

Laia Rodríguez Mestre

## **Avaluació quantitativa de la capacitat de coalició al Parlament de Catalunya:**

Índexs de poder en el període 2018-2024

**TREBALL DE FI DE GRAU**

**Àrea temàtica: Mètodes quantitius a l'economia i l'empresa**

**Doble grau ADE + FIC**



**FACULTAT D'ECONOMIA i EMPRESA**  
**Universitat Rovira i Virgili**

**Reus**

**Curs 2025-26**

## ÍNDEX

|                                                                            |    |
|----------------------------------------------------------------------------|----|
| RESUM.....                                                                 | 4  |
| PRESENTACIÓ.....                                                           | 7  |
| 1. INTRODUCCIÓ .....                                                       | 8  |
| PROBLEMÀTICA ACTUAL .....                                                  | 8  |
| OBJECTIUS .....                                                            | 9  |
| MOTIVACIONS .....                                                          | 9  |
| METODOLOGÍA A SEGUIR.....                                                  | 10 |
| MARC TEÒRIC .....                                                          | 11 |
| 2. TEORIA DE JOCS I ÍNDEXS DE PODER.....                                   | 11 |
| 2.1. JOCS COOPERATIUS .....                                                | 12 |
| 2.2. JOCS SIMPLES O JOCS DE VOTACIÓ.....                                   | 12 |
| 2.3. JOCS DE MAJORIA PONDERADA .....                                       | 13 |
| 2.4. ÍNDEXS DE PODER .....                                                 | 14 |
| 3. EL PARLAMENT DE CATALUNYA.....                                          | 16 |
| 3.1. SISTEMA ELECTORAL.....                                                | 17 |
| 3.2. SISTEMES DE VOTACIÓ I MAJORIES PARLAMENTÀRIES.....                    | 17 |
| 3.3. PARTITS POLÍTICS I RESULTATS ELECTORALS.....                          | 19 |
| MARC PRÀCTIC .....                                                         | 20 |
| 4. ANÀLISI DE REFERÈNCIA: EVOLUCIÓ DEL PES ELECTORAL EN TANT PER CENT..... | 20 |
| 4.1. DINÀMIQUES DE CREIXEMENT I CONSOLIDACIÓ .....                         | 21 |
| 4.2. DINÀMIQUES DE RETROCÉS I PÈRDUA DE REPRESENTATIVITAT .....            | 21 |
| 5. ANÀLISI DELS ÍNDEXS DE PODER AL PARLAMENT DE CATALUNYA (2018-2024)..... | 22 |
| 5.1. AUTOMATITZACIÓ MITJANÇANT PYTHON.....                                 | 22 |
| 5.2. ANÀLISI DE LA XII LEGISLATURA .....                                   | 23 |
| 5.3. ANÀLISI DE LA XIV LEGISLATURA .....                                   | 25 |
| 5.4. ANÀLISI DE LA XV LEGISLATURA .....                                    | 27 |

## **6. ANÀLISI COMPARATIVA: CONTRAST DELS RESULTATS ENTRE ESCONS I**

|                                          |           |
|------------------------------------------|-----------|
| <b>ÍNDEXS DE PODER.....</b>              | <b>28</b> |
| <b>6.1. XII LEGISLATURA (2018) .....</b> | <b>29</b> |
| <b>6.2. XIV LEGISLATURA (2021) .....</b> | <b>31</b> |
| <b>6.3. XV LEGISLATURA (2024) .....</b>  | <b>32</b> |
| <b>6.4. PATRONS I ANOMALIES.....</b>     | <b>33</b> |
| <b>CONCLUSIONS .....</b>                 | <b>36</b> |
| <b>REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES .....</b> | <b>37</b> |

## RESUM

### **“Avaluació quantitativa de la capacitat de coalició al Parlament de Catalunya: Índexs de poder en el període 2017-2026”**

El present treball de final de grau realitza una aproximació teòrica i pràctica a la teoria de jocs per analitzar la distribució real del poder polític al Parlament de Catalunya durant les legislatures XII, XIV i XV (2018-2024). Partint de la literatura consolidada sobre jocs de votació, l'estudi es basa en el principi teòric que la capacitat d'influència d'una formació política no resideix exclusivament en el seu nombre d'escons.

En primer lloc, en el marc teòric es presenten els conceptes més rellevants. En aquest apartat s'introdueix la teoria de jocs, els jocs cooperatius i els jocs de votació ponderada. Dins d'aquest últim concepte s'inclou la definició i les propietats dels índexs de poder. D'altra banda, es recullen les dades oficials sobre els resultats electorals de les tres legislatures.

En el marc pràctic es calculen els valors dels índexs de poder per cada partit i legislatura mitjançant el llenguatge de programació Python. Amb les dades obtingudes, es duen a terme anàlisis evolutives i comparatives per avaluar el comportament i la interpretació dels indicadors en comparació amb els escons de cada partit.

Finalment, s'observa el comportament dels índexs per cada legislatura i partit per extreure informació sobre la seva interpretació i sobre quins són els actors que causen, en les mostres seleccionades, variacions entre ells.

**Paraules clau:** Índexs de poder, jocs cooperatius, Parlament de Catalunya.

## RESUMEN

### **"Evaluación cuantitativa de la capacidad de coalición en el Parlamento de Cataluña: teoría de juegos e índices de poder en el período 2017-2026"**

El presente trabajo de fin de grado realiza una aproximación teórica y práctica a la teoría de juegos para analizar la distribución real del poder político en el Parlament de Catalunya durante las legislaturas XII, XIV y XV (2018-2024). Partiendo de la literatura consolidada sobre juegos de votación, el estudio se basa en el principio teórico de que la capacidad de influencia de una formación política no reside exclusivamente en su número de escaños.

En primer lugar, en el marco teórico, se presentan los conceptos más relevantes de la teoría de juegos. En este apartado se introduce la teoría de juegos, juegos cooperativos y juegos de votación ponderada. Dentro de este último concepto se incluye la definición y propiedades de los índices de poder. Por otra parte, se recogen los datos oficiales sobre los resultados electorales de las tres legislaturas.

En el marco práctico se calculan los valores de los índices de poder por cada partido y legislatura mediante el lenguaje de programación Python. Con los datos obtenidos, se realizan análisis evolutivos y comparativos para evaluar el comportamiento y la interpretación de los indicadores frente a los escaños de cada partido.

Por último, se observa el comportamiento de los índices por cada legislatura y partido para extraer información sobre su interpretación y sobre cuáles son los actores que causan, en las muestras seleccionadas, variaciones entre ellos.

**Palabras clave:** Índices de poder, juegos cooperativos, Parlamento de Cataluña.

## ABSTRACT

### **“Quantitative assessment of coalition capacity in the Parliament of Catalonia: Game theory and power indices in the period 2017-2026”**

This final degree project adopts a theoretical and practical approach to game theory to analyze the actual distribution of political power in the Parliament of Catalonia during the 12th, 14th and 15th legislatures (2018-2024). Drawing on established literature on voting games, the study is founded on the theoretical principle that a political party's influence does not rely exclusively in its number of seats.

The theoretical framework introduces the core concepts of game theory. This section introduces game theory, cooperative games and weighted voting games. The latter concept includes the definition and properties of power indices. On the other hand, official data on the electoral results of the three legislatures are compiled.

In the practical framework, the values of the power indices for each party and legislature are calculated using the Python programming language. With the data obtained, evolutionary and comparative analyses are carried out to evaluate the behavior and interpretation of the indicators in relation to the parliamentary representation of each core.

Finally, the study examines the performance of the indices across different scenarios to interpret their variations and identify which political actors drive the most significant shifts in power Dynamics within the analyzed samples.

**Keywords:** Power indices, cooperative games, Parliament of Catalonia.

## PRESENTACIÓ

En l'actualitat, la política i l'economia s'han convertit en dos pilars indissociables per comprendre el funcionament de la societat i del nostre entorn. Les decisions preses en l'àmbit institucional no només responen a corrents ideològics, sinó que condicionen de forma directa l'escenari econòmic, generant unes tensions que fan que el seu estudi conjunt sigui necessari. Aquesta interconnexió converteix l'anàlisi de com es reparteix el poder en un camp d'estudi clau en la realitat política actual.

Com a estudiant del doble grau en Administració i Direcció d'Empreses i Finances i Comptabilitat, aquest treball sorgeix de la voluntat d'unir ambdues disciplines com una oportunitat per poder assolir una sèrie d'eines imprescindibles que van més enllà de la matèria d'estudi; l'estimulació del pensament crític i la comprensió de la realitat actual.

L'interès del treball se centra a analitzar la distribució del poder polític al Parlament de Catalunya durant les legislatures del 2018, 2021 i 2024. L'elecció del Parlament de Catalunya com a objecte d'estudi resulta atractiu per la seva proximitat territorial i per presentar un escenari de forta fragmentació parlamentària. Aquest estudi busca analitzar la capacitat real d'influència dels partits polítics i com aquesta varia durant les legislatures presentades amb l'objectiu de poder extreure conclusions sobre la distribució del poder.

## 1. INTRODUCCIÓ

L'anàlisi del poder polític en els sistemes parlamentaris és un element clau per comprendre com es formen les majories i com es realitza la presa de decisions col·lectives. Habitualment, la percepció pública tendeix a identificar de manera directa el nombre d'escons amb la capacitat d'influència real d'una formació. Tot i així, en escenaris de fragmentació política, aquesta relació no és sempre proporcional. La capacitat d'influència d'un partit no depèn exclusivament del seu pes electoral nominal, sinó de la seva posició estratègica vers la resta de partits.

En aquest context, la teoria de jocs cooperatius aporta una eina analítica de gran valor. A través de l'estudi dels jocs de majoria ponderada, es permet accedir al càlcul del poder real. Gràcies a indicadors clàssics com l'índex de Shapley-Shubik, Banzhaf-Coleman o Deegan-Packel, és possible quantificar quin és el poder estratègic dels partits polítics segons el focus de cada índex. Aquests índexs també donen l'oportunitat de poder entendre quin és el tipus de poder que exerceix cada formació, ja que cada índex mesura dimensions diferents del poder estratègic, ja que cadascun posa l'èmfasi en un conjunt específic de factors rellevants en la formació de coalicions.

