



UNIVERSITAT
ROVIRA i VIRGILI

Universitat Rovira i Virgili

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Química

unir LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET

Universidad Internacional de La Rioja

Escuela Superior de Ingeniería y tecnología

Máster Interuniversitario en Mecánica de Fluidos
Computacional

Desarrollo De Una Herramienta Numérica Para Simular Un Proceso De Inyección De Agua En Yacimientos De Aceite

Trabajo fin de estudio presentado por: Luis Armando García Navarrete
Tipo de trabajo: Trabajo de investigación
Director/a: Antonio José Rivas Chacón
Fecha: 19 de Julio de 2023

Agradecimientos

A la URV, por haberme permitido ser parte de esta institución y por haber contribuido no solo a mi formación académica, sino a mi formación personal. A mi tutor, Antonio José Rivas Chacón, por el apoyo, guía, paciencia, consejos y conocimientos que me brindó durante todo el tiempo que duró este trabajo. A toda mi familia, principalmente a mis padres por haberme brindado de los recursos necesarios para completar mi educación, por su apoyo incondicional y por todo el amor que me han dado. Por último, a Mary, por la dicha de haberte conocido y por todo el tiempo que hemos disfrutado juntos. Siempre serás la “pimienta” de mi vida.

Resumen

Este trabajo presenta una herramienta capaz de simular y analizar diferentes escenarios de explotación para yacimientos de aceite saturado utilizando la inyección de agua como método de recuperación secundaria. Específicamente, permite visualizar los campos transitorios de presión y saturación de cada una de las fases, para todos los pasos de tiempo definidos, además de la producción de aceite al final de dicho periodo, todo mediante unidades de campo. El beneficio principal de la inyección de agua es el incremento o mantenimiento de presión dentro del yacimiento y el barrido de aceite dentro del medio poroso. Lo anterior se traduce en una mejora del factor de recobro en comparación al caso de recuperación primaria (depresionamiento natural).

El software considera flujo bifásico ligeramente compresible (dos líquidos) sin intercambio de masa entre las fases, todo a temperatura constante. Se utiliza el método IMPES (Implicit Pressure-Explicit Saturation) para obtener los campos de interés. Para representar correctamente la movilidad de las fases, el software actualiza la permeabilidad relativa en cada paso de tiempo mediante las tablas de saturación vs permeabilidad relativa, previamente dadas por el usuario. Solamente se considera flujo en dos dimensiones sin efectos gravitacionales, así como un mallado ortogonal estructurado. La herramienta permite establecer hasta 5 pozos, productores o inyectores, pudiendo fijar constante ya sea el gasto o la presión de fondo fluyente. Para incorporar dichos pozos se utiliza el modelo de Peaceman, el cual considera flujo radial estacionario en las cercanías del pozo. Los resultados se compararon con la solución analítica de Buckley-Leverett en el caso de una dimensión. Para el caso en dos dimensiones se comparó con el software MRST.

Palabras clave: aceite, simulación de yacimientos, flujo bifásico, IMPES, inyección de agua

Abstract

This work presents a tool capable of simulating and analyzing different exploitation scenarios for saturated oil reservoirs using water injection as a secondary recovery method. Specifically, it allows visualizing the transient pressure and saturation fields of each of the phases, for all the defined time steps, in addition to the oil production at the end of said period, all through field units. The main benefit of water injection is the increase or maintenance of pressure within the reservoir and the scavenging of oil within the porous medium. This translates into an improvement in the recovery factor compared to the case of primary recovery (natural depression).

The software considers slightly compressible two-phase flow (two liquids) without mass exchange between the phases, all at constant temperature. The IMPES (Implicit Pressure-Explicit Saturation) method is used to obtain the fields of interest. To correctly represent the mobility of the phases, the software updates the relative permeability at each time step using the saturation vs. relative permeability tables, previously given by the user. Only flow in two dimensions without gravitational effects is considered, as well as a structured orthogonal mesh. The tool allows to establish up to 5 wells, producers or injectors, being able to set constant either the rate or the flowing bottom pressure. To incorporate these wells, the Peaceman model is used, which considers stationary radial flow in the vicinity of the well. The results were compared with the de Buckley-Leverett analytical solution in the case of one dimension. For the case in two dimensions, it was compared with the software MRST.

Keywords: oil, reservoir simulation, two-phase flow, IMPES, water flooding

Nomenclatura

Variables

$A_{x,y}$	Área transversal al flujo	$P_{o,w}$	Presión de la fase
$B_{o,w}$	Factor de volumen de la fase	P_c	Presión capilar
C	Compresibilidad	P_{ref}	Presión de referencia
E_D	Eficiencia de desplazamiento microscópica	P_{wf}	Presión de fondo
E_A	Eficiencia de desplazamiento areal	r_{eq}	Radio equivalente
E_V	Eficiencia de desplazamiento vertical	r_{ref}	Radio de referencia
$f_{o,w}$	Fracción de la fase	r_w	Radio del pozo
f_p	función dependiente de la presión	$q_{o,w}$	Gasto volumétrico
f_s	función dependiente de la saturación	q_t	Gasto volumétrico total
$G_{x,y}$	Factor geométrico de la transmisibilidad	s	Daño del pozo
G_w	Factor geométrico del pozo	$S_{o,w}$	Saturación de la fase
g	Aceleración gravitacional	S_{or}	Saturación de aceite residual
H	Carga hidráulica	S_{wi}	Saturación de agua inicial
h	Espesor	S_{wir}	Saturación de agua irreducible
$J_{o,w}$	índice de productividad para la fase	S_{wf}	Saturación de agua en el frente de desplazamiento
i_w	Gasto de agua inyectada	T	Transmisibilidad
K	Conductividad hidráulica	t	Tiempo
$k_{x,y}$	Permeabilidad intrínseca del medio poroso	u	Velocidad de Darcy o descarga específica
k_H	Permeabilidad en el plano horizontal	V_b	Volumen de roca del bloque
k_r	Permeabilidad relativa de la fase	v	Volumen
L	Longitud	x	Distancia en la dirección "x"
M	Relación de movilidad	y	Distancia en la dirección "y"

m_a	Masa acumulada	α_c	Constante de conversión
m_i	Masa que entra	β_c	Constante de conversión
m_o	Masa que sale	ρ	Densidad del fluido
m_s	Masa inyectada/producida	$\lambda_{o,w}$	Movilidad de la fase
\dot{m}	Gasto másico	$\mu_{o,w}$	Viscosidad de la fase
N_p		v	Velocidad
N_s		\emptyset	Porosidad

Subíndices y superíndices

x	Dirección x
y	Dirección y
o	Fase agua
w	Fase aceite
<i>c. s.</i>	Medido a condiciones estándar
n	Nivel de tiempo actual
$n + 1$	Nivel de tiempo futuro

Índice de contenidos

Agradecimientos.....	i
Resumen.....	ii
Abstract.....	iii
Nomenclatura.....	iv
Índice de contenidos.....	vi
Índice de figuras.....	viii
Índice de tablas.....	x
1. Introducción.....	1
1.1. Antecedentes.....	4
1.2. Objetivos.....	4
1.3. Metodología.....	5
2. Marco teórico.....	6
2.1. Ingeniería de yacimientos.....	6
2.2. Ecuación de Darcy.....	8
2.3. Eficiencia de desplazamiento.....	11
2.4. Teoría de Buckley-Leverett.....	16
3. Modelo matemático.....	25
3.1. Leyes de conservación.....	25
4. Implementación numérica.....	29
4.1. Método IMPES.....	29
4.2. Discretización.....	32
4.3. Modelo de pozo.....	36
4.4. Esquema upstream.....	40
5. Resultados.....	43
5.1. Validación: solución analítica.....	43

5.2.	Validación: MRST.....	48
5.3.	Medio heterogéneo	55
6.	Conclusiones	57
7.	Bibliografía	58
Anexo A.	Código MRST	61

Índice de figuras

FIGURA 1. PREDICCIÓN EN EL CONSUMO GLOBAL DE ENERGÍA POR TIPO DE FUENTE, REPORTADO EN CUATRILLONES DE BTU. MODIFICADO DE [1].....	1
FIGURA 2. DESCUBRIMIENTO ANUAL (RESERVAS 2P) Y PRODUCCIÓN ANUAL DE PETRÓLEO, EN Gb (GIGABARRILES Y MILLONES DE BARRILES RESPECTIVAMENTE). MODIFICADO DE [2].....	2
FIGURA 3. ESQUEMATIZACIÓN DE UN PROCESO DE INYECCIÓN DE AGUA.....	2
FIGURA 4. CAMPO DE PRESIÓN DE UN YACIMIENTO, RESULTADO DE LA DISCRETIZACIÓN Y SIMULACIÓN DE ESTE. TOMADO DE [3]	3
FIGURA 5. PASOS PARA EL DESARROLLO DE UN SIMULADOR NUMÉRICO DE YACIMIENTOS. TOMADO DE [4]	3
FIGURA 6. FACTOR DE RECOBRO DE ACEITE DE UN YACIMIENTO DE ACEITE, DEPENDIENDO DEL MÉTODO DE RECUPERACIÓN APLICADO. MODIFICADO DE [8].....	6
FIGURA 7. FACTOR DE RECOBRO VS PRESIÓN PARA LOS DIFERENTES MECANISMOS PRIMARIOS. MODIFICADO DE [10].....	7
FIGURA 8. MÉTODOS DE RECUPERACIÓN Y SU IMPLEMENTACIÓN EN LA VIDA DE UN YACIMIENTO. MODIFICADO DE [11]	8
FIGURA 9. ESQUEMATIZACIÓN DEL EXPERIMENTO REALIZADO POR DARCY. TOMADO DE [3]	9
FIGURA 10. CURVAS DE PERMEABILIDAD RELATIVA. MODIFICADO DE [13].....	11
FIGURA 11. EFICIENCIA DE DESPLAZAMIENTO. MODIFICADO DE [15].....	12
FIGURA 12. EFICIENCIA DE DESPLAZAMIENTO AREAL.	13
FIGURA 13. INFLUENCIA DE LA RELACIÓN DE MOVILIDAD EN LA EFICIENCIA DE DESPLAZAMIENTO AREAL PARA: A) $M>1$ Y B) $M<1$. MODIFICADO DE [16]	14
FIGURA 14. ZONAS CARACTERÍSTICAS DE INVASIÓN DEBIDO AL FRENTE DE DESPLAZAMIENTO. MODIFICADO DE [17]	14
FIGURA 15. DIFERENTES PATRONES DE POZOS. MODIFICADO DE [18].....	15
FIGURA 16. EFICIENCIA DE BARRIDO AREAL PARA DIFERENTES RELACIONES DE MOVILIDAD. MODIFICADO DE [19].....	16
FIGURA 17. FLUJO FRACCIONAL PARA DOS FASES Y DOS POZOS.	17
FIGURA 18. FLUJO FRACCIONAL VS SATURACIÓN DE AGUA. TOMADO DE [21].....	19
FIGURA 19. EFECTO DE LA VISCOSIDAD DEL ACEITE EN LA CURVA DE FLUJO FRACCIONAL. MODIFICADO DE [22].....	19
FIGURA 20. FLUJO DE AGUA A TRAVÉS DE UN ELEMENTO DIFERENCIAL LINEAL. TOMADO DE [17]	20
FIGURA 21. $dfwdSw$ vs Sw . MODIFICADO DE [21]	22
FIGURA 22. RECTA TANGENTE Y UBICACIÓN DE SWF. MODIFICADO DE [24].....	22
FIGURA 23. ZONA ESTABILIZADA Y NO ESTABILIZADA. MODIFICADO DE [17]	23
FIGURA 24. BALANCE DE MASA APLICADO A UN VOLUMEN DE CONTROL. TOMADO DE [4]	25
FIGURA 25. DISCRETIZACIÓN ESPACIAL.	32
FIGURA 26. DISCRETIZACIÓN EXPLÍCITA. TOMADO DE [4]	33
FIGURA 27. DISCRETIZACIÓN IMPLÍCITA. TOMADO DE [4].....	34
FIGURA 28. NOMENCLATURA USADA PARA NOMBRAR LAS CARAS.....	36
FIGURA 29. CONCEPTO DE RADIO EQUIVALENTE. TOMADO DE [4].....	37
FIGURA 30. EFECTO DE DAÑO. TOMADO DE [4]	38

FIGURA 31. EJEMPLO DEL FUNCIONAMIENTO DEL MÉTODO UPSTREAM.....	42
FIGURA 32. CURVA DE PERMEABILIDAD RELATIVA VS SATURACIÓN DE AGUA DEL EJEMPLO 1.	44
FIGURA 33. CURVA DE FLUJO FRACCIONAL VS SATURACIÓN DE AGUA.	45
FIGURA 34. K_{RO}/K_{RW} VS S_W	45
FIGURA 35. PERFILES DE SATURACIÓN DE AGUA PARA DIFERENTES TIEMPOS, SOLUCIÓN ANALÍTICA.	46
FIGURA 36. PERFILES DE SATURACIÓN DE AGUA EN DIFERENTES TIEMPOS, SIMULACIÓN NUMÉRICA (20 NODOS).	47
FIGURA 37. PERFILES DE SATURACIÓN DE AGUA PARA DIFERENTES TIEMPOS, SIMULACIÓN NUMÉRICA (150 NODOS).	47
FIGURA 38. SIMPLIFICACIÓN DEL ARREGLO DE 5 POZOS.	48
FIGURA 39. CURVA DE PERMEABILIDAD RELATIVA VS SATURACIÓN DE AGUA DEL EJEMPLO 2.	50
FIGURA 40. PERFILES DE SATURACIÓN PARA DIFERENTES TIEMPOS (SOLUCIÓN MRST)	50
FIGURA 41. PERFILES DE SATURACIÓN PARA DIFERENTES TIEMPOS (SOLUCIÓN URV)	51
FIGURA 42. GASTO DE AGUA PARA EL POZO PRODUCTOR.	51
FIGURA 43. GASTO DE ACEITE PARA EL POZO PRODUCTOR.	52
FIGURA 44. PRESIÓN DE FONDO PARA EL POZO INYECTOR.	52
FIGURA 45. PERFILES DE SATURACIÓN PARA DIFERENTES TIEMPOS. $\mu_o=20$ [cP] (SOLUCIÓN MRST).....	53
FIGURA 46. PERFILES DE SATURACIÓN PARA DIFERENTES TIEMPOS. $\mu_o=20$ [cP] (SOLUCIÓN URV)	53
FIGURA 47. GASTO DEL POZO VS TIEMPO, PARA LOS DIFERENTES VALORES USADOS DE COMPRESIBILIDAD.	55
FIGURA 48. MAPA DE PERMEABILIDAD PARA EL EJEMPLO 4 ($K_X=K_Y$).	55
FIGURA 49. PERFILES DE SATURACIÓN PARA DIFERENTES TIEMPOS, EJEMPLO 4.	56

Índice de tablas

TABLA 1. RECUPERACIÓN DE ACEITE DEPENDIENDO DEL TIPO DE MECANISMO PRIMARIO. MODIFICADO DE [9].....	7
TABLA 2. EFICIENCIA DE DESPLAZAMIENTO AREAL PARA DIFERENTES PATRONES DE INYECCIÓN (RELACION DE MOVILIDAD IGUAL A UNO). MODIFICADO DE [20].....	16
TABLA 3. MODIFICACIÓN DE LOS TÉRMINOS DEPENDIENDO DEL TIPO DE POZO.	40
TABLA 4. LINEALIDAD DE LOS DIFERENTES TÉRMINOS QUE CONFORMAN LA TRANSMISIBILIDAD.	40
TABLA 5. DATOS GENERALES DEL EJEMPLO 1.....	43
TABLA 6. DATOS DE PERMEABILIDAD RELATIVA PARA EL EJEMPLO 1.	43
TABLA 7. VALORES DE FLUJO FRACCIONAL PARA CADA SATURACIÓN.	44
TABLA 8. FLUJO FRACCIÓN AL Y SATURACIÓN DE AGUA EN EL FRENTE DE AVANCE.....	44
TABLA 9. DERIVADA DEL FLUJO FRACCIONAL CON RESPECTO A LA SATURACIÓN DE AGUA	46
TABLA 10. DISTANCIA RECORRIDA POR EL FRENTE DE AVANCE DESDE EL POZO INYECTOR, EN PIES.....	46
TABLA 11. COMPARACIÓN DE LA DISTANCIA RECORRIDA POR EL FRENTE DE AGUA PARA DIFERENTES TIEMPOS (20 NODOS).	48
TABLA 12. COMPARACIÓN DE LA DISTANCIA RECORRIDA POR EL FRENTE DE AGUA PARA DIFERENTES TIEMPOS (150 NODOS).	48
TABLA 13. DATOS DE LOS POZOS USADOS EN EL EJEMPLO 2.	48
TABLA 14. DATOS GENERALES DEL EJEMPLO 2.	49
TABLA 15. DATOS DE PERMEABILIDAD RELATIVA USADOS EN EL MODELO DE COREY.	49
TABLA 16. COMPARACIÓN DEL TIEMPO DE ARRIBO ENTRE LOS DOS SIMULADORES.	54
TABLA 17. DATOS DEL POZO USADO EN EL EJEMPLO 3.....	54
TABLA 18. VALORES DE COMPRESIBILIDAD USADOS EN EL EJEMPLO 3, [1/PSI]	54
TABLA 19. DATOS DE LOS POZOS USADOS EN EL EJEMPLO 4.	56

1. Introducción

Como resultado del crecimiento económico y poblacional que se vive en todo el mundo, el consumo mundial de energía seguirá aumentando hasta el año 2050. Se prevé que el uso global de energía aumentara casi un 50% en los próximos 30 años (en comparación con 2020). Para satisfacer dicha demanda, la producción de petróleo y gas natural continuará aumentando hasta el año 2050. De hecho, el petróleo y otros combustibles líquidos seguirán siendo la fuente de energía más grande del mundo en 2050, aunque el uso de energías renovables crecerá casi al mismo nivel (Figura 1).

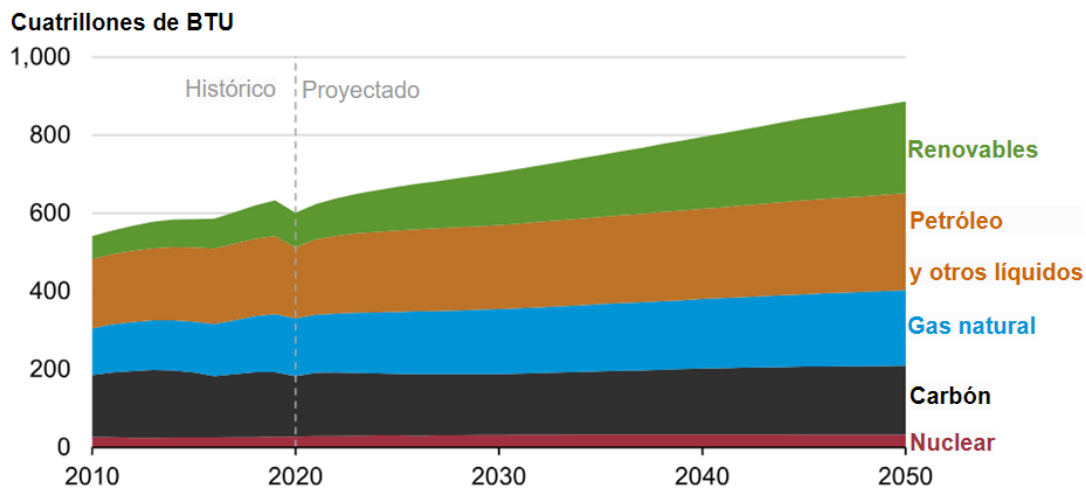


Figura 1. Predicción en el consumo global de energía por tipo de fuente, reportado en cuatrillones de BTU.

Modificado de [1]

En la actualidad, la mayoría de los hidrocarburos se encuentran en yacimientos maduros cuya etapa de producción se encuentra en la etapa final, o bien, en yacimientos considerados no convencionales, donde la extracción mediante mecanismos primarios no es viable y se requiere algún método de recuperación secundaria o mejorada para lograr una extracción que sea económicamente favorable. La Figura 2 muestra la tendencia de los descubrimientos anuales de campos de petróleo en todo el mundo y la producción de petróleo. Los campos más grandes se descubrieron en los EE. UU. y Medio Oriente desde finales de los años treinta hasta los sesenta. Los descubrimientos en todo el mundo alcanzaron su punto máximo en 1964. La tasa de descubrimiento de petróleo disminuyó significativamente en las últimas tres décadas. En la mayoría de los años desde 1984, la tasa de descubrimiento ha sido menor que la producción.

Uno de los métodos más utilizados en todo el mundo para aumentar la producción de aceite en campos maduros es la inyección de agua. Este método ha probado ser útil en muchos yacimientos y se ha utilizado durante muchos años. El objetivo de la inyección de agua es el desplazamiento del aceite y el mantenimiento de presión dentro del yacimiento, lo que a su vez produce un incremento en el factor de recobro al final del proyecto. La Figura 3 muestra esquemáticamente un proceso de inyección de agua.

