de deuda pública –por tanto, libres de riesgo de insolvencia-, ya que ésta recoge implícitamente las expectativas de los agentes que actúan en los mercados de renta fija –asimilables a los “expertos”- sobre la evolución de los tipos de interés futuros. Los tipos de interés forward que define la ETTI serán los que asimilemos a los tipos de interés futuros, ya que éstos pueden ser interpretados como los anticipados por el mercado para el futuro.

Esta metodología de estimación de los tipos futuros implica asumir la teoría de las expectativas racionales como la teoría explicativa de la ETTI, con todas sus virtudes y debilidades. Bajo esta hipótesis, los tipos spot o al contado son la media geométrica –si utilizamos el régimen financiero de interés compuesto- de los tipos que regirán en el futuro, aceptándose, pues, que los tipos forward son un estimador perfecto de los tipos al contado futuro.

2. También hemos mostrado que la estimación de la ETTI con instrumentos de regresión borrosa, ofrece diversas ventajas metodológicas respecto a la utilización de los métodos econométricos convencionales:
 - a) Los precios de los instrumentos de deuda (de los activos financieros en general) no suelen manifestarse, en una sesión, como valores únicos, sino como una horquilla de valores. Al contrario de lo que ocurre utilizando métodos econométricos, con los instrumentos de

regresión borrosa podemos trabajar con toda la horquilla de precios, no incurriéndose en este caso en ninguna pérdida de información.

- b) En segundo lugar, la teoría de los subconjuntos borrosos es un instrumento más adecuado que la econometría para tratar información con un componente subjetivo elevado. En este sentido, si aceptamos que los precios de los activos financieros son un reflejo de las expectativas de los agentes económicos que los negocian, debemos aceptar el fuerte contenido subjetivo que implica su formación y fijación y la mayor adecuación de los instrumentos borrosos respecto a los econométricos para su tratamiento.
 - c) Asimismo, desde el punto de vista de la operatividad de los resultados que se obtengan para posteriores utilidades, los instrumentos borrosos permiten manejar con mayor facilidad toda la información de que se dispone. Es por ello que los métodos estadísticos en muchas ocasiones reducen, por razones de operatividad, las variables aleatorias a su esperanza matemática, con la consiguiente pérdida de información que ello comporta, cuestión que no es necesaria si dicha información viene cuantificada por números borrosos
3. Los métodos propuestos para la estimación de la ETTI se han inspirado en algunos modelos econométricos ya existentes, y se ha utilizado para su implementación el modelo de regresión borrosa de Tanaka e Ishibuchi. Los métodos propuestos permiten obtener los tipos al contado a través de cualquier número borroso L-L de Dubois y Prade –con la misma función forma a la derecha y a la izquierda-. Por su mayor operatividad e interpretación intuitiva hacemos un análisis particular en que la ETTI sea cuantificada a través de números borrosos triangulares.
4. Dentro de los métodos propuestos, podemos encontrar dos tipologías:
- a) Los basados en la estimación de la curva de rentabilidades, que consiste en determinar una relación funcional, en nuestro caso de tipo borroso, que relacione la TIR de los bonos y obligaciones del estado con sus vencimientos.
 - b) Los basados en la estimación directa de la función de descuento que describe la ETTI.

Si se pretende llegar a la obtención final de la ETTI, el grupo de metodologías mencionadas en a) debe ser complementada para eliminar el sesgo de cupón con la técnica del bono par, la cual ha sido adaptada al supuesto de incertidumbre. En nuestro caso, los teóricos bonos que cotizan a la par y cuyo vencimiento es el de los tipos al contado que debemos obtener, no se negociarán exactamente a la par, sino "aproximadamente a la par" ya que la TIR de éstos se manifiesta a través de números borrosos y no de valores ciertos, y por tanto, sus precios también lo serán. En cualquier caso, creemos que ello es más realista si observamos el funcionamiento de los mercados, ya que normalmente el precio de los bonos –y por tanto, su TIR-, suele manifestarse como una horquilla de valores.

Al utilizar la metodología del bono par, la obtención de los tipos spot es, desde el punto de vista matemático, un problema de resolución de sistemas de ecuaciones con coeficientes borrosos, que puede ser resuelto recursivamente solucionando ecuaciones borrosas del tipo $\tilde{A} + \tilde{X} = \tilde{B}$. Para la determinación de su solución se ha propuesto aplicar el concepto clásico de solución de ecuaciones borrosas, ya que de esta forma no se incrementa innecesariamente la incertidumbre, y se ha expuesto las condiciones para que dicha solución exista. Si no existe solución en sentido clásico, utilizaremos la solución de ecuaciones borrosas de Buckley y Qu, que siempre pueden hallarse. Asimismo, este grupo de metodologías sólo permite obtener una ETTI de tipo discreto, de forma que únicamente conoceremos el tipo al contado para vencimientos discretos, siendo dichos vencimientos los de los bonos par que hayan sido tomados en la estimación de la ETTI.

Respecto al segundo tipo de metodologías, se han inspirado en las pertenecientes a la familia de los splines. En concreto, hemos adaptado el método de McCulloch –basado en la utilización de splines polinómicos- y el de Vasicek y Fong –basado en la utilización de splines exponenciales- al supuesto en que utilizamos en la estimación de la ETTI métodos de regresión borrosos. En este caso, los coeficientes de la función de descuento que definen los tipos al contado son números borrosos. Con estos métodos podemos definir una ETTI borrosa de tipo continuo, y adicionalmente no debemos enfrentarnos al problema que implicaría la resolución de ecuaciones borrosas.

5. Sea cual sea el método utilizado en la estimación de la ETTI, una elección importante es el nivel α al que implementamos la regresión. Dicho grado de presunción puede ser interpretado como el grado de incertidumbre que el decisor detecta en los mercados. Si la regresión se realiza para un nivel $\alpha=0$, éste considera que el espectro de precios negociados está acorde con la incertidumbre existente. Si incrementa dicho nivel de presunción, lo cual implica percibir mayor incertidumbre, la borrosidad de la ETTI aumenta, y por tanto la incertidumbre de las magnitudes y variables que sean obtenidas a partir de ella también deberá aumentar.
6. Asimismo, todos los métodos propuestos han sido utilizados para la estimación de la ETTI correspondiente a una sesión concreta – el 21/1/1999- con el fin de comprobar, en primer lugar, si son realmente aplicables, y en segundo lugar, si los resultados que se obtiene son razonables. Esta segunda característica se ha analizado midiendo el nivel de presunción de las estimaciones obtenidas económicamente en las correspondientes borrosas. De forma general, consideramos que los resultados obtenidos son satisfactorios sea cual sea la metodología utilizada a la vez que

los resultados obtenidos aportan mayor información que los obtenidos con las herramientas clásicas.