Aquest treball neix de l'interès personal per l'anàlisi de dades i la seva capacitat transformadora a l'hora d'interpretar la realitat. Més enllà de l'estudi teòric, el tema del treball va ser escollit per la voluntat de descobrir mètodes d'anàlisi que ofereixen una visió més verídica i profunda sobre les situacions polítiques actuals.

### PROBLEMÀTICA ACTUAL

En els darrers anys, el Parlament de Catalunya ha passat d'un escenari de blocs clarament definits a una fragmentació pluripartidista que dificulta la formació de majories estables. El problema real, i el que m'ha portat a fer aquesta investigació, és que ens trobem en un en ambient on les regles del joc han canviat, però la manera de mesurar el poder continua sent la mateixa.

La problemàtica resideix en el fet que el sistema de repartiment d'escons sovint genera una il·lusió de poder que no correspon amb la realitat de les negociacions parlamentàries. Aquesta idea, que ja ha estat àmpliament estudiada per la teoria de Jocs Cooperatius, demostra que la influència real no és una qüestió de quantitat, sinó de posició estratègica.

El buit que intenta omplir aquest treball és la manca d'una anàlisi quantitativa recent que posi xifres als poders reals dels partits presents en el Parlament de Catalunya de les darreres legislatures per tenir l'oportunitat de poder entendre en profunditat quina és l'estructura que condiciona la presa de decisions.

## OBJECTIUS

L'objectiu principal d'aquest treball és analitzar la distribució del poder polític al Parlament de Catalunya durant les legislatures XII, XIV i XV, mitjançant l'aplicació de models de la teoria de jocs cooperatius, per determinar si la representativitat numèrica d'escons es correspon amb la capacitat real de decisió i influència de les formacions polítiques.

Per tal de poder assolir l'objectiu general, s'estableixen els següents objectius operatius:

- Estudiar i definir el marc teòric dels jocs de majoria ponderada, identificant les característiques i limitacions dels principals índexs de poder (Shapley-Shubik, Banzhaf i Deegan-Packel) per a la seva aplicació en sistemes parlamentaris
- Contrastar l'evolució del poder estratègic entre legislatures, analitzant com els canvis estructurals entre legislatures poden causar variacions en els índexs, demostrant que el poder no es basa només en els escons.
- Demostrar la rellevància i funcionalitat de les eines quantitatives en la ciència política i en l'economia, proporcionant una visió del poder parlamentari que complementi la informació global que presenta l'avaluació dels escons com a única mesura de poder en el Parlament.

## MOTIVACIONS

Per a mi, l'economia i la política són les dues cares d'una mateixa moneda; no es pot entendre com funciona el món actual si s'ignora com es condicionen l'una a l'altra. Amb aquest treball vaig trobar l'oportunitat de poder realitzar una investigació en la qual pogués relacionar dos conceptes que em semblen fonamentals.

Quan vaig descobrir la Teoria de Jocs em va captivar la idea que es poguessin quantificar i analitzar situacions que, a primera vista, semblen impossibles de mesurar. D'aquesta forma, vaig decidir centrar el meu treball en els Jocs Cooperatius perquè ho vaig veure com una oportunitat per endinsar-me en aquest camp i descobrir que és el que aquesta disciplina permet quantificar.

A l'investigar sobre els jocs de majoria ponderada, vaig concloure que el realitzar el meu treball sobre l'evolució dels índexs de poder en el Parlament de Catalunya seria una decisió enriquidora a nivell personal. D'aquesta manera, el treball es presenta com el resultat de voler posar ordre la complexitat del panorama parlamentari actual.

## **METODOLOGÍA A SEGUIR**

La metodologia d'aquesta investigació està estructurada segons un enfoc quantitatiu i analític, dividit en tres fases interconnectades que permeten mantindre una linealitat entre el marc teòric i el marc pràctic.

Primerament, es realitza una investigació bibliogràfica i documental per establir els fonaments de la teoria de jocs cooperatius i els jocs de majoria ponderada. Aquesta fase inicial és clau per definir amb precisió les propietats dels índexs de poder Shapley-Shubik, Banzhaf i Deegan-Packel, obtenint una base sòlida per a la posterior interpretació dels resultats i l'evolució d'aquests.

En la segona fase, es realitza una recerca empírica centrada en el tractament de dades oficials del Parlament de Catalunya. El procediment comença amb la recopilació i classificació dels resultats electorals de les legislatures XII, XIV i XV, identificant el nombre d'escons per partit i el llindar de la majoria absoluta. A causa de la complexitat dels càlculs exponencials d'aquests índexs per la mida de la mostra analitzada, s'ha dissenyat un algoritme de llenguatge propi del sistema de programació Python. Per tal de poder generar aquest codi, s'ha comptat amb el suport d'eines d'intel·ligència artificial generativa, les quals han facilitat l'escriptura i l'optimització de les funcions. Tot i això, la validació i comprovació dels resultats obtinguts es desenvolupen en els apartats analítics, on és contrasta la fiabilitat de les dades obtingudes, les quals s'ajusten als principis de la teoria de jocs i mantenen una consistència lògica amb la distribució d'escons prèviament analitzada. Aquesta eina d'automatització permet processar el gran volum de coalicions potencials de manera exacta, eliminant el marge d'error del càlcul manual i garantint la reproducció de l'estudi.

Finalment, s'aplica un mètode comparatiu i deductiu per analitzar les variacions del poder estratègic entre els diferents períodes estudiats. Aquesta fase busca contrastar el pes electoral nominal amb el poder real segons cada índex i analitzar el seu comportament per cada legislatura amb l'objectiu de poder donar un significat qualitatiu a les dades i observar el comportament i variacions dels valors extrems dels indicadors escollits.

## MARC TEÒRIC

### 2. TEORIA DE JOCS I ÍNDEXS DE PODER

Tal com explica Meca (2006), tradicionalment s'ha considerat que el primer teorema formal en Teoria de Jocs es va demostrar per Zermelo l'any 1943 en un article que va escriure sobre els escacs; tanmateix, segons Arrow, els orígens del concepte d'estratègia mixta es troben a principis del segle XVIII per part del matemàtic francès Pierre Remond de Montmort i la seva relació amb Nicolás Bernoulli. Això va canviar en el moment en què Schwalbe i Walker van publicar l'any 2001 un treball a la revista *Games and Economic Behavior* en el que van demostrar que la majoria de les afirmacions de Zermelo eren incorrectes.

L'enfocament modern de l'anàlisi de les situacions conflictives s'atribueix, generalment, a John von Neumann per unes publicacions que va fer, però no va ser fins que va coincidir amb l'economista Oskar Morgenstern i van publicar l'any 1944 el seu famós llibre *Theory of Games and Economic Behavior* que la Teoria de Jocs va començar a rebre atenció d'arreu del món. (Meca, 2006).

Com indiquen Amer et al. (2008), la teoria de jocs és una branca de les matemàtiques destinada a estudiar situacions conflictives que apareixen quan un conjunt d'agents, amb interessos discordants, han de prendre decisions individuals que els afecten mútuament. De forma tradicional, el conflicte és denominat *joc* i els agents involucrats *jugadors*.

Com s'explica en Pérez Navarro et al. (2004), cal distingir dos tipus bàsics de joc, cooperatius i no cooperatius. En l'enfocament cooperatiu s'analitzen les possibilitats que alguns o tots els jugadors arribin a un acord sobre quines decisions prendran cadascun dels integrants del joc, mentre que en l'enfocament no cooperatiu s'analitza quines decisions prendria cada jugador sense un acord previ.

En el marc d'aquest treball, l'atenció se centra en els jocs cooperatius i en les categories que l'integren, les quals s'examinen amb més detall en les seccions següents.

## 2.1. JOCS COOPERATIUS

La cooperació entre diferents agents pot produir reducció de costos o generació de beneficis en un sentit ampli, no només monetari. De fet, en alguns casos, només si es coopera s'assoliran aquests beneficis (Rafels et al., 1999).

En l'article d'Amer et al. (2008) s'exposa que en els jocs cooperatius es permet la comunicació entre els jugadors. Aquest fet dona peu al fet que es puguin realitzar acords contractuals per coordinar estratègies de benefici comú, és a dir, que tenen força per obligar.

Un joc cooperatiu està format per un conjunt de jugadors  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  i una funció característica  $u: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$  que assigna a cada coalició de jugadors  $S \subseteq N$  un valor real  $u(S) \in \mathbb{R}$ , amb la condició que  $u(\emptyset) = 0$ . De forma habitual es treballa amb jocs no negatius (Amer et al., 2008)

Com es comenta en Álvarez i Alonso (2010), els jocs cooperatius monòtons compleixen amb la propietat de què el benefici obtingut per una coalició no pot disminuir si la mida de la coalició augmenta, fet que ens indica que la cooperació és beneficiosa o, com a mínim, no és perjudicial.

## 2.2. JOCS SIMPLES O JOCS DE VOTACIÓ

La teoria de jocs cooperatius també s'ha utilitzat per descriure i estudiar sistemes de votació, i també el poder relatiu dels diferents agents. Una junta d'accionistes, el parlament d'un país, una comunitat de propietaris, etc., són casos en els quals els sistemes de votació són un instrument de la decisió col·lectiva (Rafels et al., 1999)

En Amer et al. (2008), indiquen que els jocs simples serveixen per descriure la capacitat de decisió de les coalicions en un sistema de votació i ens permeten analitzar la rellevància estratègica de cadascun dels agents que intervenen en el joc.

Un joc cooperatiu  $(N, u)$  d' $n$  jugadors és un joc simple si satisfà que  $u(S) \in \{0, 1\}$  per a tota  $S \subseteq N$  on  $u(N) = 1$ . Si, a més, satisfà la propietat de monotonia, és a dir, per a totes  $S, T \subseteq N$ , si  $S \subseteq T$  llavors  $u(S) \leq u(T)$ , direm que és simple monòton (Rafels et al., 1999).

Les coalicions  $S$  de tal forma que  $u(S) = 1$  es denominen **guanyadores**, i la resta perdedores. És tradicional assignar  $W$  a la col·lecció de coalicions guanyadores. Dins d'aquest conjunt destaquen les coalicions **guanyadores minimals**  $W^m$ , que són

aquelles que no contenen cap element innecessari per ser guanyadores (Amer et al. 2008).