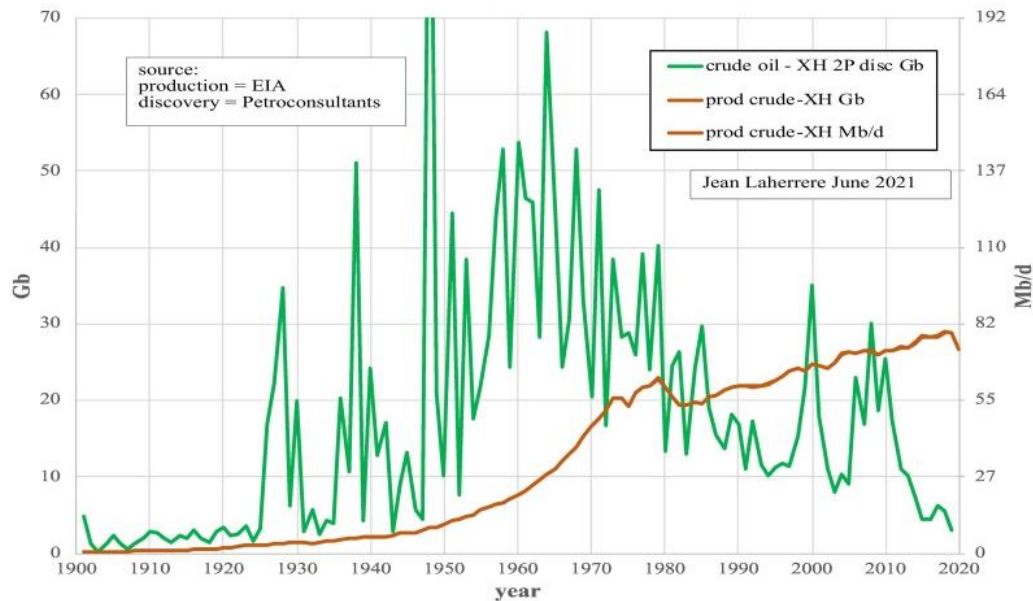


Figura 2. Descubrimiento anual (reservas 2P) y producción anual de petróleo, en Gb (Gigabarriles y Millones de barriles respectivamente). Modificado de [2]

La eficiencia de este método depende de diferentes factores como la geometría del yacimiento, del tipo de roca y de sus características (como permeabilidad y porosidad), de la saturación inicial de los fluidos presentes en el yacimiento y de sus propiedades, así como el gasto de inyección o la presión de operación. La ubicación de los pozos resulta crítica para poder maximizar el desplazamiento y la recuperación del aceite. Por otra parte, la inyección de agua debe de hacerse con cuidado para evitar problemas de conificación en los pozos productores. Aunque la inyección de agua es un método de bajo costo comparado con otros métodos, el manejo del agua tiene un costo asociado por lo que, desde un punto de vista económico, el tiempo de inyección debe de ser finito.

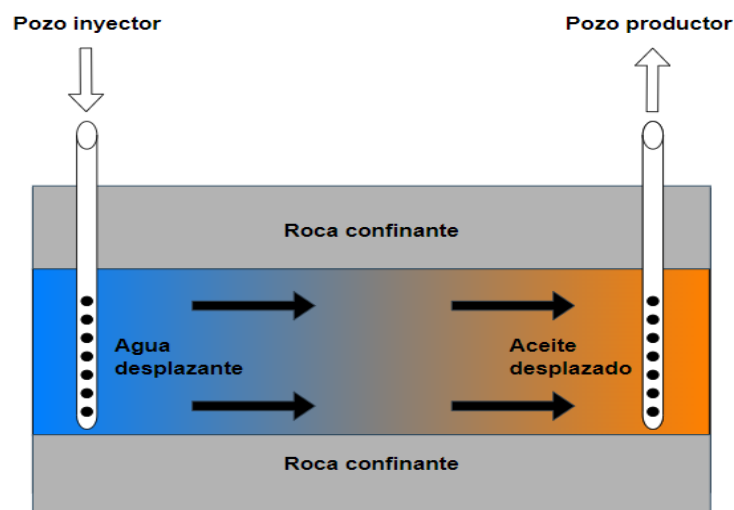


Figura 3. Esquematización de un proceso de inyección de agua.

El objetivo final de cualquier método de recuperación que haya sido seleccionado para explotar un yacimiento (incluida la inyección de agua) es el de recuperar la mayor cantidad de aceite del subsuelo, al mismo tiempo que se minimizan

los riesgos asociados y el costo económico. Para esto, se debe poder predecir con la mayor certeza posible el comportamiento del sistema bajo diferentes condiciones de operación. Existen diferentes técnicas para poder predecir la respuesta que tendrá un yacimiento sujeto a un método de explotación específico. Algunas de las técnicas usadas en la industria son: métodos experimentales (como análisis de núcleos), soluciones analíticas del modelo matemático planteado, análisis estadísticos, curvas de declinación, etc. Aunque cada una de estas técnicas proporcionan respuestas únicas para entender el problema en cuestión, utilizan diferentes suposiciones para simplificar el sistema estudiado, las cuales pueden diferir enormemente de la realidad. Como respuesta a lo anterior, la simulación numérica es una técnica que permite analizar sistemas complejos aplicando el menor número posible de suposiciones. Por ejemplo, se pueden tomar en cuenta las variaciones espaciales de la roca (heterogeneidades) así como suponer diferentes mecanismos de flujo.

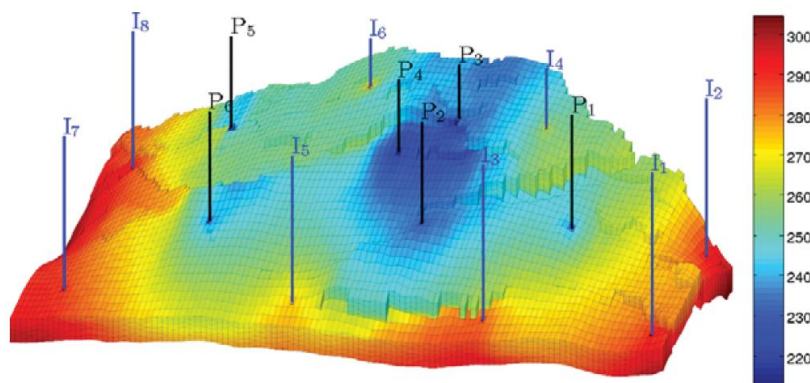


Figura 4. Campo de presión de un yacimiento, resultado de la discretización y simulación de este. Tomado de [3]

La simulación de yacimientos utiliza métodos numéricos para resolver el sistema de ecuaciones que mejor representa el sistema, obteniendo así la evolución temporal de las variables de mayor interés en la explotación de un yacimiento petrolero (como presión, saturación y gastos) en cada uno de los subdominios conseguidos a partir de la discretización espacial del dominio (ver Figura 4). Sin embargo, aunque esta es la técnica más completa para predecir el comportamiento de un yacimiento, también es la que más datos necesita para su correcta implementación, por lo que requiere cuidado y revisión constante en cada una de las etapas que involucran una corrida de simulación. La Figura 5 muestra los pasos necesarios para el desarrollo de un simulador numérico:

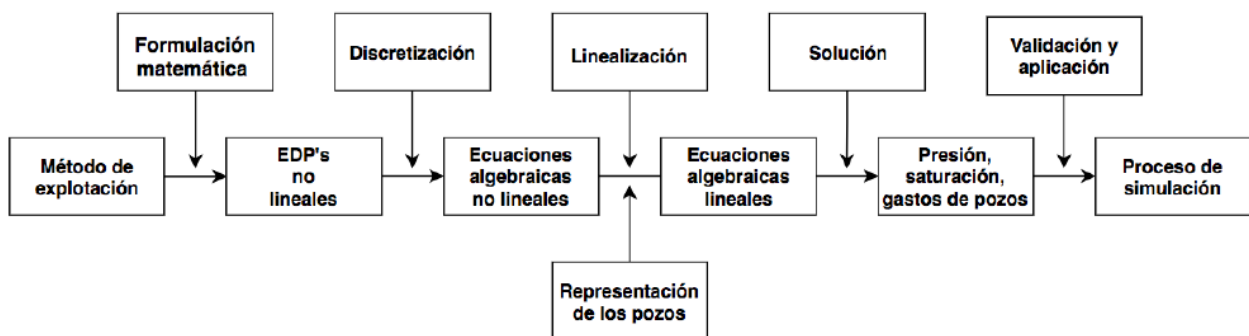


Figura 5. Pasos para el desarrollo de un simulador numérico de yacimientos. Tomado de [4]

1.1. Antecedentes

La explotación de un yacimiento petrolero involucra el movimiento de diferentes fluidos en diferentes fases a través de un medio poroso. Los hidrocarburos suelen estar tanto en fase líquida como fase gaseosa, además del agua connata que siempre está presente. Este comportamiento viene representado por una ecuación diferencial parcial no lineal, cuya solución analítica solo se puede obtener para ciertos casos simplificados. En el caso multifásico, se tiene una ecuación para cada una de las fases, que a su vez se relacionan entre sí mediante la saturación de cada fase. La no linealidad de las ecuaciones viene dada por la dependencia de las propiedades del fluido con el estado termodinámico en que se encuentra. En 1949, Buckley y Leverett [5] desarrollaron la teoría para el flujo de dos fases en medios porosos, llamada teoría del desplazamiento frontal. El modelo planteado describe un proceso de desplazamiento inmisible, como el desplazamiento de aceite y agua, en un medio unidimensional. De su trabajo se derivan dos ecuaciones principales: la ecuación de flujo fraccional y la ecuación de avance frontal. Estas ecuaciones pueden derivarse de las ecuaciones de conservación de masa del flujo de dos fases y sirven para predecir la velocidad del frente de desplazamiento provocado por el agua inyectada.

La solución del sistema de ecuaciones resultante de la discretización espacial y temporal puede hacerse de diferentes formas. Blair [6] fue el primero en proponer el método totalmente implícito, donde las variables principales se plantean en el tiempo futuro y se resuelven de forma simultánea. Para resolver el sistema de ecuaciones se utiliza el método iterativo de Newton-Raphson. Aunque este método presenta una estabilidad incondicional, tiene el inconveniente de que se requieren conocer las derivadas con respecto a cada una de las variables de interés. Como alternativa al método totalmente implícito, Coats [7] propuso el método IMPES (Implicit Pressure, Explicit Saturation), en el cual se calcula la presión a futuro usando una formulación implícita para posteriormente calcular la saturación de las fases de forma explícita, usando las presiones recién calculadas. Este método funciona bien siempre y cuando los cambios de saturación sean pequeños.

1.2. Objetivos

Desarrollar una aplicación que permita simular un proceso de inyección de agua como método de recuperación secundaria durante la etapa de producción de un yacimiento de aceite pesado.

Objetivos específicos:

- Comparar la solución en el caso de inyección de agua con la solución teórica (ecuación de Buckley-Leverett). Además, comparar el frente de desplazamiento obtenido usando la herramienta MRST.
- Comparar los factores de recuperación resultantes usando la inyección de agua contra el caso sin inyección.

1.3. METODOLOGIA

El modelo matemático planteado en este trabajo considerara flujo bifásico en medio poroso (aceite-agua, sin fase gaseosa), así como un proceso inmiscible sin evaporación de las fases. No hay liberación de gas ni transferencia de masa entre las fases. Se considera Flujo ligeramente compresible. Se busca simular a nivel macroscópico, es decir, a nivel de yacimiento (en comparación con un nivel microscópico, a nivel de poro). Se analizará en 2D solamente, sin efectos gravitatorios ni presión capilar. El modelo matemático se construye a partir de la ecuación de continuidad (balance de masa), la cual se combina con la ecuación empírica de Darcy (conservación de momento) para obtener una ecuación de flujo para cada una de las fases. El uso de la ecuación de Darcy supone que el flujo se presenta exclusivamente en régimen laminar. La discretización espacial y temporal de las ecuaciones se realiza mediante la técnica de diferencias finitas. Se utiliza el método IMPES para la obtención de los campos de presión y de saturación. Para el promediado de las propiedades en las interfases se utiliza el método "Upstream" de dos puntos. La representación de los pozos se realiza mediante el modelo de Peaceman. El código se desarrolló usando el lenguaje Matlab y la aplicación mediante la herramienta AppDesigner. El programa fue diseñado con fines académicos. La validación de los resultados se hizo con la solución analítica de Buckley-Leverett y mediante el software MRST.

2. Marco teórico

En este capítulo se muestran los objetivos y fundamentos de la ingeniería de yacimientos petroleros, así como los principales métodos utilizados para su explotación y las etapas en las que se puede dividir la vida productiva de un yacimiento. Se presenta también la teoría básica del desplazamiento del agua y del aceite, además de los factores más importantes que se deben de considerar previo a la aplicación de un proyecto de inyección de agua.

2.1. Ingeniería de yacimientos

El objetivo final de la ingeniería de yacimientos petroleros es la de recuperar, de forma optima, la mayor cantidad posible del hidrocarburo que se encuentra en el subsuelo. Para obtener un beneficio óptimo de un campo, se deben identificar y caracterizar los yacimientos individuales que lo constituyen así como estimar la cantidad de crudo recuperable (reservas) de cada yacimiento. Otros elementos clave incluyen evitar la perforación innecesaria de pozos, iniciar los controles operativos en el momento adecuado y poder predecir su comportamiento bajo diferentes escenarios de producción. La explotación de un yacimiento suele incluir tres etapas:

- Recuperación primaria
- Recuperación secundaria
- Recuperación terciaria o mejorada.

Además, se pueden utilizar sistemas artificiales de producción para incrementar la producción en los pozos, como lo son los sistemas de bombeo mecánico. La **Figura 6** muestra el factor de recobro para los diferentes métodos de recuperación. El factor de recuperación promedio de los yacimientos de petróleo en producción actuales en el mundo es de aproximadamente 35-40%

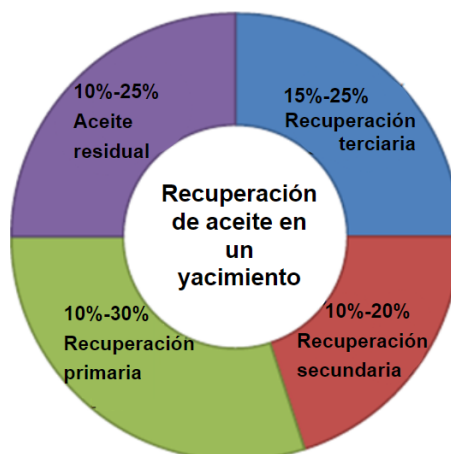


Figura 6. Factor de recobro de aceite de un yacimiento de aceite, dependiendo del método de recuperación aplicado. Modificado de [8]

Durante la recuperación primaria, el aceite es producido por la energía natural del yacimiento. En esta etapa se recupera solo una pequeña porción del aceite original, por lo que el factor de recobro suele estar entre el 10% y 30%.

Se han identificado 5 mecanismos principales: expansión de la roca y fluido, empuje por gas disuelto, expansión de capa de gas, intrusión de agua y drenaje gravitacional. La **Tabla 1** muestra los mecanismos primarios junto al porcentaje de aceite recuperado.

Tabla 1. Recuperación de aceite dependiendo del tipo de mecanismo primario. Modificado de [9]

Mecanismo de desplazamiento	Porcentaje de aceite recuperado [%]
Expansión de roca y fluido	3-7
Empuje por gas disuelto	5-30
Expansión de capa de gas	20-40
Intrusión de agua	35-75
Drenaje gravitacional	<80
Combinación de mecanismos	30-60

En la recuperación secundaria se agrega energía al sistema para poder extender la vida productiva del campo mediante la inyección de gas inmiscible y/o agua (pero no se cambian las propiedades fisicoquímicas del sistema roca-fluido). Esta energía adicional se traduce en el mantenimiento de presión dentro del yacimiento.

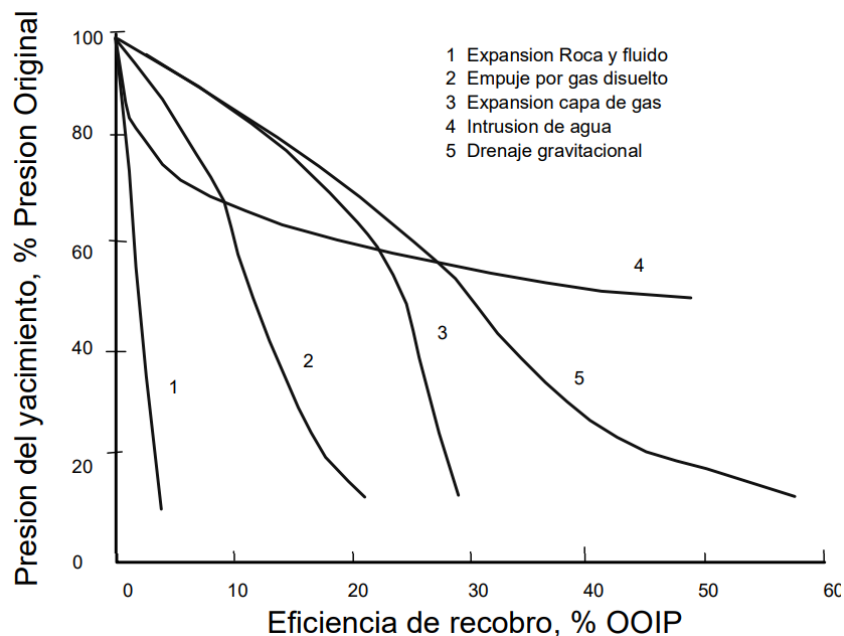


Figura 7. Factor de recobro vs presión para los diferentes mecanismos primarios. Modificado de [10]

Por lo general, la implementación de estos métodos sigue después de la etapa de recuperación primaria, pero puede aplicarse de forma conjunta desde un inicio. Mediante la recuperación secundaria, se incrementa entre 10% y 20% el factor de recobro. En la recuperación terciaria o mejorada, además de la energía adicional que podamos agregar al sistema, las propiedades de la roca o del fluido se ven alteradas (como la mojabilidad o la viscosidad) utilizando métodos térmicos o químicos. Los métodos terciarios se aplican a yacimientos maduros cuya declinación de la producción ya ha comenzado, y se aplican después de los métodos de recuperación secundaria o inmediatamente después de la etapa de recuperación primaria.

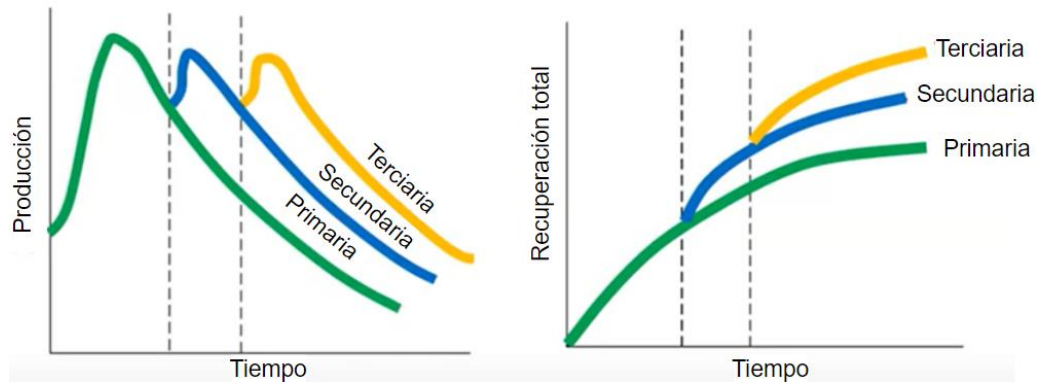


Figura 8. Métodos de recuperación y su implementación en la vida de un yacimiento. Modificado de [11]

La mayoría de los yacimientos alrededor del mundo se consideran maduros ya que se encuentran en una clara declinación de su presión (y, por ende, de su producción). Lo anterior significa que la mayoría de los yacimientos son candidatos para la aplicación de algún método de recuperación secundaria o terciaria. Aunque la inyección de agua es el método secundario más común, debido a su fácil implementación y a su bajo costo, existen casos donde su aplicación no es necesaria o poco efectiva. Por ejemplo, cuando existe un acuífero asociado al yacimiento, el cual proporciona el empuje de agua natural necesario para el mantenimiento de presión por lo que es posible que la inyección de agua adicional ya no sea necesaria. Sin embargo, podría ayudar en ciertos aspectos, por ejemplo, para distribuir el volumen de agua a diferentes áreas del yacimiento y obtener un área más uniforme. Se debe de identificar el mecanismo primario que existe en el yacimiento para poder definir la viabilidad de un proyecto de inyección. Los yacimientos con capa o casquete de gas no suelen ser una opción, ya que el mecanismo de empuje primario suele ser suficiente. La inyección de agua puede ayudar en el mantenimiento de presión, pero se requeriría un gran volumen de agua. Además, si la comunicación vertical entre el casquete de gas y la zona de aceite se considera pobre debido a una baja permeabilidad vertical, la inyección de agua puede ser considerada para este caso en particular. Los yacimientos cuyo mecanismo principal es el gas disuelto suelen ser idóneos para este método debido a que su factor de recobro será bajo. Finalmente, se tiene que considerar el costo de operación referente al manejo de agua producida, la cual cada vez será mayor con el tiempo, por lo que este aspecto puede influir en establecer el tiempo límite de inyección.

2.2. Ecuación de Darcy

El flujo de fluidos a través de medio poroso no presenta un carácter diferente del flujo libre: está gobernado por las mismas leyes. Sin embargo, la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes para un sistema poroso con aplicaciones

prácticas requeriría una descripción matemática muy detallada de la forma de los poros. Una primera descripción de este tipo de flujo fue establecida por el ingeniero francés Henry Philibert Gaspard Darcy [12], quien realizó experimentos con un aparato como el que se muestra en la **Figura 9**. Darcy diseñó un tanque relleno de arena en posición vertical, en el cual se inyectó agua en la parte superior y se dejó de fluir por la parte inferior. Una vez que los gastos de entrada y de salida son iguales, la carga hidráulica en cada posición fue medida mediante manómetros de mercurio. Conforme el agua atraviesa el medio poroso, experimentará una pérdida de energía. Darcy repitió el experimento para diferentes gastos y midió la diferencia (o pérdida) entre las cargas hidráulicas en la parte superior e inferior.