7. Se ha hecho un estudio particular para la estimación de la ETTI a través de números borrosos triangulares. Si bien, sea cual sea el método utilizado en la estimación de la ETTI, no podemos obtener directamente los tipos al contado como números borrosos triangulares, en la aplicación empírica efectuada hemos comprobado que su aproximación triangular es más que satisfactoria.
8. Finalmente hemos analizado como determinar los tipos forward, asimilables a los que se anticipan en el mercado para el futuro, a partir de una ETTI borrosa. Dichos tipos serán también números borrosos, y su estimación puede reducirse desde el punto de vista matemático, a un problema de desconvolución del producto de dos números borrosos. Si partimos de una ETTI estimada a través de la curva de rentabilidades, proponemos como método de obtención de los tipos forward, el concepto clásico de resolución de ecuaciones borrosas, y asimismo, se indica bajo que condiciones existe dicha solución. En caso de no existir solución en sentido clásico, proponemos utilizar la solución de ecuaciones borrosas propuesta por Buckley y Qu, que si bien, siempre existe, aportará mayor incertidumbre a los tipos obtenidos para el futuro e incluso puede provocar que su valor no tenga sentido financiero –se obtengan tipos de interés negativos con un nivel de presunción superior a cero-. Sin embargo, si partimos de una ETTI estimada a través del factor de descuento que definen los tipos implícitos, y las funciones del tiempo utilizadas para construir dicho factor de descuento son no decrecientes y no negativas, podemos observar que en este caso la solución en sentido clásico siempre existe.
9. Hemos hecho un análisis particular en la estimación de los tipos futuros partiendo de una estimación de los tipos spot a través de números borrosos triangulares. Si bien, los tipos implícitos no serán triangulares, en la aplicación empírica analizada hemos comprobado que sea cual sea la metodología de estimación de la ETTI de la que partamos, la aproximación triangular de los tipos esperados por el mercado es muy satisfactoria.
10. Los desarrollos expuestos para estimar los tipos forward han sido aplicados a la determinación de los tipos de interés a un año estimados en el mercado de deuda pública con la ETTI obtenida el 21/1/1999. En este caso también hemos medido la congruencia de la estimación realizada en certeza con la efectuada con nuestros métodos, siendo los resultados obtenidos, en general, satisfactorios.
11. Si nos tenemos que decantar por una de las dos líneas metodológicas propuestas para la estimación de los tipos futuros, nosotros nos decantaríamos por la basada en la estimación directa

de la función de descuento que define la ETTI. En primer lugar, porque permite obtener una ETTI continua y además de forma directa, no siendo necesario recurrir a la técnica del bono par, que hace más tortuosa la estimación final de los tipos al contado. Por otra parte, al estimar la ETTI a través de la curva de rentabilidades, si bien el sesgo que incorpora el cobro de cupones en la rentabilidad interna de un título con un determinado vencimiento respecto al tipo al contado asociado a dicho vencimiento queda parcialmente eliminado al utilizar la técnica del bono par, éste no queda eliminado del todo. Dicho problema no existe si estimamos directamente la función de descuento que define la ETTI. Asimismo, la estimación de la ETTI como una función borrosa continua del tiempo permite obtener los tipos forward como funciones continuas del tiempo, lo cual no es posible partiendo de las estimaciones borrosas de la curva de rentabilidades. Al mismo tiempo, con la línea metodológica de los splines, si especificamos de forma adecuada éstos, podemos asegurar que no obtendremos tipos forward negativos, lo cual podría ocurrir si partimos de la estimación de la curva de rentabilidades.

Parte III: Análisis de la determinación de las primas en los seguros de vida y de la solvencia dinámica cuando los tipos de interés de valoración vienen estimados a través de números borrosos

1. En este apartado de la tesis y sobre la base del concepto de variable borroso aleatoria, hemos propuesto una metodología para el análisis de los seguros de vida, que si bien ha sido aplicada a la fijación de las primas puras únicas y de recargos sobre éstas, creemos que también puede ser aplicada sin excesivas modificaciones a la determinación de provisiones matemáticas y reservas de estabilidad para contratos ya iniciados. Esta metodología permite, asimismo, mantener toda la información inherente al comportamiento de la mortalidad –estocástico- y al del tipo de interés –borroso- en todos los análisis que se van desarrollando.
2. Hemos expuesto el tratamiento que damos al fenómeno de la mortalidad –el tratamiento clásico- y hemos propuesto diversos métodos que permiten estimar los intereses a utilizar en el proceso de valoración financiero actuarial a través de números borrosos. Dichos métodos pueden ser divididos en dos grandes grupos:
 - a) En primer lugar, hemos sugerido diversas alternativas orientadas a obtener un único tipo de interés técnico para todo el horizonte de valoración. Ello puede realizarse de dos maneras. La primera de ellas es suponer que el interés real a lo largo del plazo es siempre un intervalo. Así pues, la cuantificación de este parámetro como un número borroso es inmediata. Para obtener el interés técnico deberemos adicionar a dicho tipo la inflación media durante la duración del contrato, que deberá ser estimada subjetivamente por el actuario. Otra alternativa es ofrecer un interés ligado al que se espera obtener de la cartera

activa, que suele componerse en un porcentaje muy elevado de bonos y obligaciones del estado. Si se opta por este camino, el instrumento de referencia del que partimos es la estructura temporal de los tipos de interés borrosa. La hipótesis que sea realizada respecto a la reinversión de los flujos de la cartera activa nos acabará determinando un valor u otro para la rentabilidad que finalmente deba tomarse como referencia.

b) La segunda propuesta es valorar los flujos monetarios contemplados en el contrato con un tipo de interés diferente en función de su vencimiento. Para ello también es indispensable partir de una ETTI de referencia. Los tipos de interés pueden ser los tipos al contado, de forma que cada flujo es descontado con el tipo de interés spot correspondiente a su vencimiento; o bien los tipos estimados para el futuro (tipos implícitos), de forma que cada cuantía contemplada en el contrato es descontada con los tipos forward que rijan hasta su vencimiento.

3. Somos conscientes que existían trabajos anteriores a la redacción de esta tesis sobre valoración financiero-actuarial que modelizaba la incertidumbre de los tipos de interés mediante números borrosos. Éstos se basaban en la utilización de la teoría estática de los seguros de vida, que consiste en reducir la aleatoriedad de los capitales asegurados a su esperanza matemática. Dicho enfoque no nos ha satisfecho del todo, ya que se perdía gran parte de la información relativa al fenómeno de la mortalidad, de forma que con dicho enfoque es difícil realizar un análisis de la solvencia del asegurador o determinar de forma rigurosa desviaciones para la siniestralidad.

Sobre la base de estas consideraciones, hemos partido del denominado enfoque estocástico. Éste se basa, suponiéndose certeza en el tipo de interés valoratorio, en la variable aleatoria valor actual de las pérdidas para el asegurador tras cobrar una determinada prima. En esta tesis se adapta esta metodología de análisis al supuesto en que el interés o los intereses de valoración sean borrosos, por lo que las realizaciones del valor actual de las pérdidas serán borrosas, siendo entonces el valor actual de las pérdidas del asegurador, una variable borroso aleatoria.

4. Hemos realizado un análisis del valor actual de determinadas estructuras actuariales aplicando el enfoque estocástico y suponiéndose certeza en el tipo o los tipos de interés de valoración. Aunque hemos supuesto que las estructuras son unitarias, los resultados obtenidos pueden hacerse extensibles, siempre, si las cuantías son constantes, y casi siempre, si éstas varían en progresión geométrica. Asimismo, analizamos el comportamiento de la media, la varianza y la desviación estándar de dichos valores actuales respecto al interés o intereses de actualización. Ello nos facilitará la posterior aplicación de números borrosos en la determinación de estas magnitudes, especialmente cuando determinemos sus α -cortes. En concreto hemos comprobado:

- a) Para cualquier estructura actuarial, la esperanza matemática del valor actual de las prestaciones es siempre una función decreciente respecto al tipo de interés.
 - b) La varianza y la desviación estándar del valor actual de capitales de supervivencia o fallecimiento y de las rentas de supervivencia son también funciones decrecientes del tipo o los tipos de interés de valoración.
 - c) La varianza y la desviación estándar del valor actual de las estructuras tipo seguro vida entera y temporal y de los seguros mixtos no son monótonas respecto al tipo de interés. Sin embargo, si calculamos los valores actuales con tipo de interés constante, las diversas simulaciones efectuadas indican que para tipos de interés no negativos existe únicamente un máximo global.
5. El mismo análisis se ha realizado suponiendo que la valoración de las prestaciones se realizaba con un interés o intereses estimados mediante números borrosos. En este caso, el valor actual de las estructuras actuariales es una variable borroso aleatoria. Ésta puede ser descrita a través de su función de pertenencia, que indica el nivel de presunción de cada variable aleatoria valor actual de las prestaciones, la cual vendrá dada por una trayectoria concreta dentro de las posibles que puede tomar el tipo de interés a lo largo de la duración del seguro. Sin embargo, será más operativo realizar el análisis del valor actual de las prestaciones a través de conjuntos de nivel. Así, para un nivel de presunción dado, podremos definir una variable aleatoria inferior, que vendrá determinada por la trayectoria superior de los tipos de interés que posea al menos dicho nivel de presunción, y por una variable aleatoria superior, que vendrá dada por la trayectoria inferior que puedan tomar los tipos de interés que posean dicho grado de pertenencia.
6. Para el valor actual de los capitales de supervivencia, de fallecimiento y de las rentas actuariales, la determinación de los α -cortes de la esperanza matemática, de la varianza y de la desviación estándar borrosas es inmediata, ya que la relación existente entre dichos parámetros y el interés de actualización es decreciente. Así el extremo inferior de los α -cortes se halla a través de las trayectorias superiores de los tipos de interés con dicho nivel de presunción y viceversa. Sin embargo, en el seguro vida entera, en el seguro temporal y en el seguro mixto, aunque la afirmación anterior puede hacerse extensible a la determinación de la esperanza matemática del valor actual de las prestaciones, no puede afirmarse para la varianza y desviación estándar borrosas, ya que no existe un comportamiento monótono de la dispersión respecto al tipo de interés. Así pues, en la determinación de los α -cortes de dichos parámetros deberá plantearse un programa de maximización con restricciones de desigualdad para obtener el extremo superior, y uno de minimización para obtener el extremo inferior, siendo por tanto la determinación de estos parámetros un problema farragoso desde el punto de vista computacional. Sin embargo, y bajo el supuesto de un tipo de interés borroso único para todo el proceso valoratorio, hemos diseñado una

metodología que, partiendo del conocimiento del tipo de interés en el que la varianza o la desviación estándar toman su máximo valor, permite simplificar enormemente el proceso de obtención de los α -cortes.

Por otra parte, para la variable borroso aleatoria valor actual de las contraprestaciones también hemos determinado la expresión de la varianza y desviación estándar ciertas, conceptos propuestos por Feng, y que se basan en el concepto de distancia cierta entre números borrosos.

7. De forma particular analizamos el supuesto en que se tome un único tipo de interés borroso para todo el horizonte evaluatorio y que éste sea triangular. En este caso, estudiaremos la bondad de la aproximación triangular de la esperanza, la varianza y la desviación estándar mediante números borrosos triangulares que mantengan el mismo núcleo y soporte del número borroso original. Respecto a la aproximación de la esperanza matemática, si bien es buena si la duración del seguro no es muy elevada, ésta empeora a medida que se incrementa la duración del mismo. Asimismo, la aproximación triangular de la esperanza matemática del valor actual de los capitales de supervivencia o de fallecimiento es peor que para seguros o rentas con el mismo vencimiento, ya que en este segundo caso los pequeños errores de los capitales más cercanos en el tiempo compensan los errores cometidos por aproximar triangularmente el valor actual de los más alejados. En los capitales de fallecimiento y supervivencia y en las rentas hemos comprobado que la aproximación triangular de la varianza es peor que la de la esperanza matemática, de forma que para pólizas con vencimientos medianamente alejados, la aproximación triangular si tomamos como referencia la escala endecadaria puede ser rechazada en muchas ocasiones. Asimismo, en este tipo de estructuras, la bondad de la aproximación triangular de la desviación estándar es similar al de la esperanza matemática. Por otra parte, en los seguros de vida, y por la forma que toman la varianza y la desviación estándar borrosas, podemos afirmar que no suele ser razonable aproximarlas mediante un número borroso triangular con el mismo soporte y núcleo.
8. Hemos analizado para cada estructura actuarial considerada la determinación de la prima pura única asociada a ésta, que será aquella que haga que la variable borroso aleatoria pérdida para el asegurador tenga una esperanza matemática nula, y debiendo ser entendido como nulo a un número borroso para el cual cero toma el máximo nivel de presunción. Como dicha prima pura única es la esperanza matemática del valor actual de las prestaciones, ésta es borrosa. Para acabar determinando la prima pura, deberemos desfuzzyficar la esperanza matemática. Para ello, proponemos utilizar el concepto de valor esperado de un número borroso, ya que se trata de un procedimiento que permite utilizar toda la información del número borroso e introducir la aversión al riesgo de interés para el asegurador de forma sencilla.

9. Partiendo de la variable borroso aleatoria valor actual de las pérdidas para el asegurador, podemos analizar la solvencia del asegurador, que se mide como la probabilidad de que existan pérdidas cobrando una determinada prima, y a través de la cual se podrán fijar recargos para desviaciones de la siniestralidad. Para determinar dichos recargos será necesario fijar en primer lugar, el nivel de solvencia que desea el asegurador, o, equivalentemente, determinar la probabilidad de pérdida que está dispuesto a soportar. El cuantil del valor actual de las pérdidas asociado a dicho nivel de solvencia, que será un número borroso, será en principio el recargo a aplicar. Para obtener el recargo final, es necesario reducir dicho número borroso a un valor cierto representativo, lo cual se realizará, por las razones ya comentadas, utilizando el concepto de valor esperado.

Un instrumento clave en la medición de la solvencia del asegurador será el análisis de la función de distribución del valor actual de las pérdidas. Ésta será un subconjunto borroso que asignará a las posibles posiciones de solvencia (la cual se mide como probabilidad de pérdida), que se obtienen aplicando un recargo determinado, un nivel de presunción, que vendrá dado por la trayectoria de los tipos de interés que determine dicha probabilidad de incurrir en pérdidas.

Para llevar a cabo el análisis descrito, hemos supuesto, en primer lugar, que la cartera de asegurados se compone de una única póliza. Si bien, no es un supuesto realista, creemos que permite exponer de forma clara, la metodología de análisis en posteriores supuestos. Asimismo este estudio motiva una descripción exhaustiva de la variable borroso aleatoria pérdida asociada a una póliza.

10. Posteriormente hemos considerado el supuesto de una cartera de pólizas homogéneas (iguales prestaciones aseguradas, edades y fecha de suscripción de las pólizas). Ello nos debe llevar, por el hecho de incrementarse el número de asegurados, a reducir el riesgo de mortalidad, ya que ésta debe tender a su valor esperado. Sin embargo, un incremento del colectivo asegurado implica aumentar en términos absolutos las pérdidas que el asegurador puede sufrir por el hecho de que la rentabilidad obtenida invirtiendo las primas sea inferior al interés que garantiza a los asegurados.

Para determinar los recargos a aplicar para desviaciones de la mortalidad y en el análisis de la solvencia, será necesario partir del valor actual de las pérdidas asociada a todo el colectivo, que se halla como agregación del valor actual de las pérdidas individuales, teniendo en cuenta que la posible trayectoria que puede tomar el tipo de interés a lo largo de toda la duración del seguro debe ser común a todo el colectivo asegurado y que la mortalidad es independiente para cada cabeza.

En este supuesto, una vez determinada la prima pura única, y cuando se haya determinado la probabilidad de pérdidas que el asegurador está dispuesto a aceptar, deberemos hallar el cuantil asociado a dicha probabilidad del valor actual de las pérdidas de todo el colectivo y desfuzzyficarlo. Ello nos permitirá hallar el recargo a repercutir a todo el colectivo. El recargo a repercutir a cada asegurado, obviamente, se hallará dividiendo dicho recargo colectivo por el número de integrantes del colectivo. Hemos comprobado, como cabría esperar, que el recargo final a repercutir para desviaciones de siniestralidad disminuye a medida que aumenta el colectivo asegurado, ya que al aumentar el colectivo, la mortalidad debe tender a comportarse según lo esperado.