En Rafels et al. (1999), es defineixen quines són les característiques o propietats que caracteritzen a les coalicions guanyadores minimal:

1. És guanyadora,  $u(S) = 1$
2. No conté cap coalició pròpia guanyadora, és a dir, si  $S' \subseteq S$  amb  $S' \neq S$ , llavors  $u(S') = 0$ .

Aquesta definició ajuda a deduir que, per la pròpia naturalesa de la definició, una coalició guanyadora minimal no pot estar dins d'una altre.

### 2.3. JOCS DE MAJORIA PONDERADA

Un joc de **majoria ponderada** és un joc simple en el qual cada jugador  $i$  té assignat un pes  $W_i \geq 0$  i en el que existeix una quantitat  $q > 0$  denominada quota, de tal forma que una coalició  $S$  és guanyadora si el seu pes, que és la suma dels pesos dels jugadors que pertanyen a la coalició, és igual o superior a la quota fixada, és a dir,  $\sum_{i \in S} W_i \geq q$  (Álvarez i Alonso 2010). (Álvarez i Alonso, 2010)

Si  $q$  és el nombre mínim sencer superior a  $\frac{n}{2}$ , es diu que aquest número representa la condició de *majoria absoluta*. Si  $q = n$ , es diu que  $u$  és el *joc d'unanimitat* associat a la coalició  $N$  i, per tant, l'única coalició guanyadora és el conjunt total. Els valors restants intermedis de  $q$  es denominen *majories qualificades* (Amer et al., 2008).

En l'article d'Amer et al. (2008) es pot trobar la definició del que és un joc de majoria ponderada i les seves característiques. Sigui  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  un conjunt de jugadors. Suposem que cada jugador  $i \in N$  té assignat un pes  $w_i \geq 0$ . El pes d'una coalició arbitrària  $S \subseteq N$  es defineix com la suma dels pesos dels seus integrants:  $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$ , i se suposa que s'ha fixat una quota (o condició de majoria)  $q$  tal que  $0 < q \leq T$ , sent  $T = w(N) = \sum_{i \in N} w_i$ . Tenint en compte la definició, un joc cooperatiu  $(N, u)$  es defineix mitjançant les següents condicions:

- $u(S) = 1$  si  $w(S) \geq q$
- $u(S) = 0$  en altre cas.

Tal com exposen Álvarez i Alonso (2010), en aquesta família ens podem trobar amb diferents tipus de jugadors, segons les seves característiques dins del joc:

- Jugador  $i$  **dictador** si  $w_i \geq q$ .
- Jugador  $i$  té **veto** si  $\sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} w_j < q$ .
- Jugador  $i$  **nul** si per a tota coalició no guanyadora  $S$  a la qual no pertany  $i$  tenim que  $w_i + \sum_{j \in S} w_j < q$ .
- Jugador  $i$  és un **swing** per a una coalició guanyadora si  $\sum_{j \in S \setminus \{i\}} w_j < q$ .

## 2.4. ÍNDEXS DE PODER

Com s'explica en l'article d'Amer et al. (2008), el repartiment equitatiu no és just i tampoc ho és el repartiment proporcional, ja que no té en compte el poder estratègic dels jugadors. D'aquesta manera, s'han buscat diverses formes de càlcul que determinin una distribució dels beneficis que poden sorgir de la col·laboració d'agents en un joc.

La teoria d'índexs de poder té com a objectiu mesurar el poder polític dels votants en un sistema de votació, també anomenat joc simple o de votació. El poder del vot es basa en la probabilitat d'un vot determinat sigui decisiu en un conjunt de votants de diferents mesures. (Seijas, 2015)

Com s'explica en Álvarez i Alonso (2010), els índexs de poder mesuren la influència a priori del vot individual, ja que quantifiquen el poder que té un jugador basant-se únicament en el seu pes i en les regles de decisió del joc i ignoren certs factors com el caràcter dels aspectes que es troben sota votació, els interessos o les ideologies dels partits.

Definim un **índex de poder** com una funció real no negativa que assigna a tot jugador  $i \in N$  un valor  $f_i \geq 0$  tal que  $\sum_{i \in N} f_i = 1$ . Per quantificar l'índex de poder s'utilitza el concepte de *swing*, que fa referència a quan un jugador  $i \in S$  forma part d'una coalició guanyadora  $S \in W$ , però si aquest decideix retirar-se, la coalició passa a ser perdedora  $S \setminus \{i\} \notin W$  (Seijas Macías, 2015, p.5).

Tal com expliquen Álvarez i Alonso (2010), Felsenthal i Machover l'any 1998 van proposar les següents condicions com un conjunt de propietats mínimes que tot índex de poder raonable ha de complir:

1. **Isoinvariància (INV.):** Si dos jocs tenen la mateixa estructura, dos jugadors que tinguin el mateix poder rebran sempre el mateix valor de poder.

2. **Ignorar jugadors nuls:** Aquesta condició ens indica que, en el cas que hi hagués un jugador que en cap combinació possible pot ajudar a guanyar una votació, el poder de la resta de partits s'ha de mantenir igual en termes relatius. Aquesta propietat busca evitar que els valors dels índexs es vegin distorsionats per la presència de jugadors amb aportacions insignificants.
3. **Nul·litat només per a jugadors nuls:** Aquesta propietat està relacionada amb l'anterior, però busca definir el terme de jugador nul. Ens indica que l'única manera que un jugador tingui un valor de l'índex de poder de zero és que realment sigui un jugador nul. Si el jugador té la mínima capacitat de ser decisiu en alguna combinació, l'índex haurà de donar-li algun valor, per menor que sigui.

És important destacar que aquests tres índexs són anomenats índexs de poder “a priori”, ja que no tenen en compte altres factors externs que podrien influir a l'hora d'optar entre opcions en un procés de votació. Sota aquesta premissa, totes les coalicions són equiprobables.

- Índex de Shapley-Shubik: Aquest càlcul es basa en totes les permutacions possibles dels jugadors sobre les que s'analitzen les posicions “decisives” per a un jugador  $i$ . La suma de totes les posicions en les quals és decisiu es divideix per les ordenacions possibles sobre el conjunt de jugadors (Álvarez i Alonso, 2010). Segons Sánchez i Vidal-Puga (2014), l'índex de Shapley-Shubik pot interpretar-se com la probabilitat que una coalició sigui un canvi pel jugador  $i$ , és a dir, l'índex assigna a cada votant la probabilitat de ser *pivotal*<sup>1</sup> (*swing*) en una seqüència de votació:

$$SSI_i = \sum_{S \in W} \frac{(n - |S|)! (|S| - 1)!}{n!}$$

- Índex de Banzhaf-Coleman: Aquest índex normalitzat determina la probabilitat que un jugador sigui *decisiu*<sup>2</sup> en una coalició guanyadora. Sánchez i Vidal-Puga (2014) defineixen aquest índex com el percentatge del nombre total de canvis per a cada

---

<sup>1</sup> Segons Shapley i Shubik (1954), un jugador és **pivotal** (*pivotal player*) quan el seu vot converteix una coalició perdedora en una guanyadora, analitzat sobre les permutacions possibles.

<sup>2</sup> Es defineix com a **jugador decisiu** aquell que té la capacitat de transformar una coalició guanyadora en perdedora, independentment de l'ordre d'entrada en la coalició.

jugador, és a dir, ens indica la quantitat de vegades que un jugador és imprescindible en la coalició sense tenir en compte l'ordre d'entrada:

$$BC_i = \frac{PBP_i}{\sum_{j=1}^n PBP_j}$$

Aquests dos primers índexs tenen com a objectiu quantificar el grau en què un jugador és *swing*, encara que els seus valors no tenen per què coincidir. És per això que, en la definició anterior dels indicadors, s'introdueixen formalment els conceptes "jugador pivotal" i "jugador decisiu"; tot i que la definició és equivalent, es manté la terminologia diferenciada amb finalitats expositives i d'anàlisi comparativa.

- Índex de Deegan-Packel: Com es recull en l'article de Álvarez i Alonso (2010), aquest índex considera que el poder d'un jugador  $i$  es basa exclusivament en la seva participació en la formació de coalicions mínimes guanyadores i que totes aquestes coalicions són equiprobables. Els jugadors que participen en aquestes coalicions es divideixen el poder en parts iguals:

$$DPI_i = \frac{1}{|W_m|} \sum_{S \in W_m(i)} \frac{1}{|S|}$$

### 3. EL PARLAMENT DE CATALUNYA

El Parlament de Catalunya és la institució que representa el poble de Catalunya, la qual cosa el situa en una posició central en el sistema institucional de l'autogovern de Catalunya. El Parlament, com a institució que representa el poble de Catalunya, ha de ser renovat periòdicament per fer efectiu el dret dels ciutadans de Catalunya a participar en els afers públics per mitjà dels seus representants, elegits democràticament.

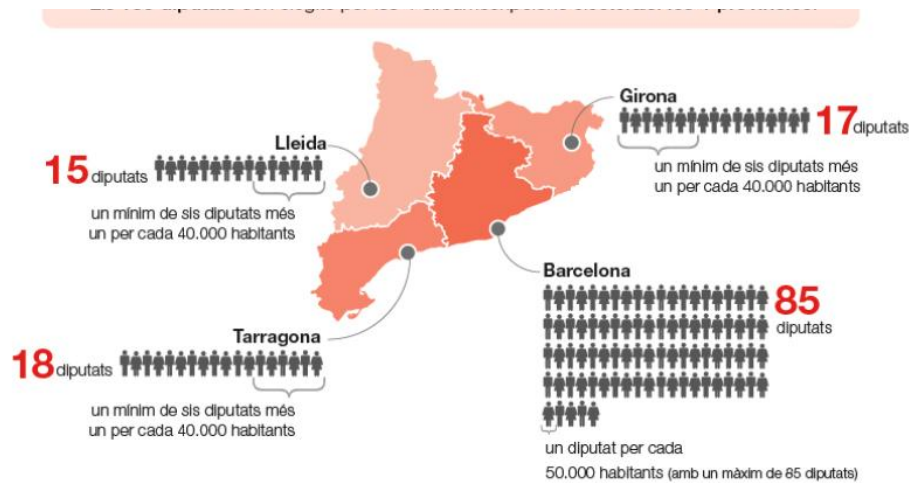
Una de les funcions més clàssiques dels parlaments és la legislativa, és a dir, la d'aprovar lleis. Les lleis de Catalunya són promulgades, en nom del rei, pel president de la Generalitat i publicades en el *Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya* i en el *Boletín Oficial del Estado* (Parlament de Catalunya, s.f)

### 3.1. SISTEMA ELECTORAL

El Parlament de Catalunya està compost per 135 diputats o diputades, els quals són elegits per les quatre províncies. “Són elegits per sufragi universal, igual, directe i secret”

*Il·lustració 1*

Mapa de distribució dels escons



*Nota. Extret de Sistema electoral, pel Parlament de Catalunya, 2025 (*  
<https://www.parlament.cat/wp/pcat/parlament/sistema-electoral/>*)*

En aquesta imatge es pot veure la distribució del nombre de diputats per cada província, tenint en compte els habitants de cadascuna.