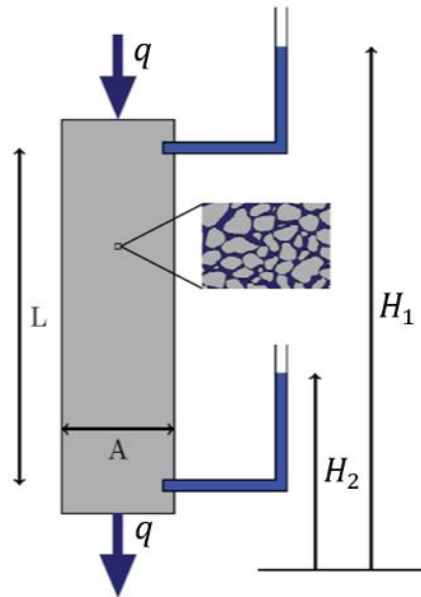


Figura 9. Esquemmatización del experimento realizado por Darcy. Tomado de [3]

A partir de este experimento, Darcy formuló la ley que lleva su nombre y que se puede escribir como:

$$\frac{q}{A} = u = K \frac{H_1 - H_2}{L} \quad (1)$$

Donde:

- q =Gasto volumétrico.
- A =Área transversal al flujo.
- u =Velocidad de Darcy o descarga específica.
- H =Carga hidráulica= $\frac{P}{\rho g} + z$
- ρ =Densidad del fluido.
- g =Aceleración gravitacional.
- z =Elevación
- P =Presión.
- K =Conductividad hidráulica

La conductividad hidráulica no se puede utilizar para flujo de fluidos diferentes del agua. Una propiedad del medio equivalente a K , válida para diferentes fluidos, es la permeabilidad intrínseca k . Ambas se relacionan entre si mediante la ecuación:

$$K = k \frac{\rho g}{\mu} \quad (2)$$

Donde

- k = Permeabilidad intrínseca.
- μ = Viscosidad del fluido.

Por lo que podemos definir la ley de Darcy para cualquier fluido como:

$$\vec{u} = -\frac{k}{\mu} (\vec{\nabla}p - \rho g \vec{\nabla}z) \quad (3)$$

Para flujo multifásico, se hace uso de la permeabilidad relativa de cada fase, definida como la relación entre la permeabilidad efectiva de la fase con la permeabilidad absoluta. Es una medida adimensional que nos indica la movilidad de cada fase.

$$k_{ro} = \frac{k_o}{k} \quad (4)$$

$$k_{rw} = \frac{k_w}{k} \quad (5)$$

Donde:

- Subíndices o = *aceite*, w = *agua*.
- k_o, k_w = Permeabilidades efectivas
- k_{ro}, k_{rw} = Permeabilidades relativas

Es importante notar que las permeabilidades relativas son una función no lineal de la saturación de agua (S_w), por lo que la suma de estas funciones, evaluadas en un mismo punto, no necesariamente es igual a uno (ver [Figura 10](#)). La permeabilidad relativa tiene que ser determinada experimental o empíricamente, y depende de la fase mojante y de la saturación. La saturación de agua varía desde la saturación de agua inicial (S_{wi}) hasta un valor máximo en la cual el aceite remanente ya no puede ser desplazado. A esta saturación se le denomina saturación de aceite residual (S_{or}). Introduciendo la definición de permeabilidad relativa y la constante β_c para obtener unidades de campo, la ley de Darcy para flujo multifásico (sin termino gravitacional) en una dimensión puede escribirse como:

$$\vec{u} = -\beta_c \frac{k_r k_x}{\mu_l} (\vec{\nabla}p) \quad (6)$$

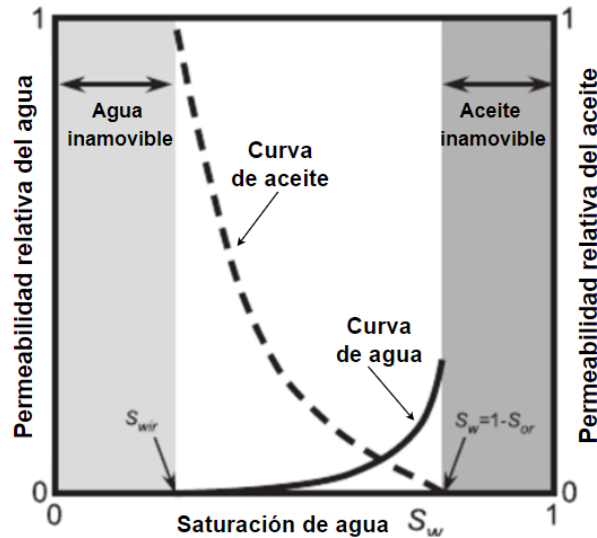


Figura 10. Curvas de permeabilidad relativa. Modificado de [13]

Donde:

- u_x =Velocidad superficial en la dirección x, (bbl/día-ft²).
- k_r =Permeabilidad relativa de la fase.
- k_x =Permeabilidad del medio poroso en la dirección x, (D).
- μ_l =Viscosidad del fluido (cP).
- $\vec{\nabla}p$ =Gradiente de presión en la dirección x, (psi).
- β_c =Constante de conversión, igual a 1.127 (bbl-cP/día-ft-D-psi).

La extensión de la ley de Darcy a flujo multifásico suele atribuirse a Muskat y Wuckoff [14]. Es importante notar que la ley de Darcy no puede aplicarse a velocidades elevadas. Sin embargo, raramente se alcanzan número de Reynolds elevados en el subsuelo y por consiguiente se puede aplicar la ley de Darcy. Estos límites pueden sobrepasarse, por ejemplo, cerca de pozos de extracción.

2.3. Eficiencia de desplazamiento

Algunos factores que afectan la eficiencia de un proyecto de inyección de agua:

- Mecanismo de desplazamiento principal.
- Distribución de las fases y sus propiedades.
- Litología de la roca y posibles estructuras (como fallas).
- Factor de recobro esperado.
- Disponibilidad y calidad del agua de inyección.
- Costo de mantenimiento y operacional para la inyección.
- Costo de perforación de nuevos pozos (o conversión de productores).

Una alta saturación de aceite es el criterio principal para una operación de inyección de agua exitosa. Entre más alta sea la saturación de aceite al comienzo de la inyección, más alta será la movilidad del aceite, lo que a su vez incrementa la eficiencia de recobro. El requerimiento principal para un proyecto de inyección es que exista suficiente aceite en el yacimiento después de la recuperación primaria, no solo por el volumen de aceite que se quiere recuperar, sino también por las consideraciones de permeabilidad relativa. La inyección de agua se usa para manipular la permeabilidad relativa del aceite, cuando se trata de yacimientos mojados por agua, al invocar el proceso de drenado o al mover la fase no mojante (se reduce la saturación de aceite residual). Otro factor para tomar en cuenta es que el corte de agua aumenta conforme se incrementa la inyección de agua. Al final del proceso, el aceite presenta una permeabilidad relativa muy baja lo que significa una mayor producción del fluido desplazante (agua). La recuperación de aceite puede expresarse mediante el producto entre las eficiencias de desplazamiento microscópicas y macroscópicas:

$$F.R. = \frac{N_p}{N_s} = E_D E_A E_V \quad (7)$$

Donde:

- $F.R.$ = Factor de recobro
- N_p = Aceite producido acumulado
- N_s = Aceite inicial in situ
- E_D = Eficiencia de desplazamiento microscópica
- E_A = Eficiencia de desplazamiento areal
- E_V = Eficiencia de desplazamiento vertical

La eficiencia de desplazamiento microscópica se define como la fracción de volumen de aceite que ha sido recuperado de la zona barrida para un determinado tiempo.

$$E_D = \frac{\text{Volumen de aceite al comienzo de la inyección} - \text{Volumen de aceite remanente}}{\text{Volumen de aceite al comienzo de la inyección}}$$

Las fuerzas capilares y viscosas influyen en la eficiencia de desplazamiento microscópico.

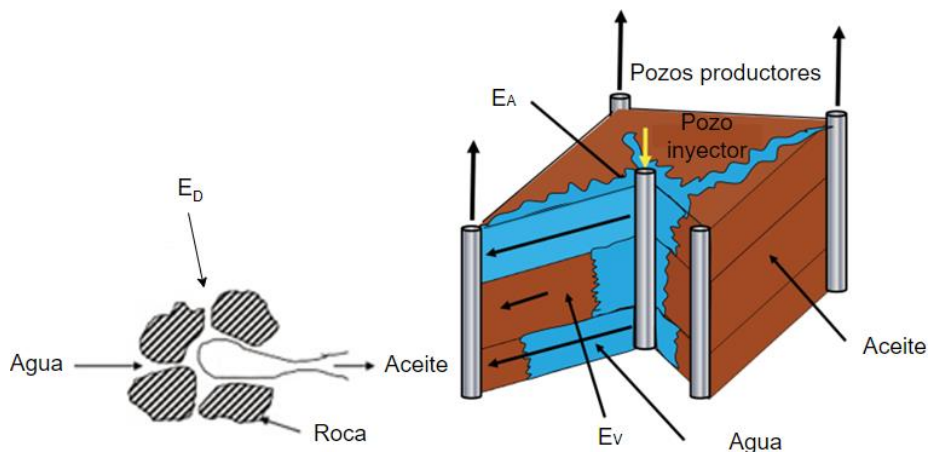


Figura 11. Eficiencia de desplazamiento. Modificado de [15]

El producto de $E_A E_V$ se conoce como eficiencia macroscópica o volumétrica y es igual al producto de la eficiencia areal por la eficiencia vertical. La eficiencia areal se define como la fracción del área total que está en contacto con el fluido desplazante como se muestra en la (ver [Figura 12](#)).

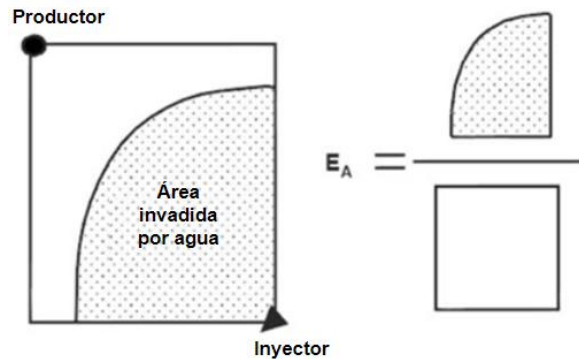


Figura 12. Eficiencia de desplazamiento areal.

Esta eficiencia se incrementa continuamente con la inyección desde cero hasta el momento que ocurre la irrupción de agua en el pozo productor, momento en el que sigue creciendo, pero a un ritmo mucho menor. Esta eficiencia depende de varios factores, principalmente:

- Relación de movilidad.
- Patrón de inyección.
- Agua total inyectada.
- Permeabilidad de la roca.

La eficiencia areal aumenta al reducir la movilidad del fluido inyectado (agua) o al aumentar la movilidad del aceite. La movilidad es una medida de la habilidad del fluido de moverse en el espacio poroso, y se define como la relación de la permeabilidad efectiva de la fase y su viscosidad:

$$\lambda_o = \frac{k_{ro}}{\mu_o} \quad (8)$$

$$\lambda_w = \frac{k_{rw}}{\mu_w} \quad (9)$$

La tasa de movilidad se define como la movilidad del fluido desplazante, detrás del frente, dividido por la movilidad del fluido desplazado, adelante del frente. De esta forma, la tasa de movilidad del agua con respecto al aceite es:

$$M = \frac{\lambda_w}{\lambda_o} = \frac{(k_{rw}/\mu_w)}{(k_{ro}/\mu_o)} \left[\frac{\text{fase desplazante}}{\text{fase desplazada}} \right] \quad (10)$$

Entre más baja sea la tasa de movilidad, más alta será la tasa de recobro. Una baja movilidad conlleva una buena eficiencia de barrido. Entre las diferentes propiedades del fluido, la viscosidad del aceite se considera la propiedad más importante en un proyecto de inyección de agua ya que determina la relación de movilidad y, por ende, la eficiencia de

desplazamiento. La inyección de agua se ve beneficiada por una baja viscosidad del aceite. La alta viscosidad del aceite en comparación con el agua contribuye a un desplazamiento desfavorable o no ideal. Este contraste de viscosidades suele ser un problema. Las tasas de movilidad que resultan promueven la aparición de un efecto conocido como “fingering” por parte del agua a través del aceite, lo que reduce la eficiencia en la recuperación de aceite (ver [Figura 13](#)).

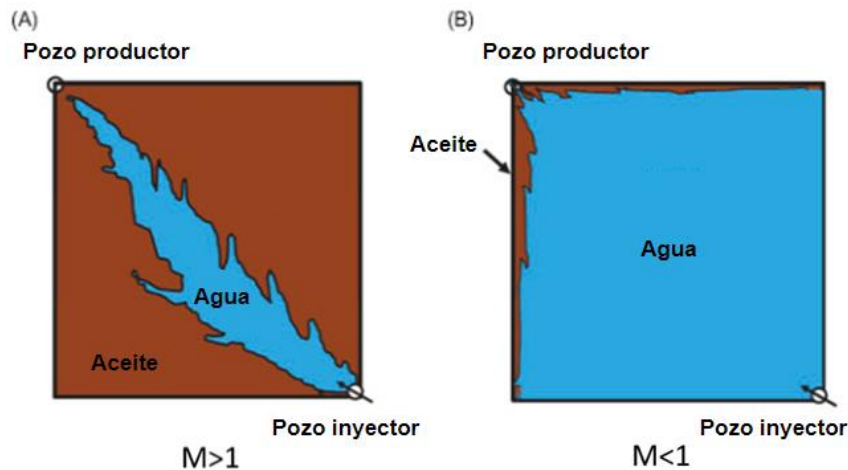


Figura 13. Influencia de la relación de movilidad en la eficiencia de desplazamiento areal para: A) $M > 1$ y B) $M < 1$.

Modificado de [16]

El proceso de desplazamiento es un proceso transitorio, en el cual existe un cambio de la saturación del fluido con el tiempo, lo que a su vez provoca cambios en las permeabilidades relativas y cambios en la tasa de movilidad. El desplazamiento de agua formará dos zonas características: un banco de agua que se caracteriza por tener una saturación promedio, la cual se mantendrá constante hasta el momento de la irrupción, y la zona no invadida, la cual tendrá una saturación de agua igual a la que se tenía al momento de comenzar con la inyección de agua. La [Figura 14](#) muestra estas dos zonas.

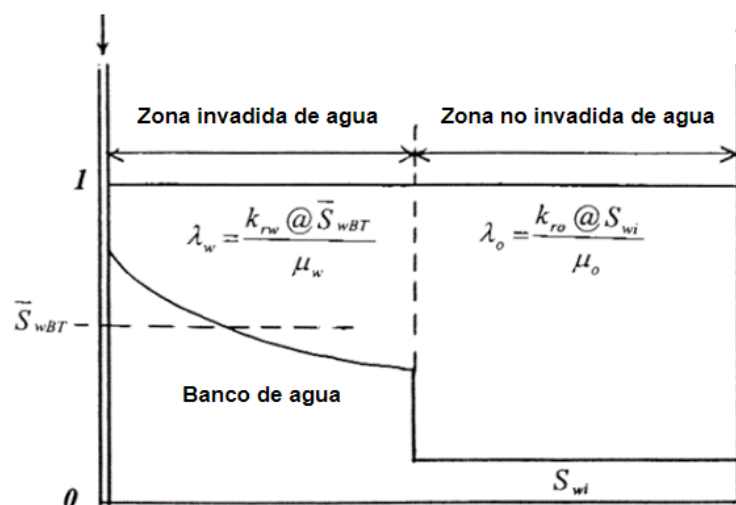


Figura 14. Zonas características de invasión debido al frente de desplazamiento. Modificado de [17]

La permeabilidad del medio poroso (reflejado en la permeabilidad relativa de la fase) es otra variable que afecta la movilidad, por lo que la litología tiene una gran influencia en la eficiencia de un proyecto de inyección de agua. La uniformidad del yacimiento es uno de los criterios físicos clave para una inyección exitosa. Si la formación contiene un estrato con permeabilidad muy alta, se puede producir una canalización rápida del agua y una gran cantidad de aceite puede ser sobrepasada (quedar atrapada). Si no se evita este problema, la cantidad de agua producida puede ser muy alta como para hacer la operación rentable. La continuidad areal de la zona de intereses es también un requisito para una inyección exitosa. Se requiere que exista una conexión entre los inyectores y los productores. Es necesario identificar discontinuidades en el estrato de interés para poder definir el espaciamiento de los pozos y el patrón correcto.

La selección de un patrón adecuado proporcionara la mayor área de contacto posible del fluido inyectado dentro del yacimiento. Para obtener dicho patrón, se pueden perforar nuevos pozos o convertir los pozos productos existentes en pozos inyectores. Existen tres tipos de patrones:

- Irregulares: muchos yacimientos pequeños cuentan con un límite económico y, por ende, con un numero de pozos limitados con los que no se puede obtener un patrón optimo. Las heterogeneidades y el fallamiento en la roca también pueden llevar a un patrón irregular
- Regulares: son el tipo más usado,
- Periféricos: los pozos inyectores se ubican en las fronteras del yacimiento y los productores en el centro. Este patrón conlleva un factor recobro máximo con una producción mínima de agua, sin embargo, se requiere que exista una continuidad de la permeabilidad desde los inyectores hasta los productores.

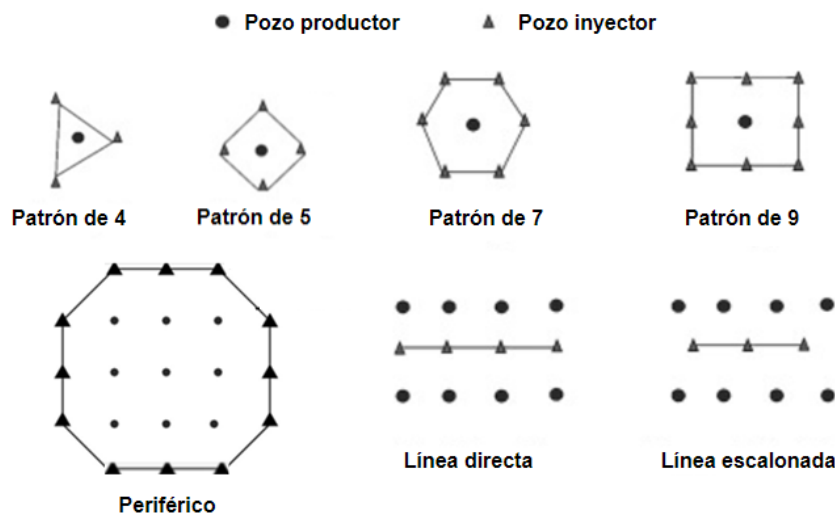


Figura 15. Diferentes patrones de pozos. Modificado de [18]

Craig [19] mostro la influencia de la movilidad con la eficiencia de barrido areal para un patrón de 5 pozos, mediante experimentos en laboratorio. Utilizo dos tasas de movilidad para el estudio (1.43 y 0.4). Los resultados obtenidos se muestran en la [Figura 16](#).

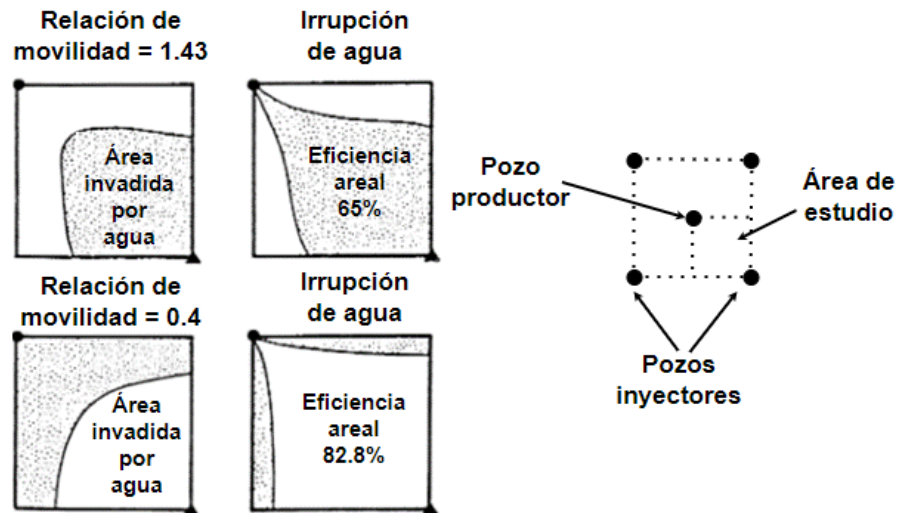


Figura 16. Eficiencia de barrido areal para diferentes relaciones de movilidad. Modificado de [19]

Al comienzo de la inyección, el frente de avance toma una forma cilíndrica alrededor del pozo inyector y luego se deforma al momento de alcanzar el pozo productor. Los resultados muestran que con una tasa de movilidad igual a 1.43 solo el 65% del área total ha sido barrida, en comparación con el 82.8% cuando la tasa de movilidad es igual a 0.4. A continuación se muestra la eficiencia para diferentes patrones (tasa de movilidad=1). En la [Tabla 2](#) se muestra la eficiencia areal para diferentes patrones de pozos. Nótese que la eficiencia de barrido para el caso de nueve puntos es mayor que todos los otros casos, debido a que se utilizan más inyectores para conducir el petróleo hacia el productor.