Asimismo, tras la determinación de la prima finalmente repercutida a cada uno de los integrantes del colectivo (y por tanto, su suma), y una vez descrita la función de distribución de la variable borroso aleatoria valor actual de las pérdidas para todo el colectivo, puede realizarse un análisis ex-post de la posición de solvencia del asegurador tras cobrar la prima recargada. A través de la función de distribución de dicha variable borroso aleatoria podremos asignar a cada nivel de solvencia un grado de presunción, el cual vendrá dado por el de la trayectoria de los tipos de interés que determina dicha posición, y analizar hasta que punto, desviaciones negativas de la mortalidad pueden ser compensadas con las primas cobradas por comportamientos benignos del tipo de interés y viceversa.

11. En el análisis de valoración actuarial para todo el colectivo hemos considerado asimismo, dos supuestos. El primero de ellos es que el número de asegurados sea lo suficientemente elevado como para poder suponer que el valor actual de las pérdidas asociadas al colectivo y para cada trayectoria posible del tipo de interés puede aproximarse mediante una variable aleatoria normal; lo que permite utilizar los resultados de la teoría clásica del riesgo. En este caso, el valor actual de las pérdidas es una variable borroso aleatoria que puede describirse como un subconjunto borroso cuyo referencial es el conjunto de variables aleatorias normales. El nivel de presunción de cada variable aleatoria normal vendrá dado por el de la trayectoria del tipo de interés que genere dicho valor actual de las pérdidas.

Finalmente hemos supuesto que la cartera se compone de un número de pólizas idénticas que no es lo suficientemente elevado para adaptar los postulados de la teoría clásica del riesgo. En este caso, simulando estocásticamente el comportamiento de la mortalidad del colectivo para el que se estén fijando los recargos o se esté analizando la solvencia del asegurador, se propone generar la variable borroso aleatoria que cuantifica al valor actual de las pérdidas asociadas a todo el colectivo de forma empírica.

2. CONCLUSIONES PROYECTIVAS DE LA TESIS

A continuación exponemos someramente qué temas de los analizados creemos que deben ser motivo de posterior análisis y reflexión, y qué vías de investigación en temas relacionados con la tesis realizada o en temas afines pueden ser desarrollados.

1. Respecto a las metodologías propuestas para la estimación de los tipos de interés futuros, creemos que es necesario realizar un exhaustivo análisis empírico que permita obtener elementos de juicio sobre cual de los métodos expuestos es más adecuado. Dicho método debe permitir, por una parte, obtener unos tipos spot y tipos forward con comportamiento asintótico, es decir, que permita formas suaves para la ETTI, ya que a medida que aumenta el vencimiento, es lógico pensar que el decisor es menos capaz de discernir entre el interés correspondiente a un año y el siguiente. Otra característica del método elegido es que debe permitir obtener un buen ajuste de la ETTI, el cual se mide en el caso de utilizar una técnica de regresión borrosa a través de la incertidumbre de los valores que se obtienen de la variable dependiente tras ajustar los parámetros del hiperplano. Asimismo, y en un contexto de borrosidad, creemos que el método que sea elegido para estimar la ETTI debe proporcionar unos tipos al contado con mayor borrosidad – mayor radio- a medida que aumente su vencimiento, ya que éstos incorporan información sobre cada vez más tipos forward y asimismo presentan vencimientos más alejados. Asimismo, los tipos que se estiman para el futuro –tipos implícitos- también deben ser números borrosos más amplios a medida que el vencimiento al que correspondan sea posterior, ya que es de suponer que los agentes deben ser capaces de predecirlos peor y deben percibir en ellos más incertidumbre.
2. Una cuestión tangencial a la presente tesis, pero que creemos que debería ser abordada es analizar cual de las teorías explicativas de la ETTI (teoría de las expectativas racionales, teoría de las primas de liquidez, etc.) explica mejor su comportamiento. Dada las características de la información que deberá manejarse –subjetiva, observaciones cuantificadas como intervalos de confianza, etc.– creemos que la utilización de instrumentos borrosos, en lugar de los utilizados habitualmente para estas tareas como la econometría, podría proporcionar una nueva perspectiva a un tema que, aunque clásico, dista mucho de estar resuelto actualmente.
3. Respecto al tipo de seguros de vida tratados en la tercera parte de la tesis, una vía natural de investigación es la extensión de la metodología propuesta a una mayor variedad de tipos de contratos. Por una parte, implicaría introducir el supuesto de primas periódicas; por otra, debería incorporarse la borrosidad en las cuantías aseguradas –por ejemplo, si las prestaciones aseguradas se revalorizan en base algún índice relacionado con la inflación, o se trata de una operación de

contraseguro-, y asimismo, también supondría analizar seguros sobre más de una cabeza –por ejemplo, pensiones de viudedad-, o que cubran más sucesos que el fallecimiento y la supervivencia, como la invalidez, la morbilidad, etc. En cualquier caso, tenemos confianza en que la metodología propuesta puede ser extendible a estos supuestos.

4. Al realizar el análisis de los seguros de vida para colectivos homogéneos, se ha supuesto que cada uno de estos colectivos es un negocio absolutamente independiente. Una extensión lógica de esta tesis debe ser el análisis de la fijación de primas y el análisis de la solvencia del asegurador considerando todo el negocio en su conjunto, que está integrado por un conjunto de carteras con pólizas homogéneas entre sí, pero diferentes al del resto de colectivos. Contemplada la actividad aseguradora de esta forma, el riesgo de mortalidad del asegurador debe ser todavía menor, lo cual debe permitir fijar recargos menores que los que deben aplicarse si los calculamos para cada cartera por separado. Ello, por supuesto, llevaría a unos beneficios para el asegurado, ya que se le acabaría repercutiendo un recargo menor. El problema reside en como repartir dicha disminución del recargo, y por tanto, de la prima recargada. Esta cuestión no admite una resolución trivial, ya que unas clases de seguros incorporan mayor riesgo de siniestralidad o de interés que otros, y por tanto, dicho beneficio no debe repartirse a partes iguales entre todas las pólizas, sino que deberá realizarse en función de sus características. Asimismo, dicho análisis se complica si el recargo es, a priori, borroso.
6. Otra posible aplicación de la teoría de los subconjuntos borrosos al ámbito, no tan sólo de los seguros de vida, sino a la matemática actuarial en general, sería la aplicación de algún criterio de decisión borroso –por ejemplo, el de Bellman y Zadeh- en problemas de decisión que deben ser tomados sobre la base de objetivos múltiples. Esta problemática es típica, por ejemplo, en la determinación de la cuantía de negocio que el asegurador debe reasegurar, decisión en la cual intervienen variables como el grado de solvencia mínimo que se desea obtener, la cantidad de negocio que se considera que debería cederse como máximo –por supuesto, si se reasegura menos negocio, existirán unos mayores beneficios potenciales pero una mayor facilidad para llegar a la quiebra-, etc.
7. Otro aspecto que creemos que debe ser abordado, en la línea apuntada por G.W. de Witt en su trabajo “Underwriting and uncertainty” publicado en *Insurance: Mathematics and Economics* en 1982, es la incorporación en la tarificación y en la política de aceptación o no de riesgos de variables cualitativas como el tipo de profesión del asegurado –por ejemplo, las profesiones más arriesgadas implican probabilidades más elevadas de mortalidad-, el grado de adecuación de las cuantías aseguradas al nivel de ingresos del asegurado, etc. Dichos aspectos no pueden ser tratados con los instrumentos matemáticos propuestos, sino que serán más adecuadas las

matemáticas no numéricas de la incertidumbre, basadas en el concepto de relación borrosa. Así, creemos que la complementación de la metodología propuesta en esta tesis –esencialmente numérica-, con la modelización de variables cualitativas como las mencionadas con instrumentos de matemática no numérica, permitirá abordar de forma más realista y eficiente el problema de la valoración y análisis de la solvencia en los seguros de vida, y por extensión, en el resto de seguros.

