

**Carla Toribio Altet**

**ANÁLISIS COMPONENTES PRINCIPALES:**

**EVOLUCIÓN DE LAS COTIZACIONES DE LAS LETRAS DE  
CAMBIO EN LA EUROPA PREINDUSTRIAL (S.XVII-S.XIX)**

**TRABAJO DE FINAL DE GRADO**

**Grado de Economía**



**FACULTAT D'ECONOMIA i EMPRESA  
Universitat Rovira i Virgili**

**Reus**

**Curso 2021-22**

## Índice:

1. <i>Resumen</i> .....	3
2. <i>Palabras Clave</i> .....	4
3. <i>Presentación</i> .....	4
4. <i>Introducción</i> .....	5
5. <i>LA LETRA DE CAMBIO: Evolución histórica y funcionamiento</i> .....	6
6. <i>Metodología</i> .....	10
6.1 Cálculo de los Componentes Principales:.....	12
6.2 Proceso de extracción de factores:.....	13
6.3 Porcentajes de variabilidad .....	16
7. <i>Datos y Resultados</i> .....	18
8. <i>Conclusión</i> .....	31
<i>Referencias Bibliográficas</i> .....	32
<i>Anexo 1:</i> .....	33
<i>Anexo 2:</i> .....	34
<i>Anexo 3:</i> .....	35
<i>Anexo 4:</i> .....	36
<i>Anexo 5:</i> .....	37
<i>Anexo 6:</i> .....	38

## ANÁLISIS COMPONENTES PRINCIPALES: EVOLUCIÓN DE LAS COTIZACIONES DE LAS LETRAS DE CAMBIO EN LA EUROPA PREINDUSTRIAL (S.XVII-S.XIX)

### 1. Resumen

(Castellano) Este trabajo comienza poniendo en contexto al lector sobre la evolución de los mercados monetarios y los tipos de cambio en la Europa preindustrial, concretamente desde el siglo XIII hasta los siglos analizado (finales del siglo XVII hasta principios del XIX). En aquel momento el mercado de divisas se basaba en las letras de cambio, por tanto, estudio mediante la metodología de los componentes principales las cotizaciones de las letras de cambio de una serie de ciudades europeas. Estas ciudades son las ciudades que me permiten realizar un análisis coherente, debido que dispongo de datos continuos en un periodo de tiempo determinado, es decir, no hay escasez de datos.

(Català) Aquest treball comença posant en context al lector sobre l'evolució dels mercats monetaris i els tipus de canvi a l'Europa preindustrial, concretament des del segle XIII fins els segles analitzats (finals del segle XVII fins principis del XIX). En aquell moment el mercat de divises es basava en les lletres de canvi, per tant, estudio mitjançant la metodologia dels components principals les cotitzacions de les lletres de canvi d'una sèrie de ciutats europees. Aquestes ciutats son les ciutats que em permeten realitzar un anàlisi coherent, es a dir, no hi ha escassetat de dades.

(Ingles) This work begins by putting the reader in context about the evolution of money markets and exchange rates in pre-industrial Europe, specifically from the 13th century to the centuries analyzed (late 17th century to early 19th century). At that time, the foreign exchange market was based on bills of exchange, therefore, I study, using the principal components methodology, the prices of bills of exchange in a series of European cities. These cities are the cities that allow me to carry out a coherent analysis, because I have continuous data in each period, that is, there is no shortage of data.

## 2. Palabras Clave

1. **Letra de cambio**, es un documento mercantil de cobro. Una persona ordena el pago de una determinada suma de dinero a otra persona en una fecha de vencimiento determinada. Roldán, P.N. (2021, 14 julio)
2. **Tipo de cambio**, también conocido como tasa de cambio, es la relación entre el valor de una moneda y otra, es decir, nos indica cuántas monedas de una divisa se necesita para obtener una unidad de la otra moneda. Bermejo, D.J (2021, 27 septiembre)
3. **Varianza**, es una medida de dispersión que representa la variabilidad de una serie de datos respecto a su media. López, J.F (2021, 27 enero)

## 3. Presentación

Mi motivación a la hora de realizar este trabajo ha sido colaborar durante un año en un proyecto de investigación de la universidad. He estado revisando que las bases de datos creadas con las cotizaciones de las diferentes plazas que proporcionan los libros *Währungen der Welt III: Europäische Wechselkurse im 17. Jahrhundert* y *Währungen der Welt VI: Geld und Währungen in Europa im 18. Jahrhundert*, estuvieran bien tipeadas para posteriores análisis. Muchas de las plazas no contenían la totalidad de los datos, por tanto, para realizar este trabajo he tenido que crear distintas bases de datos seleccionando aquellas ciudades que disponía de datos continuos en periodos de tiempo determinados.

Considero que es importante contextualizar la evolución histórica del funcionamiento del mercado monetario del periodo analizado, concretamente finales del siglo XVII hasta principios del siglo XIX ya que al analizar solo datos es posible no situarnos en el momento ocurrido.

Finalmente, las asignaturas empleadas para desarrollar este trabajo han sido principalmente análisis de datos macroeconómicos y para poder introducir el trabajo, historia económica.

## 4. Introducció

Este trabajo se centra en las cotizaciones de las letras de cambio de una serie de ciudades de la Europa preindustrial, tiene como objetivo utilizar la metodología de Componentes Principales para simplificar la complejidad de todas aquellas plazas que cotizan de manera continuada y a un plazo determinado conservando prácticamente el total de su información.

El trabajo comienza con una breve introducción respecto la evolución histórica de los mercados monetarios y los tipos de cambio desde el siglo XIII hasta el siglo XVII con el objetivo de tener un previo conocimiento del funcionamiento en los siglos anteriores al analizado. Después, entro en más detalle en las letras de cambio, que era el instrumento utilizado para transferir dinero y proporcionar crédito entre centros distintos de Europa preindustrial, siglo XVIII. Esta información está extraída gracias a varios informes de investigaciones realizados por Nogues-Marco. P (2011) – (2020) y Flandreau, M et al. (2009)

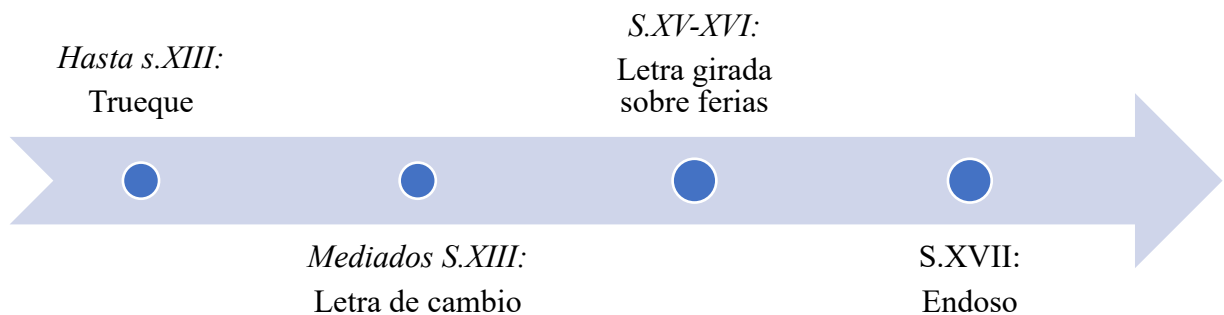
A continuación, describo la metodología utilizada en este trabajo con la finalidad de entender el análisis realizado y saber cómo se crea cada combinación lineal obtenida en cada análisis de componentes principales. Obtuve la mayor parte de la información que detallo en este punto gracias al documento de Marin, Jm (s.f) y al TFM de Peña Méndez, D.P (2014)

Seguidamente, mediante tablas muestro la información de cada variable utilizada y resultados obtenidos de los dos primeros componentes principales de cada periodo analizado. Para cada análisis he creado una base de datos de todas aquellas plazas que disponía de su cotización mensual continua en un periodo de tiempo determinado. Estos datos los he recolectado de los libros *Währungen der Welt III: Europäische Wechselkurse im 17. Jahrhundert* y *Währungen der Welt VI: Geld und Währungen in Europa im 18. Jahrhundert*, proporcionados gracias a la colaboración realizada con Pilar Nogues – Marco y Nektarios Asladinis en el curso pasado.

Finalmente, represento gráficamente la proporción del primer componente y la proporción acumulada hasta el segundo componente con el objetivo de poder concluir que con los dos primeros componentes principales llegamos a explicar prácticamente el total de la información original.

## 5. LA LETRA DE CAMBIO: Evolución histórica y funcionamiento.

Hasta el siglo XIII, el comercio se saldaba a través del trueque, es decir, las exportaciones se pagaban con importaciones. A mediados del siglo XIII, la expansión comercial dificultó el trueque y facilitó el uso de la letra de cambio. Entre el siglo XV-XVI, se utilizaba el sistema de letras giradas sobre ferias<sup>1</sup>. A finales del siglo XVI, el sistema de aquel momento entró en decadencia debido a sucesivas prórrogas de las ferias. A comienzos del siglo XVII, apareció el uso del endoso<sup>2</sup>, el cual facilitó la expansión geográfica de los centros financieros, evitando que los comerciantes tuvieran que desplazarse a las ferias y permitió el giro de letras desde los lugares de origen a diferentes destinos gracias a la expansión de las redes de corresponsales, la negociación de las letras permitió el acceso de su uso a un mayor porcentaje de comerciantes que podrían comprar letras en el mercado local cuando carecían del corresponsal propio en el centro de destino. *Nogues-Marco. P (2011)*.



*Ilustración 1: Línea temporal S.XIII-XVII; Historia del comercio europeo*

Cuando el uso de letras de cambio se expandió en Amberes, por la influencia de las firmas más importantes de los banqueros mercantes del sur de Alemania e Italia, la cláusula “pagadero al portador” se introdujo en las letras de cambio. El creciente grado

<sup>1</sup> Letra girada sobre ferias, mecanismo multilateral de compensación de deudas entre los agentes partícipes de la feria (Braudel (1979))

<sup>2</sup> Endoso significa que el titular (endosante) puede transferir la factura a otra persona firmando el reverso del documento.

de anonimato creó problemas en términos de identificar quién era el último deudor asignado, porque en la carta obligatoria solo el acreedor original y el deudor fueron nombrados en el documento. Surgió el endoso para identificar al último deudor mediante la firma dentro de la letra de cambio y la responsabilidad ya no se limitaba a este último, sino que se extendía a todos los endosantes anteriores. *Nogues-Marco. P (2020).*

A finales del siglo XVII, se desarrolló la letra de cambio, era una carta mediante la cual un comerciante ordenaba a su corresponsal de otra ciudad que hiciera un pago en su nombre a otro comerciante de esa misma ciudad. La letra de cambio tenía dos funciones, la de transferencia y de crédito, la primera fortaleció las relaciones comerciales porque facilitaron los pagos sin efectivo y la segunda se desarrolló debido a la tasa de interés oculta implícita en los tipos de cambio al vencimiento que eludía las relaciones de usura sobre el crédito. Sin embargo, en la práctica, el precio de las letras de cambio se determinaba tanto por la distancia geográfica como por el tiempo, por lo que la tasa de interés estaba oculta por el tipo de cambio al vencimiento. *Nogues-Marco. P (2020).*

El endoso hizo de la letra de cambio un instrumento negociable común porque la responsabilidad conjunta brindaba una alta protección financiera contra la falta de pago ya que todas las partes involucradas en una transacción de letra tenían una responsabilidad conjunta por el pago. Además, la responsabilidad solidaria asociada al endoso jugó un papel importante en la mejora de los problemas de información en el comercio y las finanzas a larga distancia, por lo que facilitó la expansión del mercado de divisas más allá de las redes personales. *Nogues-Marco. P (2020).*

La letra de cambio negociable contenía una amenaza de selección adversa por el incentivo de que los vendedores traspasaran las letras de los deudores más riesgosos. Es decir, la letra de cambio incluía un problema estándar de riesgo moral en las relaciones de las agencias entre corresponsales. En el periodo de la edad moderna, hubo un aumento en el número de patrocinadores, esto provocó una mejora en el seguimiento y redujo la posibilidad de incumplimiento de las letras de cambio. La regla de responsabilidad solidaria permitió mediante las letras de cambio que se expandieran las actividades comerciales-financieras al respaldar las transacciones de larga distancia que involucraban relaciones cuasi-impersonales entre las partes. *Nogues-Marco. P (2020).*

En la Época Moderna (S.XV-XVIII), los mercaderes-banqueros movían el dinero de una ciudad a otra a través de letras de cambio, por lo que era imprescindible tener la información sobre la cotización de las letras de cambio en las otras ciudades. En aquel momento, los boletines de cambio recogían la cotización de las letras de cambio entre ciudades financieras y circulaban mediante el envío de cartas que enviaban los corresponsales a los comerciantes-banqueros afincados en otras ciudades a través de la correspondencia comercial. Por tanto, los datos se ofrecían con un retraso que dependía de la frecuencia del correo. *Nogues-Marco. P (2011).*