Tabla 2. Eficiencia de desplazamiento areal para diferentes patrones de inyección (relacion de movilidad igual a uno). Modificado de [20]

PATRÓN DE INYECCIÓN	EFICIENCIA DE DESPLAZAMIENTO AREAL
Línea directa	56 %
Línea escalonada	78 %
Patrón de 5 pozos	72 %
Patrón de 9 pozos	80 %

2.4. Teoría de Buckley-Leverett

En 1941, Buckley-Leverett desarrollaron la ecuación de flujo fraccional [5], la cual se usa para determinar el corte de agua en cualquier punto del yacimiento, suponiendo que se conoce la saturación de agua en ese punto. El corte de agua o flujo fraccional de agua, bajo la suposición de fluidos inmiscibles, se define como el gasto de agua dividido entre el gasto total.

$$f_w = \frac{q_w}{q_t} = \frac{q_w}{q_w + q_o} \quad (11)$$

Donde:

- $f_w \left[\frac{bbl}{bbl} \right]$ =Fracción de agua
- q_t =Gasto total
- q_w =Gasto de agua
- q_o =Gasto de aceite

Nótese que los cortes de aceite y agua se relacionan entre mediante:

$$f_w + f_o = 1 \quad (12)$$

Considerando flujo estacionario, medio homogéneo y lineal, la ecuación de Darcy para cada fase resulta:

$$q_o = -\frac{k_o A}{\mu_o} \left[\frac{\partial P_o}{\partial x} \right] \quad (13)$$

$$q_w = -\frac{k_w A}{\mu_w} \left[\frac{\partial P_w}{\partial x} \right] \quad (14)$$

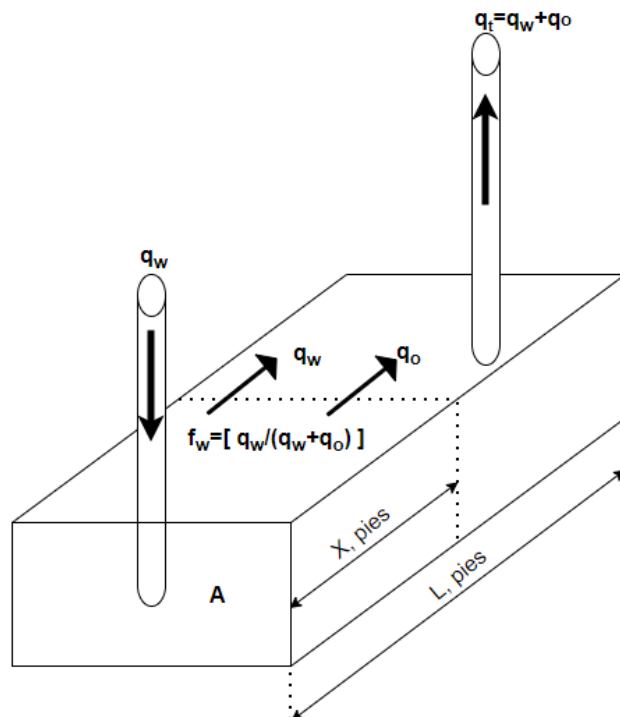


Figura 17. Flujo fraccional para dos fases y dos pozos.

Sustituyendo y acomodando las ecuaciones de arriba:

$$\frac{q_o \mu_o}{k_o A} = - \frac{\partial P_o}{\partial x} \quad (15)$$

$$\frac{q_w \mu_w}{k_w A} = - \frac{\partial P_w}{\partial x} \quad (16)$$

Restando ambas ecuaciones tenemos:

$$\frac{q_w \mu_w}{k_w A} - \frac{q_o \mu_o}{k_o A} = \frac{\partial P_o}{\partial x} - \frac{\partial P_w}{\partial x} \quad (17)$$

A partir de la definición de presión capilar, podemos derivar respecto a la distancia "x":

$$\frac{\partial P_c}{\partial x} = \frac{\partial P_o}{\partial x} - \frac{\partial P_w}{\partial x} \quad (18)$$

Combinando ambas ecuaciones:

$$\frac{q_w \mu_w}{k_w A} - \frac{q_o \mu_o}{k_o A} = \frac{\partial P_c}{\partial x} \quad (19)$$

A partir de la definición de flujo fraccional se tiene que:

$$f_o = (1 - f_w) = \frac{q_o}{q_t} \longrightarrow q_t (1 - f_w) = q_o \quad (20)$$

Reemplazando q_o y q_w en la ecuación (19) tenemos:

$$f_w = \frac{1 + \frac{k_o A}{\mu_o q_t} \left[\frac{\partial P_c}{\partial x} \right]}{1 + \frac{k_o \mu_w}{k_w \mu_o}} \quad (21)$$

Podemos usar las definiciones de permeabilidad relativa, notando que $k_{ro}/k_{rw} = k_o/k_w$. Además, el gasto total del fluido es igual al gasto de inyección de agua, i_w . Tomando en cuenta estas dos consideraciones, tenemos que:

$$f_w = \frac{1 + \frac{k k_{ro} A}{\mu_o i_w} \left[\frac{\partial P_c}{\partial x} \right]}{1 + \frac{k_{ro} \mu_w}{k_{rw} \mu_o}} \quad (22)$$

Si ignoramos el termino de presión capilar (los gradientes de presión capilar son pequeños), nos queda:

$$f_w = \frac{1}{1 + \frac{k_{ro} \mu_w}{k_{rw} \mu_o}} \quad (23)$$

La **Figura 18** muestra la forma típica de la gráfica de corte de agua vs la saturación de agua, la cual tiene forma de “s”.

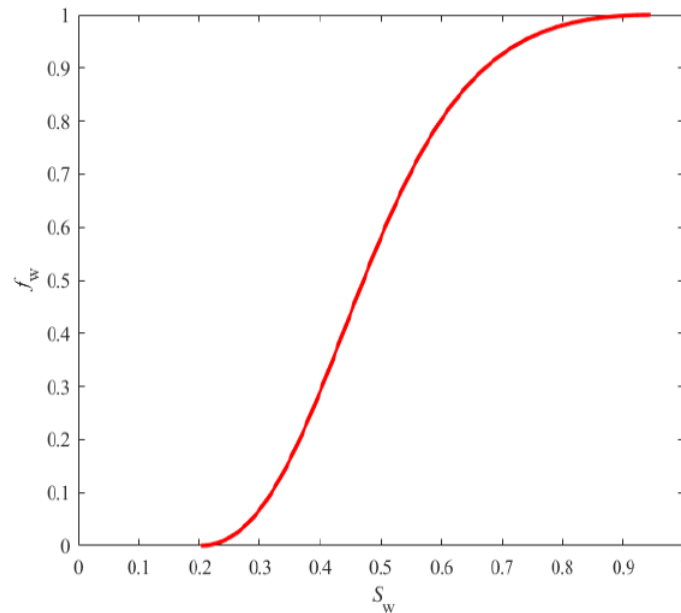


Figura 18. Flujo fraccional vs saturación de agua. Tomado de [21]

De la gráfica se observa que un incremento de f_w en cualquier punto del yacimiento provocara una caída proporcional de f_o . En general, cualquier efecto que provoque que la curva se mueva hacia arriba resultara en un desplazamiento menos eficiente. Un aumento en la viscosidad del aceite provocara un desplazamiento hacia arriba de la curva de flujo fraccional (ver **Figura 19**). Un aumento de la viscosidad del agua resultara en una reducción de f_w , provocando que la curva se mueva hacia abajo

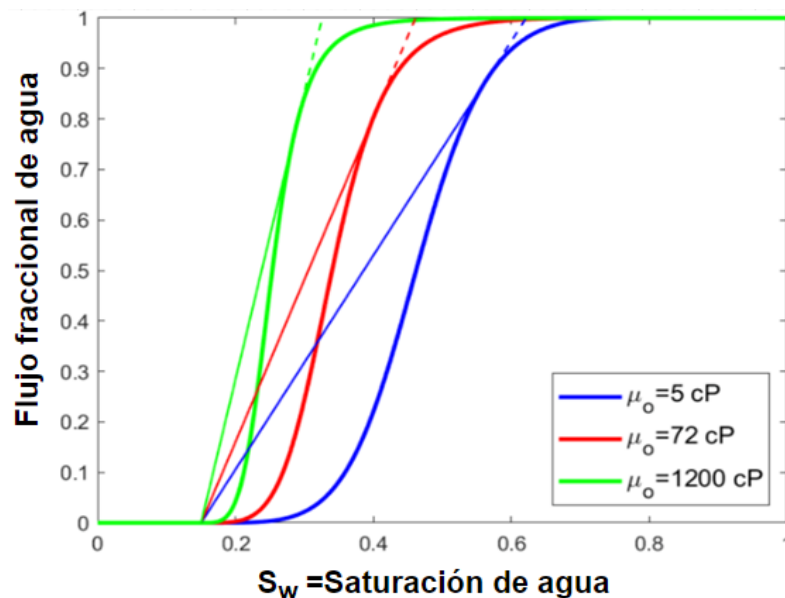


Figura 19. Efecto de la viscosidad del aceite en la curva de flujo fraccional. Modificado de [22]

Para conocer el corte de agua, necesitamos calcular primero la saturación de agua en ese punto. Para esto, utilizamos la ecuación de avance frontal, la cual se usa para calcular el perfil de S_w en el yacimiento para cualquier tiempo. Esta ecuación se deriva mediante un balance de masa para el fluido desplazante (agua) que fluye en un elemento de roca. Considere un elemento de roca como se muestra en la **Figura 20**, donde el volumen de fluido que entra menos el volumen de fluido que sale es igual al cambio en el volumen del fluido.

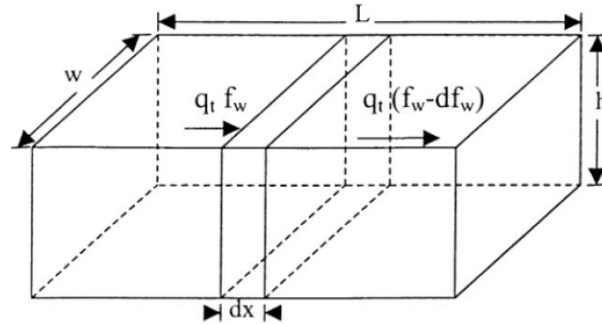


Figura 20. Flujo de agua a través de un elemento diferencial lineal. Tomado de [17]

Durante un periodo de tiempo dt , el volumen de agua que entra al elemento de roca es:

$$\text{Volumen de agua que entra} = q_t f_w dt$$

El volumen de agua que sale tiene un corte de agua menor:

$$\text{Volumen de agua que sale} = q_t (f_w - df_w) dt$$

Restando las dos ecuaciones nos da el volumen de agua que se acumula dentro del elemento de roca:

$$q_t f_w dt - q_t (f_w - df_w) dt = q_t df_w dt = A\phi(dx)dS_w \quad (24)$$

Separando variables y usando la conversión para unidades de campo se obtiene:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{S_w} = (v)_{S_w} = \frac{5.615q_t}{A\phi} \left(\frac{df_w}{dS_w}\right)_{S_w} \quad (25)$$

Donde:

- $(v)_{S_w}$ = Velocidad para una S_w específica, [ft/ día]
- x = Distancia, [ft]
- A = Área transversal al flujo, [ft²]
- q_t = Gasto total (agua+aceite), [bbl/día],
- $\left(\frac{df_w}{dS_w}\right)_{S_w}$ = Derivada (o pendiente) de f_w con respecto S_w , evaluada en S_w
- dt = Diferencial de tiempo

La ecuación (25) indica que la velocidad para cualquier saturación de agua es directamente proporcional al valor de la pendiente en la curva de f_w vs S_w evaluada en S_w . Nótese que el flujo total, q_t , es esencialmente el mismo que el gasto de inyección, i_w :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{S_w} = (v)_{S_w} = \frac{5.615i_w}{A\phi} \left(\frac{df_w}{dS_w}\right)_{S_w} \quad (26)$$

Donde:

- i_w =Gasto de agua inyectada, [bbl/día]

Para calcular la distancia total que viajara una saturación de agua especifica en un tiempo t , debemos integrar la ecuación (26):

$$\int_0^X dx = (v)_{S_w} = \frac{5.615i_w}{A\phi} \left(\frac{df_w}{dS_w}\right)_{S_w} \int_0^t dt \quad (27)$$

$$(X)_{S_w} = \frac{5.615i_w t}{A\phi} \left(\frac{df_w}{dS_w}\right)_{S_w} \quad (28)$$

Donde:

- t =Tiempo, [días]
- $(X)_{S_w}$ =Distancia desde el pozo inyector para una saturación de agua dada, [ft]

También podemos conocer el tiempo aproximado que tarda el frente de desplazamiento en llegar al pozo productor, al despejar el tiempo de la ecuación (28):

$$t = \frac{(X)_{S_w} * A * \phi}{5.615 * i_w * \left(\frac{df_w}{dS_w}\right)_{S_w}} \quad (29)$$

De esta forma, el perfil de saturación de agua para cualquier tiempo dado puede obtenerse simplemente con determinar $\left(\frac{df_w}{dS_w}\right)_{S_w}$ y calculando la posición de S_w a partir de la ecuación (28). La Figura 21 muestra la forma típica de la derivada de flujo fraccional con respecto a la saturación de agua, en función de la saturación de agua.

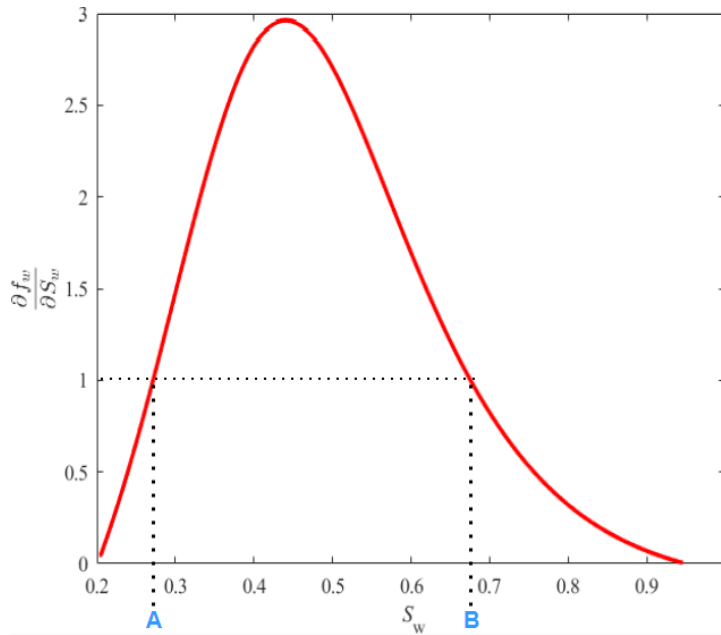


Figura 21. $\frac{df_w}{dS_w}$ vs S_w . Modificado de [21]

Sin embargo, la **Figura 21** indica que existen dos saturaciones de agua diferentes, para las cuales sus derivadas son idénticas (puntos A y B). Esto implica que ambas saturaciones de agua pueden coexistir al mismo tiempo, lo cual es físicamente imposible. Buckley y Leverett se dieron cuenta de esto, y reportaron que este problema surge de eliminar el término del gradiente de presión capilar en la ecuación de flujo fraccional. Welge [23] demostró que una recta tangente a la curva de flujo fraccional, dibujada desde la saturación de agua inicial (S_{wi}) tendrá un punto de tangencia igual a la saturación de agua en el frente de desplazamiento (S_{wf}). La recta tangente debe comenzar en la saturación de agua inicial incluso si esa saturación es mayor que la saturación de agua irreducible (S_{wir}) (ver **Figura 22**).

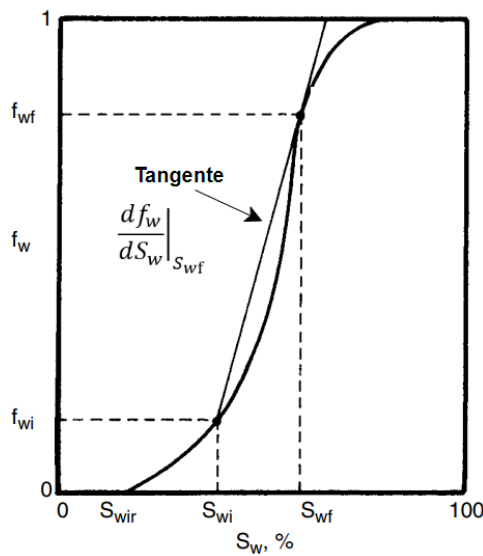


Figura 22. Recta tangente y ubicación de S_{wf} . Modificado de [24]

Terwilliger [25] noto que dentro del rango de $S_{wi} < S_w < S_{wf}$, todas las saturaciones se mueven con la misma velocidad, en función del tiempo y la distancia, ya que todas las saturaciones dentro de este rango tienen la misma pendiente. También podemos suponer que todas las saturaciones en este rango viajan a la misma distancia para un tiempo particular. Terwilliger nombro la zona inundada dentro de este rango de saturación como la zona estabilizada, definida como el intervalo de saturaciones donde todos los puntos de saturación viajan a la misma velocidad (ver [Figura 23](#)). El intervalo de saturaciones entre S_{wf} y $(1-S_{or})$ se denomina zona no estabilizada, y es en este intervalo que la velocidad de la saturación de agua es variable. Además, se crea un frente de desplazamiento distintivo, donde la saturación de agua incrementa abruptamente desde S_{wi} hasta S_{wf} .

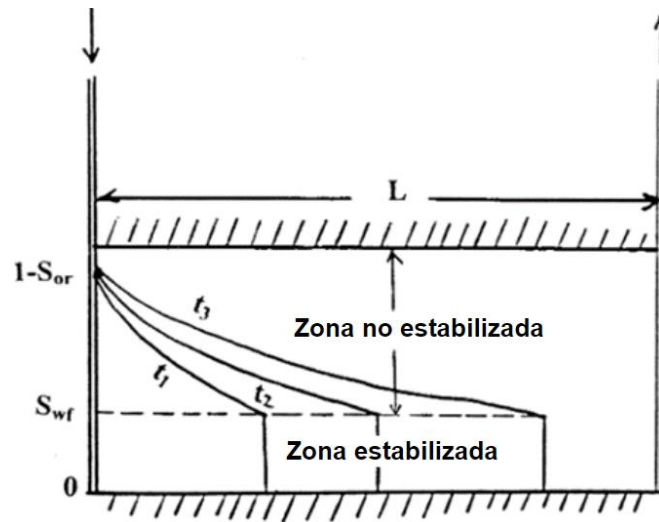


Figura 23. Zona estabilizada y no estabilizada. Modificado de [17]

Una alternativa para calcular la derivada del flujo fraccional se obtiene al notar que la relación de permeabilidades relativas puede expresarse de la siguiente forma:

$$\frac{k_{ro}}{k_{rw}} = ae^{bS_w} \quad (30)$$

Si sustituimos la ecuación (30) en la ecuación (23), se tiene que:

$$f_w = \frac{1}{1 + \left(\frac{\mu_w}{\mu_o}\right) ae^{bS_w}} \quad (31)$$

Al derivar la ecuación (31) con respecto a S_w se obtiene una expresión para la derivada deseada:

$$\left(\frac{df_w}{dS_w}\right)_{S_w} = \frac{-\left(\frac{\mu_w}{\mu_o}\right) abe^{bS_w}}{\left[1 + \left(\frac{\mu_w}{\mu_o}\right) ae^{bS_w}\right]^2} \quad (32)$$

En resumen, el perfil de saturación de agua para cualquier tiempo t , puede construirse con los siguientes pasos:

1. Construir la curva de flujo fraccional ignorando el termino de presión capilar.
2. Dibujar una línea tangente a la curva a partir de S_{wf} .
3. Identificar el punto de tangencia y leer los valores de S_{wf} y de f_{wf}
4. Calcular grafica o analíticamente la derivada del flujo fraccional con respecto a la saturación para diferentes valores de saturación de agua, $(df_w/dS_w)_{S_w}$ (la cual es igual a la pendiente de la recta tangente).
5. Calcular el tiempo aproximado de ruptura, conocidos los valores de S_{wf} y de su derivada, $(df_w/dS_w)_{S_w}$
6. Seleccionar diferentes valores de saturación de agua (que sean mayores a S_{wf}) y un primer tiempo inferior al tiempo de ruptura. Calcular la distancia entre el pozo inyector y el frente de agua, para los valores de saturación seleccionados.
7. Graficar los perfiles de saturación para el tiempo 1 con los resultados obtenidos en el paso 6.
8. Seleccionar un nuevo tiempo y repetir los pasos del 6 al 7 para generar una familia de perfiles de saturación.

3. Modelo matemático

En este capítulo se muestra el modelo matemático usado para representar el sistema físico de interés. Como se verá a continuación, las ecuaciones resultantes del modelo son ecuaciones diferenciales parciales. Para lograr lo anterior, se utilizan las siguientes ecuaciones:

- Ecuación de continuidad
- Ecuación de transporte (Ley de Darcy)
- Relaciones auxiliares.

Para flujo multifásico se generará un sistema de ecuaciones diferenciales parciales con una ecuación para cada fase. Estas ecuaciones se relacionan entre si mediante la fórmula de saturación. De esta forma, tendremos múltiples ecuaciones con múltiples incógnitas para cada fase. Podemos representar el set de ecuaciones de diferentes formas, dependiendo que variables se resuelven directamente en las ecuaciones de flujo (es decir, variables principales) y cuales se resuelven mediante las ecuaciones auxiliares (como secundarias). En flujo en yacimientos petroleros incluye de dos a tres fases (aceite, agua y gas). Si no hay transferencia de masa entre las fases, cada componente del fluido estará contenido dentro de su fase. En este trabajo, se considera solamente aceite y agua, sin la presencia de gas.