“Citar imatge de la pàgina web del parlament de Catalunya”

Les competències del Parlament són diverses, a nivell legislatiu, aprovació de pressupostos, en l’acció política i de govern, entre d’altres. També existeixen diversos mètodes de votació.

### 3.2. SISTEMES DE VOTACIÓ I MAJORIES PARLAMENTÀRIES

Existeixen diverses formes de procedir en les votacions que es generen en el Parlament de Catalunya, segons la informació que es vulgui extreure més enllà de la resposta dels diputats a la proposta presentada o segons la forma de concloure els resultats obtinguts.

Els diversos sistemes de votació i majories parlamentàries:

- Votació per assentiment: Aquest estil de votació es dona quan la proposta anunciada per la presidència del Parlament s'accepta sense que hi hagi objecció o oposició per part dels diputats presents.
- Votació ordinària: Aquests sistema de vot permet conèixer el sentit individual de cada vot. Aquest és el sistema més habitual, on trobem dos formes per votar:
  - ✓ Electrònic.
  - ✓ A mà alçada.
  - ✓ Telemàtic.
- Votació pública per crida: Els diputats expressen el sentit del seu vot responnent "sí", "no", o "abstenció" a la crida de la secretaria de la Mesa.
- Votació secreta: No es permet conèixer el vot de cada diputat o diputada. Aquest sistema es pot procedir mitjançant:
  - ✓ Paperetes (escrit)
  - ✓ Boles: es fan servir boles blanques o negres que els diputats dipositen en una urna.
- Majoria simple: Aquesta majoria s'assoleix en el moment en el que hi ha un nombre de vots més gran a favor que en contra dels totals emesos pels diputats.
- **Majoria absoluta**: Aquests sistema estableix un quòrum d'aprovació de la meitat dels vots més un a favor de la proposta plantejada. Al parlament de Catalunya es necessiten el vot favorable de 68 diputats i s'utilitza per aprovar les lleis de desenvolupament bàsic de l'estatut i per escollir el president o presidenta de la Generalitat en una primera votació.
- Majoria reforçada: En el sistema de majoria reforçada també parlem d'una majoria qualificada que estableix un quòrum d'aprovació determinant, segons què es voti.
  - ✓ De 3/5 parts: En el parlament de Catalunya, aquesta majoria és del vot favorable de 81 diputats. És necessari perquè una comissió acordi el nomenament d'un únic ponent en el procés legislatiu.
  - ✓ De 2/3 parts: En el parlament, aquest majoria suma en 909 diputats donant un vot favorable com a resultat. Aquests sistema s'utilitza per aprovar les sessions d'una comissió, el nomenament d'un relator únic d'un grup de treball, les iniciatives de reforma de l'Estatut i l'exclusió temporal de l'exercici parlamentari d'un diputat, entre d'altres.

El sistema de votació que s'utilitzarà en aquest treball per tal d'analitzar l'evolució del poder dels partits en el Parlament serà la majoria absoluta, en la que només es pot estar a favor o en contra, però els partits no es poden abstenir.

### 3.3. PARTITS POLÍTICS I RESULTATS ELECTORALS

A continuació, es presenta una taula amb dades extretes de la pàgina web del parlament on es recullen el nombre d'escons que té cada partit polític que ha participat en les últimes tres legislatures:

*Taula 1*

Distribució d'escons per partits polítics al Parlament de Catalunya

| PARTITS                           | DIPUTATS               |                        |                       |
|-----------------------------------|------------------------|------------------------|-----------------------|
|                                   | XII LEGISLATURA (2018) | XIV LEGISLATURA (2021) | XV LEGISLATURA (2024) |
| SOCIALISTES I UNITS PER AVANÇAR   | 17                     | 33                     | 42                    |
| JUNTS PER CATALUNYA               | 34                     | 32                     | 35                    |
| ESQUERRA REPUBLICANA DE CATALUNYA | 32                     | 33                     | 20                    |
| PARTIT POPULAR DE CATALUNYA       | 4                      | 0                      | 15                    |
| VOX EN CATALUNYA                  | 0                      | 11                     | 11                    |
| EN COMÚ PODEM                     | 8                      | 8                      | 6                     |
| CANDIDATURA D'UNITAT POPULAR      | 4                      | 9                      | 4                     |
| CIUTADANS                         | 36                     | 6                      | 0                     |
| MIXT                              | 0                      | 3                      | 2                     |

*Nota. Elaboració pròpia.*

Amb les dades presentades en aquesta taula, es pot extreure la primera informació sobre el joc que conforma cada legislatura que s'analitza en els següents apartats: es pot afirmar que no hi ha cap jugador que sigui dictador. Com la quota d'aprovació en majoria absoluta en el Parlament de Catalunya és 68, es pot veure com no hi ha partit que, per si sol, superi o iguali aquest nombre d'escons.

Així mateix, s'observa que no hi ha jugadors amb capacitat de veto en les tres legislatures; la suma dels escons de la resta de jugadors, en tots els escenaris, és superior a la quota de 68. Aquest resultat indica que cap partit és estructuralment imprescindible per assolir la majoria absoluta.

Amb aquesta informació extreta es podrà procedir a la part pràctica, on s'analitzarà l'evolució del poder dels partits polítics segons els tres índexs de poder esmentats i explicats anteriorment i es comparen els resultats dels índexs amb el valor real basat en els escons.

## MARC PRÀCTIC

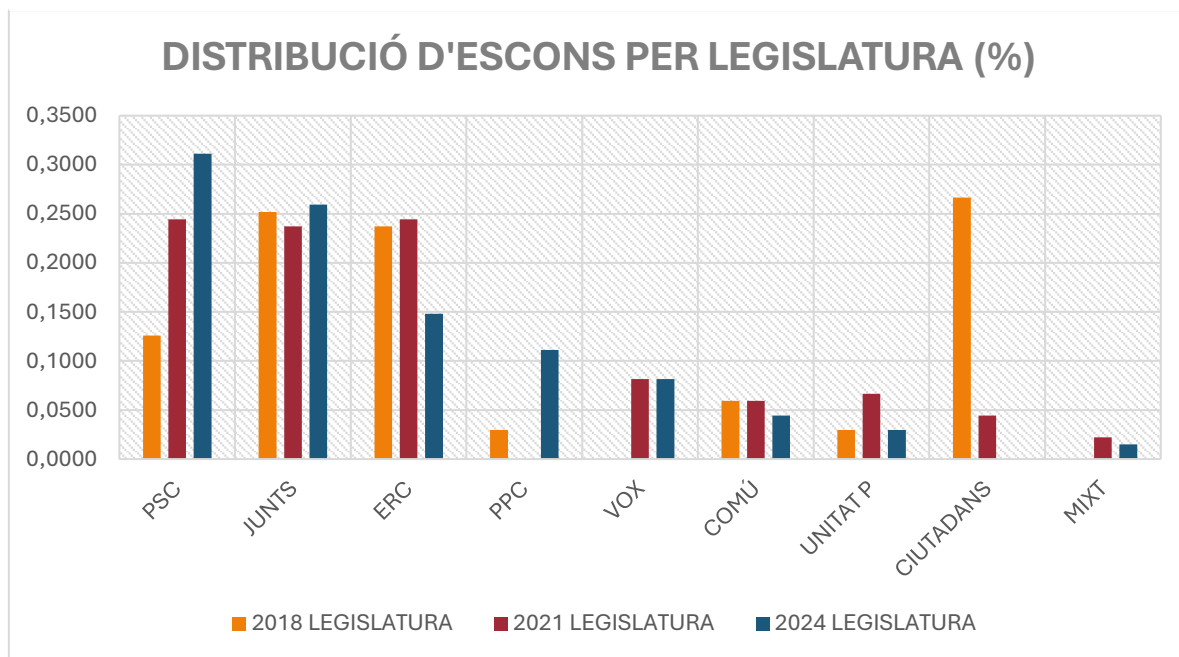
### 4. ANÀLISI DE REFERÈNCIA: EVOLUCIÓ DEL PES ELECTORAL EN TANT PER CENT

Si no coneixem quina utilitat tenen els índexs de poder o les diverses formes de ponderar els pesos dels usuaris que volem analitzar, el més probable és que s'utilitzin el nombre d'escons de cada partit per determinar la seva importància vers els altres, en aquest cas, en el Parlament.

L'objectiu d'aquest apartat és establir una base comparativa a través de l'anàlisi de la distribució nominal dels escons en les tres legislatures estudiades. Tradicionalment, s'interpreta que la força d'un partit polític és directament proporcional al nombre de representants obtinguts. Sota aquesta premissa, un partit amb 40 escons tindria el doble de poder que un amb 20 escons, però no es té en compte el poder estratègic de cap jugador.

Taula 2

Distribució percentual d'escons al Parlament de Catalunya per legislatura (2018-2024)



*Nota. Elaboració pròpia a partir de les dades del Parlament de Catalunya (2018-2024)*

En aquest gràfic de barres està representada la distribució d'escons en termes percentuals en el Parlament de Catalunya per cada partit i legislatura. Aquesta representació gràfica ens ajuda a poder determinar quins han sigut els partits més presents i, per tant, amb més poder, de la mateixa manera que ens permet analitzar les forces minoritàries i les seves evolucions.

#### **4.1. DINÀMIQUES DE CREIXEMENT I CONSOLIDACIÓ**

En l'anàlisi de les tendències positives, destaquen l'evolució de dues formacions que han aconseguit millorar la seva representació de manera notable: el PSC i el PP.

L'evolució positiva més significativa és la del PSC, on es veu un increment constant durant les tres legislatures analitzades. L'any 2018, el partit ocupava una posició secundària amb un 12,59% dels escons, tenint a quatre partits al davant pel que fa a nombre d'escons. Aquest pes es va duplicar pràcticament a la legislatura de l'any 2021 (24,44%) i es va acabar de consolidar en l'última com la primera força entre els partits, amb un 31,11%.