Los tipos de cambio en el siglo XVIII eran tipos de cambio de ciudades, ya que transferir el dinero de una ciudad a otra no tenía los mismos costes asociados (transporte, seguros, pérdida de intereses durante el plazo de desplazamiento...), por tanto, las letras de cambio de diferentes ciudades del mismo país no eran sustitutos perfectos. Por ello, las letras de cambio entre ciudades de un mismo país cotizan con un premio o descuento según la oferta. Este premio o descuento estaba limitado por los costes de arbitraje del dinero-metal, ya que si el premio o descuento de las letras excedía los costes de transferir el dinero-metal, los agentes preferirían transferir el metal a enviar letras de cambio, de manera que el propio proceso de arbitraje se ajustaba al tipo de cambio. *Nogues-Marco. P (2011).*

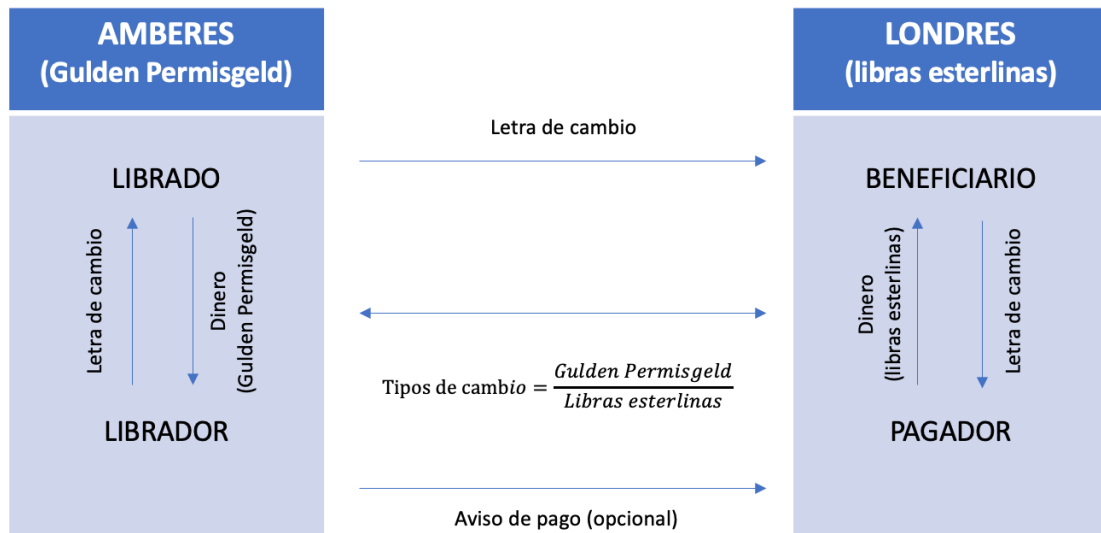
Las ciudades son parte de construcciones políticas más grandes y están sujetas al poder de un gobernante, como París o entidades soberanas como Hamburgo o Génova. El mercado de letras de cambio estuvo restringido en Europa hasta finales del siglo XVIII, por lo general, había varios mercados por país, excepto en el caso de Inglaterra que destacó como la única gran entidad política con un solo centro de cambio, en Londres. *FLANDREAU, M., et al. (2009).*

A mediados del siglo XVIII, la liquidación multilateral que utilizaba Ámsterdam, Londres o París como centro de compensación era factible. Otra característica era el predominio de los centros financieros en el norte de Europa occidental (Ámsterdam, Londres, París y Hamburgo) junto con la continua relevancia de las ciudades del sud/mediterráneo. Livorno y Génova eran los dos principales centros financieros de esta última zona. *FLANDREAU, M., et al. (2009).*

Los banqueros italianos establecieron sucursales interregionales en todos los principales centros financieros de Europa para aprovechar las diferencias de tipo de cambio y la escasez de capital y al mismo tiempo, diversificaron las carteras para protegerse contra el riesgo. *Nogues-Marco. P (2020)*.

El sistema europeo era una red densa con varios centros identificados. La zona de vínculos financieros va desde Ámsterdam-Londres-Paris-Hamburgo y se reduce a medida que avanza hacia Italia. Otros centros más aislados son Madrid – Cádiz en el suroeste. *FLANDREAU, M., et al. (2009)*.

A continuación, ilustro un ejemplo del funcionamiento de la letra de cambio entre dos de las ciudades analizadas en este trabajo.



*Ilustración 2: Ejemplo del funcionamiento de una letra de cambio entre dos ciudades analizadas.*

## 6. Metodología

Cuando se recoge la información de una muestra de datos, lo más frecuente es tomar el mayor número de variables. Sin embargo, si tomamos demasiadas variables sobre un conjunto de datos nos encontramos con una serie de problemas tales como la dificultad de visualizar relaciones entre ellas o que estén relacionadas y por tanto midan lo mismo bajo distinto punto de vista. *Marín, JM. (s. f.).*

En 1901, Karl Pearson desarrollo un método estadístico llamado Análisis de Componentes Principales (PCA) el cual permite simplificar la complejidad de espacios muestrales con muchas dimensiones conservando su información. Es decir, para estudiar las relaciones que se presentan entre “p” variables correlacionas, variables que miden información común, se puede transformar el conjunto original de las variables en otro conjunto de nuevas variables relacionadas entre sí, aquellas que no tienen repetición o redundancia en la información, estas nuevas variables son llamado conjunto de componentes principales. *Marín, JM. (s. f.).*

Las nuevas variables son combinaciones lineales de las anteriores y se van construyendo según el orden de importancia en cuanto a la variabilidad total que recogen de la muestra. De modo que se buscan un número de factores subyacentes ( $m < p$ ) que sean combinaciones lineales de las “p” variables originales y que estén relacionadas, recogiendo la mayor parte de la información o variabilidad de los datos permitiendo explicar aproximadamente lo mismo que las “p” variables originales, donde antes se necesitaban “p” valores que caracterizaban a cada periodo, ahora bastan “m” valores. *Marín, JM. (s. f.).*

Podemos extraer una serie de ventajas del método PCA ya que no parte de ninguna distribución de probabilidad para su análisis y dentro de su objetivo esta: *Peña Méndez, D. P. (2014)*

- Generar nuevas variables que expresen información acerca del conjunto de datos.
- Reducir la dimensión del espacio en el que están contenidos los datos.
- Eliminar (si es posible) las variables que aportan poca información al estudio del problema.
- Facilitar la interpretación de la información contenida en los datos.

- Determinar unos pocos factores (componentes principales) que retengan la mayor variabilidad contenida en los datos. Las nuevas variables generadas cumplen con las características de independencia (bajo el supuesto de normalidad) y no correlación.

Es importante resaltar previamente varios conceptos matemáticos para entender la metodología del análisis empleado, extraídos del artículo *Rodrigo, J. A. (2017, julio)*.

1. **Mayor variabilidad o varianza**, cuanto mayor sea la variabilidad de los datos, es decir la varianza, se considera que existe mayor información.
2. **Eigenvectors** de una matriz, son aquellos vectores que, al multiplicarlos por una matriz resultan ser el mismo vector o un múltiplo entero del mismo. *Ejemplo:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} = 4 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. **Eigenvalue**, es el múltiplo del vector original que se obtiene al multiplicar una matriz por alguno de sus eigenvectors.

*NOTA:* a cada eigenvector le corresponde un eigenvalue y viceversa.

Una vez conocidos estos conceptos debemos saber que cada componente del método PCA corresponde a un eigenvector y el orden de componente se establece por orden decreciente de eigenvalue. Por tanto, la primera componente principal ( $Y_1$ ) corresponde al eigenvector con el eigenvalue asociado más alto y sigue la dirección en la que las observaciones varían más. Por otro lado, la segunda componente ( $Y_2$ ) sigue la dirección de aquellos datos que muestran mayor varianza y que no están correlacionadas con la primera componente, de este modo sus direcciones son perpendiculares.

La explicación detallada de la metodología que expongo a continuación la obtuve gracias al trabajo de *Marín, JM. (s. f.)*

## 6.1 Cálculo de los Componentes Principales:

Se considera una serie de variables  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  sobre un grupo de objetos o individuos, en nuestro caso ciudades, y se trata de calcular un nuevo conjunto de variables  $y_1, y_2, \dots, y_p$  que estén relacionadas entre sí, cuyas varianzas vayan decreciendo progresivamente.

Cada  $y_j$  (donde  $j=1,2,\dots,p$ ) es una combinación lineal normalizada de las  $x_1, x_2, \dots, x_p$  variables originales, es decir:

$$Y_j = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jp}x_p = a'_j x$$

Siendo  $a'_j = (a_{j1}, a_{j2} \dots a_{jp})$  un vector de constantes "y", que corresponde al peso o a la importancia que tiene cada variable en cada componente.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$$

Para mantener la ortogonalidad de la transformación se impone que el módulo del vector  $a'_j = (a_{j1}, a_{j2} \dots a_{jp})$  sea igual a 1. Es decir,

$$a'_j a_j = \sum_{k=1}^p a_{kj}^2 = 1$$

El primer componente se calcula eligiendo  $a_1$  de modo que  $y_1$  tenga la mayor varianza posible, sujeta a la restricción de que  $a'_1 a_1 = 1$

El segundo componente principal se calcula obteniendo  $a_2$  de modo que la variable obtenida,  $y_2$  esté relacionada con  $y_1$ .

Del mismo modo se eligen  $y_1, y_2, \dots, y_p$ , relacionada entre sí, de manera que la variables aleatorias vayan teniendo cada vez menor varianza.

## 6.2 Proceso de extracción de factores:

Queremos elegir  $a_1$  de modo que se maximice la varianza de  $y_1$  sujeta a la restricción de que  $a_1' a_1 = 1$

$$\text{Var}(y_1) = \text{Var}(a_1' x) = a_1' \Sigma a_1$$

Uno de los métodos más habituales para maximizar una función de varias variables sujetas a restricciones es el método de los multiplicadores de Lagrange, consiste en maximizar la función  $a_1' \Sigma a_1$  sujeta a la restricción  $a_1' a_1 = 1$ . La incógnita es  $a_1$ , vector desconocido que nos da la combinación lineal óptima.

En forma matemática:

1. Se construye la función L:

$$L(a_1) = a_1' \Sigma a_1 - \lambda(a_1' a_1 - 1)$$

2. Se maximiza, derivando la función  $L(a_1)$  e igualándola a 0:

$$\frac{\partial L(a_1)}{\partial a_1} = 2\Sigma a_1 - 2\lambda a_1 = 0 \rightarrow (\Sigma - \lambda I)a_1 = 0$$

Por el teorema de Roché-Frobenius, para que el sistema tenga una solución distinta a 0 la matriz  $(\Sigma - \lambda I)$  tiene que ser singular. Esto implica que el determinante debe ser igual a 0, es decir,  $|\Sigma - \lambda I| = 0$ . De este modo,  $\lambda$  es un autovalor de  $\Sigma$ . La matriz de covarianzas  $\Sigma$  es de orden  $p$  y si además es definida positiva, tendrá  $p$  autovalores distintos,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  tales que,  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p$ .

Desarrollando la expresión anterior:

$$(\Sigma - \lambda I)a_1 = 0$$

$$\Sigma a_1 - \lambda a_1 = 0$$

$$\Sigma a_1 = \lambda a_1$$

Tenemos:

$$\text{Var}(y_1) = \text{Var}(a_1' x) = a_1' \Sigma a_1 = a_1' \lambda a_1 = \lambda a_1' a_1 = \lambda \cdot 1 = \lambda$$

Para maximizar la varianza de  $y_1$  se tiene que tomar el mayor autovalor,  $\lambda_1$ , y el correspondiente autovector  $a_1$  que es un vector que nos da la combinación de las variables originales que tienen mayor varianza. Es decir, si  $a'_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1p})$ , entonces,  $y_1 = a'_1 x = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p$ .

El segundo componente principal,  $y_2 = a'_2 x$ , se obtiene mediante un argumento parecido. Además, se quiere que  $y_2$  esté incorrelado con el anterior componente  $y_1$ , es decir, que  $Cov(y_2, y_1) = 0$ . Por lo tanto:

$$Cov(y_2, y_1) = Cov(a'_2 x, a'_1 x) = a'_2 \cdot E[(x - \mu)(x - \mu)'] = a'_2 \Sigma a_1$$

Es decir, se requiere que  $a'_2 \Sigma a_1 = 0$ .