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA

- ALEGRE, A.; CLARAMUNT, M. (1988). "Análisis Estocástico de las rentas de jubilación en un Plan de Pensiones". *Cuadernos Actuariales* 1. p. 75-115.
- ALEGRE, A.; CLARAMUNT, M. (1989). "Análisis del coste de la solvencia de un plan de pensiones con prestaciones de jubilación definida". *Cuadernos Actuariales* 2. p. 5-95.
- ALEGRE, A.; CLARAMUNT, M. (1995). "Allocation of solvency cost in group of annuities: Actuarial principles and cooperative game theory". *Insurance: Mathematics and Economics* 17. p. 19-34.
- ANDERSON, N.; BREEDON, F.; DEACON, M; DERRY, A.; MURPHY, G. (1996). *Estimating and interpreting the yield curve*. John Willey and Sons. Great Britain.
- ARENAS, M.; BILBAO, A.; JIMÉNEZ, M.; RODRÍGUEZ, M.V. (1997). "Método interactivo de resolución de un programa lineal posibilístico". *Actas del IV Congreso de la Sociedad Internacional de Gestión de empresas y Economía Fuzzy (SIGEF), celebrado en Santiago de Cuba (Cuba)* Vol I. p. 135-151.
- BABBEL, D.F.; MERRILL, C. (1997). "Economic valuation models for insurers". *Documento de trabajo 97-44. The Wharton School*. Pennsylvania.
- BABBELL, D.F.; MERRILL, C.B. (1996). *Valuation of interest-sensitive financial instruments*. Society of Actuaries. Schaumburg.
- BANDEMER, H.; NÄTHER, W. (1992). *Fuzzy Data Analysis*. Kluwer Academic. Dordrecht.
- BEEKMAN, J.A.; FUELLING, C.P. (1990). "Interest and mortality randomness in some annuities". *Insurance: Mathematics and Economics* 9. p. 185-196.
- BEEKMAN, J.A.; FUELLING, C.P. (1991). "Extra-randomness in certain annuity models". *Insurance: Mathematics and Economics* 10. p. 275-287.

- BELLMAN, R.E.; ZADEH, L.A. (1970). "Decisión Making in a fuzzy environment". *Management Sciencies* 17. B. 141-164.
- BETZUEN, A.; JIMÉNEZ, M.; RIVAS, J.A. (1997). "Actuarial mathematics with fuzzy parameters. An application to collective pension plans". *Fuzzy Economic Review* 2, 2. p. 47-66.
- BLACK, F.; SCHOLES, M. (1973). "The pricing of options and corporate liabilities". *Journal of political economy* Mayo. p. 637-654.
- BONET, J.; FERRER, J.C.; LLADÓ, M.; CLARA, N. (1999). "Incertidumbre en la matemática actuarial". *Actas del VI Congreso de la Sociedad Internacional de Gestión de empresas y Economía Fuzzy (SIGEF) celebrado en Morelia (Mexico)*. p. 110-122.
- BORTOLAN, G.; DEGANI, R. (1985). "A review of some methods for ranking fuzzy subsets". *Fuzzy Sets and Systems* 15. p. 1-19.
- BOSWELL, S.B.; TAYLOR, M.S. (1987). "A central limit theorem for fuzzy random variables". *Fuzzy Sets and Systems* 24. p. 331-344.
- BOWERS, N.L.; GERBER, H.U.; HICKMAN, J.C.; JONES, D.A.; NESBITT, C.J. (1986). *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries. Itasca.
- BOYLE, P.P. (1976). "Rates of return as a random variables". *Journal of Risk and Insurance* 43. p. 693-713.
- BRADLEY, S.P; CRANE, D.B. (1973). "Management of commercial bank government security portfolios. An optimization approach under uncertainty ". *Journal of Bank Research* Primavera. p. 18-307.
- BUCKLEY, J.J. (1987). "The fuzzy mathematics of finance". *Fuzzy Sets and Systems* 21. p. 57-73.
- BUCKLEY, J.J. (1992a). "Solving fuzzy equations in economics and finance". *Fuzzy Sets and Systems* 48. p. 289-296.
- BUCKLEY, J.J. (1992b). "Solving fuzzy equations". *Fuzzy Sets and Systems* 50. p. 1-14.

- BUCKLEY, J.J; QU, Y. (1990a). "Solving linear and quadratic fuzzy equations". *Fuzzy Sets and Systems* 38. p. 43-59.
- BUCKLEY, J.J; QU, Y. (1990b). "On using α -cuts to evaluate fuzzy equations". *Fuzzy Sets and Systems* 38. p. 309-312.
- BUCKLEY, J.J.; QU, Y. (1991). "Solving fuzzy equations: a new solution concept". *Fuzzy Sets and Systems* 39. p. 291-301.
- BURDEN, R.; FAIRES, J.D. (1985). *Análisis Numérico*. Editorial Iberoamérica. Mexico D.F.
- BUSE, A. (1970). "Expectations, prices, coupons and yields". *Journal of Finance* 25. p. 809-818.
- CAKS, J. (1977). "The coupon effect on yield to maturity". *Journal of Finance* 32. p. 103-115.
- CALATAYUD, F.P; MORINI, S. (1995). "Estimación de la estructura temporal de tipos de interés en el mercado español de deuda pública anotada". *Actualidad Financiera* 48. F. 1.945-1966.
- CAMPOS, L.M.; GONZÁLEZ, A. (1989a). "A subjective approach for ranking fuzzy numbers". *Fuzzy Sets and Systems* 29. p. 145-153.
- CAMPOS, L.M.; GONZÁLEZ, A. (1989b). "Representation of fuzzy measures through probabilities". *Fuzzy Sets and Systems* 31. p. 23-36.
- CARLETON, W.R.; COOPER, I. (1976). "Estimation and uses of the term structure of interest rates". *Journal of Finance* 31. p. 1067-1083.
- CASTAGNOLI, E.; MAZZOLENI, P. (1988). "From an oriental market to an european monetary system: some fuzzy sets related ideas". En Kacprzyk, J.; Fedrizzi M. (eds.). *Combining fuzzy imprecision with probabilistic uncertainty in decision making*. Springer-Verlag. Heildelberg. p. 389-399.
- CASTRO, M.; J.C. DE MIGUEL; L. FERNÁNDEZ; J.A. REDONDO (1994). "El modelo de índice único bajo regresión borrosa". *Actas del I Congreso de la Sociedad Internacional de*

Gestión de empresas y Economía Fuzzy (SIGEF), celebrado en Reus (España). Vol 2. p. 141-157.

CHAMBERS, D.R.; W.T. CARLETON; D.W. WALDMAN (1984). "A new approach to estimation of the term structure of interest rates". *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 19. p.233-252.

CHANAS, S.; NOWAKOWSKI, N. (1988). "From fuzzy data to a single action-simulation approach". En Kacprzyk, J.; Fedrizzi M. (eds.). *Combining fuzzy imprecision with probabilistic uncertainty in decision making*. Springer-Verlag. Heildelberg. p. 331-341.

COHEN, K.J.; KRAMER; R.L.; WAUGH; W.H. (1966). "Regresion yield curves for U.S. Government securities". *Management Science* 13. B. 168-175.

CONTRERAS, D.; FERRER, R.; NAVARRO;E.; NAVE, J.M. (1996). "Análisis factorial de la estructura temporal de los tipos de interés en España". *Revista Española de Financiación y Contabilidad* XXV, 86. p.139-160.

COX, J.; INGERSOLL, J.E.; ROSS, S.A. (1985). "A theory of the term structure of interest rates". *Econometrica* 53. p. 385-407.

CULBERTSON, J.M. (1957). "The term structure of interest rates". *The Quarterly Journal of Economics* LXXI. p. 485-517.

DE WIT, G.W. (1982). "Underwriting and uncertainty". *Insurance: Mathematics and Economics* 1. p. 277-285.

DELGADO, M.; MORAL, S. (1987). "On probability possibility consistency". *Fuzzy Sets and Systems* 21. p. 311-318.

DELGADO, M.; VILA, M.A.; WOXMAN, W. (1998a). "On a canonical representation of fuzzy numbers". *Fuzzy Sets and Systems* 93. p. 125-135.