Aquesta progressió no només indica un creixement en vots, sinó una consolidació del seu paper com a actor central per a qualsevol coalició de govern, ocupant quasi un terç de l'espai legislatiu.

D'altra banda, el PP mostra una dinàmica de recuperació molt notable i accentuada. Després de quedar reduït a una presència residual en l'any 2021 (amb un 2,22% dels escons) a la legislatura del 2024 ha aconseguit un creixement significatiu fins a arribar a l'11,11%. Aquest salt de gairebé 9 punts percentuals és especialment rellevant, ja que torna a situar al partit com un actor amb més capacitat d'influència.

#### **4.2. DINÀMIQUES DE RETROCÉS I PÈRDUA DE REPRESENTATIVITAT**

En contrast, el sistema ha experimentat fenòmens de contracció on determinats jugadors han perdut la seva capacitat de representació nominal.

El cas de Ciutadans representa el cas més notable i dràstic de pèrdua de representació i, per tant, de poder. Es pot veure com va passar de ser la força majoritària en la primera legislatura amb un 26,67% del pes electoral a formar part de les minories en el 2021. Finalment, el partit va desaparèixer de l'arc parlamentari en aquesta última legislatura. Aquesta pèrdua de poder va redistribuir les probabilitats de joc entre els altres partits, canviant les possibles coalicions entre els actors per tal d'assolir la victòria.

També es pot apreciar un retrocés, encara que menys accentuat, en el partit ERC en l'última etapa. Després d'un període de màxima representació en el 2021, amb un 24,44% de pes electoral, el seu pes ha caigut fins al 14,81% de presència.

Aquest descens del 10% en el seu pes d'escons altera la seva posició de partida en l'anàlisi de combinatòries que es realitzarà posteriorment amb els índexs de poder.

## **5. ANÀLISI DELS ÍNDEXS DE PODER AL PARLAMENT DE CATALUNYA (2018-2024).**

En aquest apartat s'utilitza el sistema de programació Python per poder obtindre els valors dels índexs de cada partit per cada Legislatura. L'objectiu d'aquest apartat és poder veure quin és el paper de cada partit polític dins del joc de votació que conforma cada Legislatura.

### **5.1. AUTOMATITZACIÓ MITJANÇANT PYTHON**

El càlcul dels tres índexs de poder escollits (índex de Shapley-Shubik, índex de Banzhaf-Coleman i índex de Deegan-Packel) presenta una dificultat computacional que creix de manera exponencial a mesura que augmenta el nombre de jugadors (partits polítics) i les possibles coalicions. Per aquest motiu, s'ha descartat el càlcul manual i s'ha optat per utilitzar el llenguatge de programació Python amb l'assistència d'eines d'intel·ligència artificial generativa (IA).

La codificació de l'algoritme s'ha elaborat mitjançant un procés col·laboratiu amb l'assistència de model de llenguatge gran (IA). Aquesta eina de suport ha permès:

- Dissenyar una lògica eficient per a la generació de totes les combinacions possibles de partits (el conjunt de les parts o *power set*).
- Implementar les funcions matemàtiques específiques de cada índex, assegurant que el codi identifiqués correctament les coalicions guanyadores i els jugadors decisius (*swing players*) o els integrants de coalicions guanyadores mínimes segons el cas.
- Depuració i validació: L'ús de la IA ha facilitat la correcció d'errors en el tractament de dades i ha garantit que la sortida del programa fos coherent amb la teoria dels índexs de poder.

El script de Python s'ha dissenyat per processar el nombre d'escons i el llinar de majoria de cada període històric. El flux de treball ha seguit tres fases:

- Entrada de dades: Introducció de la composició del Parlament en les tres legislatures seleccionades.
- Càlcul iteratiu: El programa recorre milers de combinacions per determinar la capacitat de cada partit de decantar la balança en una votació.
- Exportació de dades: Finalment, l'algoritme ha generat tres taules detallades (una per legislatura) on s'exposen de forma comparativa els valors numèrics de cada índex per a cada jugador.

Aquesta metodologia no només redueix el marge d'error humà, sinó que permet una anàlisi molt més profunda de la dinàmica de poder que no seria possible amb mètodes tradicionals de càlcul.

## 5.2. ANÀLISI DE LA XII LEGISLATURA

Taula 3

Índexs de poder al Parlament de Catalunya (XII Legislatura, 2018)

| XII LEGISLATURA (2018) |                |                 |               |
|------------------------|----------------|-----------------|---------------|
| PARTIT                 | SHAPLEY-SHUBIK | BANZHAF-PENROSE | DEEGAN-PACKEL |
| SOCIALISTES            | 0,019          | 0,0196          | 0,0762        |
| JUNTS                  | 0,2857         | 0,2941          | 0,2619        |
| ERC                    | 0,2857         | 0,2941          | 0,2619        |
| PP                     | 0,019          | 0,0196          | 0,0762        |
| EN COMÚ                | 0,019          | 0,0196          | 0,0762        |
| CUP                    | 0,019          | 0,0196          | 0,0762        |
| CIUTADANS              | 0,3524         | 0,3333          | 0,1714        |

Nota. Elaboració pròpia.

### SHAPLEY-SHUBIK

L'índex de Shapley-Shubik ens indica que Ciutadans és el partit que més vegades és pivot en totes les coalicions analitzades. (0,3524), fet que resulta coherent amb la seva posició com a força amb més escons en el Parlament.

No obstant això, s'observa un fenomen d'equivalència estratègica: tot i que Junts per Catalunya i Esquerra Republicana tenen pesos nominals diferents (34 i 32 escons respectivament), el seu valor de Shapley és idèntic. Aquesta igualtat de valors evidencia que, des d'una perspectiva de probabilitat de formar majories, ambdós partits tenen la mateixa capacitat d'influència real, independentment de la seva diferència d'escons. Aquesta situació es replica en el bloc minoritari: l'índex revela que, tot i tenir més escons, el PSC no té més poder real que la resta de partits minoritaris.

### **BANZHAF-COLEMAN**

L'índex de Banzhaf manté la jerarquia detectada anteriorment. S'observa que Junts i ERC mantenen una idèntica capacitat de ser decisius. Així mateix, la resta de les forces minoritàries també presenten la mateixa distribució; cap d'aquests partits és més decisiu per decantar la balança d'una votació.

### **DEEGAN-PACKEL**

Aquest índex proporciona uns resultats diferents per aquesta legislatura que els prèviament analitzats. En aquest escenari, Junts i ERC superen a Ciutadans en capacitat d'influència. Atès que l'índex de Deegan-Packel premia la participació en coalicions mínimes guanyadores i reparteix el poder equitativament entre els seus membres, Ciutadans es veu penalitzat per una mida ineficient. La seva mida el fa un soci menys atractiu per a configurar coalicions on cap membre sigui prescindible.

D'altra banda, el mateix principi que penalitza les forces majoritàries actua com a impulsor per als partits amb menys escons. En ser partits més ajustats per a completar majories sense generar excedents, el seu valor relatiu de poder s'eleva en comparació amb els indicadors anteriors.

### 5.3. ANÀLISI DE LA XIV LEGISLATURA

Taula 4

Índexs de poder al Parlament de Catalunya (XIV Legislatura, 2021)

| XIV LEGISLATURA (2021) |                |                 |               |
|------------------------|----------------|-----------------|---------------|
| PARTIT                 | SHAPLEY-SHUBIK | BANZHAF-PENROSE | DEEGAN-PACKEL |
| SOCIALISTES            | 0,2738         | 0,287           | 0,2018        |
| JUNTS                  | 0,2738         | 0,287           | 0,2018        |
| ERC                    | 0,2738         | 0,287           | 0,2018        |
| VOX                    | 0,0357         | 0,0278          | 0,0789        |
| EN COMÚ                | 0,0357         | 0,0278          | 0,0789        |
| CUP                    | 0,0357         | 0,0278          | 0,0789        |
| CIUTADANS              | 0,0357         | 0,0278          | 0,0789        |
| MIXT                   | 0,0357         | 0,0278          | 0,0789        |

*Nota. Elaboració pròpia.*

#### SHAPLEY-SHUBIK

En aquesta legislatura, el PSC, Junts i ERC comparteixen un valor de 0,2738. Aquesta igualtat absoluta indica que, independentment de l'ordre d'entrada en la formació de coalicions, tots tres tenen la mateixa probabilitat de ser el jugador pivot. Aquesta dada és especialment rellevant en el cas de Junts ja que, malgrat tenir un pes nominal inferior al del PSC i ERC, la seva importància estratègica és idèntica. La victòria depèn, llavors, d'un acord entre almenys dos d'aquests tres grans blocs, convertint-los en actors interdependents.

D'altra banda, s'observa com les forces minoritàries també s'estabilitzen en una mateixa probabilitat de ser pivots. És destacable que tenir 11 escons (en el cas de VOX) o tenir 3 escons (en el cas del grup Mixt), no genera una variació en la valoració de l'índex, ja que per sota del llindar dels grans partits, la capacitat de ser pivot no varia.

### **BANZHAF-COLEMAN**

Aquest índex ens dona uns resultats similars respecte a les equivalències dels valors, encara que són diferents de l'índex anterior. Es veu com PSC, ERC i Junts són decisius en el mateix nombre de coalicions.

En canvi, els partits petits veuen reduïda la seva capacitat de ser decisius en comparació amb els valors que ha aportat Shapley, ja que la forta concentració de poder en els tres grans blocs limita les situacions en què una força minoritària pot, per si sola, alterar el resultat d'una votació.

Els partits més petits tenen menys capacitat de canviar els resultats d'una votació o de ser decisius, ja que la força dels tres grans partits els fa menys decisius a l'hora de canviar la direcció d'unes votacions per si sols.

### **DEEGAN-PACKEL**

Els resultats d'aquest índex són, de nou, els que presenten un contrast més destacable. Els tres principals partits formen part de coalicions mínimes guanyadores la mateixa quantitat de vegades, el seu valor individual disminueix respecte els altres indicadors.