Esto es equivalente a:

$$a'_2 \Sigma a_1 = a'_2 \lambda a_1 = \lambda a'_2 a_1 = 0$$

Es decir, los vectores son ortogonales. De este modo, tenemos que maximizar la varianza de  $y_2$ , es decir:

$$\begin{aligned} \max: & a_2 \Sigma a_2 \\ \text{s. a} & \\ & a'_1 a_2 = 1 \\ & a'_2 a_1 = 0 \end{aligned}$$

1. Se construye la función:

$$L(a_2) = a'_2 \Sigma a_2 - \lambda(a'_2 a_2 - 1) - \delta a'_2 a_1$$

2. Se maximiza, derivando la función  $L(a_2)$  e igualándola a 0:

$$\frac{\partial L(a_2)}{\partial a_2} = 2\Sigma a_2 - 2\lambda a_2 - \delta a_1 = 0$$

Si se multiplica por  $a'_1$  teniendo en cuenta las restricciones comentadas anteriormente y que  $Cov(y_2, y_1) = 0$ , obtenemos:

$$2a'_1 \Sigma a_2 - \delta = 0 \rightarrow \delta = 2a'_1 \Sigma a_2 = 2a'_2 \Sigma a_1 = 0$$

Podemos arreglar la derivada, quedando finalmente como:

$$\frac{\partial L(a_2)}{\partial a_2} = 2\Sigma a_2 - 2\lambda a_2 = (\Sigma - \lambda I)a_2 = 0$$

Utilizando el mismo razonamiento que antes, elegimos  $\lambda$  como el segundo mayor autovalor de la matriz  $\Sigma$  con su autovector asociado a  $a_2$

De modo que el j-ésimo componente le correspondería el j-ésimo autovalor. Entonces todos los componentes  $\mathbf{y}$  (en total p) se pueden expresar como el producto de una matriz formada por los autovectores, multiplicada por el vector  $\mathbf{x}$  que contiene las variables originales;  $x_1, x_2, \dots, x_p$

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

donde:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Como:

$$\text{Var}(y_1) = \lambda_1$$

$$\text{Var}(y_2) = \lambda_2$$

...

$$\text{Var}(y_p) = \lambda_p$$

La matriz de covarianza de  $\mathbf{y}$  será:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$$

Ya que  $y_1, y_2, \dots, y_p$  se han construido como variables relacionadas, por tanto, tenemos que:

$$\Lambda = \text{Var}(Y) = A' \text{Var}(X) A = A' \Sigma A \quad \equiv \quad \Sigma = \Lambda \Lambda'$$

Ya que A es una matriz ortogonal, porque  $a_i' a_i = 1$  para todas las columnas, por lo que  $AA' = I$

### 6.3 Porcentajes de variabilidad

Tras realizar un PCA vemos cuanta información es capaz de explicar cada uno de los componentes obtenidos. En realidad, cada autovector corresponde a la varianza del componente  $y_i$  que se define por medio del autovector  $a_i$ ,  $\text{Var}(y_i) = \lambda_i$

Asumiendo que las variables están normalizadas, si sumamos todos los autovectores, tendremos la varianza total de los componentes que se define como:

$$\sum_{j=1}^p \text{var}(y_j) = \sum_{j=1}^p \lambda_j = \text{traza}(\Lambda)$$

Debido a que la matriz  $\Lambda$  es diagonal y por las propiedades del operador traza:

$$\text{traza}(\Lambda) = \text{traza}(A' \Sigma A) = \text{traza}(\Sigma A' A) = \text{traza}(\Sigma)$$

ya que  $AA' = I$  al ser ortogonal, con lo cual:

$$\text{traza}(\Lambda) = \text{traza}(\Sigma) = \sum_{i=1}^p \text{Var}(x_i)$$

Es decir, la suma de las varianzas de las variables originales y la suma de las varianzas de los componentes principales son iguales. Por tanto, el porcentaje de varianza total que recoge un componente principal es:

$$\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^p \lambda_i} = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^p \text{Var}(x_i)}$$

También se puede expresar el porcentaje de variabilidad recogido por los primeros  $m$  componentes:

$$\frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{\sum_{i=1}^p \text{Var}(x_i)}$$

Donde  $m < p$

Ambas varianzas son muy útiles a la hora de decidir el número de componentes principales a utilizar en los análisis posteriores ya que nos permite evaluar y seleccionar el número de componentes mínimo a partir del cual el incremento deja de ser sustancial. En la práctica, nos quedamos con un número mucho menor de componente que recoja un porcentaje amplio de la variabilidad total. En general, no se suele coger más de tres componentes principales.

## 7. Datos y Resultados

Realizo el análisis de componente principales des de finales del siglo XVII hasta principios del siglo XIX. Para ello, gracias a los libros *Währungen der Welt III: Europäische Wechselkurse im 17. Jahrhundert* y *Währungen der Welt VI: Geld und Währungen in Europa im 18. Jahrhundert*, he recolectado todos aquellos datos que disponía de las cotizaciones mensuales de las letras de cambio de diferentes ciudades de Europa preindustrial, creando una base de datos donde las columnas representan las plazas de las ciudades y las filas el periodo mensual establecido. Por tanto, los datos son tratados en serie temporal con frecuencia mensual. (Véase anexo 1, para visualizar un ejemplo de la fuente primaria donde se extraen los datos)

Cada análisis lo reflejo en las próximas tablas donde muestro las variables utilizadas, ciudad de origen (ciudad que envía la letra de cambio), ciudad de destino (ciudad que recibe la letra de cambio), la moneda que se utilizaba en cada caso y en las dos últimas columnas aparecen los resultados obtenidos de las dos primeras combinaciones lineales. Estas combinaciones lineales las transcribo y destaco las ciudades que recogen una variabilidad total mayor a 0,300 o 30% de la muestra original.

Por último, represento la evolución de la proporción obtenida tanto del primer componente como del acumulado hasta el segundo componente de cada periodo analizado con la finalidad de confirmar que la selección de los dos primeros componentes principales es eficiente, es decir, con los dos primeros componentes principales se llega a recoger más de la mitad de la información explicada por el conjunto de variables originales.

A continuación, la ilustración 3 corresponde al mapa de los centros financieros europeos alrededor de 1750. Marco en azul las ciudades analizadas, en total son 23 ciudades, y en negro el resto de las ciudades que no dispongo de todas las cotizaciones mensuales debido a la escasez de datos de la época analizada.

Il·lustración 3: Centros financieros europeos alrededor de 1750



Fuente: Mapa extraído de FLANDREAU, M., et al. (2009) y retocado.

CIUDADES ANALIZADAS:

Norte Europa Preindustrial:

- Dublín
- Londres
- Hamburgo
- Ámsterdam
- Rotterdam
- Middelburg
- Amberes
- Lila
- Rouen
- Paris

Noreste Europa Preindustrial:

- Viena
- Venecia
- Génova
- Livorno
- Roma
- Nápoles

Noroeste Europa Preindustrial:

- Burdeos
- Bilbao
- Madrid
- Porto
- Lisboa
- Sevilla
- Cádiz

**Tabla 1. Análisis Componentes Principales periodo 1691-1698**

Origen	Destino	Moneda	PC1	PC2
<b>Amberes</b>	Ámsterdam	Libra flamenca por 100 Libra flamenca banco	-0,302	0,140
	Rotterdam		-0,302	0,139
	Middelburgo		-0,343	-0,030
	Lila		0,372	-0,093
	Londres	Gulden Permisgeld por 10 Libras esterlinas	0,094	-0,093
	Paris	Gulden flamenco por 100 livres tournois	-0,354	0,102
	Rouen	Gulden Permisgeld por 100 livres tournois.	-0,355	0,099
	Venecia	Gulden permisgeld por 100 Ducati Banco	-0,034	0,516
	Madrid	Gulden permisgeld por 100 Ducados de cambio	0,308	0,329
	Sevilla		0,288	0,297
	Cádiz		0,296	0,280
	Lisboa	Gulden Permisgeld por 100 Crusados	-0,176	0,257
	Hamburgo	Gulden Permisgeld por 100 Mark Banko	-0,055	0,493
<b>Nápoles</b>	Venecia	Ducati del Regno por 100 Ducati Banco	-0,039	-0,159
	Roma	Ducati del Regno por 100 Scudi moneta.	-0,010	-0,218

La tabla 1 refleja las variables utilizadas en el primer análisis de componente principales el cual está compuesto por 15 variables, que corresponden al periodo de enero de 1691 hasta diciembre de 1698, con un total de 96 observaciones. Para observar el análisis completo (Véase Anexo 2)

A continuación, expreso la primera combinación lineal, se observar como las ciudades de Middelburgo (Amberes) – Lila (Amberes) – Paris (Amberes) – Rouen (Amberes) – Madrid (Amberes) son las variables con un peso superior a 0,300. Es decir, son las ciudades que recogen una mayor variabilidad total de la muestra original.

$$\begin{aligned}
 PC1_{1691-1698} = & -0,302 \text{ Amst}(\text{Amber}) - 0,302 \text{ Rot}(\text{Amber}) - 0,343 \text{ Middl}(\text{Amber}) \\
 & + 0,372 \text{ Lila}(\text{Amber}) + 0,094 \text{ Ldn}(\text{Amber}) - 0,354 \text{ Par}(\text{Amber}) \\
 & - 0,355 \text{ Rou}(\text{Amber}) - 0,034 \text{ Ven}(\text{Amber}) + 0,308 \text{ Mad}(\text{Amber}) \\
 & + 0,288 \text{ Sev}(\text{Amber}) + 0,296 \text{ Cad}(\text{Amber}) - 0,176 \text{ Lisb}(\text{Amber}) \\
 & - 0,055 \text{ HH}(\text{Amber}) - 0,039 \text{ Ven}(\text{Nap}) - 0,010 \text{ Rom}(\text{Nap})
 \end{aligned}$$

En el caso de la segunda combinación lineal, escrita a continuación, las variables con un peso superior a 0,300 son Venecia (Amberes) – Madrid (Amberes) – Hamburgo (Amberes). Las variables con mayor importancia del segundo componente no tienen por qué coincidir con el primer componente ya que como se ha comentado anteriormente, el segundo componente es una combinación lineal que no está correlacionada con el primer componente principal.

$$\begin{aligned}
 PC2_{1691-1698} = & 0,140 \text{ Amst}(\text{Amber}) + 0,139 \text{ Rot}(\text{Amber}) - 0,030 \text{ Middl}(\text{Amber}) \\
 & - 0,093 \text{ Lila}(\text{Amber}) - 0,093 \text{ Ldn}(\text{Amber}) + 0,102 \text{ Par}(\text{Amber}) \\
 & + 0,099 \text{ Rou}(\text{Amber}) + 0,516 \text{ Ven}(\text{Amber}) + 0,329 \text{ Mad}(\text{Amber}) \\
 & + 0,297 \text{ Sev}(\text{Amber}) + 0,280 \text{ Cad}(\text{Amber}) + 0,257 \text{ Lisb}(\text{Amber}) \\
 & + 0,493 \text{ HH}(\text{Amber}) - 0,159 \text{ Ven}(\text{Nap}) - 0,218 \text{ Rom}(\text{Nap})
 \end{aligned}$$

**Tabla 2. Análisis Componentes Principales periodo 1721-1728**

Origen	Destino		Moneda	PC1	PC2
Londres	Ámsterdam vista	Libra	1000 Gulden flamenco banko.	-0,332	0,126
	Amberes			-0,308	-0,171
	Ámsterdam			-0,333	0,106
	Rotterdam			-0,341	0,094
	Dublín	esterlina	100 libras de moneda irlandesa	-0,043	-0,260
	Hamburgo		1000 Mark Banko.	-0,305	-0,099
	Lisboa		100 Milreis	-0,310	-0,006
	Porto	-0,300		0,025	
	Venecia	por	1000 Libras piccoli corrente venecianas.	-0,319	-0,080
	Génova		1000 Libras fuori di Banco genoveses	-0,334	-0,104
	Livorno		1000 Libras moneta buona toscanas.	-0,197	-0,372
	Paris Vista		1000 Libras tornesas.	-0,147	0,130
	Madrid		1000 pesos de plata antigua.	0,066	-0,478
	Cádiz			0,071	-0,475
	Bilbao			0,060	-0,479

La Tabla 2 refleja las variables utilizadas en el segundo análisis de componentes principales el cual está compuesto por 15 variables que corresponden al periodo de enero de 1721 hasta diciembre de 1728, con un total de 96 observaciones. Para observar el análisis completo (Véase Anexo 3)

Expreso la primera combinación lineal y las ciudades de Ámsterdam Vista (Londres) – Amberes (Londres) – Ámsterdam (Londres) – Rotterdam (Londres) – Hamburgo (Londres) – Lisboa (Londres) – Porto (Londres) – Venecia (Londres) – Génova (Londres) son las variables con un peso superior a 0,300. Es decir, las ciudades que recogen una mayor variabilidad total de la muestra original.