3.1. Leyes de conservación

Para formular el modelo matemático, primero se desarrolla la ecuación de continuidad, la cual surge de aplicar un balance de masa sobre un volumen de control como se muestra en la **Figura 24**.

$$(m_i) - (m_o) \pm (m_s) = (m_a)$$

Donde:

- m_i =Masa que entra
- m_o =Masa que sale
- m_s =Masa inyectada/producida
- m_a =Masa acumulada

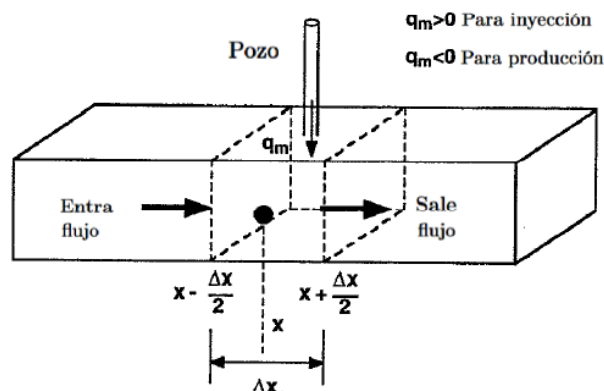


Figura 24. Balance de masa aplicado a un volumen de control. Tomado de [4]

Dejando la masa en términos de la densidad, ρ , y del gasto volumétrico, q , se tiene que:

$$[(\rho q)_i - (\rho q)_o] \Delta t \pm (m_s) = (\rho V_b \phi S)_{t+\Delta t} - (\rho V_b \phi S)_t \quad (33)$$

Donde V_b es el volumen de roca en el bloque. Reemplazando el gasto volumétrico por $q = u_x A_x = u_x \Delta y \Delta z$, además de dividir toda la ecuación por V_b y por el tiempo, Δt , queda que:

$$\frac{[(\rho u_x)_i - (\rho u_x)_o]}{\Delta x} \pm \frac{(m_s)}{\Delta t V_b} = \frac{(\rho \phi S)_{t+\Delta t} - (\rho \phi S)_t}{\Delta t} \quad (34)$$

Así mismo, los términos de entrada y salida son evaluados en las caras del bloque, situadas en $x - \frac{\Delta x}{2}$ y en $x + \frac{\Delta x}{2}$ respectivamente. Haciendo que los límites tienda a cero (en términos de derivadas), se obtiene:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) \pm \frac{(m_s)}{\Delta t V_b} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi S) \quad (35)$$

Multiplicando por V_b :

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x A_x) \Delta x \pm \frac{(m_s)}{\Delta t} = V_b \frac{\partial}{\partial t}[\rho \phi S] \quad (36)$$

Donde

- x =Distancia, (ft)
- ρ =Densidad del fluido, (lbm/ft³)
- u_x =Velocidad superficial en la dirección x , (bbl/día-ft²)
- A_x =Área transversal al flujo en la dirección x , (ft²)
- m_s =Masa inyectada/producida, (lbm)
- Δt =Paso de tiempo, (días)
- V_b =Volumen de roca del bloque, (ft³)
- ϕ =Porosidad del medio
- S =Saturación

El termino $m_s/\Delta t$ representa gasto másico. En la práctica, lo que se reporta es el gasto volumétrico arrojado por el pozo:

$$\frac{m_s}{\Delta t} = \dot{m} = q\rho \quad (37)$$

Usando gasto volumétrico en lugar de gasto másico para el termino fuente, la ecuacion (36) queda:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x A_x) \Delta x \pm q\rho = V_b \frac{\partial}{\partial t}[\rho \phi S] \quad (38)$$

Sin embargo, el gasto del pozo se suele medir y reportar a nivel de superficie, es decir, a presión y temperatura ambiente. En cambio, las propiedades del fluido que aparecen en la ecuación están referenciadas a nivel de yacimiento. Por tal motivo, se requiere expresar la densidad en función del factor de volumen para hacer consistente la ecuación. El factor de volumen, B , representa el cambio de densidad que sufre el fluido al ser transportado desde el yacimiento hasta la superficie y se define como el volumen que ocupa un barril de fluido a condiciones de yacimiento (presión y temperatura del yacimiento) por cada volumen que ocupa un barril a condiciones estándar. El factor de volumen se obtiene en laboratorio a partir de pruebas PVT (presión-volumen-temperatura) y es un concepto usado comúnmente en la industria petrolera. Usando la definición de factor de volumen, la densidad se expresa como:

$$B = \frac{v}{v_{c.s.}} = \frac{\rho_{c.s.}}{\rho} \xrightarrow{\text{yields}} \rho = \frac{\rho_{c.s.}}{B} \quad (39)$$

Sustituyendo esta nueva definición de densidad en la ecuación (39) queda:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_{c.s.}}{B} u_x A_x \right) \Delta x \pm q \frac{\rho_{c.s.}}{B} = V_b \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho_{c.s.} \phi S}{B} \right] \quad (40)$$

El termino q/B representa el gasto volumetrico del pozo medido a condiciones de superficie, es decir, $q_{c.s.}$:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_{c.s.}}{B} u_x A_x \right) \Delta x \pm q_{c.s.} \rho_{c.s.} = V_b \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho_{c.s.} \phi S}{B} \right] \quad (41)$$

Las unidades $q_{c.s.}$ suelen reportarse en barriles por día, ($bbl/día$). Como la velocidad u_x tiene unidades de ($bbl/día - ft^2$), según a la ecuación (6), se introduce la constante $\alpha_c = 5.61458 (ft^3/bbl)$ para tener unidades de campo y hacer la ecuación consistente. Introduciendo esta constante en la ecuación (41) y dividiendo cada termino por $\rho_{c.s.}$ se tiene que:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_x}{B} u_x \right) \Delta x = \frac{V_b}{\alpha_c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi S}{B} \right] - q_{c.s.} \quad (42)$$

Nótese que se ha asignado un signo para el gasto volumétrico. El signo negativo representa extracción (o producción). La ecuación anterior puede aplicarse para cada una de las fases presentes en la roca, por lo que para la fase aceite se tiene que:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_x}{B_o} u_{o,x} \right) \Delta x = \frac{V_b}{\alpha_c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi S_o}{B_o} \right] - q_{o,c.s.} \quad (43)$$

Mientras que la ecuación para la fase agua es:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_x}{B_w} u_{w,x} \right) \Delta x = \frac{V_b}{\alpha_c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi S_w}{B_w} \right] - q_{w,c.s.} \quad (44)$$

Las ecuaciones (43) y (44) contienen más incógnitas que ecuaciones, por lo que se requiere introducir alguna relación adicional para poder cerrar y resolver el modelo matemático. Para lograr esto, un primer paso es hacer uso de la ley de Darcy. Aunque esta ley es una relación fenomenológica o empírica, en realidad la ecuación de Darcy representa una conservación de momento y puede derivarse a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes, [26]. Sustituyendo la ecuación de Darcy, ecuación (6), en la ecuación de aceite (43) resulta que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\beta_c k_x A_x \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \left(\frac{\partial p_o}{\partial x} \right) \right] \Delta x = \frac{V_b}{\alpha_c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi S_o}{B_o} \right] - q_{o,c.s.} \quad (45)$$

Haciendo lo mismo en la ecuación del agua (44) queda:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\beta_c k_x A_x \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \left(\frac{\partial p_w}{\partial x} \right) \right] \Delta x = \frac{V_b}{\alpha_c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi S_w}{B_w} \right] - q_{w,c.s.} \quad (46)$$

El modelo matemático para el caso 2D se desarrolla de forma análoga:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\beta_c k_x A_x \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \left(\frac{\partial p_o}{\partial x} \right) \right] \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left[\beta_c k_y A_y \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \left(\frac{\partial p_o}{\partial y} \right) \right] \Delta y = \frac{V_b}{\alpha_c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi S_o}{B_o} \right] - q_{o,c.s.} \quad (47)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\beta_c k_x A_x \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \left(\frac{\partial p_w}{\partial x} \right) \right] \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left[\beta_c k_y A_y \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \left(\frac{\partial p_w}{\partial y} \right) \right] \Delta y = \frac{V_b}{\alpha_c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi S_w}{B_w} \right] - q_{w,c.s.} \quad (48)$$

Aunque hemos eliminado la velocidad el sistema y de nuestras incógnitas, en realidad solo la hemos sustituido por la presión de cada fase, la cual tampoco se conoce. En concreto, se tienen dos ecuaciones y cuatro incógnitas: p_w , p_o , S_w y S_o . Para reducir el número de incógnitas y poder cerrar el sistema, se usan dos relaciones auxiliares adicionales. La relación entre las saturaciones de las fases viene dada por:

$$S_w + S_o = 1 \quad (49)$$

Mientras que la presión capilar, p_c , relaciona las presiones de la fase agua y de la fase aceite:

$$p_c = p_o - p_w \quad (50)$$

Al usar las ecuaciones (49) y (50), el sistema final resulta en dos ecuaciones con dos incógnitas. Para este trabajo se desprecia la presión capilar, es decir, la presión de ambas fases es la misma. De esta forma, se toma la presión y la saturación del agua como incógnitas principales. Para poder introducir estas relaciones correctamente, primero se tienen que manipular dichas ecuaciones. Esto se hace en la siguiente sección como parte del método IMPES. Posteriormente, estas ecuaciones deben ser discretizadas para obtener su solución.

4. Implementación numérica

La solución analítica de las ecuaciones planteadas hasta ahora puede obtenerse solo para ciertos casos simplificados. Como alternativa, se requiere de la implementación de un esquema numérico que permita su solución. Para la aproximación de las derivadas espaciales y temporales se utiliza el método de diferencias finitas, lo que resulta en un set de ecuaciones discretizadas. A diferencia del caso monofásico donde se tiene una ecuación para cada nodo, en el caso multifásico se tienen dos ecuaciones con dos variables principales para cada una de las celdas del mallado. El sistema de ecuaciones resultante debe de ser linealizado para obtener su solución. La naturaleza no lineal de las ecuaciones en diferencias finitas surge debido a que los coeficientes de las incógnitas también son función de las incógnitas. Las no linealidades se pueden dividir en débiles y fuertes. Las propiedades dependientes de la presión de las ecuaciones en diferencias finitas representan las no linealidades débiles mientras que las propiedades dependientes de la saturación representan las no linealidades fuertes. Algunos métodos o formas de linealizar son:

- Explícito.
- Extrapolación
- Método implícito linealizado
- Método semi implícito
- Totalmente implícito (Newton Raphson)

En realidad, todos los métodos de linealización son casos especiales del método completamente implícito. Entre más implícito sea, más estable será la solución. Aunque algunos de los términos en las ecuaciones pueden ser tratados de forma implícita, en el caso bifásico tienen una linealidad débil, por lo que su tratamiento explícito no conlleva a problemas de estabilidad en la solución y se puede utilizar el método explícito para la linealización. El método IMPES se basa en utilizar una combinación de estas formas de linealizado.

4.1. Método IMPES

El objetivo del método IMPES (Implicit Pressure, Explicit Saturation) es obtener una sola ecuación de presión para cada bloque al combinar ambas ecuaciones de flujo (aceite y agua) para eliminar la incógnita de saturación. En el método IMPES se obtiene una solución implícita para la presión, seguido de una solución en forma explícita de las incógnitas de saturación, al sustituir los valores de presión obtenidos (tiempo futuro) en las ecuaciones de saturación de la fase. Para lograr esto, los demás coeficientes deben ser evaluados explícitamente, es decir, al nivel de tiempo anterior. El método IMPES se usa solo cuando la saturación cambia lentamente de un paso de tiempo a otro [27].

El procedimiento general incluye multiplicar la ecuación de aceite por una constante y posteriormente sumar el resultado a la ecuación de agua para obtener la llamada "ecuación de presión". El primer paso consiste en escribir la ecuación de presión para cada nodo y se resuelve el sistema de ecuaciones resultante. El segundo paso en el método IMPES involucra la solución explícita de la incógnita de saturación, al sustituir las presiones en el tiempo $n+1$ (obtenidas

en el paso anterior). Para obtener la ecuación de presión necesitamos expandir el primer término de la ecuación de aceite (47) mediante la regla de producto:

$$\frac{V_b}{\alpha_c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi S_o}{B_o} \right] = \frac{V_b}{\alpha_c} \left[\frac{\phi}{B_o} \frac{\partial}{\partial t} (S_o) + \phi S_o \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_o} \right) + \frac{S_o}{B_o} \frac{\partial}{\partial t} (\phi) \right] \quad (51)$$

En general, los términos B_o y ϕ dependen de la presión (aunque no necesariamente) por lo que podemos usar la regla de la cadena en los dos últimos términos. Esto se hace para poder introducir el concepto de compresibilidad:

$$\frac{V_b}{\alpha_c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi S_o}{B_o} \right] = \frac{V_b}{\alpha_c} \left\{ \frac{\phi}{B_o} \frac{\partial}{\partial t} (S_o) + \left[\phi S_o \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{B_o} \right) + \frac{S_o}{B_o} \frac{\partial}{\partial p} (\phi) \right] \frac{\partial p}{\partial t} \right\} \quad (52)$$

Usando las definiciones de compresibilidad de las fases y de la roca:

$$C_o = B_o \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{B_o} \right) \quad (53)$$

$$C_w = B_w \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{B_w} \right) \quad (54)$$

$$C_R = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} \quad (55)$$

Sustituyendo las definiciones de compresibilidad en la ecuación de aceite (47) queda:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\beta_c k_x A_x \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \left(\frac{\partial p_o}{\partial x} \right) \right] \Delta x = \frac{V_b}{\alpha_c} \left\{ \frac{\phi}{B_o} \frac{\partial}{\partial t} (S_o) + \left[\frac{\phi S_o}{B_o} C_o + \frac{\phi S_o}{B_o} C_R \right] \frac{\partial p_o}{\partial t} \right\} - q_{o,c.s.} \quad (56)$$

Mientras que la ecuación del agua, (48), resulta en:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\beta_c k_x A_x \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \left(\frac{\partial p_w}{\partial x} \right) \right] \Delta x = \frac{V_b}{\alpha_c} \left\{ \frac{\phi}{B_w} \frac{\partial}{\partial t} (S_w) + \left[\frac{\phi S_w}{B_w} C_w + \frac{\phi S_w}{B_w} C_R \right] \frac{\partial p_w}{\partial t} \right\} - q_{w,c.s.} \quad (57)$$

Ahora multiplicamos la ecuación (56) (ecuación del aceite) por $\frac{B_o}{B_w}$ y sumamos las dos ecuaciones. Factorizando $\frac{V_b}{\alpha_c}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} & \frac{B_o}{B_w} \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta_c k_x A_x \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \left(\frac{\partial p_o}{\partial x} \right) \right] \Delta x + \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta_c k_x A_x \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \left(\frac{\partial p_w}{\partial x} \right) \right] \Delta x \\ &= \frac{V_b}{\alpha_c} \left\{ \frac{B_o}{B_w} \left[\frac{\phi}{B_o} \frac{\partial}{\partial t} (S_o) + \left(\frac{\phi S_o}{B_o} C_o + \frac{\phi S_o}{B_o} C_R \right) \frac{\partial p_o}{\partial t} \right] + \frac{\phi}{B_w} \frac{\partial}{\partial t} (S_w) \right. \\ & \left. + \left[\frac{\phi S_w}{B_w} C_w + \frac{\phi S_w}{B_w} C_R \right] \frac{\partial p_w}{\partial t} \right\} - \frac{B_o}{B_w} q_{o,c.s.} - q_{w,c.s.} \end{aligned} \quad (58)$$

Si se considera que la presión capilar es cero (es decir, que $p_o = p_w$) y trabajando la parte derecha de la ecuación se tiene que:

$$\begin{aligned}
& \frac{B_o}{B_w} \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta_c k_x A_x \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] \Delta x + \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta_c k_x A_x \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] \Delta x \\
& = \frac{V_b}{\alpha_c} \left\{ \frac{\phi}{B_w} \left[\frac{\partial}{\partial t} (S_o + S_w) \right] + \left[\frac{\phi S_o}{B_w} C_o + \frac{\phi S_o}{B_w} C_R + \frac{\phi S_w}{B_w} C_w + \frac{\phi S_w}{B_w} C_R \right] \frac{\partial p}{\partial t} \right\} \\
& - \frac{B_o}{B_w} q_{o,c.s.} - q_{w,c.s.}
\end{aligned} \tag{59}$$

Notemos que el término $\frac{\partial}{\partial t} (S_o + S_w)$ es igual a cero, debido a que la saturación total no cambia con el tiempo, es decir, el medio poroso siempre estará lleno de fluido, ya sea agua o aceite:

$$(S_o + S_w) = 1 \xrightarrow{\text{yields}} \frac{\phi}{B_w} \left[\frac{\partial}{\partial t} (S_o + S_w) \right] = 0 \tag{60}$$

De esta forma, la ecuación (59) queda:

$$\begin{aligned}
& \frac{B_o}{B_w} \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta_c k_x A_x \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] \Delta x + \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta_c k_x A_x \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] \Delta x \\
& = \frac{V_b}{\alpha_c} \left\{ \left[\frac{\phi S_o}{B_w} C_o + \frac{\phi S_o}{B_w} C_R + \frac{\phi S_w}{B_w} C_w + \frac{\phi S_w}{B_w} C_R \right] \frac{\partial p}{\partial t} \right\} - \frac{B_o}{B_w} q_{o,c.s.} - q_{w,c.s.}
\end{aligned} \tag{61}$$

Haciendo la compresibilidad de la roca igual a cero, tenemos que:

$$\begin{aligned}
& \frac{B_o}{B_w} \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta_c k_x A_x \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] \Delta x + \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta_c k_x A_x \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] \Delta x \\
& = \frac{V_b}{\alpha_c} \left\{ [S_o C_o + S_w C_w] \frac{\phi}{B_w} \frac{\partial p}{\partial t} \right\} - \frac{B_o}{B_w} q_{o,c.s.} - q_{w,c.s.}
\end{aligned} \tag{62}$$

El término $S_o C_o + S_w C_w$ representa la compresibilidad total del sistema, la cual se define como:

$$C_t = S_g C_g + S_o C_o + S_w C_w + C_R \tag{63}$$

Considerando solamente dos fases y despreciando la compresibilidad de la roca, se tiene que esta compresibilidad puede considerarse como constante. Sustituyendo en la ecuación (62):

$$\begin{aligned}
& \frac{B_o}{B_w} \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta_c k_x A_x \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] \Delta x + \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta_c k_x A_x \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] \Delta x \\
& = \frac{V_b}{\alpha_c} \left\{ \frac{C_t \phi}{B_w} \frac{\partial p}{\partial t} \right\} - \frac{B_o}{B_w} q_{o,c.s.} - q_{w,c.s.}
\end{aligned} \tag{64}$$

De forma análoga, se hace la expansión en la ecuación (57) del término acumulación (además de $C_R = 0$):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\beta_c k_x A_x \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] \Delta x = \frac{V_b}{\alpha_c} \left\{ \frac{\phi}{B_w} \frac{\partial}{\partial t} (S_w) + C_w \frac{\phi S_w}{B_w} \frac{\partial p}{\partial t} \right\} - q_{w,c.s.} \tag{65}$$

Factorizando $\frac{\phi}{B_w}$ queda que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\beta_c k_x A_x \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] \Delta x = \frac{V_b \phi}{\alpha_c B_w} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (S_w) + C_w S_w \frac{\partial p}{\partial t} \right\} - q_{w,c.s.} \quad (66)$$

De esta forma, se tiene que las únicas incógnitas son la presión y la saturación del agua (si se conoce la compresibilidad), es decir, se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas. La primera ecuación del sistema, ecuación (64), se conoce como “ecuación de presión”, mientras que la segunda ecuación (66) se conoce como “ecuación del agua”.

4.2. Discretización

En la implementación numérica, la discretización de las ecuaciones implica que el dominio de interés (yacimiento) sea dividido en sub-volúmenes (o celdas) que configuran lo que se conoce como malla computacional (ver Figura 25).

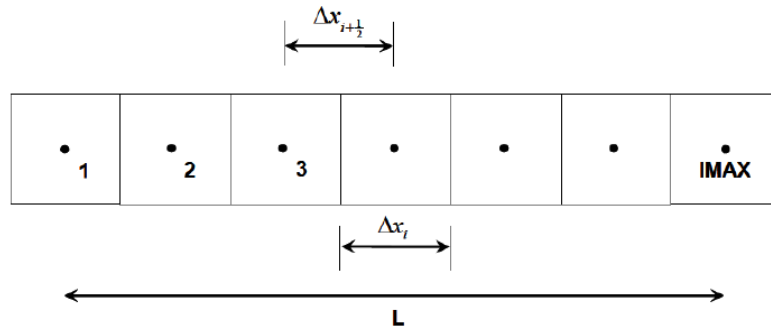


Figura 25. Discretización espacial.

Para la discretización en el espacio de las derivadas de segundo orden con respecto a “x” y “y” se utilizan diferencias centrales dos veces. Por ejemplo, el primer término de la ecuación (64) resulta en:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta_c k_x A_x \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] \Delta x \\ = \left(\frac{\beta_c k_x A_x k_{ro}}{\Delta x \mu_o B_o} \right)_{i+\frac{1}{2}} (p_{i+1} - p_i) - \left(\frac{\beta_c k_x A_x k_{ro}}{\Delta x \mu_o B_o} \right)_{i-\frac{1}{2}} (p_i - p_{i-1}) \end{aligned} \quad (67)$$

Los subíndices $i - \frac{1}{2}$ y $i + \frac{1}{2}$ indican una evaluación de las propiedades en los límites de los bloques. Sin embargo, dichas propiedades se conocen solamente en los nodos, es decir, en el centro de las celdas. Sigue que el valor correspondiente se calcula como el promedio de los valores en celdas adyacentes. En este punto, resulta conveniente introducir el concepto de transmisibilidad. Las transmisibilidades incluyen propiedades tanto del medio poroso como del fluido que circula a través de él y se define como:

$$(T_o) = \left(\frac{\beta_c k_x A_x k_{ro}}{\Delta x \mu_o B_o} \right) \quad (68)$$

Con esta definición, se tiene que las derivadas con respecto a la posición se pueden expresar como:

$$\frac{B_o}{B_w} \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta_c k_x A_x \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] \Delta x = \frac{B_o}{B_w} \left[(T_o)_{i+\frac{1}{2}} (p_{i+1} - p_i) - (T_o)_{i-\frac{1}{2}} (p_i - p_{i-1}) \right] \quad (69)$$

Sustituyendo en la ecuación de presión (64) y factorizando términos, queda que:

$$\begin{aligned} \left[\frac{B_o}{B_w} T_{oi-1/2} + T_{wi-1/2} \right] p_{i-1} - \left[\frac{B_o}{B_w} (T_{oi-1/2} + T_{oi+1/2}) + (T_{wi-1/2} + T_{wi+1/2}) \right] p_i \\ + \left[\frac{B_o}{B_w} T_{oi+1/2} + T_{wi+1/2} \right] p_{i+1} = \frac{V_b}{\alpha_c} \left\{ \frac{C_t \phi_i}{B_w} \frac{\partial p}{\partial t} \right\} - \frac{B_o}{B_w} q_{o,c.s.} - q_{w,c.s.} \end{aligned} \quad (70)$$

Haciendo lo mismo en la ecuación del agua (66) se tiene que:

$$\begin{aligned} \left[T_{wi-1/2} p_{i-1} - \left[T_{wi-1/2} + T_{wi+1/2} \right] p_i + T_{wi+1/2} p_{i+1} \right] \\ = \frac{V_b \phi_i}{\alpha_c B_w} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (S_w) + C_w S_w \frac{\partial p}{\partial t} \right\} - q_{w,c.s.} \end{aligned} \quad (71)$$

Una vez realizada la discretización espacial, se realiza la aproximación del término temporal. Para esto, usamos una la aproximación en diferencias finitas de las derivadas en primer orden con respecto al tiempo. Esta discretización se puede hacer de dos maneras: explícita o implícitamente (ver [Figura 26](#) y [Figura 27](#)).