Es pot observar com els partits polítics minoritaris obtenen un valor de l'índex molt superior al dels altres índexs, quasi tres vegades més que en Shapley i Banzhaf. Aquest increment s'explica, de nou, perquè Deegan-Packel premia l'eficiència. Com aquests partits permeten completar majories de forma més ajustada, es converteixen en peces clau per a la formació de coalicions on no hi hagi cap excedent d'escons.

#### 5.4. ANÀLISI DE LA XV LEGISLATURA

Taula 5

Índexs de poder al Parlament de Catalunya (XV Legislatura, 2024)

| XV LEGISLATURA (2024) |                |                 |               |
|-----------------------|----------------|-----------------|---------------|
| PARTIT                | SHAPLEY-SHUBIK | BANZHAF-PENROSE | DEEGAN-PACKEL |
| SOCIALISTES           | 0,3476         | 0,333           | 0,1756        |
| JUNTS                 | 0,2476         | 0,2281          | 0,1526        |
| ERC                   | 0,1619         | 0,1754          | 0,1795        |
| PP                    | 0,1            | 0,1053          | 0,1231        |
| VOX                   | 0,081          | 0,0877          | 0,1397        |
| EN COMÚ               | 0,0333         | 0,0351          | 0,091         |
| CUP                   | 0,0143         | 0,0175          | 0,0692        |
| MIXT                  | 0,0143         | 0,0175          | 0,0692        |

Nota. Elaboració pròpia.

En la legislatura de 2024 s'observa, de manera transversal en tots els índexs, una distribució del poder més fragmentada que en els períodes anteriors:

##### SHAPLEY-SHUBIK

L'índex de Shapley-Shubik indica un lideratge clar del PSC, on actua com a punt d'inflexió en gairebé en el 35% de les seqüències de votació. També s'observa que ERC per una part notable de la seva capacitat de ser pivot respecte a les legislatures anteriors, com a conseqüència directa de la pèrdua d'escons.

Un dels casos més rellevants d'aquest període és l'evolució del PP. S'observa com el seu poder estratègic segons l'índex s'ha multiplicat per 5 tot i només haver augmentat el seu nombre d'escons per 3,7. Aquest és un clar exemple de com el poder polític no evoluciona de forma lineal al nombre d'escons, sinó que la posició estratègica en el tauler pren el protagonisme.

##### BANZHAF-COLEMAN

Segons el model de Banzhaf, el PSC és el partit amb més poder capacitat de ser decisiu en una votació, amb un valor del 33,3%. El partit que el segueix és Junts que, encara

havent perdut presència en el Parlament, continua sent una peça clau en la formació de majories.

Pel que fa a VOX, s'observa que, tot i mantenir el mateix nombre d'escons que en la legislatura anterior (11), el seu valor estratègic ha augmentat considerablement. Aquesta variació s'explica per la disminució d'escons de la resta dels partits minoritaris, convertint-lo en un bloc més compacte que la resta de minories i incrementant la seva capacitat de ser un agent decisiu.

### **DEEGAN-PACKEL**

L'índex de Deegan-Packel torna a oferir resultats que s'allunyen de la simple suma d'escons. En aquest cas, ERC obté un valor superior al del PSC (0,1795 i 0,1756 respectivament), tot i que el PSC té gairebé el doble de diputats. Aquesta dada ens indica una major eficiència per part d'Esquerra en la formació de Coalicions Mímines Guanyadores.

Així mateix, s'observa com el poder dels partits minoritaris es revalora a l'alça, com en les anteriors legislatures, a causa de la seva mida i capacitat de poder generar coalicions sense excedents d'escons.

Un cop presentades les dades obtingudes del càlcul dels tres indicadors per cada legislatura, es comprova que no hi ha jugador cap que prengui un valor de 0. Aquesta observació permet afirmar que tots els jugadors analitzats participen en alguna coalició, encara que sigui mínimament. En conseqüència, es conclou que en cap de les tres legislatures estudiades existeix la figura del jugador nul.

### **6. ANÀLISI COMPARATIVA: CONTRAST DELS RESULTATS ENTRE ESCONS I ÍNDEXS DE PODER**

En la primera anàlisi s'ha pogut observar com, durant les dues primeres legislatures, hi ha hagut tres actors predominants que prenen gran part de l'acció deixant un taulell amb un repartiment de poder desequilibrat. Aquests dos jocs han presentat uns valors dels índexs bastant similars entre ells a causa d'una estructuració similar.

En canvi, en la tercera legislatura analitzada, s'ha pogut apreciar una lleugera descentralització del poder que ha donat com a resultat una valoració per part dels índexs lleugerament diferents.

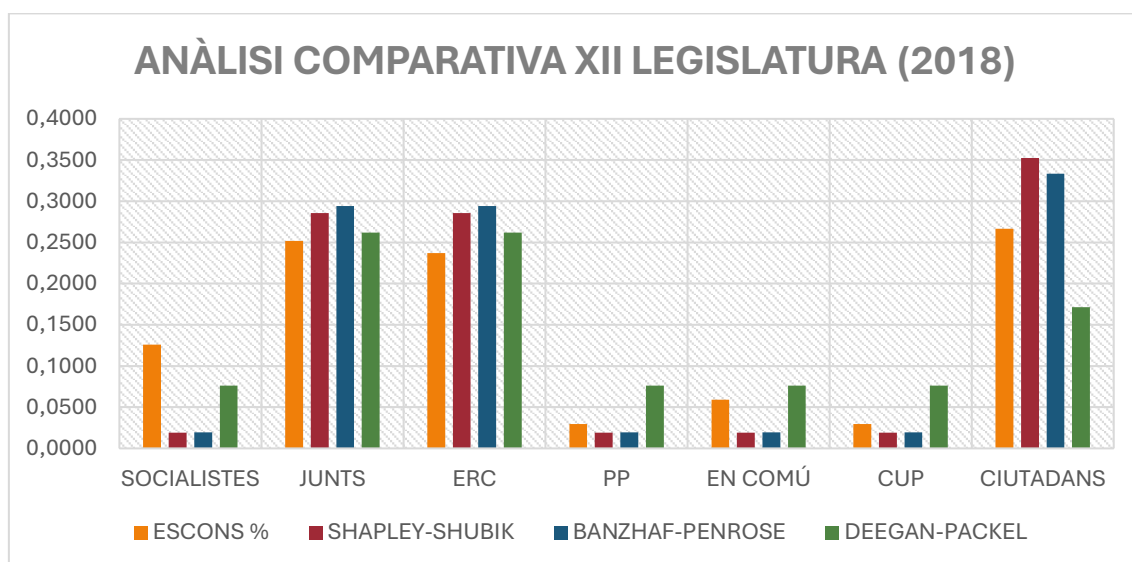
Aquest segon bloc d'anàlisi té com a objectiu comparar els resultats dels índexs amb la presència percentual dels partits en el parlament, buscant trobar patrons de comportament entre aquests dos agents i poder tenir una visió global completa sobre la situació i el poder de cada partit.

Es divideix l'anàlisi en dos blocs en els quals, per una banda, s'observen l'índex de Shapley-Shubik i de Banzhaf i, per l'altre, l'índex de Deegan-Packel. Aquests dos blocs es comparen amb la representació física dels partits en el Parlament amb l'objectiu de veure quines són les tendències de valoració dels índexs i, d'altra banda, poder estudiar les anomalies en aquests patrons i les seves explicacions.

### 6.1. XII LEGISLATURA (2018)

Taula 6

Anàlisi comparativa XII Legislatura (2018)



Nota. Elaboració pròpia.

### SHAPLEY-SHUBIK I BANZHAF-COLEMAN

En aquesta legislatura tenim tres grans agents que dominen el joc: Junts, ERC i Ciutadans. Per aquests tres jugadors, els índexs de Shapley i de Banzhaf donen una valoració superior a la que s'obté si només es mira la presència en el parlament (% d'escons). També es pot apreciar com, entre aquests dos índexs, el de Banzhaf és

lleugerament superior al de Shapley en el cas de Junts i d'ERC, mentre que en el cas de Ciutadans és lleugerament inferior.

Aquests dos índexs es comporten diferent en el cas dels partits minoritaris, provocant un valor inferior al percentatge d'escons de cada partit.

## **DEEGAN-PACKEL**

Si es posa el focus en aquest índex, es pot veure com la valoració dels partits és diferent que els dos anteriors.

Primerament, s'observa com l'índex no valora de manera uniforme als tres actors principals. Mentre que Junts i ERC obtenen una puntuació inferior a la dels índexs de Shapley-Shubik i Banzhaf-Coleman, el seu poder real continua situant-se per sobre del seu pes en escons. Per contra, la valoració que Deegan-Packel dona atorga a Ciutadans és molt inferior a la seva presència física en el Parlament.

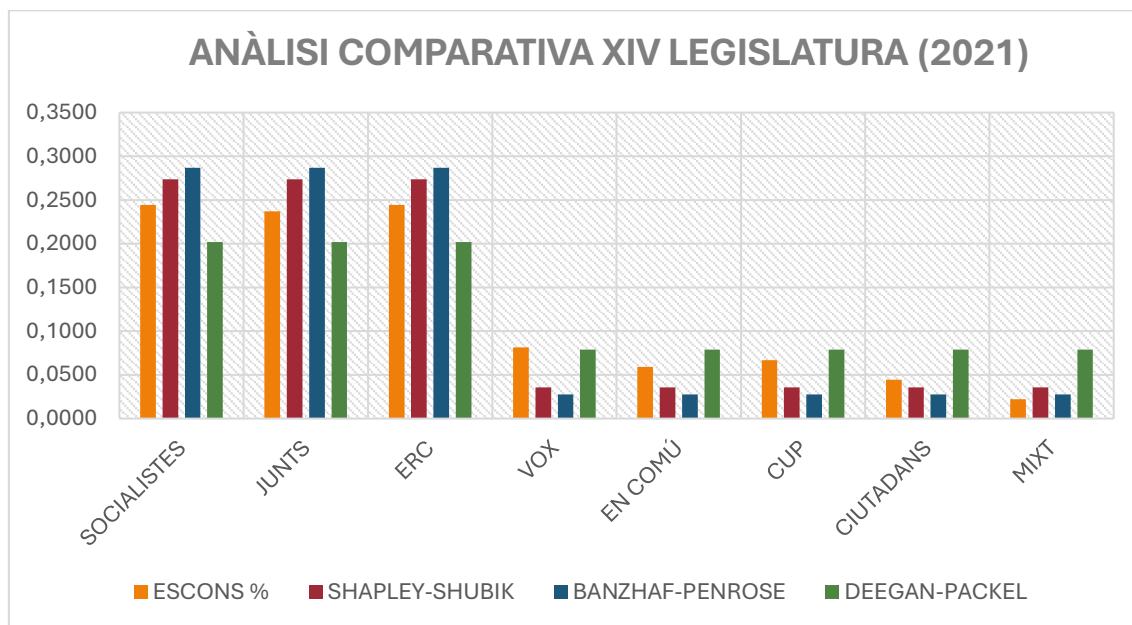
En els casos de PP, En Comú i CUP, Deegan-Packel és l'índex que més poder els atorga, situant-se inclús per sobre del percentatge d'escons de cada partit.