$$\begin{aligned}
 PC1_{1721-1728} = & -0,332 \text{ Amst.V(Ldn)} - 0,319 \text{ Amber(Ldn)} - 0,333 \text{ Amst(Ldn)} \\
 & - 0,341 \text{ Rot(Ldn)} - 0,043 \text{ Dub(Ldn)} - 0,305 \text{ HH(Ldn)} - 0,310 \text{ Lisb(Ldn)} \\
 & - 0,300 \text{ Porto(Ldn)} - 0,319 \text{ Ven(Ldn)} - 0,334 \text{ Gen(Ldn)} \\
 & - 0,197 \text{ Liv(Ldn)} - 0,147 \text{ Par.V(Ldn)} + 0,066 \text{ Mad(Ldn)} \\
 & + 0,071 \text{ Cad(Ldn)} + 0,060 \text{ Bilb(Ldn)}
 \end{aligned}$$

En la segunda combinaci3n lineal, las variables con un peso superior a 0,300 son Livorno (Londres) – Madrid (Londres) – C3diz (Londres) – Bilbao (Londres).

$$\begin{aligned}
 PC2_{1721-1728} = & 0,126 \text{ Amst.V(Ldn)} - 0,171 \text{ Amber(Ldn)} + 0,106 \text{ Amst(Ldn)} \\
 & + 0,094 \text{ Rot(Ldn)} - 0,260 \text{ Dub(Ldn)} - 0,099 \text{ HH(Ldn)} - 0,006 \text{ Lisb(Ldn)} \\
 & + 0,025 \text{ Porto(Ldn)} - 0,080 \text{ Ven(Ldn)} - 0,104 \text{ Gen(Ldn)} \\
 & - 0,372 \text{ Liv(Ldn)} + 0,130 \text{ Par.V(Ldn)} - 0,478 \text{ Mad(Ldn)} \\
 & - 0,475 \text{ Cad(Ldn)} - 0,479 \text{ Bilb(Ldn)}
 \end{aligned}$$

**Tabla 3. Análisis Componentes Principales periodo 1751-1758**

Origen	Destino	Moneda	PC1	PC2
<b>Londres</b>	Ámsterdam vista	Libra esterlina por 1000 Gulden flamenco banko.	0,181	-0,408
	Dublín	Libra esterlina por 100 libras de moneda irlandesa	-0,159	-0,258
	París 2meses	Libra esterlina por 1000 Libras tornesas.	0,295	0,001
	París vista		0,294	-0,022
	Burdeos 2meses		0,290	0,071
	Madrid	Libra esterlina por 1000 pesos de plata antigua.	0,300	-0,095
	Cádiz		0,296	-0,095
	Bilbao		0,303	-0,074
	Lisboa	Libra esterlina por 100 Milreis	0,275	0,035
	Porto		0,280	-0,054
	Venecia	Libra esterlina por 1000 Libras piccoli corrente venecianas.	0,269	-0,245
Livorno	Libra esterlina por 1000 Libras moneta buona toscanas.	0,264	-0,275	
<b>Hamburgo</b>	Ámsterdam ct. vista	Marcos Banko por 100 Gulden Banko flamenco.	-0,180	-0,505
	Londres	Marcos Banko por 10 libras esterlinas.	-0,259	-0,317
	París	Marcos Banko por 100 Libras tornesas.	-0,140	-0,492

La tabla 3 refleja las variables utilizadas en el tercer análisis de componente principales el cual está compuesto por 15 variables que corresponde al periodo de enero de 1751 hasta diciembre de 1758, con un total de 96 observaciones. Para observar el análisis completo (Véase Anexo 4)

Expreso la primera combinación lineal y se observar como las ciudades Madrid (Londres) – Bilbao (Londres) son las ciudades que recogen una mayor variabilidad total de la muestra original, superior a 0,300.

$$\begin{aligned}
 PC1_{1751-1758} = & 0,181 \text{ Amst. } V(Ldn) - 0,159 \text{ Dub}(Ldn) + 0,295 \text{ Par. } 2m(Ldn) \\
 & + 0,294 \text{ Par. } V(Ldn) + 0,290 \text{ Burd. } 2m(Ldn) + 0,300 \text{ Mad}(Ldn) \\
 & + 0,296 \text{ Cad}(Ldn) + 0,303 \text{ Bilb}(Ldn) + 0,275 \text{ Lisb}(Ldn) \\
 & + 0,280 \text{ Port}(Ldn) + 0,269 \text{ Ven}(Ldn) + 0,264 \text{ Liv}(Ldn) \\
 & - 0,180 \text{ Amst. } C.V(HH) - 0,259 \text{ Ldn}(HH) - 0,140 \text{ Par}(HH)
 \end{aligned}$$

Las ciudades con mayor variabilidad total, más de 0,300, en la segunda combinación lineal del periodo 1751-1758 son *Ámsterdam Vista (Londres) – Ámsterdam corto plazo (Hamburgo) – Londres (Hamburgo) – Paris (Hamburgo)*.

$$\begin{aligned}
 PC2_{1751-1758} = & -0,408 \text{ Amst. } V(Ldn) - 0,258 \text{ Dub}(Ldn) + 0,001 \text{ Par. } 2m(Ldn) \\
 & - 0,022 \text{ Par. } V(Ldn) + 0,071 \text{ Burd. } 2m(Ldn) - 0,095 \text{ Mad}(Ldn) \\
 & - 0,095 \text{ Cad}(Ldn) - 0,074 \text{ Bilb}(Ldn) + 0,035 \text{ Lisb}(Ldn) \\
 & - 0,054 \text{ Port}(Ldn) - 0,245 \text{ Ven}(Ldn) - 0,275 \text{ Liv}(Ldn) \\
 & - 0,505 \text{ Amst. } C.V(HH) - 0,317 \text{ Ldn}(HH) - 0,492 \text{ Par}(HH)
 \end{aligned}$$

**Tabla 4. Análisis Componentes Principales periodo 1781-1788**

Origen	Destino	Moneda	PC1	PC2
<b>Londres</b>	Ámsterdam vista	Libra esterlina por 1000 Gulden flamenco banko.	-0,425	0,193
	Hamburgo 2meses y medio	Libra esterlina por 1000 Marcos Banko.	-0,450	-0,054
	París 2meses	Libra esterlina por 1000 Libras tornesas.	-0,444	0,105
	París vista		-0,442	0,104
<b>Hamburgo</b>	Ámsterdam ct. vista	Marcos Banko por 100 Gulden Banko flamenco.	0,057	0,599
	Ámsterdam 2meses		0,080	0,598
	Londres	Marcos Banko por 10 Libras esterlinas.	0,453	0,051
	París	Marcos Banko por 100 Libras tornesas.	0,096	0,469

La tabla 4 refleja las variables utilizadas en el cuarto análisis de componente principales el cual está compuesto por 8 variables que corresponde al periodo de enero de 1781 hasta diciembre de 1788, con un total de 96 observaciones. Para observar el análisis completo (Véase Anexo 5)

Expreso la primera combinación lineal y las ciudades Ámsterdam Vista (Londres) – Hamburgo 2 meses y medio (Londres) – Paris 2 meses (Londres) – Paris vista (Londres) – Londres (Hamburgo) son las ciudades que recogen una mayor variabilidad total de la muestra original, superior a 0,300.

$$\begin{aligned}
 PC1_{1781-1788} = & -0,425 \text{ Amst. } V(Ldn) - 0,450 \text{ HH } 2,5m(Ldn) - 0,444 \text{ Par. } 2m(Ldn) \\
 & - 0,442 \text{ Par. } V(Ldn) + 0,057 \text{ Amst. } C. V(HH) + 0,080 \text{ Amst. } 2m(HH) \\
 & + 0,453 \text{ Ldn}(HH) + 0,096 \text{ Par}(HH)
 \end{aligned}$$

Las ciudades con mayor variabilidad total, más de 0,300, en la segunda combinación lineal del periodo 1781-1788 son Ámsterdam Corto Plazo (Hamburgo) – Ámsterdam 2 meses (Hamburgo) – Paris (Hamburgo).

$$\begin{aligned}
 PC2_{1781-1788} = & 0,193 \text{ Amst. } V(Ldn) - 0,054 \text{ HH } 2,5m(Ldn) + 0,105 \text{ Par. } 2m(Ldn) \\
 & + 0,104 \text{ Par. } V(Ldn) + 0,599 \text{ Amst. } C. V(HH) + 0,598 \text{ Amst. } 2m(HH) \\
 & + 0,051 \text{ Ldn}(HH) + 0,469 \text{ Par}(HH)
 \end{aligned}$$

**Tabla 5. Análisis Componentes Principales periodo 1805-1811**

Origen	Destino	Moneda	PC1	PC2
<b>Ámsterdam</b>	Hamburgo, vista	Gulden flamenco Banko por 100 Marko Banko.	0,154	0,394
	París 2meses	Gulden flamenco Banko por 100 Libras tornesas.	0,299	-0,127
	París vista	Gulden flamenco por 100 Libras tornesas.	0,298	-0,124
	Viena, 6 semanas	Gulden flamenco Banko por 100 gulden austriacos corriente de convención	-0,292	0,034
<b>Londres</b>	Ámsterdam 2meses	Libra esterlina por 100 Gulden flamenco corriente	0,307	0,096
	Ámsterdam vista	Libra esterlina por 1000 Gulden flamenco banko.	0,306	0,099
	Hamburgo 2 meses y medio	Libra esterlina por 1000 Marcos Banko.	0,290	0,155
	París 2meses	Libra esterlina por 1000 Libras tornesas.	0,314	0,071
	París vista		0,314	0,079
<b>Hamburgo</b>	Ámsterdam ct. vista	Marcos Banko por 100 Gulden flamenco Banko.	-0,173	-0,404
	Ámsterdam 2meses		-0,156	-0,420
	París	Marcos Banko por 100 Libras tornesas.	0,202	-0,384
<b>París</b>	Ámsterdam 1mes	Francos franceses por 100 Gulden flamencos corriente	-0,230	0,121
	Hamburgo 1mes	Francos franceses por 100 Marcos Banko	-0,219	0,361
	Hamburgo 3meses		-0,219	0,355

La tabla 5 refleja las variables utilizadas en el último análisis de componente principales el cual está compuesto por 15 variables que corresponden al periodo de enero de 1805 hasta diciembre de 1811, con un total de 84 observaciones. Para observar el análisis completo (Véase anexo 6)

A continuación, expreso la primera combinación lineal y las ciudades Ámsterdam 2 meses (Londres) – Ámsterdam vista (Londres) – Paris 2 meses (Londres) – Paris Vista (Londres) son las variables con mayor peso, más de 0,300, es decir, las ciudades que recogen una mayor variabilidad de la muestra total.

$$\begin{aligned}
 PC1_{1805-1811} = & 0,154 HH.V(Amst) + 0,299 Par.2m(Amst) + 0,298 Par.V(Amst) \\
 & - 0,292 Vien.6s(Amst) + 0,307 Amst.2m(Ldn) + 0,306 Amst.V(Ldn) \\
 & + 0,290 HH.2,5m(Ldn) + 0,314 Par.2m(Ldn) + 0,314 Par.V(Ldn) \\
 & - 0,173 Amst.C.V(HH) - 0,156 Amst.2m(HH) + 0,202 Par(HH) \\
 & - 0,230 Amst.1m(Par) - 0,219 HH.1m(Par) - 0,219 HH.3m(Par)
 \end{aligned}$$

Las ciudades con mayor variabilidad total, más de 0,300, en la segunda combinación lineal del periodo 1805-1811 son Hamburgo Vista (Ámsterdam) – Ámsterdam Corto Plazo (Hamburgo) – Ámsterdam 2 meses (Hamburgo) – Paris (Hamburgo) – Hamburgo 1 mes (Paris) – Hamburgo 3 meses (Paris).