DELGADO, M.; VILA, M.A.; WOXMAN, W. (1998b). "A fuzziness measure for fuzzy numbers: Applications". *Fuzzy Sets and Systems* 94. p. 205-216.

- DERRIG, R.A.; OSTASZEWSKI, K.M. (1995). "Fuzzy techniques of pattern recognition in risk and claim classification". *Journal of Risk and Insurance* 62. p. 447-482.
- DERRIG, R.A.; OSTASZEWSKI, K.M. (1997). "Managing the tax liability of a property liability insurance company". *Journal of Risk and Insurance* 64. p. 695-711.
- DEVOLDER, P. (1988). "Le taux d'actualisation en assurance". *The Geneva Papers on Risk and Insurance* 13. p. 265-272.
- DONG, W.; WONG, F. (1989). "Interactive fuzzy variables and fuzzy decisions". *Fuzzy Sets and Systems* 29. p. 1-19.
- DUBOIS, D.; PRADE, H. (1979). "Decision-making under fuzziness". En Gupta M.M.; Ragade, R.K.; Yager, R.R. (eds.). *Advances in fuzzy set theory and applications*. North-Holland Publishing Company. Amsterdam. p. 279-302.
- DUBOIS, D. Y PRADE, H. (1980). *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. Academic Press. New York.
- DUBOIS, H.; PRADE, D. (1983). "Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory". *Information Sciences* 30. p. 183-224.
- DUBOIS, D.; PRADE, H. (1987). "The mean value of a fuzzy number". *Fuzzy Sets and Systems* 24. p. 279-300.
- DUBOIS, D.; PRADE, H. (1988). "Combining fuzzy imprecision with probabilistic uncertainty in decision making". En Kacprzyk, J. Fedrizzi M. (eds.). *Combining fuzzy imprecision with probabilistic uncertainty in decision making*. Springer-Verlag. Heidelberg. p. 48-65.
- DUBOIS, D.; PRADE, H. (1993). "Fuzzy numbers: an overview". En Dubois, D., Prade, H.; Yager, R.R. (eds.). *Fuzzy sets for intelligent systems*. Morgan Kaufmann Publishers. San Mateo (California). p. 113-148.
- EMBRETCHTS, P. (1996). "Actuarial versus financial pricing of insurance". *Documento de trabajo 96-17*. The Wharton School. Pennsylvania.

- EZQUIAGA, I (1992). "Formación de precios y estructura de los tipos de interés". En Sánchez Fernández de Valderrama, J.L. (ed.). *Curso de Bolsa I*. Ariel. Barcelona. p. 89-118.
- EZQUIAGA, I; JARA, J.R.; GÓMEZ, I. (1994). "Una metodología para la estimación de la curva de tipos cupón cero y su aplicación al mercado español". *Moneda y Crédito* 199. p.157-197.
- FABOZZI, F.J. (1993). *Bonds Markets. Analysis and Strategies*. Prentice Hall. New Jersey.
- FEDRIZZI, M.; FEDRIZZI, M.; OSTASIEWICZ, W. (1993). "Towards fuzzy modelling in economics". *Fuzzy Sets and Systems* 54. p. 259-268.
- FENG, Y.; HU, L.; SHU, H. (2000). "The variance and covariance of fuzzy random variables and their applications". *Fuzzy Sets and Systems*. Pendiente de publicación.
- FERNÁNDEZ NAVAS, J. (1997a). "La implementación del modelo de Cox, Ingersoll y Ross (1985) en el Mercado Español de Deuda". *Swaps&Productos Derivados* 23, 24.
- FERNÁNDEZ NAVAS, J. (1997b). "Modelos 'Clásicos' de la estructura temporal de los tipos de interés". <<http://www.ie.edu/jfnavas/articulos00.htm>>. Consulta: 23 de marzo del 2000.
- FERNÁNDEZ PALACIOS, J. (1991). *Manual de contabilidad y análisis financiero de seguros*. Centro de Estudios del Seguro. Madrid.
- FRÜHWIRTH-SCHNATTER, S. (1992). "On statistical inference for fuzzy data with applications to descriptive statistics". *Fuzzy Sets and Systems* 50. p. 143-165.
- GERBER, H.U. (1995). *Life Insurance Mathematics*. Springer-Verlag. Berlin.
- GIACOTTO, C. (1986). "Stochastic modelling of interest rates: actuarial vs. equilibrium approach". *Journal of Risk and Insurance* 53. p. 435-453.
- GIL ALUJA, J. (1995). "Towards a new concept of economic research". *Fuzzy Economic Review* 0. p. 5-25.
- GIL ALUJA, J. (1996). "Lances y desventuras del nuevo paradigma de la teoría de la decisión". *Actas del III Congreso de la Sociedad Internacional de Gestión de empresas y Economía Fuzzy (SIGEF) celebrado en Buenos Aires (Argentina)* Vol I. Paper 2.10.

- GIL ALUJA, J. (1997). *Invertir en la incertidumbre*. Pirámide. Madrid.
- GIL ALUJA, J. (2000). "Génesis de una teoría de la incertidumbre". *Discurso en el acto de imposición de la Gran Cruz de la Orden Civil de Alfonso X el Sabio el 20 de enero del 2000*. Escuela Universitaria de de Estudios Empresariales de la Universidad de Barcelona. Barcelona. p. 27-46.
- GIL CORRAL, A.M. (1998). "La estructura temporal de los tipos de interés: problemática y aplicación empresarial". *Análisis financiero* 60. p. 60-70.
- GONZÁLEZ, A. (1990). "A study of the ranking function approach through mean values". *Fuzzy Sets and Systems* 35. p. 29-41.
- GUPTA, C.P. (1993). "A note on the transformation of possibilistic information into probabilistic information for investment analysis". *Fuzzy Sets and Systems* 56. p. 175-182.
- HAUGEN, R. (1990). *Modern investment theory*. Prentice Hall. Englewood Cliffs.
- HEATH, D., JARROW, R.A.; MORTON, A.J. (1992). "Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claim valuation". *Econometrica* 60. p. 77-105.
- HEILPERN, S. (1992). "The expected value of a fuzzy number". *Fuzzy Sets and Systems* 47. p. 81-86.
- HEILPERN, S. (1995). "Using fuzzy data analysis in economy". *Actas del II Congreso de la Sociedad Internacional de Gestión de empresas y Economía Fuzzy (SIGEF) celebrado en Santiago de Compostela (España)* Vol I. p. 315-327.
- HICKS, J.R. (1946). *Value and capital*. Clarendon Press. Oxford.
- HIROTA, K. (1981). "Concept of probabilistic sets". *Fuzzy Sets and Systems* 5. p. 31-46.
- JABLONOWSKI, M. (1991). "Fuzzy logic and insurance decisions". *CPCU Journal* September. p. 181-187.