En el cas del partit socialista s'aprecia com es comporta diferent del que es podria esperar després d'haver observat els dos índexs anteriors: Shapley i Banzhaf es troben per sota del percentatge d'escons, per la qual cosa es podria considerar que forma part dels partits minoritaris. Sent així, s'espera que l'índex de Deegan dongui una valoració relativa similar, però no és el cas; l'índex infravalora al partit socialista per sota de la seva presència en el parlament.

## 6.2. XIV LEGISLATURA (2021)

Taula 7

Anàlisi comparativa de la XIV Legislatura (2021)



Nota. Elaboració pròpia.

### SHAPLEY-SHUBIK I BANZHAF-COLEMAN

La legislatura de l'any 2021 presenta un escenari on el poder està més distribuït entre els tres agents principals, els quals concentren gairebé tres quartes parts de la capacitat de decisió parlamentària. Per a aquests tres agents, tant l'índex de Shapley com el de Banzhaf també es situen per sobre del percentatge d'escons, sent Banzhaf lleugerament superior al primer.

En el cas de les minories, que estan conformades per la resta de partits, aquests dos índexs també es comporten d'una manera similar a l'anteriorment vista: tots presenten uns valors inferiors a la presència parlamentària. En aquest cas l'índex de Banzhaf és lleugerament inferior, encara que perceptible, que el de Shapley.

El grup mixt presenta els mateixos valors d'aquests dos índexs, però no el mateix patró, ja que tots tres se situen per sobre del valor d'escons.

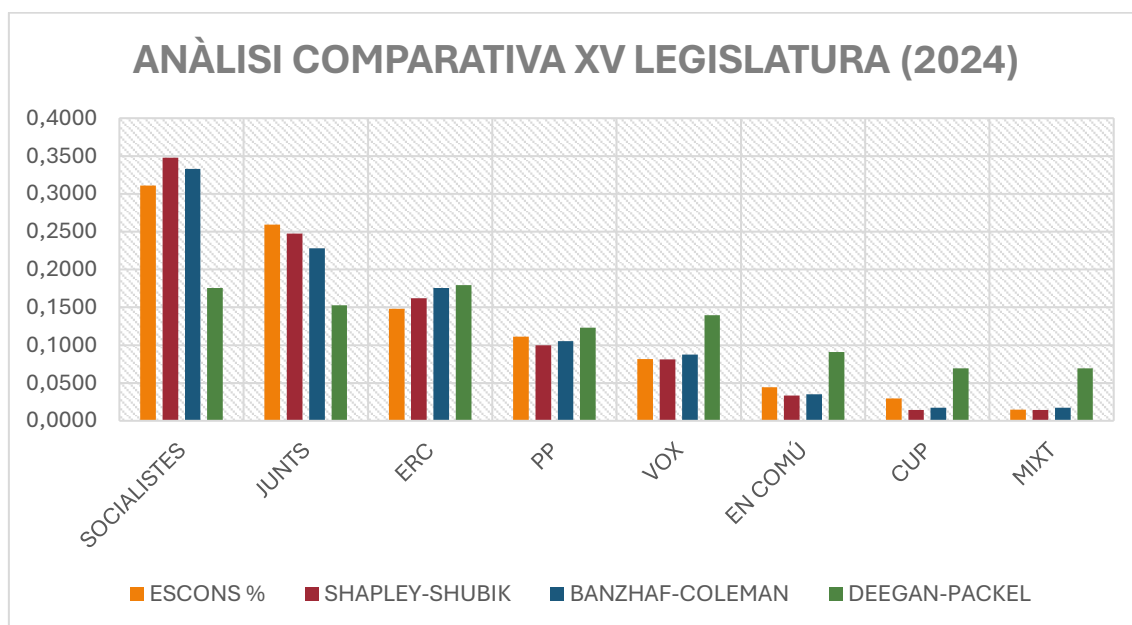
## DEEGAN-PACKEL

Aquest índex coincideix amb les valoracions que ha donat en la legislatura anterior: les tres grans forces presenten una valoració que se situa com la més baixa d'entre els altres indicadors, mentre que la resta de partits prenen una valoració que es situa al mateix nivell o per sobre del percentatge d'escons, sent l'índex que més poder els hi atribueix de nou.

### 6.3. XV LEGISLATURA (2024)

Taula 8

Anàlisi comparativa de la XV Legislatura (2024)



Nota. Elaboració pròpia.

### SHAPLEY-SHUBIK I BANZHAF-COLEMAN

En aquesta segona legislatura, els valors dels índexs difereixen del comportament que han presentat en les dues primeres.

El partit Socialista té uns valors dels dos índexs superiors als escons, però Banzhaf és lleugerament inferior a Shapley.

El segon partit més gran, Junts, ja situa els dos índexs per sota del seu pes en escons. Aquest resultat és diferent del que es pot esperar, ja que, encara que és un 10% inferior

que el partit Socialista pel que fa a escons, se situa en el marge del 25%, el qual és per on han rondat els grans partits en les legislatures anteriors en què aquests índexs eren superiors als escons.

D'altra banda, ERC té uns valors superiors al seu percentatge d'escons, sent aquest d'un 15%. L'únic cas similar a aquest és el de l'any 2018 on el partit Socialista té un 12,5% dels escons del Parlament, però els índexs de Shapley i Banzhaf el van valorar de la mateixa forma que amb els partits inferiors. En trobar aquesta similitud, és comprensible esperar que, en aquesta legislatura, el partit hagués rebut uns resultats concordants.

La resta de partits presenten uns valors més predictibles tenint en compte les anàlisis anteriors. Els valors dels dos índexs són similars o inferiors al seu pes en escons, tal com han actuat en les minories anteriors.

## **DEEGAN-PACKEL**

En aquest últim cas, Deegan-Packel ha proporcionat uns números que van d'acord amb el que ha estat donant en els estudis anteriors: el valor pels jugadors més grans són inferiors al seu percentatge d'escons i superiors per la resta d'agents.

Encara que a primera vista sembla que ha seguit el patró que s'espera, el cas del partit ERC és particular: ERC rep una puntuació superior a la dels seus escons per part dels tres índexs. En l'anterior anàlisi es pot veure, de forma general, com els índexs de Shapley-Shubik i Banzhaf i l'índex de Deegan-Packel han actuat com a elements antagònics, ja que quan els primers valoraven positivament a un jugador, el segon li donava un valor considerablement inferior i a la inversa.

### **6.4. PATRONS I ANOMALIES**

Un cop duta a terme l'anàlisi detallada de cada període, aquest apartat té com a objectiu sintetitzar les anomalies i patrons recurrents detectats en el contrast entre el pes electoral i el poder real. L'estudi transversal de les tres legislatures ens permet extreure conclusions sobre com es comporta l'estructura del Parlament de Catalunya més enllà de la simple suma d'escons.

1. Equivalència estratègica:

Un dels casos més repetits en les legislatures presentades és la presència de partits amb un nombre d'escons diferent que presenten uns valors d'índex de poder idèntics. Aquesta situació es dona quan hi ha partits que són intercanviables entre ells, ja que tenen la mateixa capacitat de canviar el signe d'una votació.

Aquesta situació es troba en les legislatures de 2018 i 2021, que presenten una segmentació més accentuada i un repartiment dels escons més desiguals per part dels tres índexs.

2. Penalització per excés d'escons:

L'anàlisi revela com els partits més grans han sigut penalitzats per part de l'índex de Deegan-Packel, sent aquest el valor més petit que han rebut aquests partits. D'altra banda, aquest índex ha puntuat favorablement els partits més petits superant, en molts casos, el percentatge d'escons.

Aquest comportament s'entén com una valoració de l'índex enfocada en l'eficiència. Quan es busca crear coalicions guanyadores mínimals on es busca que no hi hagi cap excés, el fet que l'estructura del Parlament estigui polaritzada genera que sigui menys probable que els grans agents participin en el mateix nombre de coalicions mínimals guanyadores com els agents més petits, els quals són molt més eficients quant a buscar encaixar en els buits que deixen els jugadors principals.

També és visible com aquest índex valora més favorablement als partits més grans en les legislatures del 2018 i 2021 a causa de la desigualtat en el repartiment d'escons, ja que són indispensables per les formacions de coalicions, però en la legislatura del 2024 no es repeteix aquest comportament. Com en aquesta última el poder està significativament més repartit, hi ha moltes més combinacions en què una coalició pot ser guanyadora amb el nombre just de jugadors sense comptar amb el Partit Socialista.

### 3. Correlació entre ser pivot i ser crucial:

En els anys 2018 i 2021 es pot veure com l'índex de Shapley-Shubik i Banzhaf actuen de la mà, valorant positivament els partits més grans sent el valor de Banzhaf superior al que dona Shapley i al contrari pels partits més petits. D'aquesta manera, és fàcil deduir que hi ha una correlació directa entre aquests dos índexs que els fa tenir un comportament previsible. No és fins que s'analitzen les dades del 2024 que es veu que l'afirmació anterior no és certa.

La diferència entre aquests moviments dels índexs està condicionada per la distribució estructural dels escons en el Parlament.

En els anys 2018 i 2021, en els que el poder està polaritzat, l'índex de Banzhaf tendeix a amplificar el poder, mentre que l'índex de Shapley-Shubik té tendència a suavitzar el valor, ja que dona oportunitats de ser pivot a jugadors inferiors en valorar l'ordre d'entrada en la coalició i no només el fet de participar en ella.

En canvi, en l'any 2024, aquest patró de comportament desapareix perquè el repartiment del poder d'una forma més uniforme causa que el nombre de coalicions on els grans partits són crítics disminueix i altres partits passen a tenir un paper més rellevant.