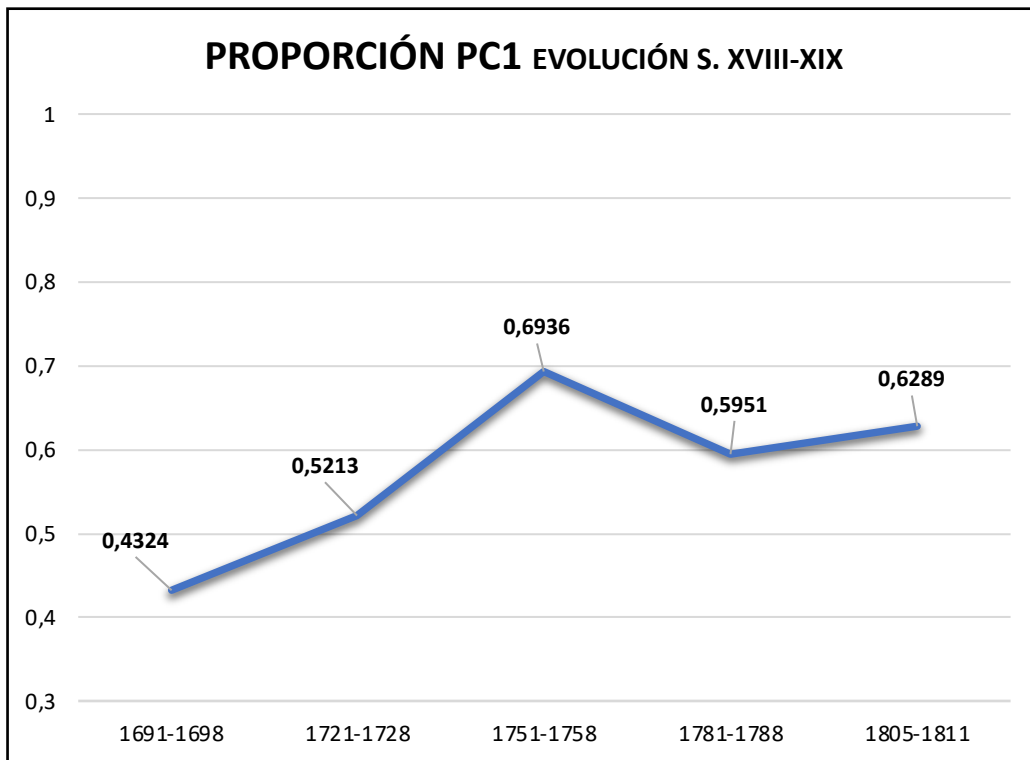
$$\begin{aligned}
 PC2_{1805-1811} = & 0,394 HH.V(Amst) - 0,127 Par.2m(Amst) - 0,124 Par.V(Amst) \\
 & + 0,034 Vien.6s(Amst) + 0,096 Amst.2m(Ldn) + 0,099 Amst.V(Ldn) \\
 & + 0,155 HH.2,5m(Ldn) + 0,071 Par.2m(Ldn) + 0,079 Par.V(Ldn) \\
 & - 0,404 Amst.C.V(HH) - 0,420 Amst.2m(HH) - 0,384 Par(HH) \\
 & + 0,121 Amst.1m(Par) + 0,361 HH.1m(Par) + 0,355 HH.3m(Par)
 \end{aligned}$$

Una vez vistas las primeras combinaciones lineales de cada periodo, represento gráficamente la evolución de la proporción obtenida en cada análisis del primer componente y el acumulado hasta el segundo componente.

**Tabla 6. Proporción del primer componente de cada periodo analizado:**

Periodo	Proporción PC1
1691-1698	0,4324
1721-1728	0,5213
1751-1758	0,6936
1781-1788	0,5951
1805-1811	0,6289

**Gràfica 1. Evolució S.XVIII-XIX de la proporció del primer component**



En el gràfico 1 se representa la evolución de la proporción del primer componente principal en el periodo comprendido desde finales del siglo XVII, concretamente el periodo de 1691-1698 hasta principios del siglo XIX, periodo 1805-1811.

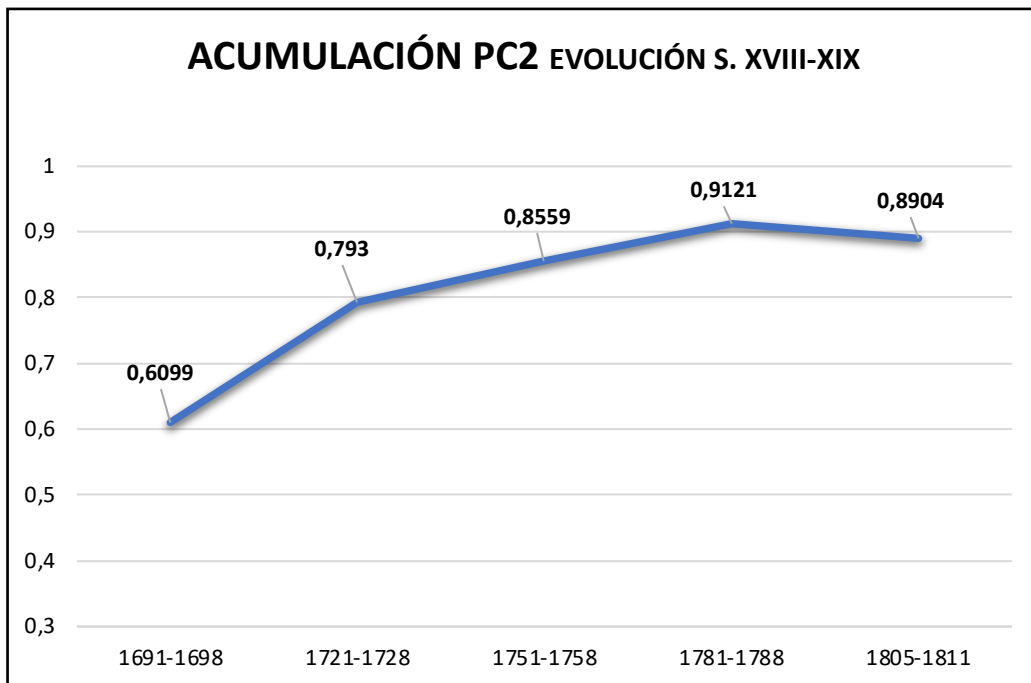
Se puede observar como la evolución es creciente hasta mitad del siglo XVIII, seguidamente decrece durante 20 años, des del 1750 hasta 1790, y vuelve a crecer a principios del siglo XIX.

La proporción mínima es 0,4324 la cual pertenece al primer periodo, 1691-1698 y la máxima es 0,6936 que pertenece al periodo de 1751-1758. Es decir, el primer componente del periodo 1691-1698 representa un 43,24% de la varianza y el PC1 del periodo 1751-1758 representa un 69,36% de la varianza.

**Tabla 7. Proporción del PC1 y la acumulación del PC2**

Periodo	Proporción PC1	Acumulación PC2
1691-1698	0,4324	0,6099
1721-1728	0,5213	0,793
1751-1758	0,6936	0,8559
1781-1788	0,5951	0,9121
1805-1811	0,6289	0,8904

**Gráfica 2. Evolución S.XVIII-XIX de la acumulación PC2**



El gráfico 2 representa la evolución de la acumulación hasta el segundo componente principal. Nos permite confirmar la representación del primer componente y de hecho no deja dudas de escoger hasta el segundo componente ya que al coger el PC2 refleja que efectivamente este va creciendo y vemos como a partir de principios del siglo XVIII conserva más del 75% de la información original.

A finales del siglo XVII, la proporción acumulada del segundo componente recoge el 60,99% de la varianza total de la muestra original.

A mediados del siglo XVIII, la proporción acumulada del segundo componente recoge el 85,59% de la varianza total de la muestra original.

Por último, a principios del siglo XIX, la proporción acumulada del segundo componente recoge el 89,04% de la varianza total de la muestra original.

## 8. Conclusión

La aparición de la letra de cambio como instrumento para transferir dinero y proporcionar crédito en la Edad Moderna provocó una integración del mercado monetario ya que el envío de las letras de cambio evitaba el riesgo y los costes de transacción asociados con el envío de dinero en metálico. Por tanto, en el periodo analizado es cuando empiezan a aumentar los intercambios comerciales entre los distintos centros de Europa preindustrial.

A pesar de analizar una época donde los medios para anotar y guardar la información sobre las cotizaciones de las letras de cambio en diferentes ciudades de la Europa preindustrial eran escasos, mediante los libros *Währungen der Welt III: Europäische Wechselkurse im 17. Jahrhundert* y *Währungen der Welt VI: Geld und Währungen in Europa im 18. Jahrhundert*, he podido crear bases de datos para diferentes periodos de tiempo del siglo XVIII, la mayoría contienen 15 variables de ciudades que están distribuidas uniformemente por toda Europa. Es decir, las bases de datos creadas permiten realizar un análisis con variables que contienen diversidad de monedas de cambio.

Al disponer de bases de datos con conjunto de datos multivariados, el método escogido en este trabajo, análisis de componentes principales, me ha permitido reducir la dimensión del espacio de los datos permitiendo concluir que con tan solo los dos primeros componentes obtenidos para cada periodo analizado se llega a explicar prácticamente el total de la información que proporciona la muestra original.

En caso de utilizar la primera combinación lineal de cada periodo para un análisis posterior, esta explicaría más del 50% de la varianza total, es decir recoge más de la mitad de la información que explicaba la muestra original.

Por último, emplear el análisis de componentes principales en este trabajo me ha servido para conocer esta metodología y poder concluir que es muy útil e intuitiva cuando disponemos de una serie de datos con muchas variables como es en este caso. Ya que el resultado de este análisis se puede reducir en dos combinaciones lineales de cada periodo analizado que en conjunto explican alrededor del 90% de la información que contenía la muestra inicial.

## Referencias Bibliográficas

Roldán, P. N. (2021, 14 julio). *Letra de cambio*. Economipedia.

<https://economipedia.com/definiciones/letra-de-cambio.html>

Bermejo, D. J. (2021, 27 septiembre). *Tipo de cambio*. Economipedia.

<https://economipedia.com/definiciones/tipo-de-cambio.html>

López, J. F. (2021, 27 enero). *Varianza*. Economipedia.

<https://economipedia.com/definiciones/varianza.html>

Nogues-Marco, P (2020). *Money Markets and Exchange Rates in Preindustrial Europe*. Springer Nature Singapore Pte Ltd. 2020.

[https://link.springer.com/referenceworkentry/10.1007/978-981-13-0596-2\\_16](https://link.springer.com/referenceworkentry/10.1007/978-981-13-0596-2_16)

Nogues-Marco, P (2011). *Tipos de cambio y tipos de interés en Cádiz en el siglo XVIII (1729–1788)*. Madrid: Banco de España-Estudios de Historia Económica, 2011, n.58. <https://archive-ouverte.unige.ch/unige:77449>

FLANDREAU, M., et al. (2009). *Monetary geography before the Industrial Revolution*. Cambridge Journal of Regions, Economy and Society, 2009, vol.2, no.2, p.149-171. <https://doi.org/10.1093/cjres/rsp009>

Marín, JM. (s. f.). Tema 3: Análisis de Componentes Principales. halweb.uc3m.es. <http://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/jmmarin/esp/AMult/tema3am.pdf>

Rodrigo, J. A. (2017, julio). *Análisis de Componentes Principales (Principal Component Analysis, PCA) y t-SNE*. [cienciadedatos.net](http://cienciadedatos.net).

[https://www.cienciadedatos.net/documentos/35\\_principal\\_component\\_analysis](https://www.cienciadedatos.net/documentos/35_principal_component_analysis)

Peña Mendez, D. P. (2014). *Análisis de componentes principales en la estimación de índices de empoderamiento en mujeres de Colombia (TFM)*. [masters.ugr.es](http://masters.ugr.es).

<https://masteres.ugr.es/moea/pages/tfm1314/tfmpenamendez/>

**Anexo 1:** Tipos de cambio de Amberes sobre Rotterdam en el periodo 1691-1698. Amberes cotiza a la vista, equivalente a un mes, sobre Rotterdam en Pfund flämisch por 100 Pfund flämisch.

**ROTTERDAM, SICHT**  
 Pfund flämisch für 100 Pfund flämisch<sup>3</sup>

	Jan.	Feb.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sep.	Okt.	Nov.	Dez.	JM.
1689			104,75			105,88			105,25	105,00	104,50	104,00	104,90
1690	103,25	103,75		104,50			105,75	106,00	106,25	106,00	105,50	105,00	105,12
1691	104,75		105,00	105,00	105,25	106,00	107,00	107,00	106,75	106,50	106,25	106,00	105,96
1692	105,75	106,25	106,50	107,25	106,75	106,50	106,75	106,75	107,00	107,75	108,00	107,75	106,92
1693	107,75	109,00	109,50	110,00	107,50	108,00	107,75	108,00	108,00	106,75	105,88	105,00	107,76
1694	105,00	104,75	104,25	105,00	105,00	105,00	105,38	105,75	105,50	105,75	105,75	105,63	105,23
1695	106,25	106,25	106,50	106,13	105,25	105,50	105,75	106,38	106,00	105,63	105,50	104,75	105,83
1696	104,75	105,00	105,25	105,25	105,00	105,13	105,38	105,25	105,38	105,38	105,00	104,75	105,13
1697	104,75	104,75	105,00	104,75	104,63	105,13	105,50	105,75	105,75	105,75	105,00	104,75	105,13
1698	104,50	104,00	103,88	103,25	103,00	102,50	102,38	102,75	103,00	103,13	103,25	103,25	103,24
1699	103,50	104,50	105,25	105,00	104,25	104,25	104,00	104,13	104,38	105,00			104,43
1700	103,38	103,75	104,25	104,38	104,38	104,50	104,50	105,00	104,50	104,25	104,00	103,38	104,19
1701	103,25	103,00	103,00	102,75	103,25	105,00	104,75	104,25	105,25	105,75	105,38	105,25	104,24
1702	106,75	107,00	106,75					108,00			105,00		106,70
1703	103,88	100,50	100,38	101,13	100,75	102,00							101,44
1704							104,50	104,75	104,00	104,50	104,25	103,38	104,23
1705	104,00	104,75	106,00	106,63	106,13	106,38	106,50	106,75	106,25	106,38	106,25	105,50	105,96
1706	106,13	106,50	106,50	106,63	106,50	105,00	106,00	106,25	106,25	106,13	105,76	105,50	106,10
1707	105,75	105,63	106,00	106,38	106,75	106,63	106,88	107,25	106,63	106,38	106,63	106,13	106,42
1708	106,25	106,50	106,63	105,88	106,13	106,50	106,38	106,75	106,75	106,25	106,38	106,25	106,39
1709	106,63	107,00	106,88	106,75	103,63	102,38	103,00	103,25	103,00	103,25	103,75	103,00	104,38
1710	105,75	104,00	105,75	106,00	105,38	105,13		106,13	105,75	105,88			105,53

<sup>3</sup> Ursprüngliche Notierungsweise: Prozent Aufgeld für 100 Pfund.