- JIMÉMEZ, M. (1995). "Una aplicación de la teoría de posibilidades a las operaciones de amortización de prestamos". *Actas del II Congreso de la Sociedad Internacional de Gestión de empresas y Economía Fuzzy (SIGEF) celebrado en Santiago de Compostela (España)* Vol I. p. 271-282.
- JIMÉNEZ, M. (1994). *Modelos Matemáticos Aplicados a la Toma de Decisiones Financieras en Condiciones de Incertidumbre*. Tesis Doctoral. Universidad de País Vasco.
- JIMÉNEZ, M. (1996). "La teoría de la posibilidad aplicada al cálculo financiero en incertidumbre". *Actualidad Financiera*. 3. p. 267-276.
- JIMÉNEZ, M.; RIVAS J.A. (1996). "Aproximación de números borrosos". *Actas del III Congreso de la Sociedad Internacional de Gestión de empresas y Economía Fuzzy (SIGEF) celebrado en Buenos Aires (Argentina)*. Vol I. Paper 2.12.
- KAUFMANN, A. (1986a). "Hybrid data-various associations between fuzzy subsets and random variables". En Jones, A.; Kaufmann, A.; Zimmermann, H.-J. (eds.). *Fuzzy set theory and applications*. Reidel. Dordrecht. p. 171-211.
- KAUFMANN, A. (1986b). "Fuzzy subsets applications in O.R. and management". En Jones, A.; Kaufmann, A.; Zimmermann, H.-J. (eds.). *Fuzzy set theory and applications*. Reidel. Dordrecht. p. 257-300.
- KAUFMANN, A.; GIL ALUJA, J. (1986). *Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de empresas*. Milladoiro. Santiago de Compostela.
- KAUFMANN, A.; GIL ALUJA J. (1987). *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*. Hispano Europea. Madrid.
- KAUFMANN, A.; GIL ALUJA, J. (1990). *Las matemáticas del azar y de la incertidumbre*. Ceura. Madrid.
- KAUFMANN, A.; GIL ALUJA, J. (1993). *Nuevas técnicas para la dirección estratégica*. Publicacions de la Universitat de Barcelona. Barcelona.
- KAUFMANN, A.; GIL ALUJA, J.; TERCEÑO, A. (1994). *Matemática para la economía y la gestión de empresas*. Foro Científico. Barcelona.

- KAUFMANN, A.; GUPTA, M.M. (1985). *Introduction to Fuzzy Arithmetic*. Van Nostrand Reinhold. New York.
- KLIR, G.J. (1999). "On fuzzy-set interpretation of possibility theory". *Fuzzy Sets and Systems* 108. p. 263-273.
- KRUSE, R.; MEYER, K.D. (1987). *Statistics with vague data*. Reidel. Dordrech-Boston.
- KWAKERNAAK, H. (1978). "Fuzzy random variables-I. Definitions and theorems". *Information Sciencies* 15. p. 1-29.
- KWAKERNAAK, H. (1979). "Fuzzy random variables-II. Algorithms and examples for the discrete case". *Information Sciencies* 17. p. 253-278.
- LAI, Y.L.; HWANG, C.L. (1992). *Fuzzy mathematical programming*. Springer-Verlag. Berlin.
- LAMOTHE, P; SOLER, J.A.; LEBER, M. (1995). "Un estudio sobre la estructura temporal de tipos cupón cero. Aproximación práctica al caso español". *Actualidad Financiera* 30. F. 1.069-1.108.
- LAZZARI, L.L.; MACHADO, E.M.; PÉREZ, R.H. (1996). "El comportamiento borroso de las tasas de interés y su análisis a través de los procesos borrosos". *Actas del III Congreso de la Sociedad Internacional de Gestión de empresas y Economía Fuzzy (SIGEF), celebrado en Buenos Aires (Argentina)* Vol II. Paper 2.28.
- LEMAIRE, J. (1990). "Fuzzy insurance". *Astin Bulletin* 20. p. 33-55.
- LI CALZI, M. (1990). "Towards a general setting for the fuzzy mathematics of finance". *Fuzzy Sets and Systems* 35. p. 265-280.
- LIU, T-S.; WANG, M-J.J. (1992). "Ranking fuzzy numbers with integral value". *Fuzzy Sets and Systems* 50. p. 247-255.
- LOZANO, R. (1999). "El tipo de interés a considerar para el cálculo de las primas y de las provisiones matemáticas en el seguro de vida a la luz de las modificaciones introducidas por el reglamento de ordenación y supervisión de los seguros privados y de la orden ministerial de 23

- de diciembre de 1998, por el que se desarrollan determinados preceptos de la normativa reguladora de los seguros privados y se establecen las obligaciones de información como consecuencia de la introducción del euro". *Previsión y Seguro* 69. p. 75-98.
- LUTZ, F.A. (1940). "The term structure of interest rates". *The Quarterly Journal of Economics* LV. p. 36-63.
- MALKIEL, B.E. (1962). "Expectations, bond prices and the term structure of interest rates". *The Quarterly Journal of Economics* LXXVI. p. 197-218.
- MASCAREÑAS, J. (1991). "La estructura temporal de los tipos de interés". *Actualidad financiera* 18. F. 201-225.
- MASCAREÑAS, J. (1991). "La gestión de las carteras de renta fija (I): el cálculo del rendimiento". *Actualidad financiera* 19. F. 227-255.
- MASCAREÑAS, J. (1997). "Gestión de carteras de renta fija". <[http:// www.ucm.es/info/jmas](http://www.ucm.es/info/jmas)>. Consulta: 20 de octubre de 1997.
- MATHIEU-NICOT, B. (1986). "Fuzzy expected utility". *Fuzzy Sets and Systems* 20. p. 163-173.
- MAULEÓN, I. (1991). *Inversiones y riesgos financieros*. Espasa Calpe. Madrid.
- McCULLOCH, J.H. (1971). "Measuring the term structure of interest rates". *The Journal of Bussiness* 34. p.19-31.
- McCULLOCH, J.H. (1975). "The tax-ajusted yield curve". *Journal of Finance* 30. p. 811-829.
- MENEU, V.; NAVARRO, E.; BARREIRA, M.T. (1992). *Análisis y gestión del riesgo de interés*. Ariel. Barcelona.
- MODIGLIANI, F.; SUTCH, R. (1966). "Innovations in interest rate policy". *American Economic Review* 56. p. 178-197.
- MODIGLIANI, F.; SUTCH, R. (1967). "The debt management and the term structure of interest rates". *Journal of Political Economy* LXXV. p. 569-589.

- MORAL, S. (1986). "Construction of a probability distribution from a fuzzy information". En Jones, A.; Kaufmann, A.; Zimmermann, H.-J. (eds.). *Fuzzy set theory and applications*. Reidel. Dordrecht p. 51-60.
- NAHMIAS, S. (1979). "Fuzzy variables in a random environment". En Gupta M.M.; Ragade, R.K.; Yager, R.R. (eds.). *Advances in fuzzy set theory and applications*. North-Holland Publishing Company. Amsterdam. p. 165-180.
- NEGOITIA, C.V.; RALESCU, D. (1987). *Simulation, knowledge-based computing, and fuzzy statistics*. Van Nostrand Reinhold. New York.
- NELSON, C.R.; SIEGEL, A.F. (1987). "Parsimoneus modelling of yield curves for US Treasury bills". *Journal of Bussiness* 60. p 473-489.
- NGUYEN, H.T. (1978). "A note on the extension principle for fuzzy sets". *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 64. p. 369-380.
- NGUYEN, H.T. (1979). "Toward a calculus of the mathematical notion of possibility". En Gupta M.M.; Ragade, R.K.; Yager, R.R. (eds.). *Advances in fuzzy set theory and applications*. North-Holland Publishing Company. Amsterdam. p. 235-246.
- NUÑEZ, S. (1995). "Estimación de la estructura temporal de los tipos de interés en España. Elección entre métodos alternativos". *Documento de trabajo 9522*. Banco de España.
- OSTASZEWSKI, K. (1993). *An investigation into possible applications of fuzzy sets methods in actuarial science*. Society of Actuaries. Schaumburg.
- PANJER, H.H.; BELLHOUSE, D.R. (1980). "Stochastic modelling of interest rates with applications to life contingencies". *Journal of Risk and Insurance* 47. p. 91-110.
- PANJER, H.H.; BELLHOUSE, D.R. (1981). "Stochastic modelling of interest rates with applications to life contingencies-part II". *Journal of Risk and Insurance* 48. p. 628-637.
- PÉREZ, J.L. (1986). "Seguros de Personas". *Tratado General de Seguros. Tomo II*. Consejo General de Agentes y Corredores de Seguros de España. Madrid.