## CONCLUSIONS

L'elaboració d'aquest treball ha permès confirmar de manera empírica que el pes dels escons no manté una correlació directa ni lineal amb el poder estratègic real de cada formació política. Mitjançant l'aplicació dels índexs de poder analitzats, s'ha posat de manifest que la capacitat d'influència d'un partit en el procés de presa de decisions és una magnitud que no només depèn del seu volum absolut de representants. Aquesta investigació demostra que un increment en el nombre de diputats no es tradueix necessàriament en una quota més elevada de poder, de la mateixa manera que una pèrdua d'escons no implica forçosament una disminució de la rellevància estratègica, validant així la hipòtesi que el recompte electoral és només una capa superficial de la realitat parlamentària.

Al llarg de l'anàlisi de les diferents legislatures, s'ha pogut observar que els índexs de poder no presenten patrons fixos o predictibles basats únicament en la mida dels partits, sinó que la valoració del poder de cada actor depèn intrínsecament de l'estructuració global de l'arc parlamentari i del repartiment específic dels escons en cada període. El poder estratègic emergeix, doncs, com una propietat sistèmica: la capacitat de decisió d'una força política està condicionada per la seva posició relativa i per les combinacions de coalició que la resta d'actors permeten o bloquegen. Aquesta dinàmica explica per què partits amb pesos electorals molt distants poden arribar a ostentar una capacitat de ser pivotal idèntica, o per què certes majories nominals resulten ser estratègicament ineficients.

En definitiva, aquest estudi subratlla que la comprensió de la governabilitat requereix anar més enllà de l'anàlisi descriptiva dels resultats electorals. La utilització de mètodes quantitatius ha permès observar una estructura de poder més complexa i verídica, on la interdependència entre les forces i la geometria de les possibles aliances determinen quin és el repartiment real del poder

## REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

- C. Rafels, Marín Solano, F. J. Martínez de Albéniz Salas, M. Núñez Oliva, N. Ybern Carballo, & J. Maria. Izquierdo Aznar, Ed (1999). Jocs cooperatius i aplicacions econòmiques. Edicions Universitat de Barcelona.
- Pérez Navarro, J., Jimeno, J. L., & Cerdá Tena, E. (2004). Teoría de juegos. Prentice Hall.
- Sánchez Rodríguez, E., Vidal-Puga, J.J (2014). Juegos coalicionales. Vigo: Servizo de Publicacións de Universidade de Vigo
- Álvarez, M., i Alonso, J. M. (2010). Las elecciones generales de 2008 y el juego del parlamento. SUMA, (63), 7-15. <https://revistasuma.fespm.es/revistas-revistas/revista-63.html>
- Amer,R., Carreras,F., i Magaña,A. (2008). Aplicaciones de los juegos cooperativos al contexto empresarial. Intangible Capital, (4)2: 102-142. <https://www.intangiblecapital.org/index.php/ic/article/view/62/77>
- Meca Martínez, A. (2006). Génesis y evolución de la teoría de juegos. Sus orígenes en España. Boletín de la Sociedad de Estadística e Investigación Operativa, 22(1), 15-23. <https://www.seio.es/archivo-beio/>
- Owen, G. (1978). Characterization of the Banzhaf-Coleman Index. SIAM Journal on Applied Mathematics, 35(2), 315–327. <http://www.jstor.org.sabidi.urv.cat/stable/2100670>
- Seijas Macías, J. A. (2015). Índices de poder. Como evaluar el poder de voto. Anales de ASEPUMA, (23), 1-20. <https://www.asepuma.org/2015/2015.htm>
- Shapley LS, Shubik M. A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System. American Political Science Review. 1954;48(3):787-792. <https://doi.org/10.2307/1951053>
- Sutter, M. (2000). [Review of The Measurement of Voting Power: Theory and Practice, Problems and Paradoxes, by D. S. Felsenthal & M. Machover]. Public

Choice, 102(3/4), 373–376.  
<http://www.jstor.org/sabidi.urv.cat/stable/30026244>

Generalitat de Catalunya. (2024). Repartiment d'escons. Parlament 2024.  
<https://www.gencat.cat/eleccions/parlament2024/ca/votants/entenem-eleccions/repartiment-escons/index.html>

Parlament de Catalunya. (2025, 24 de juliol). Sistema electoral.  
<https://www.parlament.cat/wp/pcat/parlament/sistema-electoral/>

Parlament de Catalunya. (s.f.). Resultats electorals. Recuperat el 22 de gener de 2026 de  
<https://www.parlament.cat/wp/pcat/parlament/que-es-el-parlament/resultats-electorals/>

## CODI PYTHON ÍNDEXS DE PODER NORMALITZATS

```
import itertools

def calcular_indexes_normalitzats(partits_dict, quota):
    noms = list(partits_dict.keys())
    escons = list(partits_dict.values())
    n = len(noms)

    # Inicialitzem comptadors absoluts
    vots_critics_bz = {p: 0 for p in noms}
    pivots_ss = {p: 0 for p in noms}
    mwc_list = []

    # 1. Càlcul de Banzhaf i MWC (Coalicions guanyadores)
    for r in range(1, n + 1):
        for combo_indices in itertools.combinations(range(n), r):
            suma = sum(escons[i] for i in combo_indices)
            if suma >= quota:
                es_minima = True
                for i in combo_indices:
                    # Banzhaf: El partit és crític si en marxar es perd la majoria
                    if suma - escons[i] < quota:
                        vots_critics_bz[noms[i]] += 1
                else:
                    # Si algú NO és crític, la coalició no és MWC (per a Deegan-Packel)
                    es_minima = False

            if es_minima:
                mwc_list.append([noms[i] for i in combo_indices])

    # 2. Deegan-Packel (Basat en MWC)
    dp_absolut = {p: 0 for p in noms}
    for mwc in mwc_list:
        mida = len(mwc)
        for p in mwc:
            dp_absolut[p] += (1 / mida)

    # 3. Shapley-Shubik (Permutacions)
    for perm in itertools.permutations(range(n)):
        acumulat = 0
        for i in perm:
            anterior = acumulat
            acumulat += escons[i]
            if anterior < quota <= acumulat:
                pivots_ss[noms[i]] += 1
                break

    # FUNCIO DE NORMALITZACIO: Divideix el valor de cada partit per la suma total
    def normalitzar(d):
        total = sum(d.values())
        if total == 0: return {k: 0 for k in d.keys()}
        return {k: round(v / total, 4) for k, v in d.items()}

    return normalitzar(pivots_ss), normalitzar(vots_critics_bz), normalitzar(dp_absolut)

# --- DADES DE LA TEVA TAULA ---
```

```

dades_legislatures = {
    'XII Legislatura': {
        'Socialistes': 17, 'Junts': 34, 'ERC': 32, 'PP': 4,
        'En Comú': 8, 'CUP': 4, 'Ciutadans': 36
    },
    'XIV Legislatura': {
        'Socialistes': 33, 'Junts': 32, 'ERC': 33, 'Vox': 11,
        'En Comú': 8, 'CUP': 9, 'Ciutadans': 6, 'Mixt': 3
    },
    'XV Legislatura': {
        'Socialistes': 42, 'Junts': 35, 'ERC': 20, 'PP': 15,
        'Vox': 11, 'En Comú': 6, 'CUP': 4, 'Mixt': 2
    }
}

quota_majoria = 68

# --- GENERACIÓ DE LES TAULES ---
for leg, partits in dades_legislatures.items():
    # Calculem índexs (només per partits amb escons)
    ss, bz, dp = calcular índexs_normalitzats(partits, quota_majoria)

    print(f"\n--- {leg} ---")
    print(f"{'Partit':<18} | {'SS':<10} | {'Banzhaf':<10} | {'D-Packel':<10}")
    print("-" * 65)

    # Mostrem tots els partits de la llista original
    for p in partits:
        val_ss = ss.get(p, 0)
        val_bz = bz.get(p, 0)
        val_dp = dp.get(p, 0)
        print(f"{p:<18} | {val_ss:<10} | {val_bz:<10} | {val_dp:<10}")

```

## TAULA RESULTATS PYTHON

| TAULA RESULTATS PYTHON ÍNDEXS |        |         |          |
|-------------------------------|--------|---------|----------|
| --- XII Legislatura ---       |        |         |          |
| Partit                        | SS     | Banzhaf | D-Packel |
| Socialistes                   | 0.019  | 0.0196  | 0.0762   |
| Junts                         | 0.2857 | 0.2941  | 0.2619   |
| ERC                           | 0.2857 | 0.2941  | 0.2619   |
| PP                            | 0.019  | 0.0196  | 0.0762   |
| En Comú                       | 0.019  | 0.0196  | 0.0762   |
| CUP                           | 0.019  | 0.0196  | 0.0762   |
| Ciutadans                     | 0.3524 | 0.3333  | 0.1714   |

--- XIV Legislatura ---

| Partit | SS | Banzhaf | D-Packel |
|--------|----|---------|----------|
|--------|----|---------|----------|

|             |        |        |        |
|-------------|--------|--------|--------|
| Socialistes | 0.2738 | 0.287  | 0.2018 |
| Junts       | 0.2738 | 0.287  | 0.2018 |
| ERC         | 0.2738 | 0.287  | 0.2018 |
| Vox         | 0.0357 | 0.0278 | 0.0789 |
| En Comú     | 0.0357 | 0.0278 | 0.0789 |
| CUP         | 0.0357 | 0.0278 | 0.0789 |
| Ciutadans   | 0.0357 | 0.0278 | 0.0789 |
| Mixt        | 0.0357 | 0.0278 | 0.0789 |

--- XV Legislatura ---

| Partit | SS | Banzhaf | D-Packel |
|--------|----|---------|----------|
|--------|----|---------|----------|

|             |        |        |        |
|-------------|--------|--------|--------|
| Socialistes | 0.3476 | 0.3333 | 0.1756 |
| Junts       | 0.2476 | 0.2281 | 0.1526 |
| ERC         | 0.1619 | 0.1754 | 0.1795 |
| PP          | 0.1    | 0.1053 | 0.1231 |
| Vox         | 0.081  | 0.0877 | 0.1397 |
| En Comú     | 0.0333 | 0.0351 | 0.091  |
| CUP         | 0.0143 | 0.0175 | 0.0692 |
| Mixt        | 0.0143 | 0.0175 | 0.0692 |