**Antwerpen** [100]

Fuente: libro Währungen der Welt III: Europäische Wechselkurse im 17. Jahrhundert

## Anexo 2: ACP periodo 1691-1698

Análisis de Componentes Principales  
 n = 96

Análisis de los valores propios de la matriz de correlación

Componente	Valor propio	Proporción	Acumulación
1	6.4864	0.4324	0.4324
2	2.6623	0.1775	0.6099
3	1.7662	0.1177	0.7277
4	1.2437	0.0829	0.8106
5	0.8292	0.0553	0.8658
6	0.6443	0.0430	0.9088
7	0.4484	0.0299	0.9387
8	0.3643	0.0243	0.9630
9	0.2187	0.0146	0.9776
10	0.1509	0.0101	0.9876
11	0.1024	0.0068	0.9944
12	0.0528	0.0035	0.9980
13	0.0292	0.0019	0.9999
14	0.0007	0.0000	1.0000
15	0.0006	0.0000	1.0000

Vectores propios (pesos de los componentes)

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7
msterdamIAmberes	-0.302	0.140	-0.014	-0.508	-0.134	-0.027	0.147
RotterdamAmberes	-0.302	0.139	-0.016	-0.507	-0.134	-0.029	0.146
MiddelburgAmberes	-0.343	-0.030	0.097	-0.255	-0.160	0.058	-0.046
RysseylleAmberes	0.372	-0.093	-0.046	-0.120	-0.136	0.107	0.083
LondresAmberes	0.094	-0.093	-0.540	0.047	-0.592	-0.162	-0.353
ParisAmberes	-0.354	0.102	0.025	0.148	0.173	-0.050	-0.421
RouenAmberes	-0.355	0.099	0.021	0.147	0.181	-0.051	-0.413
VeneciaAmberes	-0.034	0.516	0.010	0.236	0.125	0.292	0.305
MadridAmberes	0.308	0.329	-0.021	-0.086	0.013	0.034	-0.018
SevillaAmberes	0.288	0.297	-0.017	-0.328	0.154	-0.099	-0.268
CAdizAmberes	0.296	0.280	0.029	-0.281	0.119	-0.077	-0.228
LisboaAmberes	-0.176	0.257	-0.416	0.194	-0.233	0.155	0.332
HamburgoAmberes	-0.055	0.493	-0.254	0.143	0.001	-0.130	-0.148
VeneciaNApoles	-0.039	-0.159	-0.502	-0.083	0.531	-0.536	0.296
RomaIINapoles	-0.010	-0.218	-0.451	-0.214	0.342	0.722	-0.197
	PC8	PC9	PC10	PC11	PC12	PC13	PC14
msterdamIAmberes	0.025	0.022	0.244	-0.137	0.086	0.027	-0.491
RotterdamAmberes	0.026	0.020	0.261	-0.141	0.074	0.040	0.485
MiddelburgAmberes	0.142	-0.236	-0.748	0.257	-0.235	0.138	0.008
RysseylleAmberes	-0.038	-0.012	0.155	-0.059	-0.440	0.760	-0.009
LondresAmberes	0.106	-0.380	0.099	-0.052	0.030	-0.134	-0.004
ParisAmberes	-0.219	-0.089	0.097	-0.149	-0.075	0.207	0.506
RouenAmberes	-0.214	-0.091	0.090	-0.141	-0.072	0.212	-0.516
VeneciaAmberes	0.210	-0.614	0.178	0.034	-0.161	-0.059	-0.001
MadridAmberes	-0.107	-0.071	-0.442	-0.656	0.362	0.117	0.003
SevillaAmberes	-0.133	0.107	-0.026	-0.059	-0.617	-0.448	-0.004
CAdizAmberes	-0.281	-0.186	0.050	0.608	0.412	0.162	0.004
LisboaAmberes	-0.621	0.267	-0.137	0.139	-0.092	-0.018	0.001
HamburgoAmberes	0.567	0.493	-0.047	0.147	0.031	0.204	0.001

Fuente: Gretl, base de datos periodo 1691-1698

### Anexo 3: ACP periodo 1721-1728

Análisis de Componentes Principales  
 n = 96

Análisis de los valores propios de la matriz de correlación

Componente	Valor propio	Proporción	Acumulación
1	7.8191	0.5213	0.5213
2	4.0751	0.2717	0.7929
3	1.0817	0.0721	0.8651
4	0.7236	0.0482	0.9133
5	0.5083	0.0339	0.9472
6	0.2880	0.0192	0.9664
7	0.2060	0.0137	0.9801
8	0.1226	0.0082	0.9883
9	0.0790	0.0053	0.9936
10	0.0354	0.0024	0.9959
11	0.0319	0.0021	0.9980
12	0.0145	0.0010	0.9990
13	0.0062	0.0004	0.9994
14	0.0050	0.0003	0.9998
15	0.0036	0.0002	1.0000

Vectores propios (pesos de los componentes)

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7
msterdamvistaLondres	-0.332	0.126	0.119	-0.047	-0.141	0.183	0.322
AmberesLondres	-0.308	-0.171	0.012	-0.108	-0.015	-0.371	0.295
msterdamLondres	-0.333	0.106	0.179	-0.079	-0.104	0.108	0.342
RotterdamLondres	-0.341	0.094	0.120	-0.053	-0.108	0.142	0.277
DublanLondres	-0.043	-0.260	0.378	0.860	-0.186	-0.059	0.027
HamburgoLondres	-0.305	-0.099	-0.156	0.060	-0.119	0.734	-0.320
LisboaLondres	-0.310	-0.006	0.070	0.067	0.620	0.116	-0.224
PortoLondres	-0.300	0.025	0.324	-0.013	0.503	-0.220	-0.192
VeneciaLondres	-0.319	-0.080	-0.308	0.042	-0.230	-0.181	-0.192
GAnovaLondres	-0.334	-0.104	-0.099	-0.130	-0.165	-0.249	-0.060
LivornoLondres	-0.197	-0.372	-0.018	-0.132	-0.275	-0.222	-0.461
ParisVistaLondres	-0.147	0.130	-0.738	0.413	0.235	-0.112	0.208
MadridLondres	0.066	-0.478	-0.045	-0.113	0.135	0.126	0.165
CA dizLondres	0.071	-0.475	-0.050	-0.080	0.167	0.078	0.238
BilbaoLondres	0.060	-0.479	-0.087	-0.054	0.120	0.123	0.214
	PC8	PC9	PC10	PC11	PC12	PC13	PC14
msterdamvistaLondres	-0.265	0.085	-0.066	0.013	0.417	0.649	0.123
AmberesLondres	0.767	-0.021	0.040	0.189	0.067	0.085	0.034
msterdamLondres	-0.193	0.079	-0.037	0.256	-0.759	-0.077	0.086
RotterdamLondres	-0.098	-0.017	-0.152	-0.025	0.412	-0.667	-0.303
DublanLondres	0.008	-0.073	-0.005	-0.047	-0.014	0.009	0.007
HamburgoLondres	0.382	0.166	0.104	-0.146	-0.085	0.025	-0.015
LisboaLondres	-0.041	-0.568	-0.228	0.253	0.022	0.048	0.041
PortoLondres	-0.085	0.565	0.294	-0.226	0.019	-0.033	-0.007
VeneciaLondres	-0.261	-0.215	0.685	0.275	0.075	-0.037	-0.036
GAnovaLondres	-0.081	-0.324	-0.144	-0.762	-0.169	0.021	0.124
LivornoLondres	-0.160	0.284	-0.505	0.302	0.027	0.022	-0.077
ParisVistaLondres	-0.059	0.271	-0.232	-0.018	-0.043	-0.002	-0.029
MadridLondres	-0.089	0.028	-0.023	0.016	0.025	0.070	0.116

Fuente: Gretl, base de datos periodo 1721-1728

## Anexo 4: ACP periodo 1751-1758

Análisis de Componentes Principales  
 n = 96

Análisis de los valores propios de la matriz de correlación

Componente	Valor propio	Proporción	Acumulación
1	10.4040	0.6936	0.6936
2	2.4340	0.1623	0.8559
3	0.8901	0.0593	0.9152
4	0.4631	0.0309	0.9461
5	0.3635	0.0242	0.9703
6	0.1428	0.0095	0.9798
7	0.1115	0.0074	0.9873
8	0.0468	0.0031	0.9904
9	0.0449	0.0030	0.9934
10	0.0312	0.0021	0.9955
11	0.0241	0.0016	0.9971
12	0.0199	0.0013	0.9984
13	0.0114	0.0008	0.9992
14	0.0068	0.0005	0.9996
15	0.0059	0.0004	1.0000

Vectores propios (pesos de los componentes)

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7
msterdamvistaLondres	0.181	-0.408	0.187	0.453	0.556	-0.038	0.283
DublAnLondres	-0.159	-0.258	-0.735	0.267	-0.325	-0.270	0.302
ParAs2mesesLondres	0.295	0.001	0.182	0.172	-0.306	-0.009	0.291
ParisVistaLondres	0.294	-0.022	0.179	0.192	-0.289	0.015	0.319
Burdeos2mesesLondres	0.290	0.071	0.237	-0.006	-0.331	-0.066	0.068
MadridLondres	0.300	-0.095	-0.080	-0.038	0.008	-0.399	-0.243
CAvizLondres	0.296	-0.095	-0.011	-0.129	0.009	-0.526	-0.322
BilbaoLondres	0.303	-0.074	0.014	-0.043	0.056	-0.225	-0.118
LisboaLondres	0.275	0.035	-0.180	-0.540	0.139	0.139	0.445
PortoLondres	0.280	-0.054	-0.252	-0.384	0.248	0.065	0.198
VeneciaLondres	0.269	-0.245	-0.209	0.060	-0.108	0.401	-0.397
LivornoLondres	0.264	-0.275	-0.178	0.100	-0.082	0.483	-0.244
msterdamCVistaHamburgo	-0.180	-0.505	0.140	-0.070	0.178	-0.060	0.034
LondresHamburgo	-0.259	-0.317	0.035	-0.287	-0.059	-0.103	-0.040
ParisHamburgo	-0.140	-0.492	0.324	-0.312	-0.400	0.037	0.066
	PC8	PC9	PC10	PC11	PC12	PC13	PC14
msterdamvistaLondres	0.166	-0.014	0.091	-0.166	-0.160	-0.279	0.037
DublAnLondres	0.143	-0.007	-0.012	-0.047	-0.039	0.044	0.023
ParAs2mesesLondres	-0.218	-0.017	0.083	0.046	0.226	-0.048	-0.678
ParisVistaLondres	-0.448	0.098	0.065	0.157	0.127	0.054	0.608
Burdeos2mesesLondres	0.447	0.055	-0.372	-0.569	0.025	0.105	0.026
MadridLondres	-0.126	-0.144	-0.071	0.269	-0.055	-0.261	-0.256
CAvizLondres	-0.246	0.135	0.193	-0.294	-0.325	0.191	0.098
BilbaoLondres	0.421	-0.311	-0.155	0.418	0.414	0.056	0.236
LisboaLondres	-0.025	-0.511	0.209	-0.138	-0.164	0.090	0.007
PortoLondres	0.032	0.719	-0.198	0.109	0.156	-0.086	-0.048
VeneciaLondres	0.114	0.054	0.549	-0.209	0.335	-0.012	0.017
LivornoLondres	-0.209	-0.159	-0.538	0.076	-0.348	0.014	-0.011
msterdamCVistaHamburgo	-0.155	-0.022	-0.124	-0.014	0.253	0.698	-0.147

Fuente: Gretl, base de datos periodo 1751-1758

## Anexo 5: ACP periodo 1781-1788

Análisis de Componentes Principales  
n = 96

Análisis de los valores propios de la matriz de correlación

Componente	Valor propio	Proporción	Acumulación
1	4.7609	0.5951	0.5951
2	2.5361	0.3170	0.9121
3	0.6097	0.0762	0.9883
4	0.0376	0.0047	0.9930
5	0.0272	0.0034	0.9964
6	0.0148	0.0018	0.9983
7	0.0092	0.0011	0.9994
8	0.0047	0.0006	1.0000

Vectores propios (pesos de los componentes)