- PITACCO, E. (1986). "Simulation in insurance". En Goovaerts M. *et al.* (eds.). *Insurance and risk theory*. Reidel. Dordrecht. p. 43-44.
- POIRIER, D.J. (1973). "Piecewise regression using cubic splines". *Journal of the American Statistical Association* 68. p. 515-524.
- PRIETO E. (1993). "Tanto de interés técnico y riesgo del asegurador de vida relacionado con el mismo". *Previsión y Seguro* 31. p. 37-53.
- PURI, M.L.; RALESCU, D. (1986). "Fuzzy random variables". *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 114. p. 409-422.
- RALESCU, D. (1986). "Radon-Nikodym for fuzzy set-valued measures". En Jones, A.; Kaufmann, A.; Zimmermann, H.-J. (eds.). *Fuzzy set theory and applications*. Reidel. Dordrecht p. 39-50.
- RAMIK, J.; RIMANEK, J. (1985). "Inequality relation between fuzzy numbers and its use in fuzzy optimization". *Fuzzy sets and Systems* 16. p.123-138.
- ROBICHEK, A.; NIEBUHR, W.D. (1970). "Tax induced bias in reported trasury yields". *The Journal of Finance* 25. p. 1081-1090.
- RODRÍGUEZ, A. (1984). *Matemática de la financiación*. Romargraf. Barcelona.
- ROMERO, M.; MARTÍN, E. (1983). "Programación de inversiones en un entorno borroso". *Gestión Científica* 1. p. 107-129.
- SAKAWA, M.; YANO H. (1992). "Fuzzy linear regression and its applications". En Kacprzyk, J.; Fedrizzi M. (eds.). *Fuzzy regression analysis*. Physica-Verlag. Heildelberg. p. 61-80.
- SARRASÍ, F.C. (1995). "Cobertura de márgenes de solvencia en seguros colectivos". *Cuadernos Actuariales* 7, parte 2. p. 119-157.
- SCHAEFER, S.M.; SCHWARTZ, E.S. (1984). "A two-factor model of the term structure: an approximate analytical solution". *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 19. p. 413-423.

- STAPLETON, R.C. (1999). "Some recent developments in capital market theory: a survey". *Spanish Economic Review* 1. p. 1-20.
- STEIN, W.E.; TALATI, K. (1984). "Convex fuzzy random variables". *Fuzzy Sets and Systems* 6. p. 271-283.
- STEIN, W.E.; ZWICK, R. (1988). "Fuzzy random variables". En Kacprzyk, J.; Fedrizzi M. (eds.). *Combining fuzzy imprecision with probabilistic uncertainty in decision making*. Springer-Verlag. Heidelberg. p. 67-74.
- SVENSSON, L.E.O. (1994). "Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994". Institute for International Economic Studies. Mimeo.
- TANAKA, H. (1987). "Fuzzy data analysis by possibilistic linear models". *Fuzzy Sets and Systems* 24. p. 363-375.
- TANAKA, H.; ISHIBUCHI H. (1992). "A possibilistic regression analysis based on linear programming". En Kacprzyk, J.; Fedrizzi M. (eds.). *Fuzzy regression analysis*. Physica-Verlag. Heidelberg. p. 47-60.
- TERCEÑO, A. (1995). *Instrumentos para el análisis de operaciones financieras con datos inciertos*. Tesis Doctoral. Universidad de Barcelona.
- TERCEÑO, A. MÁRQUEZ, N.; BARBERÀ, M.G. (1994). "Función de pertenencia del término amortizativo de un préstamo a interés incierto". *Actas del I Congreso de la Sociedad Internacional de Gestión de empresas y Economía Fuzzy (SIGEF) celebrado en Reus (España)*. Vol 1. p. 107-128.
- TERCEÑO, A. MÁRQUEZ, N.; BARBERÀ, M.G. (1995). "Estudio de una aproximación de la función de pertenencia del término amortizativo de un préstamo". *Revista Europea de Dirección y Economía de la Empresa* 1, 4. p. 115-127.
- TERCEÑO, A.; BARBERÀ, G.; DE ANDRÉS, J.; BELVIS, C. (1996). "Fuzzy methods incorporated to the study of personal insurances". *Fuzzy Economic Review* 1, 2. p. 105-119.
- TERCEÑO, A.; MÁRQUEZ, N.; BELVIS, C. (1997). "Un estudio sobre las aproximaciones a las expresiones financieras inciertas". *Actas del IV Congreso de la Sociedad Internacional de*

Gestión de empresas y Economía Fuzzy (SIGEF) celebrado en Santiago de Cuba (Cuba). Vol 3.

TERCEÑO, A.; SÁEZ, J.; BARBERÀ, G.; ORTÍ, F.; DE ANDRÉS, J.; BELVIS, C. (1997). *Matemática Financiera*. Pirámide. Madrid.

URRUTIA, A.J.; CARRANCEJA, A.; FERNÁNDEZ, C. (1997). "Comparación de varios modelos matemáticos de la estructura temporal de los tipos de interés para el mercado español de deuda del Estado". *Actas del IV Congreso de Matemática de las Operaciones Financieras celebrado en Barcelona*. p.659-688.

VASICEK, O. (1977). "An equilibrium characterization of the term structure". *Journal of Financial Economics* 5. p. 177-188.

VASICEK, O.A.; FONG H.G. (1982). "Term structure modelling using exponential splines". *Journal of Finance* 37. p. 339-349.

VEGAS, A. (1981). *Estadística-Aplicaciones econométricas y actuariales*. Pirámide. Madrid.

VEGAS, A.; NIETO, J. (1993). *Matemática Actuarial*. Mapfre. Madrid.

VERGÉS, J. (1995). " Estudio sobre la aplicación del artículo 56 del borrador del reglamento en el cálculo de las provisiones matemáticas". *Previsión y Seguro* 51. p. 9-26.

VILLALÓN, J.G. (1997). *Operaciones de seguros clásicas y modernas*. Pirámide. Madrid.

WANG, G.; ZHANG Y. (1992). "The theory of fuzzy stochastic processes". *Fuzzy Sets and Systems* 51. p. 161-178.

WIERZCHON, S.T. (1988). "Randomness and fuzziness in a linear programming problem". En Kacprzyk, J.; Fedrizzi M. (eds.). *Combining fuzzy imprecision with probabilistic uncertainty in decision making*. Springer-Verlag. Heidelberg. p. 227-239.

WOLTHUIS, H. (1994). "Actuarial equivalence". *Insurance: Mathematics and Economics* 15. p. 163-179.

- WOLTHUIS, H.H. Y VAN HOEK, I. (1986). "Stochastic models for life contingencies". *Insurance: Mathematics and Economics* 5. p. 217-254.
- WU, H-C. (1999). "Probability functions of fuzzy random variables". *Fuzzy Sets and Systems* 105. p. 139-158.
- YAGER, R.R. (1978). "Ranking fuzzy subsets over the unit interval". *Proceedings of the 1978 CDC*. P. 1435-1437.
- YAGER, R.R. (1980). "On choosing between fuzzy subsets". *Kybernetes* 9. p. 151-154.
- YAGER, R.R. (1981). "A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval". *Information Sciences* 24. p. 143-161.
- YAGER, R.R. (1982). "Fuzzy prediction based on regression models". *Information Sciences* 26. p. 45-63.
- YEN, K.K.; GHOSHAY, S.; ROIG, G. (1999). "A linear regression model using triangular fuzzy number coefficients". *Fuzzy Sets and Systems* 106. p. 167-177.
- ZADEH, L.A. (1965). "Fuzzy sets". *Information and Control* 8. p. 338-353.
- ZADEH, L.A. (1968). "Probability measures of fuzzy events". *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 23. p. 421-427.
- ZADEH, L.A. (1978). "Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility". *Fuzzy Sets and Systems* 1. p. 3-28.
- ZADEH, L.A. (1984). "Fuzzy Probabilities". *Processing and Management* 20. p. 363-372.
- ZHAO, R.; GOVIND, R. (1991). "Defuzzification of fuzzy intervals". *Fuzzy Sets and Systems* 43. p. 45-55.
- ZIMMERMANN, H.-J. (1991). *Fuzzy Set Theory and Its Applications*. Kluwer Academic. Dordrecht.