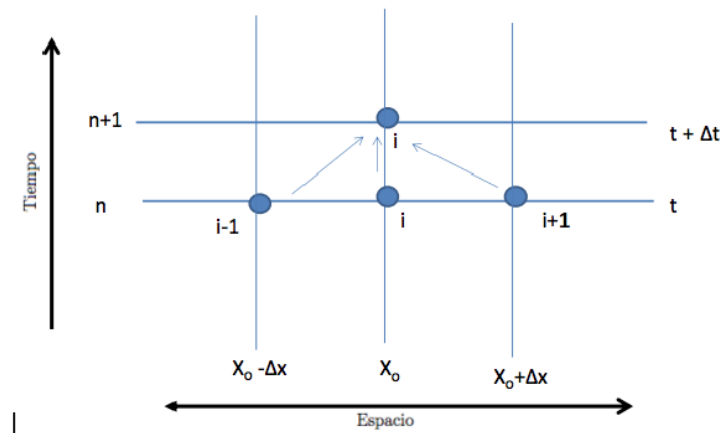


Figura 26. Discretización explícita. Tomado de [4]

En la forma explícita, la variable discretizada es asignada al tiempo actual "n", mientras que, en la forma implícita, la variable es asignada al tiempo futuro "n+1".

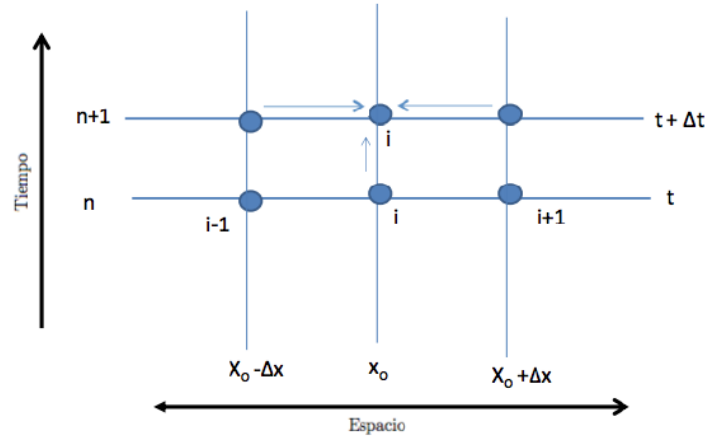


Figura 27. Discretización implícita. Tomado de [4]

Para el caso de la presión, el método IMPES utiliza una formulación implícita:

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{B_o}{B_w} T_{o_{i-1/2}} + T_{w_{i-1/2}} \right] p_{i-1}^{n+1} - \left[\frac{B_o}{B_w} (T_{o_{i-1/2}} + T_{o_{i+1/2}}) + (T_{w_{i-1/2}} + T_{w_{i+1/2}}) \right] p_i^{n+1} \\
 & + \left[\frac{B_o}{B_w} T_{o_{i+1/2}} + T_{w_{i+1/2}} \right] p_{i+1}^{n+1} \\
 & = \frac{V_b C_t \phi_i}{\alpha_c B_w} \left(\frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} \right) - \frac{B_o}{B_w} q_{o,c.s.} - q_{w,c.s.}
 \end{aligned} \tag{72}$$

Juntando términos de forma que las incógnitas ($p_{i-1}^{n+1}, p_i^{n+1}, p_{i+1}^{n+1}$) queden del lado izquierdo:

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{B_o}{B_w} T_{o_{i-1/2}} + T_{w_{i-1/2}} \right] p_{i-1}^{n+1} \\
 & - \left[\frac{B_o}{B_w} (T_{o_{i-1/2}} + T_{o_{i+1/2}}) + (T_{w_{i-1/2}} + T_{w_{i+1/2}}) + \frac{V_b C_t \phi_i}{\alpha_c B_w \Delta t} \right] p_i^{n+1} \\
 & + \left[\frac{B_o}{B_w} T_{o_{i+1/2}} + T_{w_{i+1/2}} \right] p_{i+1}^{n+1} = - \frac{V_b C_t \phi_i}{\alpha_c B_w \Delta t} p_i^n - \frac{B_o}{B_w} q_{o,c.s.} - q_{w,c.s.}
 \end{aligned} \tag{73}$$

Una vez obtenida la presión, pasamos al segundo paso del método IMPES, el cual es calcular la saturación de forma explícita. Haciendo una formulación explícita para la derivada temporal de la saturación (la de la presión se toma como implícita), la ecuación del agua (71) toma la forma de:

$$\begin{aligned}
 & \left[T_{w_{i-1/2}} p_{i-1}^{n+1} - \left[T_{w_{i-1/2}} + T_{w_{i+1/2}} \right] p_i^{n+1} + T_{w_{i+1/2}} p_{i+1}^{n+1} \right] \\
 & = \frac{V_b \phi_i}{\alpha_c B_w} \left[\left(\frac{S_{W,i}^{n+1} - S_{W,i}^n}{\Delta t} \right) + S_{W,i}^n C_w \left(\frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} \right) \right] - q_{w,c.s.}
 \end{aligned} \tag{74}$$

Desarrollando términos, la forma final de la ecuación (74) es:

$$S_{W,i}^{n+1} = \frac{\alpha_c B_w \Delta t}{V_b \phi_i} \left\{ T_{w_{i-1/2}} p_i^{n+1} - (T_{w_{i-1/2}} + T_{w_{i+1/2}}) p_i^{n+1} + T_{w_{i+1/2}} p_{i+1}^{n+1} + q_{w,c.s.} \right\} + S_{W,i}^n - (S_{W,i}^n C_w) (p_i^{n+1} - p_i^n) \quad (75)$$

Para el caso 2D, la ecuación de presión discretizada queda como:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{B_o}{B_w} T_{o_{i-\frac{1}{2},j}} + T_{w_{i-\frac{1}{2},j}} \right) p_{i-1,j}^{n+1} + \left(\frac{B_o}{B_w} T_{o_{i+\frac{1}{2},j}} + T_{w_{i+\frac{1}{2},j}} \right) p_{i+1,j}^{n+1} + \left(\frac{B_o}{B_w} T_{o_{i,j-\frac{1}{2}}} + T_{w_{i,j-\frac{1}{2}}} \right) p_{i,j-1}^{n+1} \\ & + \left(\frac{B_o}{B_w} T_{o_{i,j+\frac{1}{2}}} + T_{w_{i,j+\frac{1}{2}}} \right) p_{i,j+1}^{n+1} \\ & - \left[\frac{B_o}{B_w} \left(T_{o_{i-\frac{1}{2},j}} + T_{o_{i+\frac{1}{2},j}} + T_{o_{i,j-\frac{1}{2}}} + T_{o_{i,j+\frac{1}{2}}} \right) + T_{w_{i-\frac{1}{2},j}} + T_{w_{i+\frac{1}{2},j}} \right. \\ & \left. + T_{w_{i,j-\frac{1}{2}}} + T_{w_{i,j+\frac{1}{2}}} + \frac{V_b C_t \phi_{i,j}}{\alpha_c B_w \Delta t} \right] p_{i,j}^{n+1} \\ & = - \frac{V_b C_t \phi_{i,j}}{\alpha_c B_w \Delta t} p_{i,j}^n - \frac{B_o}{B_w} q_{o,c.s.} - q_{w,c.s.} \end{aligned} \quad (76)$$

Esta ecuación puede escribirse de forma compacta:

$$S_{i,j} p_{i,j-1}^{n+1} + W_{i,j} p_{i-1,j}^{n+1} + C_{i,j} p_{i,j}^{n+1} + E_{i,j} p_{i+1,j}^{n+1} + N_{i,j} p_{i,j+1}^{n+1} = Q_{i,j} \quad (77)$$

Donde:

- $W_{i,j} = \frac{B_o}{B_w} T_{o_{i-\frac{1}{2},j}} + T_{w_{i-\frac{1}{2},j}}$
- $E_{i,j} = \frac{B_o}{B_w} T_{o_{i+\frac{1}{2},j}} + T_{w_{i+\frac{1}{2},j}}$
- $S_{i,j} = \frac{B_o}{B_w} T_{o_{i,j-\frac{1}{2}}} + T_{w_{i,j-\frac{1}{2}}}$
- $N_{i,j} = \frac{B_o}{B_w} T_{o_{i,j+\frac{1}{2}}} + T_{w_{i,j+\frac{1}{2}}}$
- $C_{i,j} = - \left[\frac{B_o}{B_w} \left(T_{o_{i-\frac{1}{2},j}} + T_{o_{i+\frac{1}{2},j}} + T_{o_{i,j-\frac{1}{2}}} + T_{o_{i,j+\frac{1}{2}}} \right) + T_{w_{i-\frac{1}{2},j}} + T_{w_{i+\frac{1}{2},j}} + T_{w_{i,j-\frac{1}{2}}} + T_{w_{i,j+\frac{1}{2}}} + \frac{V_b C_t \phi_{i,j}}{\alpha_c B_w \Delta t} \right] - \left[W_{i,j} + E_{i,j} + S_{i,j} + N_{i,j} + \frac{V_b C_t \phi_{i,j}}{\alpha_c B_w \Delta t} \right]$
- $Q_{i,j} = - \frac{V_b C_t \phi_{i,j}}{\alpha_c B_w \Delta t} p_{i,j}^n - \frac{B_o}{B_w} q_{o,c.s.} - q_{w,c.s.}$

Los términos $W_{i,j}$, $E_{i,j}$, $S_{i,j}$, $N_{i,j}$ representan, respectivamente, las transmisibilidades en las caras oeste, este, sur y norte de la celda en cuestión. Los términos $C_{i,j}$ y $Q_{i,j}$ corresponden al nodo en el centro. La **Figura 28** muestra la orientación de las caras correspondientes

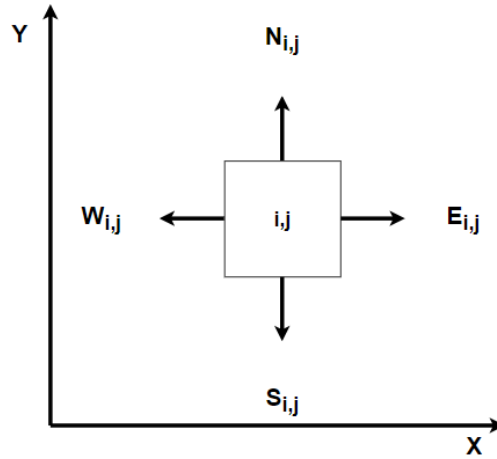


Figura 28. Nomenclatura usada para nombrar las caras.

La ecuación del agua (74) en 2D toma la forma de:

$$\begin{aligned}
 & T_{w_{i-\frac{1}{2},j}} p_{i-1,j}^{n+1} + T_{w_{i+\frac{1}{2},j}} p_{i+1,j}^{n+1} + T_{w_{i,j-\frac{1}{2}}} p_{i,j-1}^{n+1} + T_{w_{i,j+\frac{1}{2}}} p_{i,j+1}^{n+1} \\
 & - \left[T_{w_{i-\frac{1}{2},j}} + T_{w_{i+\frac{1}{2},j}} + T_{w_{i,j-\frac{1}{2}}} + T_{w_{i,j+\frac{1}{2}}} \right] p_{i,j}^{n+1} \\
 & = \frac{V_b \phi_i}{\alpha_c B_w} \left[\left(\frac{S_{W_{i,j}}^{n+1} - S_{W_{i,j}}^n}{\Delta t} \right) + S_{W_{i,j}}^n C_w \left(\frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n}{\Delta t} \right) \right] - q_{w,c.s.}
 \end{aligned} \tag{78}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
 S_{W_{i,j}}^{n+1} &= \frac{\alpha_c B_w \Delta t}{V_b \phi_i} \left[T_{w_{i-\frac{1}{2},j}} p_{i-1,j}^{n+1} + T_{w_{i+\frac{1}{2},j}} p_{i+1,j}^{n+1} + T_{w_{i,j-\frac{1}{2}}} p_{i,j-1}^{n+1} + T_{w_{i,j+\frac{1}{2}}} p_{i,j+1}^{n+1} \right. \\
 & \left. - \left(T_{w_{i-\frac{1}{2},j}} + T_{w_{i+\frac{1}{2},j}} + T_{w_{i,j-\frac{1}{2}}} + T_{w_{i,j+\frac{1}{2}}} \right) p_{i,j}^{n+1} + q_{w,c.s.} \right] + S_{W_{i,j}}^n \\
 & - \left(S_{W_{i,j}}^n C_w \right) (p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n)
 \end{aligned} \tag{79}$$

4.3. MODELO DE POZO

Los pozos, que representan fronteras internas o términos fuente dentro de las ecuaciones, operan bajo condiciones de gasto constante o de presión de fondo fluyente constante (P_{wf}). Cuando se conoce el gasto, éste puede ser incluido de forma directa a las ecuaciones desarrolladas. En contraste, la presión de fondo fluyente no puede ser incluida de forma directa, ya que P_{wf} es diferente de la presión del nodo (que es la presión promedio del bloque). Para relacionar ambas presiones, podemos usar un modelo de pozo, el cual asume que el flujo en el pozo es de tipo radial. Además, se hace la suposición de que dicho flujo sucede en un régimen estacionario (incompresible y sin acumulación). Para este trabajo, se utiliza el modelo de pozo de Peaceman [28]. La ecuación de Darcy bajo estas condiciones establece que:

$$q_{c.s.} = \frac{-2\pi\beta_c k_H h}{\mu B} \frac{dp}{dr} \tag{80}$$

Donde h es el espesor y k_H es la permeabilidad en el plano horizontal relacionada con las permeabilidades en cada dirección, definida como:

$$k_H = (k_x * k_y)^{1/2} \quad (81)$$

Integrando la ecuación (80) desde el pozo hasta un punto de referencia dado se tiene que:

$$p_{ref} = p_{wf} - \frac{q_{c.s.} \mu B}{2\pi \beta_c k_H h} \ln \left(\frac{r_{ref}}{r_w} \right) \quad (82)$$

Donde

- p_{wf} = Presión de fondo del pozo
- r_w = Radio del pozo

La ecuación (82) dicta que debe de existir una distancia (o radio) a la cual la presión en el modelo radial sea igual a la presión del nodo o bloque. A este radio se le conoce como radio equivalente (ver [Figura 29](#)). Si suponemos que la presión de referencia, P_{ref} , es igual a la presión en el nodo, entonces:

$$p_i = p_{wf} - \frac{q_{c.s.} \mu B}{2\pi \beta_c k_H h} \ln \left(\frac{r_{eq}}{r_w} \right) \quad (83)$$

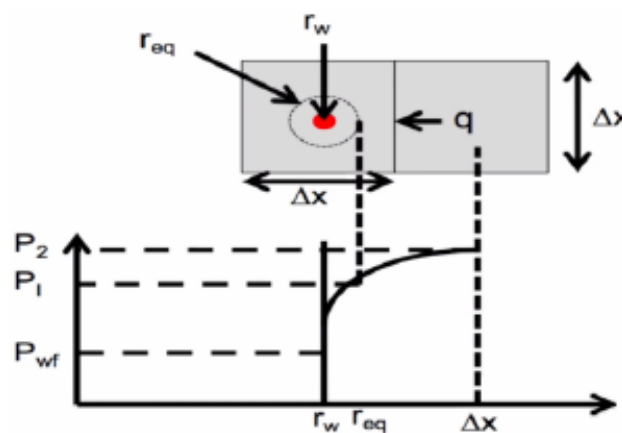


Figura 29. Concepto de radio equivalente. Tomado de [4]

El radio equivalente dependerá de la geometría de la celda y de las permeabilidades que existen en esa celda, y se define como:

$$r_{eq} = 0.14 * (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2} \quad (84)$$

Este modelo radial puede verse alterado por una diferencia de presión adicional que ocurre en las cercanías del pozo. A este efecto se le conoce como factor de daño. El daño suele provocar una caída de presión debido a obstrucciones en la cara del agujero. Es importante notar que este mismo factor puede ser usado para representar pozos estimulados, en cuyo caso el factor de daño toma un valor negativo. La [Figura 30](#) muestra el concepto de daño:

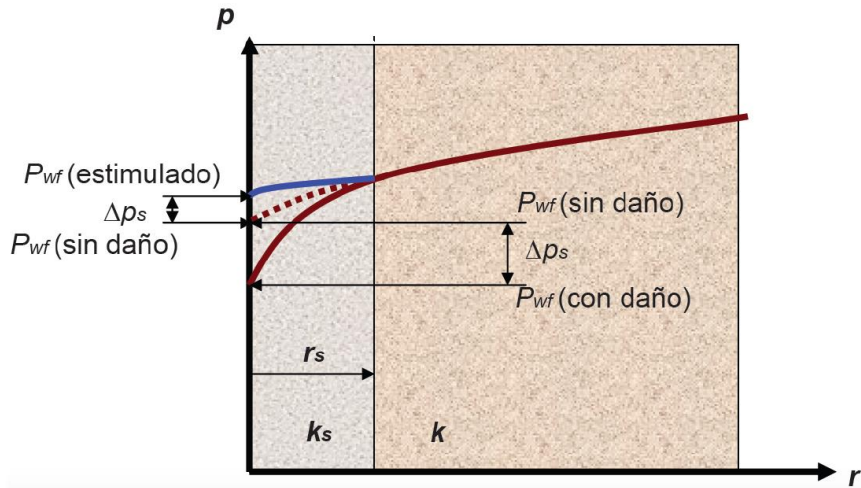


Figura 30. Efecto de daño. Tomado de [4]

Despejando el gasto, “ q ” y agregando el concepto de daño, “ s ”:

$$q_{c.s.} = \frac{-2\pi\beta_c k_H h (P_i - P_{wf})}{\mu B \left[\log \left(\frac{r_{eq}}{r_w} \right) + s - 1/2 \right]} \quad (85)$$

La ecuación anterior podemos escribirla de la siguiente forma:

$$q_{c.s.} = -J(P_i - P_{wf}) \quad (86)$$

Donde “ J ” representa el índice de productividad, definido como:

$$J = \frac{2\pi\beta_c k_H h}{\mu B \left[\log \left(\frac{r_{eq}}{r_w} \right) + s - 1/2 \right]} \quad (87)$$

El índice de productividad es una medida del potencial del pozo para producir los hidrocarburos. Para el caso multifásico, se tendrá un índice de productividad para cada fase, el cual dependerá de la permeabilidad relativa de la fase en cuestión. De esta forma:

$$J_w = G_w \left[\frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \right] \quad (88)$$

$$J_o = G_w \left[\frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \right] \quad (89)$$

Donde G_w es el factor geométrico del pozo, definido como:

$$G_w = \frac{2\pi\beta_c k_H h}{\left[\log \left(\frac{r_{eq}}{r_w} \right) + s - 1/2 \right]} \quad (90)$$

Es importante destacar el nivel de tiempo utilizado para los pozos. Si la ecuación (86) se escribe con una formulación implícita, entonces la presión del nodo estará evaluada al tiempo “n+1”:

$$q_{c.s.} = -J(p_i^{n+1} - P_{wf}) \quad (91)$$

Sustituyendo los gastos de aceite y agua con esta nueva definición, queda que el lado derecho de la ecuación de presión (72) es:

$$\frac{V_b C_t \phi_i}{\alpha_c B_w} \left\{ \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} \right\} + \frac{B_o}{B_w} J_o p_i^{n+1} + J_w p_i^{n+1} - \left(\frac{B_o}{B_w} J_o + J_w \right) P_{wf} \quad (92)$$

Por lo que la ecuación de presión se expresa como (caso 1D):

$$\begin{aligned} & \left[\frac{B_o}{B_w} T_{o_{i-1/2}} + T_{w_{i-1/2}} \right] p_{i-1}^{n+1} \\ & - \left[\frac{B_o}{B_w} (T_{o_{i-1/2}} + T_{o_{i+1/2}}) + (T_{w_{i-1/2}} + T_{w_{i+1/2}}) + \frac{V_b C_t \phi_i}{\alpha_c B_w \Delta t} + \frac{B_o}{B_w} J_o \right. \\ & \left. + J_w \right] p_i^{n+1} + \left[\frac{B_o}{B_w} T_{o_{i+1/2}} + T_{w_{i+1/2}} \right] p_{i+1}^{n+1} \\ & = - \frac{V_b C_t \phi_i}{\alpha_c B_w \Delta t} p_i^n - \left(\frac{B_o}{B_w} J_o + J_w \right) P_{wf} \end{aligned} \quad (93)$$

La cual representa la ecuación para cualquier nodo que contenga un pozo operando a una presión de fondo constante. Cuando se trata de un pozo inyector, se entiende que el único fluido en ingresar es agua, por lo que el gasto del pozo corresponde a una sola fase. Por otro lado, si se trata de un pozo productor, el gasto definido incluirá tanto a la fase agua como la fase aceite, ya que no se tiene control de las fases aportadas por el yacimiento. Si se especifica una presión de fondo constante, lo que se calcula es el gasto correspondiente y viceversa, mediante las siguientes relaciones:

$$q_t = q_{o,c.s.} + q_{w,c.s.} = -J_o(P_i - P_{wf}) - J_w(P_i - P_{wf}) \quad (94)$$

$$P_{wf} = P_i + \frac{q_t}{(J_w + J_o)} \quad (95)$$

De esta forma, los coeficientes del sistema de ecuaciones se verán afectados dependiendo la condición como opere el pozo. La **Tabla 3** muestra cómo se verían afectados estos coeficientes:

Tabla 3. Modificación de los términos dependiendo del tipo de pozo.