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7
msterdamvistaLondres	-0.425	0.193	0.226	-0.157	-0.499	0.468	-0.482
Hamburgo25mesesLondres	-0.450	-0.054	0.036	-0.723	0.498	-0.148	-0.032
ParAs2mesesLondres	-0.444	0.105	-0.199	0.417	0.257	0.077	0.119
ParisVistaLondres	-0.442	0.104	-0.220	0.421	0.260	0.084	-0.099
msterdamCVistaHamburgo	0.057	0.599	0.334	0.142	0.097	-0.597	-0.372
msterdam2mesesHamburgo	0.080	0.598	0.307	-0.092	0.144	0.412	0.579
LondresHamburgo	0.453	0.051	-0.088	0.010	0.541	0.465	-0.518
ParisHamburgo	0.096	0.469	-0.804	-0.271	-0.217	-0.059	-0.016
	PC8						
msterdamvistaLondres	-0.072						
Hamburgo25mesesLondres	-0.003						
ParAs2mesesLondres	-0.702						
ParisVistaLondres	0.695						
msterdamCVistaHamburgo	-0.050						
msterdam2mesesHamburgo	0.094						
LondresHamburgo	-0.086						
ParisHamburgo	-0.013						

Fuente: Gretl, base de datos periodo 1781-1788

## Anexo 6: ACP periodo 1805-1811

Análisis de Componentes Principales  
 n = 84

Análisis de los valores propios de la matriz de correlación

Componente	Valor propio	Proporción	Acumulación
1	9.4333	0.6289	0.6289
2	3.9226	0.2615	0.8904
3	1.0977	0.0732	0.9636
4	0.2509	0.0167	0.9803
5	0.1127	0.0075	0.9878
6	0.0536	0.0036	0.9914
7	0.0408	0.0027	0.9941
8	0.0317	0.0021	0.9962
9	0.0189	0.0013	0.9975
10	0.0163	0.0011	0.9986
11	0.0123	0.0008	0.9994
12	0.0067	0.0004	0.9998
13	0.0019	0.0001	1.0000
14	0.0004	0.0000	1.0000
15	0.0003	0.0000	1.0000

Vectores propios (pesos de los componentes)

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7
HamburgoAmsterdam	0.154	0.394	0.333	0.182	-0.357	-0.547	-0.103
Paris2mesesAmsterdam	0.299	-0.127	0.225	0.251	-0.309	0.105	-0.052
ParisVistaAmsterdam	0.298	-0.124	0.254	0.232	-0.222	-0.029	-0.195
VienaAmsterdam	-0.292	0.034	0.333	-0.410	0.175	-0.167	-0.692
msterdam2mesesLondres	0.307	0.096	-0.232	-0.203	-0.008	-0.111	0.018
msterdamvistaLondres	0.306	0.099	-0.244	-0.186	0.028	-0.115	-0.026
Hamburgo25mesesLondres	0.290	0.155	-0.272	-0.259	0.111	-0.044	-0.272
ParAs2mesesLondres	0.314	0.071	-0.182	-0.123	-0.062	-0.000	-0.065
ParisVistaLondres	0.314	0.079	-0.178	-0.138	-0.074	0.014	-0.081
msterdamCVistaHamburgo	-0.173	-0.404	-0.216	-0.165	-0.354	-0.290	0.016
msterdam2mesesHamburgo	-0.156	-0.420	-0.206	-0.192	-0.403	-0.276	0.009
ParAsHamburgo	0.202	-0.384	0.006	0.105	-0.107	0.477	-0.460
msterdam1mesParAs	-0.230	0.121	-0.549	0.635	0.087	-0.184	-0.404
Hamburgo1mesParAs	-0.219	0.361	-0.092	-0.106	-0.378	0.283	0.012
Hamburgo3mesParAs	-0.219	0.355	-0.109	-0.126	-0.474	0.363	-0.097
	PC8	PC9	PC10	PC11	PC12	PC13	PC14
HamburgoAmsterdam	0.465	0.142	0.018	-0.053	0.025	-0.005	-0.006
Paris2mesesAmsterdam	-0.412	-0.137	0.262	-0.637	-0.096	-0.003	-0.001
ParisVistaAmsterdam	-0.377	-0.170	-0.081	0.714	-0.029	-0.014	0.023
VienaAmsterdam	-0.200	-0.119	-0.145	-0.149	0.000	-0.001	0.009
msterdam2mesesLondres	0.085	-0.523	-0.110	-0.079	0.090	0.135	0.328
msterdamvistaLondres	0.088	-0.508	-0.043	-0.017	0.079	-0.174	-0.312
Hamburgo25mesesLondres	-0.039	0.274	0.711	0.159	-0.227	0.027	0.046
ParAs2mesesLondres	-0.155	0.398	-0.428	-0.096	0.018	-0.048	0.597
ParisVistaLondres	-0.162	0.355	-0.371	-0.083	0.042	0.037	-0.658
msterdamCVistaHamburgo	-0.012	0.046	0.041	0.002	-0.054	-0.701	0.030
msterdam2mesesHamburgo	0.001	0.020	0.026	0.021	-0.004	0.673	-0.037
ParAsHamburgo	0.588	0.010	-0.059	-0.022	-0.013	-0.018	0.006
msterdam1mesParAs	-0.106	-0.058	-0.061	-0.061	0.003	0.027	0.003

Fuente: Gretl, base de datos periodo 1805-1811

**Anexo 1:** Tipos de cambio de Amberes sobre Rotterdam en el periodo 1691-1698. Amberes cotiza a la vista, equivalente a un mes, sobre Rotterdam en Pfund flämisch por 100 Pfund flämisch.

**ROTTERDAM, SICHT**  
 Pfund flämisch für 100 Pfund flämisch<sup>3</sup>

	Jan.	Feb.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sep.	Okt.	Nov.	Dez.	JM.
1689			104,75			105,88			105,25	105,00	104,50	104,00	104,90
1690	103,25	103,75		104,50			105,75	106,00	106,25	106,00	105,50	105,00	105,12
1691	104,75		105,00	105,00	105,25	106,00	107,00	107,00	106,75	106,50	106,25	106,00	105,96
1692	105,75	106,25	106,50	107,25	106,75	106,50	106,75	106,75	107,00	107,75	108,00	107,75	106,92
1693	107,75	109,00	109,50	110,00	107,50	108,00	107,75	108,00	108,00	106,75	105,88	105,00	107,76
1694	105,00	104,75	104,25	105,00	105,00	105,00	105,38	105,75	105,50	105,75	105,75	105,63	105,23
1695	106,25	106,25	106,50	106,13	105,25	105,50	105,75	106,38	106,00	105,63	105,50	104,75	105,83
1696	104,75	105,00	105,25	105,25	105,00	105,13	105,38	105,25	105,38	105,38	105,00	104,75	105,13
1697	104,75	104,75	105,00	104,75	104,63	105,13	105,50	105,75	105,75	105,75	105,00	104,75	105,13
1698	104,50	104,00	103,88	103,25	103,00	102,50	102,38	102,75	103,00	103,13	103,25	103,25	103,24
1699	103,50	104,50	105,25	105,00	104,25	104,25	104,00	104,13	104,38	105,00			104,43
1700	103,38	103,75	104,25	104,38	104,38	104,50	104,50	105,00	104,50	104,25	104,00	103,38	104,19
1701	103,25	103,00	103,00	102,75	103,25	105,00	104,75	104,25	105,25	105,75	105,38	105,25	104,24
1702	106,75	107,00	106,75					108,00			105,00		106,70
1703	103,88	100,50	100,38	101,13	100,75	102,00							101,44
1704							104,50	104,75	104,00	104,50	104,25	103,38	104,23
1705	104,00	104,75	106,00	106,63	106,13	106,38	106,50	106,75	106,25	106,38	106,25	105,50	105,96
1706	106,13	106,50	106,50	106,63	106,50	105,00	106,00	106,25	106,25	106,13	105,76	105,50	106,10
1707	105,75	105,63	106,00	106,38	106,75	106,63	106,88	107,25	106,63	106,38	106,63	106,13	106,42
1708	106,25	106,50	106,63	105,88	106,13	106,50	106,38	106,75	106,75	106,25	106,38	106,25	106,39
1709	106,63	107,00	106,88	106,75	103,63	102,38	103,00	103,25	103,00	103,25	103,75	103,00	104,38
1710	105,75	104,00	105,75	106,00	105,38	105,13		106,13	105,75	105,88			105,53

<sup>3</sup> Ursprüngliche Notierungsweise: Prozent Aufgeld für 100 Pfund.

**Antwerpen** [100]

Fuente: libro Währungen der Welt III: Europäische Wechselkurse im 17. Jahrhundert

## Anexo 2: ACP periodo 1691-1698

Análisis de Componentes Principales  
 n = 96

Análisis de los valores propios de la matriz de correlación

Componente	Valor propio	Proporción	Acumulación
1	6.4864	0.4324	0.4324
2	2.6623	0.1775	0.6099
3	1.7662	0.1177	0.7277
4	1.2437	0.0829	0.8106
5	0.8292	0.0553	0.8658
6	0.6443	0.0430	0.9088
7	0.4484	0.0299	0.9387
8	0.3643	0.0243	0.9630
9	0.2187	0.0146	0.9776
10	0.1509	0.0101	0.9876
11	0.1024	0.0068	0.9944
12	0.0528	0.0035	0.9980
13	0.0292	0.0019	0.9999
14	0.0007	0.0000	1.0000
15	0.0006	0.0000	1.0000

Vectores propios (pesos de los componentes)

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7
msterdamIAmberes	-0.302	0.140	-0.014	-0.508	-0.134	-0.027	0.147
RotterdamAmberes	-0.302	0.139	-0.016	-0.507	-0.134	-0.029	0.146
MiddelburgAmberes	-0.343	-0.030	0.097	-0.255	-0.160	0.058	-0.046
RysseylleAmberes	0.372	-0.093	-0.046	-0.120	-0.136	0.107	0.083
LondresAmberes	0.094	-0.093	-0.540	0.047	-0.592	-0.162	-0.353
ParisAmberes	-0.354	0.102	0.025	0.148	0.173	-0.050	-0.421
RouenAmberes	-0.355	0.099	0.021	0.147	0.181	-0.051	-0.413
VeneciaAmberes	-0.034	0.516	0.010	0.236	0.125	0.292	0.305
MadridAmberes	0.308	0.329	-0.021	-0.086	0.013	0.034	-0.018
SevillaAmberes	0.288	0.297	-0.017	-0.328	0.154	-0.099	-0.268
CAdizAmberes	0.296	0.280	0.029	-0.281	0.119	-0.077	-0.228
LisboaAmberes	-0.176	0.257	-0.416	0.194	-0.233	0.155	0.332
HamburgoAmberes	-0.055	0.493	-0.254	0.143	0.001	-0.130	-0.148
VeneciaNApoles	-0.039	-0.159	-0.502	-0.083	0.531	-0.536	0.296
RomaIINapoles	-0.010	-0.218	-0.451	-0.214	0.342	0.722	-0.197
	PC8	PC9	PC10	PC11	PC12	PC13	PC14
msterdamIAmberes	0.025	0.022	0.244	-0.137	0.086	0.027	-0.491
RotterdamAmberes	0.026	0.020	0.261	-0.141	0.074	0.040	0.485
MiddelburgAmberes	0.142	-0.236	-0.748	0.257	-0.235	0.138	0.008
RysseylleAmberes	-0.038	-0.012	0.155	-0.059	-0.440	0.760	-0.009
LondresAmberes	0.106	-0.380	0.099	-0.052	0.030	-0.134	-0.004
ParisAmberes	-0.219	-0.089	0.097	-0.149	-0.075	0.207	0.506
RouenAmberes	-0.214	-0.091	0.090	-0.141	-0.072	0.212	-0.516
VeneciaAmberes	0.210	-0.614	0.178	0.034	-0.161	-0.059	-0.001
MadridAmberes	-0.107	-0.071	-0.442	-0.656	0.362	0.117	0.003
SevillaAmberes	-0.133	0.107	-0.026	-0.059	-0.617	-0.448	-0.004
CAdizAmberes	-0.281	-0.186	0.050	0.608	0.412	0.162	0.004
LisboaAmberes	-0.621	0.267	-0.137	0.139	-0.092	-0.018	0.001
HamburgoAmberes	0.567	0.493	-0.047	0.147	0.031	0.204	0.001

Fuente: Gretl, base de datos periodo 1691-1698

### Anexo 3: ACP periodo 1721-1728

Análisis de Componentes Principales  
 n = 96

Análisis de los valores propios de la matriz de correlación

Componente	Valor propio	Proporción	Acumulación
1	7.8191	0.5213	0.5213
2	4.0751	0.2717	0.7929
3	1.0817	0.0721	0.8651
4	0.7236	0.0482	0.9133
5	0.5083	0.0339	0.9472
6	0.2880	0.0192	0.9664
7	0.2060	0.0137	0.9801
8	0.1226	0.0082	0.9883
9	0.0790	0.0053	0.9936
10	0.0354	0.0024	0.9959
11	0.0319	0.0021	0.9980
12	0.0145	0.0010	0.9990
13	0.0062	0.0004	0.9994
14	0.0050	0.0003	0.9998
15	0.0036	0.0002	1.0000

Vectores propios (pesos de los componentes)

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7
msterdamvistaLondres	-0.332	0.126	0.119	-0.047	-0.141	0.183	0.322
AmberesLondres	-0.308	-0.171	0.012	-0.108	-0.015	-0.371	0.295
msterdamLondres	-0.333	0.106	0.179	-0.079	-0.104	0.108	0.342
RotterdamLondres	-0.341	0.094	0.120	-0.053	-0.108	0.142	0.277
DublanLondres	-0.043	-0.260	0.378	0.860	-0.186	-0.059	0.027
HamburgoLondres	-0.305	-0.099	-0.156	0.060	-0.119	0.734	-0.320
LisboaLondres	-0.310	-0.006	0.070	0.067	0.620	0.116	-0.224
PortoLondres	-0.300	0.025	0.324	-0.013	0.503	-0.220	-0.192
VeneciaLondres	-0.319	-0.080	-0.308	0.042	-0.230	-0.181	-0.192
GAnovaLondres	-0.334	-0.104	-0.099	-0.130	-0.165	-0.249	-0.060
LivornoLondres	-0.197	-0.372	-0.018	-0.132	-0.275	-0.222	-0.461
ParisVistaLondres	-0.147	0.130	-0.738	0.413	0.235	-0.112	0.208
MadridLondres	0.066	-0.478	-0.045	-0.113	0.135	0.126	0.165
CA dizLondres	0.071	-0.475	-0.050	-0.080	0.167	0.078	0.238
BilbaoLondres	0.060	-0.479	-0.087	-0.054	0.120	0.123	0.214
	PC8	PC9	PC10	PC11	PC12	PC13	PC14
msterdamvistaLondres	-0.265	0.085	-0.066	0.013	0.417	0.649	0.123
AmberesLondres	0.767	-0.021	0.040	0.189	0.067	0.085	0.034
msterdamLondres	-0.193	0.079	-0.037	0.256	-0.759	-0.077	0.086
RotterdamLondres	-0.098	-0.017	-0.152	-0.025	0.412	-0.667	-0.303
DublanLondres	0.008	-0.073	-0.005	-0.047	-0.014	0.009	0.007
HamburgoLondres	0.382	0.166	0.104	-0.146	-0.085	0.025	-0.015
LisboaLondres	-0.041	-0.568	-0.228	0.253	0.022	0.048	0.041
PortoLondres	-0.085	0.565	0.294	-0.226	0.019	-0.033	-0.007
VeneciaLondres	-0.261	-0.215	0.685	0.275	0.075	-0.037	-0.036
GAnovaLondres	-0.081	-0.324	-0.144	-0.762	-0.169	0.021	0.124
LivornoLondres	-0.160	0.284	-0.505	0.302	0.027	0.022	-0.077
ParisVistaLondres	-0.059	0.271	-0.232	-0.018	-0.043	-0.002	-0.029
MadridLondres	-0.089	0.028	-0.023	0.016	0.025	0.070	0.116

Fuente: Gretl, base de datos periodo 1721-1728

## Anexo 4: ACP periodo 1751-1758

Análisis de Componentes Principales  
 n = 96

Análisis de los valores propios de la matriz de correlación

Componente	Valor propio	Proporción	Acumulación
1	10.4040	0.6936	0.6936
2	2.4340	0.1623	0.8559
3	0.8901	0.0593	0.9152
4	0.4631	0.0309	0.9461
5	0.3635	0.0242	0.9703
6	0.1428	0.0095	0.9798
7	0.1115	0.0074	0.9873
8	0.0468	0.0031	0.9904
9	0.0449	0.0030	0.9934
10	0.0312	0.0021	0.9955
11	0.0241	0.0016	0.9971
12	0.0199	0.0013	0.9984
13	0.0114	0.0008	0.9992
14	0.0068	0.0005	0.9996
15	0.0059	0.0004	1.0000

Vectores propios (pesos de los componentes)

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7
msterdamvistaLondres	0.181	-0.408	0.187	0.453	0.556	-0.038	0.283
DublAnLondres	-0.159	-0.258	-0.735	0.267	-0.325	-0.270	0.302
ParAs2mesesLondres	0.295	0.001	0.182	0.172	-0.306	-0.009	0.291
ParisVistaLondres	0.294	-0.022	0.179	0.192	-0.289	0.015	0.319
Burdeos2mesesLondres	0.290	0.071	0.237	-0.006	-0.331	-0.066	0.068
MadridLondres	0.300	-0.095	-0.080	-0.038	0.008	-0.399	-0.243
CAdizLondres	0.296	-0.095	-0.011	-0.129	0.009	-0.526	-0.322
BilbaoLondres	0.303	-0.074	0.014	-0.043	0.056	-0.225	-0.118
LisboaLondres	0.275	0.035	-0.180	-0.540	0.139	0.139	0.445
PortoLondres	0.280	-0.054	-0.252	-0.384	0.248	0.065	0.198
VeneciaLondres	0.269	-0.245	-0.209	0.060	-0.108	0.401	-0.397
LivornoLondres	0.264	-0.275	-0.178	0.100	-0.082	0.483	-0.244
msterdamCVistaHamburgo	-0.180	-0.505	0.140	-0.070	0.178	-0.060	0.034
LondresHamburgo	-0.259	-0.317	0.035	-0.287	-0.059	-0.103	-0.040
ParisHamburgo	-0.140	-0.492	0.324	-0.312	-0.400	0.037	0.066
	PC8	PC9	PC10	PC11	PC12	PC13	PC14
msterdamvistaLondres	0.166	-0.014	0.091	-0.166	-0.160	-0.279	0.037
DublAnLondres	0.143	-0.007	-0.012	-0.047	-0.039	0.044	0.023
ParAs2mesesLondres	-0.218	-0.017	0.083	0.046	0.226	-0.048	-0.678
ParisVistaLondres	-0.448	0.098	0.065	0.157	0.127	0.054	0.608
Burdeos2mesesLondres	0.447	0.055	-0.372	-0.569	0.025	0.105	0.026
MadridLondres	-0.126	-0.144	-0.071	0.269	-0.055	-0.261	-0.256
CAdizLondres	-0.246	0.135	0.193	-0.294	-0.325	0.191	0.098
BilbaoLondres	0.421	-0.311	-0.155	0.418	0.414	0.056	0.236
LisboaLondres	-0.025	-0.511	0.209	-0.138	-0.164	0.090	0.007
PortoLondres	0.032	0.719	-0.198	0.109	0.156	-0.086	-0.048
VeneciaLondres	0.114	0.054	0.549	-0.209	0.335	-0.012	0.017
LivornoLondres	-0.209	-0.159	-0.538	0.076	-0.348	0.014	-0.011
msterdamCVistaHamburgo	-0.155	-0.022	-0.124	-0.014	0.253	0.698	-0.147

Fuente: Gretl, base de datos periodo 1751-1758

## Anexo 5: ACP periodo 1781-1788

Análisis de Componentes Principales  
n = 96

Análisis de los valores propios de la matriz de correlación

Componente	Valor propio	Proporción	Acumulación
1	4.7609	0.5951	0.5951
2	2.5361	0.3170	0.9121
3	0.6097	0.0762	0.9883
4	0.0376	0.0047	0.9930
5	0.0272	0.0034	0.9964
6	0.0148	0.0018	0.9983
7	0.0092	0.0011	0.9994
8	0.0047	0.0006	1.0000

Vectores propios (pesos de los componentes)

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7
msterdamvistaLondres	-0.425	0.193	0.226	-0.157	-0.499	0.468	-0.482
Hamburgo25mesesLondres	-0.450	-0.054	0.036	-0.723	0.498	-0.148	-0.032
ParAs2mesesLondres	-0.444	0.105	-0.199	0.417	0.257	0.077	0.119
ParisVistaLondres	-0.442	0.104	-0.220	0.421	0.260	0.084	-0.099
msterdamCVistaHamburgo	0.057	0.599	0.334	0.142	0.097	-0.597	-0.372
msterdam2mesesHamburgo	0.080	0.598	0.307	-0.092	0.144	0.412	0.579
LondresHamburgo	0.453	0.051	-0.088	0.010	0.541	0.465	-0.518
ParisHamburgo	0.096	0.469	-0.804	-0.271	-0.217	-0.059	-0.016
	PC8						
msterdamvistaLondres	-0.072						
Hamburgo25mesesLondres	-0.003						
ParAs2mesesLondres	-0.702						
ParisVistaLondres	0.695						
msterdamCVistaHamburgo	-0.050						
msterdam2mesesHamburgo	0.094						
LondresHamburgo	-0.086						
ParisHamburgo	-0.013						

Fuente: Gretl, base de datos periodo 1781-1788

## Anexo 6: ACP periodo 1805-1811

Análisis de Componentes Principales  
 n = 84

Análisis de los valores propios de la matriz de correlación

Componente	Valor propio	Proporción	Acumulación
1	9.4333	0.6289	0.6289
2	3.9226	0.2615	0.8904
3	1.0977	0.0732	0.9636
4	0.2509	0.0167	0.9803
5	0.1127	0.0075	0.9878
6	0.0536	0.0036	0.9914
7	0.0408	0.0027	0.9941
8	0.0317	0.0021	0.9962
9	0.0189	0.0013	0.9975
10	0.0163	0.0011	0.9986
11	0.0123	0.0008	0.9994
12	0.0067	0.0004	0.9998
13	0.0019	0.0001	1.0000
14	0.0004	0.0000	1.0000
15	0.0003	0.0000	1.0000

Vectores propios (pesos de los componentes)

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7
HamburgoAmsterdam	0.154	0.394	0.333	0.182	-0.357	-0.547	-0.103
Paris2mesesAmsterdam	0.299	-0.127	0.225	0.251	-0.309	0.105	-0.052
ParisVistaAmsterdam	0.298	-0.124	0.254	0.232	-0.222	-0.029	-0.195
VienaAmsterdam	-0.292	0.034	0.333	-0.410	0.175	-0.167	-0.692
msterdam2mesesLondres	0.307	0.096	-0.232	-0.203	-0.008	-0.111	0.018
msterdamvistaLondres	0.306	0.099	-0.244	-0.186	0.028	-0.115	-0.026
Hamburgo25mesesLondres	0.290	0.155	-0.272	-0.259	0.111	-0.044	-0.272
ParAs2mesesLondres	0.314	0.071	-0.182	-0.123	-0.062	-0.000	-0.065
ParisVistaLondres	0.314	0.079	-0.178	-0.138	-0.074	0.014	-0.081
msterdamCVistaHamburgo	-0.173	-0.404	-0.216	-0.165	-0.354	-0.290	0.016
msterdam2mesesHamburgo	-0.156	-0.420	-0.206	-0.192	-0.403	-0.276	0.009
ParAsHamburgo	0.202	-0.384	0.006	0.105	-0.107	0.477	-0.460
msterdam1mesParAs	-0.230	0.121	-0.549	0.635	0.087	-0.184	-0.404
Hamburgo1mesParAs	-0.219	0.361	-0.092	-0.106	-0.378	0.283	0.012
Hamburgo3mesParAs	-0.219	0.355	-0.109	-0.126	-0.474	0.363	-0.097
	PC8	PC9	PC10	PC11	PC12	PC13	PC14
HamburgoAmsterdam	0.465	0.142	0.018	-0.053	0.025	-0.005	-0.006
Paris2mesesAmsterdam	-0.412	-0.137	0.262	-0.637	-0.096	-0.003	-0.001
ParisVistaAmsterdam	-0.377	-0.170	-0.081	0.714	-0.029	-0.014	0.023
VienaAmsterdam	-0.200	-0.119	-0.145	-0.149	0.000	-0.001	0.009
msterdam2mesesLondres	0.085	-0.523	-0.110	-0.079	0.090	0.135	0.328
msterdamvistaLondres	0.088	-0.508	-0.043	-0.017	0.079	-0.174	-0.312
Hamburgo25mesesLondres	-0.039	0.274	0.711	0.159	-0.227	0.027	0.046
ParAs2mesesLondres	-0.155	0.398	-0.428	-0.096	0.018	-0.048	0.597
ParisVistaLondres	-0.162	0.355	-0.371	-0.083	0.042	0.037	-0.658
msterdamCVistaHamburgo	-0.012	0.046	0.041	0.002	-0.054	-0.701	0.030
msterdam2mesesHamburgo	0.001	0.020	0.026	0.021	-0.004	0.673	-0.037
ParAsHamburgo	0.588	0.010	-0.059	-0.022	-0.013	-0.018	0.006
msterdam1mesParAs	-0.106	-0.058	-0.061	-0.061	0.003	0.027	0.003

Fuente: Gretl, base de datos periodo 1805-1811