CONDICIÓN	INYECTOR (SOLO AGUA)	PRODUCTOR (AGUA+ACEITE)
$P_{wf} = cte.$	$C_{i,j} = -[W_{i,j} + E_{i,j} + S_{i,j} + N_{i,j} + A_{i,j} + J_w]$	$C_{i,j} = -[W_{i,j} + E_{i,j} + S_{i,j} + N_{i,j} + A_{i,j} + B]$
	$Q_{i,j} = (-A_{i,j})P_{i,j}^n - J_w P_{wf}$	$Q_{i,j} = (-A_{i,j})P_{i,j}^n - (B) P_{wf}$
$q = cte.$	$C_{i,j} = -[W_{i,j} + E_{i,j} + S_{i,j} + N_{i,j} + A_{i,j}]$	$C_{i,j} = -[W_{i,j} + E_{i,j} + S_{i,j} + N_{i,j} + A_{i,j}]$
	$Q_{i,j} = (-A_{i,j})p_{i,j}^n - q_{w,c.s.}$	$Q_{i,j} = (-A_{i,j})P_{i,j}^n - (B) \left(\frac{q_t}{(J_w + J_o)} \right)$

Donde los términos A y B se definen como:

$$B = \frac{B_o}{B_w} J_o + J_w \quad (96)$$

$$A_{i,j} = \frac{V_b C_t \phi_{i,j}}{\alpha_c B_w \Delta t} \quad (97)$$

4.4. Esquema upstream

Como se mencionó al comienzo del capítulo, las ecuaciones discretizadas incluyen términos no lineales (fuertes y débiles) los cuales deben de manejarse con cuidado para que la solución del esquema numérico converja y sea la correcta. Los términos presentes en la transmisibilidad y la forma en que son tratados para este trabajo se presentan en la [Tabla 4](#).

Tabla 4. Linealidad de los diferentes términos que conforman la transmisibilidad.

TERMINO	DEFINICIÓN	DEPENDENCIA TEMPORAL	DEPENDENCIA ESPACIAL
β_c	Constante de conversión	Constante	Constante
$\frac{k_x A_x}{\Delta x}$	Factor geométrico	Constante	Variable (medio heterogéneo)
$\frac{1}{\mu B}$	No Lineales débiles	Constante (suposiciones del fluido)	Constante (suposiciones del fluido)
k_r	No Lineales fuertes	Variable	Variable

Aunque el método IMPES tiene la ventaja de que estos términos puedan ser evaluados explícitamente (es decir, en el tiempo actual “n”) debido a que la solución obtenida para el caso bifásico no se ve afectada, su dependencia espacial sigue siendo importante. La transmisibilidad (y sus términos) son evaluados en las fronteras de las celdas y dependen de la presión o de la saturación. Debido a que a que estos valores se conocen únicamente en el centro de las celdas (nodos) y no en sus fronteras, se requiere de un promediado de estos términos. Podemos definir los términos de la transmisibilidad en función de esto:

$$(T_{ox})_{i+1/2} = \left(\frac{\beta_c k_x A_x k_{ro}}{\Delta x \mu_o B_o} \right)_{i+1/2} = \beta_c \left(\frac{k_x A_x}{\Delta x} \right)_{i+1/2} \left(\frac{1}{\mu_o B_o} \right)_{i+1/2} (k_{ro})_{i+1/2} \quad (98)$$

$$(T_{ox})_{i+1/2} = G_{x_{i+1/2}} * f_{p_{o_{i+1/2}}} * f_{s_{o_{i+1/2}}} \quad (99)$$

Donde G es un factor geométrico, f_p es una función dependiente de la presión y f_s es una función dependiente de la saturación. Nótese que existirá una transmisibilidad para cada fase y para cada una de las direcciones de flujo. Para la fase agua se tiene:

$$(T_{wx})_{i+1/2} = G_{x_{i+1/2}} * f_{p_{w_{i+1/2}}} * f_{s_{w_{i+1/2}}} \quad (100)$$

$$(T_{wy})_{j+1/2} = G_{y_{j+1/2}} * f_{p_{w_{j+1/2}}} * f_{s_{w_{j+1/2}}} \quad (101)$$

Si el área de flujo y la distancia entre nodos no varía, la permeabilidad es promediada de forma armónica. Por ejemplo, en la dirección ‘x’ se tendrá que:

$$k_{x,i+1/2} = \frac{2}{\frac{1}{k_{x,i}} + \frac{1}{k_{x,i+1}}} = \frac{2 * k_{x,i} * k_{x,i+1}}{k_{x,i} + k_{x,i+1}} \quad (102)$$

Y el factor geométrico “G” puede ser definido de la siguiente forma:

$$G_{x_{i+1/2}} = \frac{\beta_c * A_x * 2 * k_{x,i} * k_{x,i+1}}{\Delta x (k_{x,i} + k_{x,i+1})} \quad (103)$$

Las linealidades débiles, f_p , para este trabajo en particular, se toman como constantes debido a la suposición de que la viscosidad y la densidad de los fluidos involucrados no cambian (o varía muy poco) con respecto a la presión. Esto es propio del agua o de aceites pesados sin gas disuelto. Por otro lado, las linealidades fuertes, f_s , tienen que ser promediadas con mucho cuidado para que el resultado obtenido sea el adecuado. Por ejemplo, el promediado “midpoint” de las linealidades fuertes no suele usarse debido a que puede causar que la solución obtenida, aunque matemáticamente correcta, no tenga un significado físico correcto [29]. La permeabilidad relativa, k_r , suele ser promediada mediante la técnica upstream (corriente arriba), la cual depende de la dirección del fluido. Esta a su vez puede realizarse de dos formas: con un punto o con dos puntos [30]. El promediado con un solo punto es una aproximación de primer orden mientras que el promediado con dos puntos es una aproximación de segundo orden.

Aunque ambos esquemas convergen a una solución físicamente correcta, se ha visto que el esquema de dos puntos produce un frente de desplazamiento más fino para el mismo número de bloques [31], por lo que es el esquema utilizado en este trabajo. De esta forma, se tiene que:

$$k_{r,i+1/2} = 1.5 * k_{r,i} - .5 * k_{r,i-1} \tag{104}$$

Si el flujo de la fase es del bloque (i) al bloque (i+1)

$$k_{r,i+1/2} = 1.5 * k_{r,i+1} - .5 * k_{r,i+2} \tag{105}$$

Si el flujo de la fase es del bloque (i+1) al bloque (i). Es importante recordar que el valor de k_r varía entre 0 y 1, por lo que se debe incluir una restricción en caso de que el valor obtenido este fuera de este rango. La **Figura 31** ejemplifica la forma en que se utiliza la aproximación upstream con dos puntos:

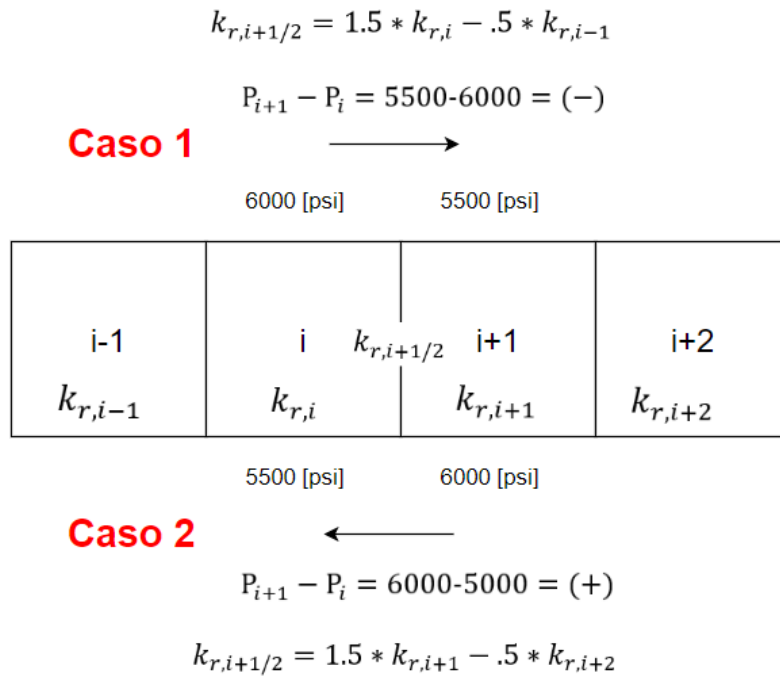


Figura 31. Ejemplo del funcionamiento del método upstream.

5. Resultados

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos con la herramienta desarrollada. Primero se validan los resultados mediante la solución analítica y posteriormente se comparan con la solución obtenida mediante el software MRST.

5.1. Validación: solución analítica

Para la validación del modelo, se comparó primero con la solución analítica de Buckley-Leverett. Para poder aplicar esta solución, se requiere de las siguientes suposiciones:

- Flujo 1D
- Fluidos incompresibles
- Sin presión capilar ni termino gravitacional
- Un solo pozo con gasto de inyección constante en $x=0$
- Un solo pozo con Gasto de producción constante $x=L$

Recordemos que los gastos de inyección y producción deben ser iguales para no violar el balance de materia. En la [Tabla 5](#) y [Tabla 6](#) se muestran los datos del ejemplo.

Tabla 5. Datos generales del ejemplo 1.

Viscosidad del agua	1	cP
Viscosidad del aceite	2	cP
Área transversal	26400	ft ²
Distancia entre pozos	2000	ft
Porosidad	0.25	-
Gasto de inyección/producción	900	bbbl/día

Tabla 6. Datos de permeabilidad relativa para el ejemplo 1.

Sw	krw	kro	kro/krw
0.25	0.015	0.45345	30.23
0.3	0.017	0.289	17
0.35	0.02	0.1912	9.56
0.4	0.025	0.1345	5.38
0.45	0.032	0.09664	3.02
0.5	0.044	0.075	1.704
0.55	0.06	0.058	0.966
0.6	0.09	0.0486	0.54
0.65	0.15	0.045	0.3
0.7	0.25	0.0425	0.17
0.75	0.4	0.04	0.1

La **Figura 32** muestra la curva particular de saturación vs permeabilidad relativa, al usar los datos de la **Tabla 6**.

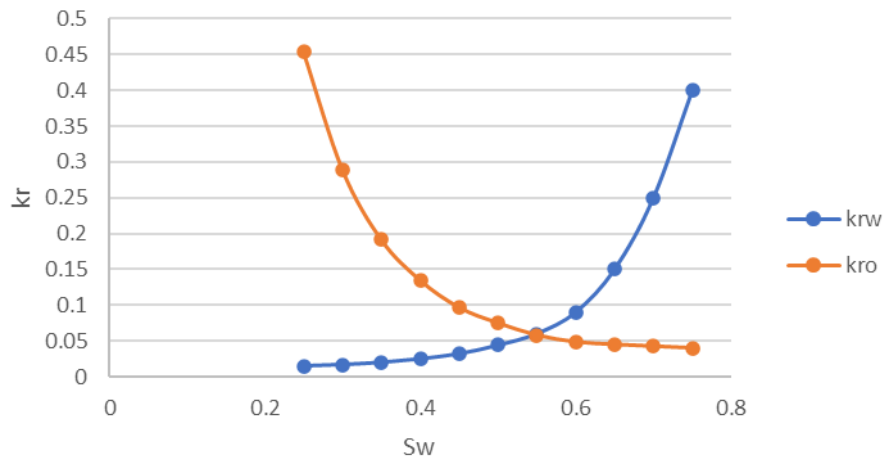


Figura 32. Curva de permeabilidad relativa vs saturación de agua del ejemplo 1.

Para obtener la solución analítica, se siguen los pasos mostrados al final de la sección 2.4. El primer paso es construir la curva de flujo fraccional. Para esto, calculamos el corte de agua existente para cada saturación de agua mediante la ecuación (23):

Tabla 7. Valores de flujo fraccional para cada saturación.

Sw	fw
0.25	0.04761905
0.3	0.08854167
0.35	0.16666667
0.4	0.26315789
0.45	0.3902439
0.5	0.58823529
0.55	0.73684211
0.6	0.83333333
0.65	0.90909091
0.7	0.95238095
0.75	0.97560976

Al graficar los datos y dibujar la línea tangente a la curva (partiendo de s_{wi}), podemos obtener los valores de s_{wf} y f_{wf} :

Tabla 8. Flujo fracción al y saturación de agua en el frente de avance.

Flujo fraccional al frente de avance	fwf	0.77
Saturación de agua en el frente de avance	Swf	0.588

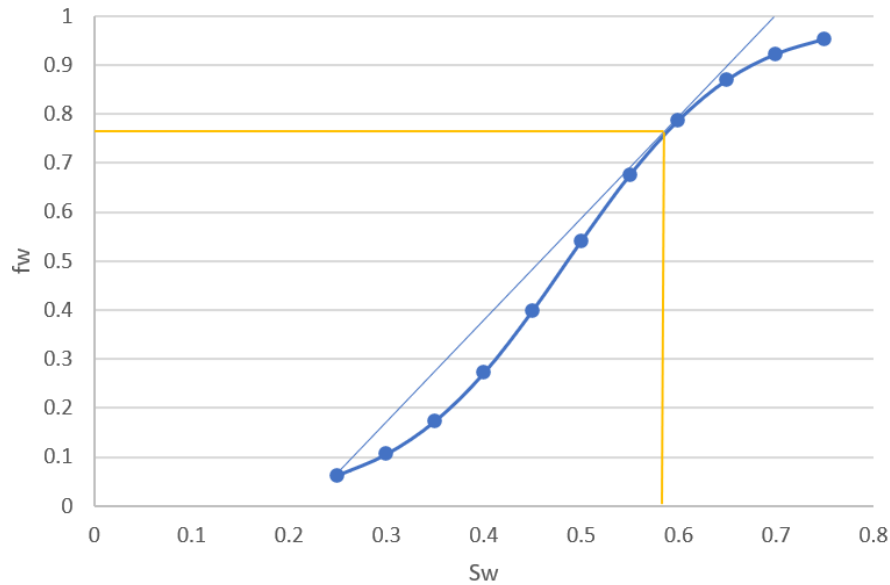


Figura 33. Curva de flujo fraccional vs saturación de agua.

El siguiente paso es calcular la derivada del flujo fraccional con respecto a la saturación de forma analítica mediante la ecuación (32). Para poder utilizar esta ecuación, primero se necesitan estimar los valores de “a” y “b”. Estos coeficientes se obtienen al graficar los valores de k_{ro}/k_{rw} vs s_w en escala semi logarítmica y determinar la ecuación de la recta resultante, según la ecuación (30):

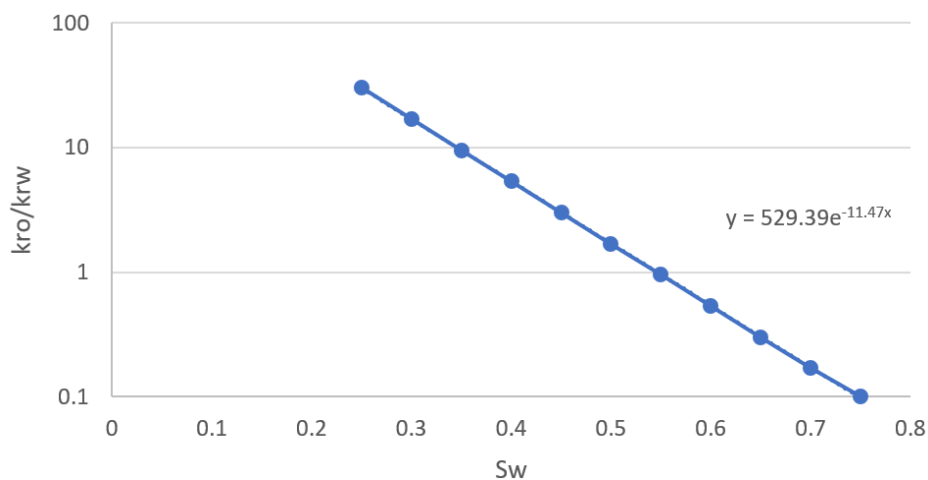


Figura 34. Kro/krw vs Sw.

Por lo que los valores de “a” y “b” son 529.39 y -11.47, respectivamente. Con estos valores se calcula la derivada del flujo fraccional con respecto a la saturación de agua. Se seleccionan valores de saturación que sean mayores a s_{wf} , ya que para saturaciones menores a este valor el frente de desplazamiento se encuentra a la misma distancia que s_{wf} , como se explicó en la sección 2.4:

Tabla 9. Derivada del flujo fraccional con respecto a la saturación de agua

Sw	dfw/dSw
0.588	2.07785749
0.6	1.92660604
0.65	1.32045142
0.7	0.83848139
0.75	0.50706393

Con el valor de s_w (y de la derivada de flujo fraccional evaluada en ese punto) podemos calcular el tiempo aproximado de ruptura mediante la ecuación (29):

$$t = \frac{(X)_{s_w} * A * \phi}{5.615 * i_w * \left(\frac{df_w}{ds_w}\right)_{s_w}} = \frac{(2000) * (26400) * (0.25)}{5.615 * (900) * (2.07785749)} = 1257.08 \text{ [días]}$$

A continuación, se calcula la distancia entre el pozo inyector y el frente de agua para diferentes valores de saturación mediante la ecuación (28). Este procedimiento se repite para 5 tiempos diferentes.

Tabla 10. Distancia recorrida por el frente de avance desde el pozo inyector, en pies.

Sw	Distancia, [ft]				
	t=250 [días]	t=500 [días]	t=750 [días]	t=1000 [días]	t=1250 [días]
0.588	397.74	795.49	1193.23	1590.98	1988.72
0.6	368.79	737.58	1106.38	1475.17	1843.96
0.65	252.76	505.52	758.28	1011.05	1263.81
0.7	160.50	321.00	481.51	642.01	802.51
0.75	97.06	194.12	291.19	388.25	485.31

Finalmente podemos graficar los perfiles de saturación para los diferentes tiempos:

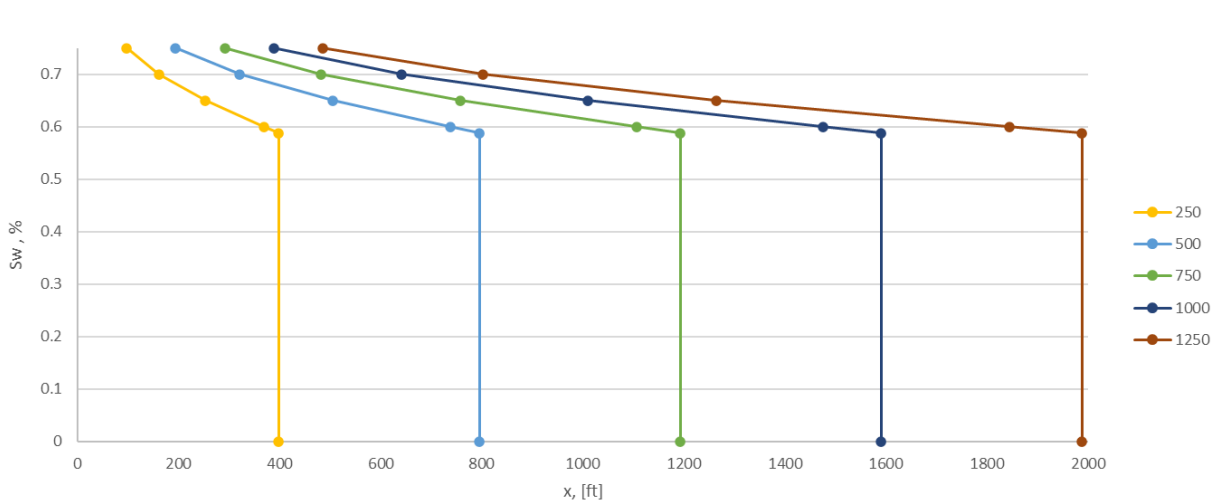


Figura 35. Perfiles de saturación de agua para diferentes tiempos, solución analítica.

Para la validación, se comparan las distancias correspondientes a la saturación del frente de desplazamiento ($s_{wf}=0.588$) con las obtenidas mediante el simulador. Se utilizaron 20 nodos y un paso de tiempo de 1 día. A continuación, se muestran los perfiles de saturación obtenidos con el simulador:

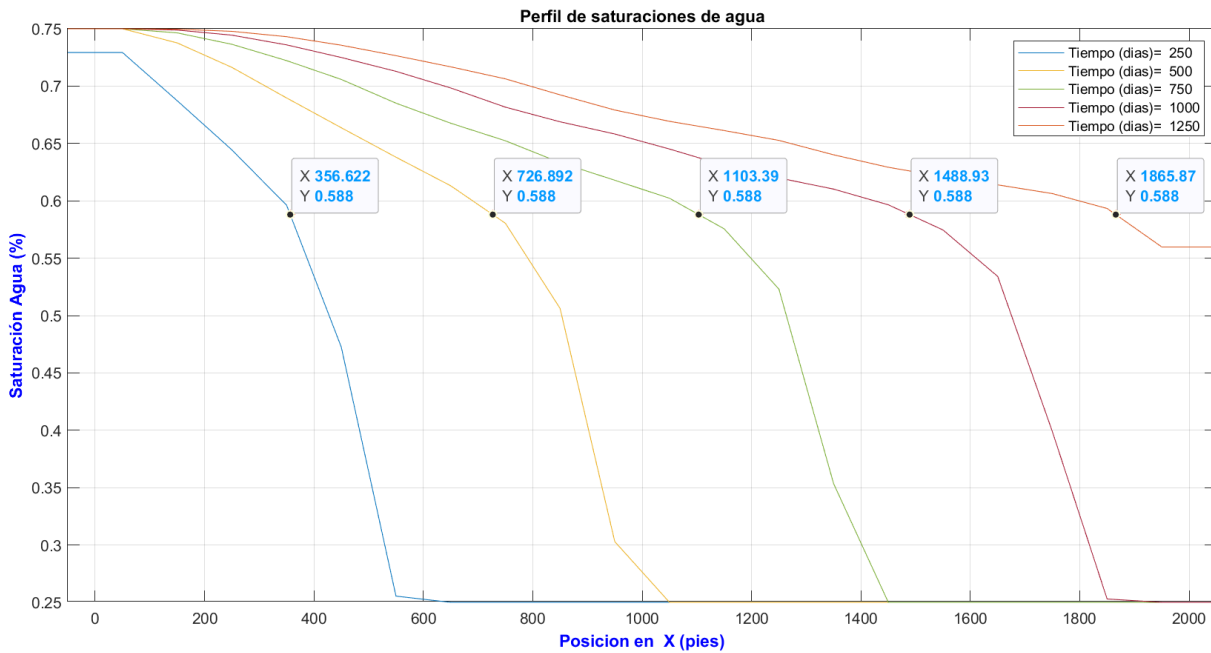


Figura 36. Perfiles de saturación de agua en diferentes tiempos, simulación numérica (20 nodos).

Nótese que en el caso de la solución numérica el frente de desplazamiento no avanza de forma uniforme, es decir, se tienen diferentes distancias (o velocidades) para saturaciones menores a la s_{wf} . Este problema se reduce al incrementar el número de nodos y reducir el paso de tiempo. Si aumentamos el número de nodos a 150:

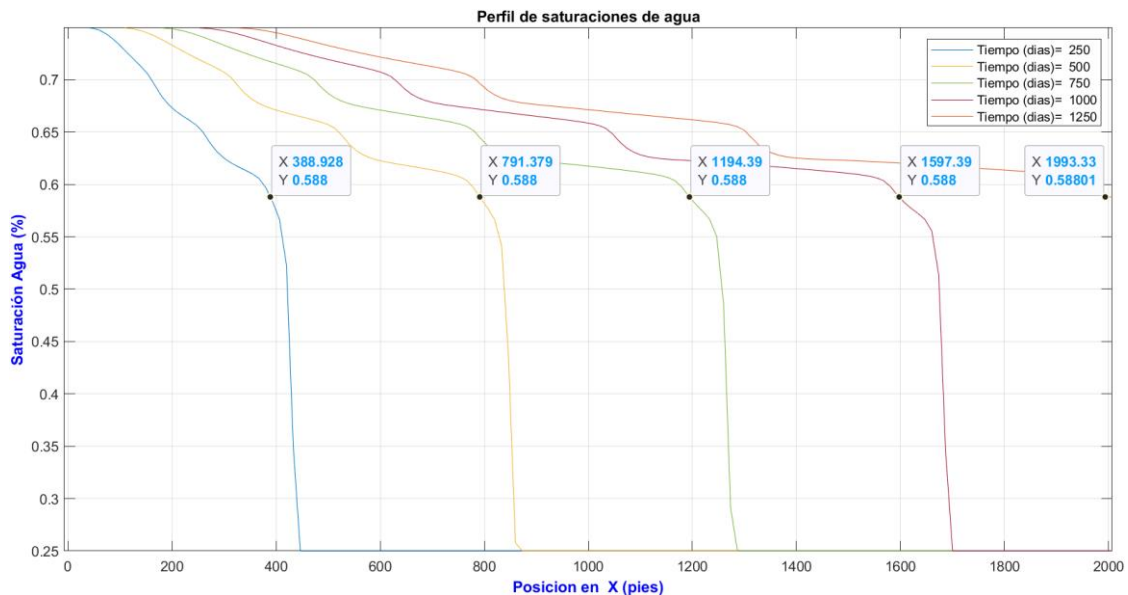


Figura 37. Perfiles de saturación de agua para diferentes tiempos, simulación numérica (150 nodos).

Tabla 11. Comparación de la distancia recorrida por el frente de agua para diferentes tiempos (20 nodos).

Tiempo [días]	Distancia [ft] para Swf=0.588		% de error
	Analítico	Simulado	
t=250	397.7444244	356.622	-10.338907
t=500	795.4888488	726.892	-8.623232
t=750	1193.233273	1103.39	-7.5293972
t=1000	1590.977698	1488.93	-6.4141501
t=1250	1988.722122	1865.87	-6.1774403

Tabla 12. Comparación de la distancia recorrida por el frente de agua para diferentes tiempos (150 nodos).

Tiempo [días]	Distancia [ft] para Swf=0.588		% de error
	Analítico	Simulado	
t=250	397.7444244	388.928	-2.2166054
t=500	795.4888488	791.379	-0.5166444
t=750	1193.233273	1194.39	0.09694054
t=1000	1590.977698	1597.39	0.40304163
t=1250	1988.722122	1993.31	0.23069478

5.2. Validación: MRST

Para el caso 2D, se realiza la simulación de un arreglo con 5 pozos, en un dominio rectangular y medio homogéneo (permeabilidades iguales en ambas direcciones y porosidad constante en el espacio). Debido a la simetría, el arreglo final se reduce a dos pozos solamente, uno productor operando a presión de fondo constante y otro inyector operando a gasto constante, ambos con el mismo radio:



Figura 38. Simplificación del arreglo de 5 pozos.

Tabla 13. Datos de los pozos usados en el ejemplo 2.

# de pozo	Tipo	Valor constante	Valor	Radio [ft]
#1	Producción	Presión de fondo	3000 [psi]	0.5
#2	Inyección	Gasto	600 [bbl/día]	0.5

Al igual que el caso anterior, se considera fluido incompresible para ambas fases. La **Tabla 14** muestra los datos de entrada del modelo:

Tabla 14. Datos generales del ejemplo 2.

Variable	Valor	Unidades
Longitud en "x"	1250	ft
Longitud en "y"	1250	ft
Longitud en "z"	100	ft
# de nodos en "x"	40	-
# de nodos en "y"	40	-
Permeabilidad en "x"	0.08	Darcy
Permeabilidad en "y"	0.08	Darcy
Porosidad	0.2	%
Viscosidad del agua	1	cP
Viscosidad del aceite	2	cP
Factor de volumen del agua	1	-
Factor de volumen del aceite	1	-
Compresibilidad del agua	0	1/psi
Compresibilidad del aceite	0	1/psi
Presión inicial	4500	psi
Tiempo final	3800	días
Paso de tiempo	1	días
Swi	0.25	-

Se comparan los resultados con la herramienta MRST (Matlab Reservoir Simulation Toolbox) [32]. El código usado para la validación se basó en los ejemplos presentados en [3]. El código modificado puede encontrarse en la sección "Anexo A" al final del trabajo. Para los datos de permeabilidad relativa se utiliza el modelo de Corey [33], el cual es un modelo simple que utiliza una ley de potencias y se puede implementar de forma sencilla dentro de MRST

$$k_{rw} = (S_w)^{n_w} k_w^0 \tag{106}$$

$$k_{ro} = (1 - S_w)^{n_o} k_o^0 \tag{107}$$

A continuación se muestran los exponentes usados en el modelo, junto a las saturaciones residuales y sus respectivas permeabilidades relativas:

Tabla 15. Datos de permeabilidad relativa usados en el modelo de Corey.

	Agua	Aceite
Exponente	3	2.5
Sr	0.25	0.25
Kr a la Sr	0.4	0.6

Con este modelo y los valores mostrados en la **Tabla 15** se obtiene la siguiente curva de permeabilidad relativa:

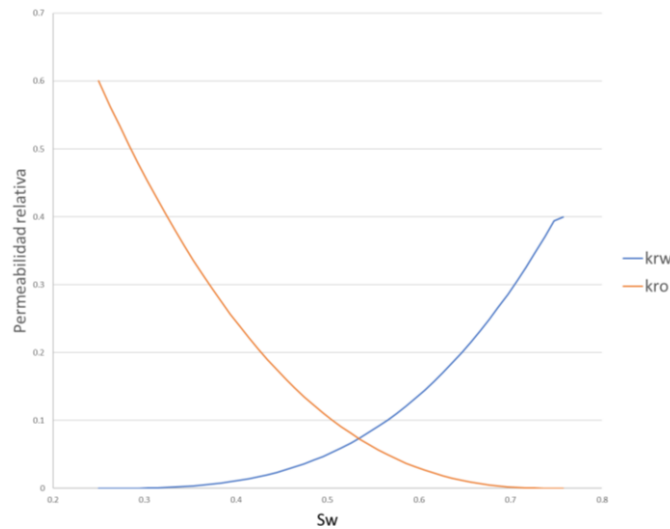


Figura 39. Curva de permeabilidad relativa vs saturación de agua del ejemplo 2.

En las figuras **Figura 40** y **Figura 41** se muestran los perfiles de saturación obtenidos mediante la herramienta MRST y la herramienta desarrollada URV, respectivamente.

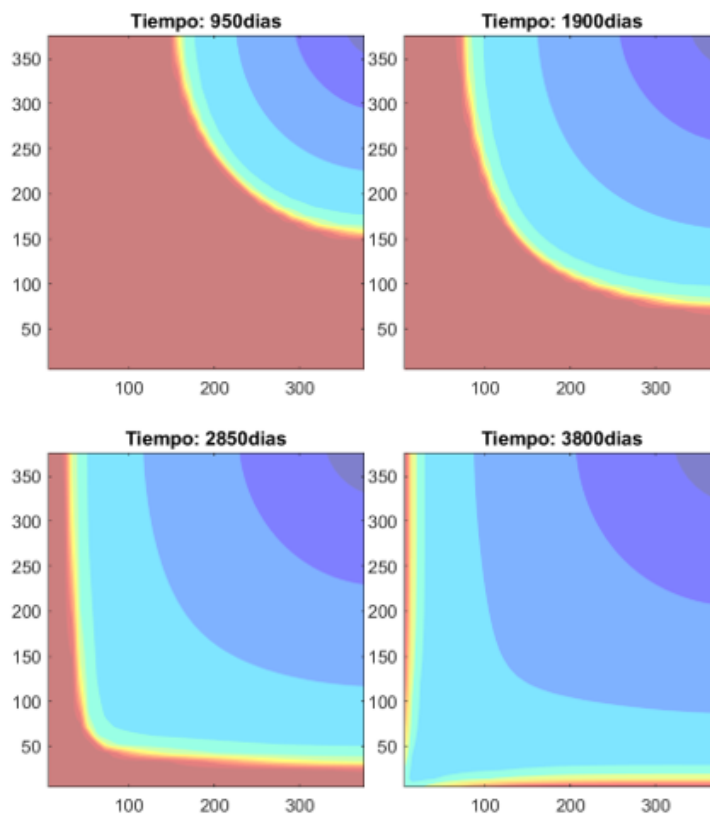


Figura 40. Perfiles de saturación para diferentes tiempos (solución MRST)

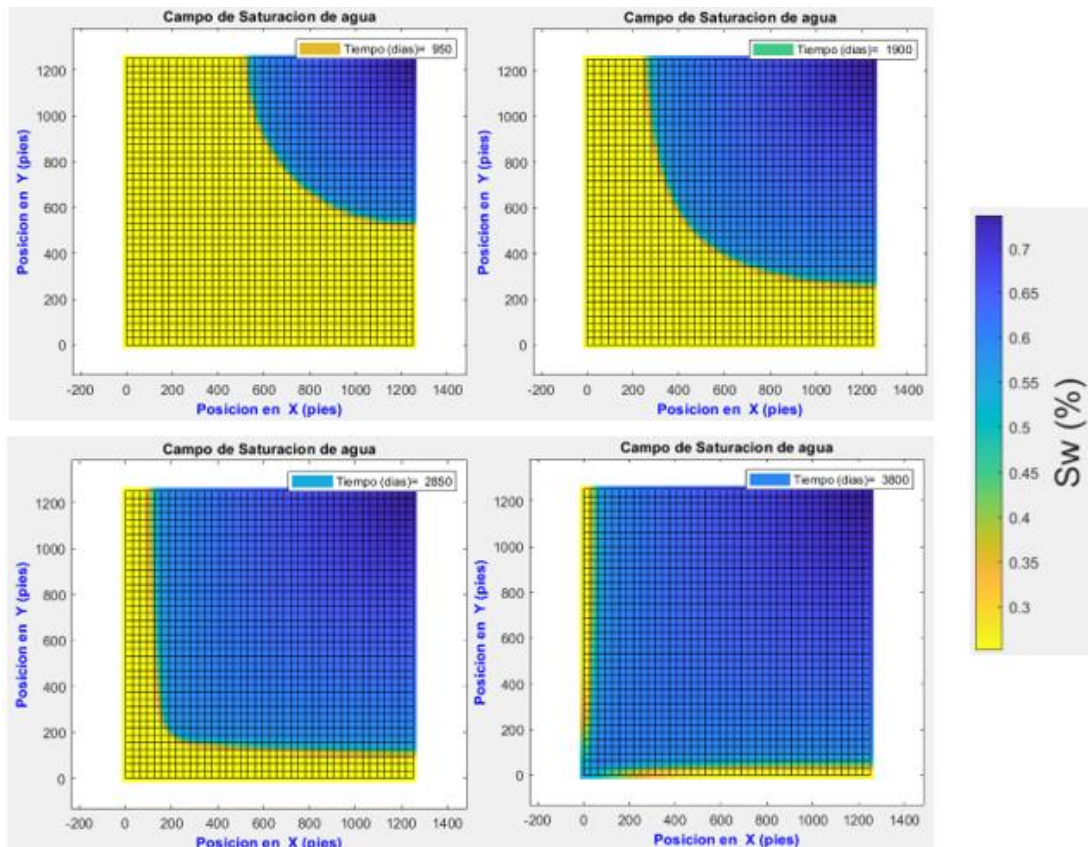


Figura 41. Perfiles de saturación para diferentes tiempos (solución URV)

A partir de los resultados obtenidos, se puede determinar el tiempo de arribo al identificar el paso de tiempo en el cual el pozo productor comienza a producir agua. En las figuras [Figura 42](#) y [Figura 43](#) se muestra, respectivamente, el gasto esperado de agua y de aceite para el pozo productor. De acuerdo con la convención usada, gastos negativos representan extracción de fluido del sistema.

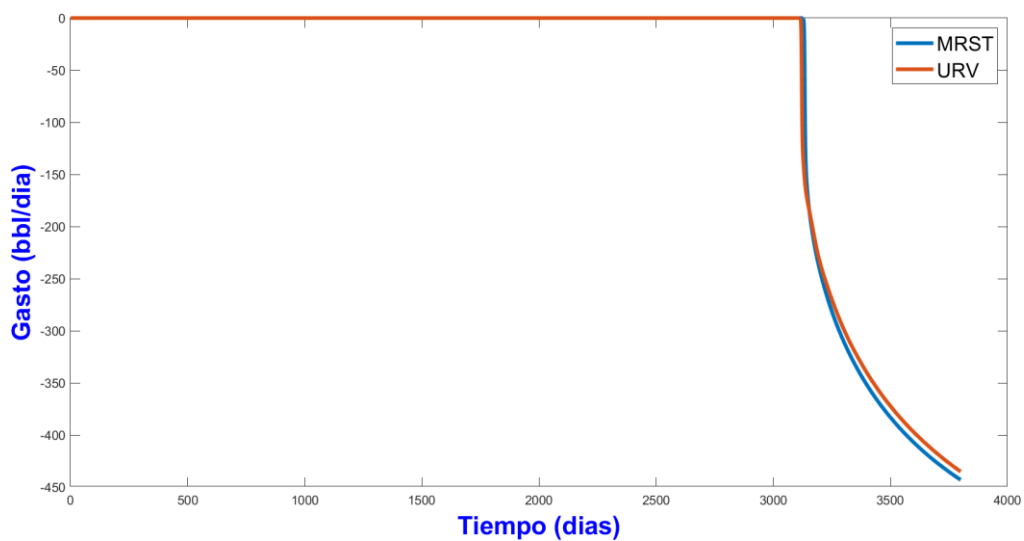


Figura 42. Gasto de agua para el pozo productor.

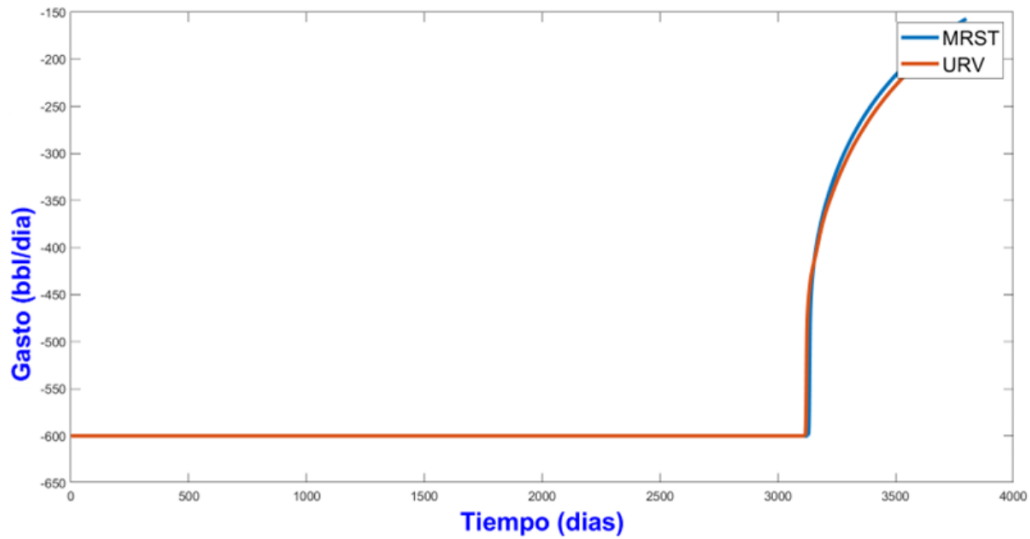


Figura 43. Gasto de aceite para el pozo productor.

Al comienzo de la simulación solo se produce aceite ya que la permeabilidad relativa del agua es cero (saturación de agua mínima). Después de la llegada del frente de agua, el gasto de aceite comienza a disminuir drásticamente mientras que el gasto de agua aumenta. Nótese que el gasto total calculado (aceite más agua) debe ser igual en todo momento al gasto del pozo inyector (600 bbl/día), lo anterior para poder mantener el balance másico en el caso de fluidos incompresibles. En la [Figura 44](#) se muestra la presión de fondo del pozo inyector. Igual que con el gasto, la presión de fondo del pozo inyector se ve alterada en el momento que el frente de desplazamiento alcanza el pozo productor. La pequeña diferencia entre ambas puede deberse al modelo de pozo utilizado y a su definición.

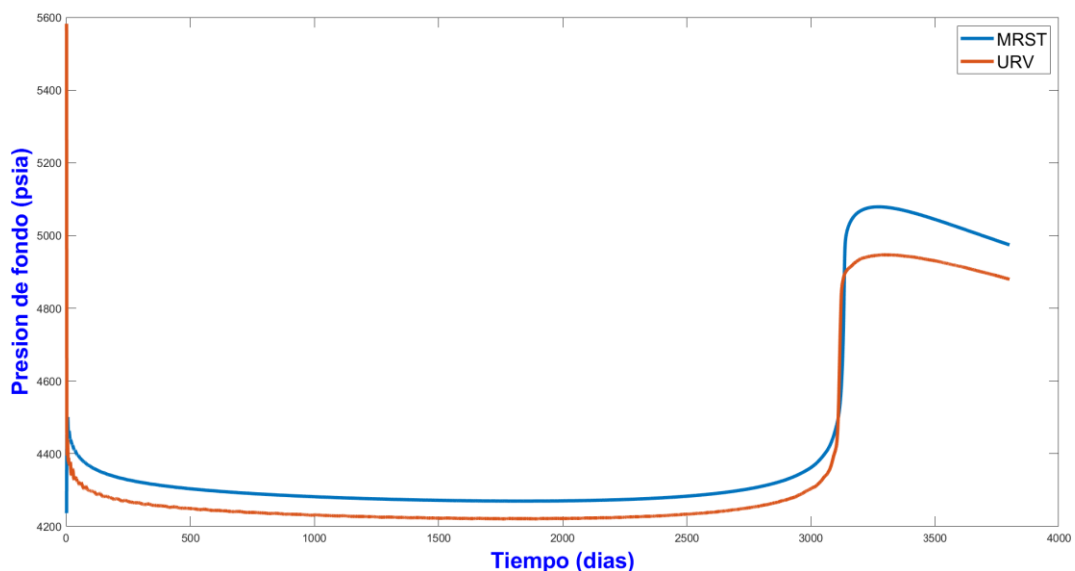


Figura 44. Presión de fondo para el pozo inyector.

Si se incrementa la viscosidad del aceite, la relación de movilidad se ve afectada (aumenta) por lo que se produce un efecto de canalización del agua y hace que el frente de desplazamiento avance más rápido. En la [Figura 45](#) y [Figura 46](#) se muestran los resultados obtenidos al aumentar diez veces la viscosidad del aceite, es decir 20 [cP].

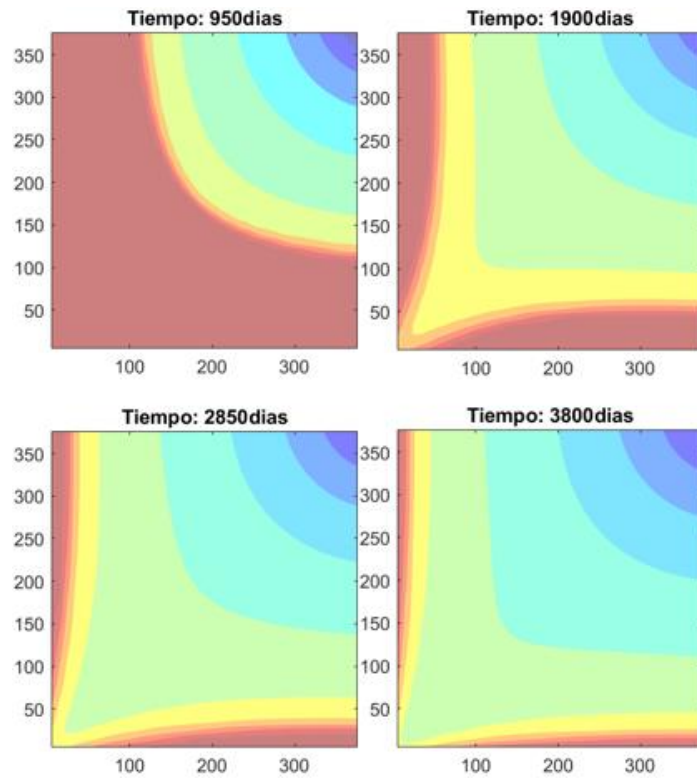


Figura 45. Perfiles de saturación para diferentes tiempos. $\mu_o=20$ [cP] (solución MRST)

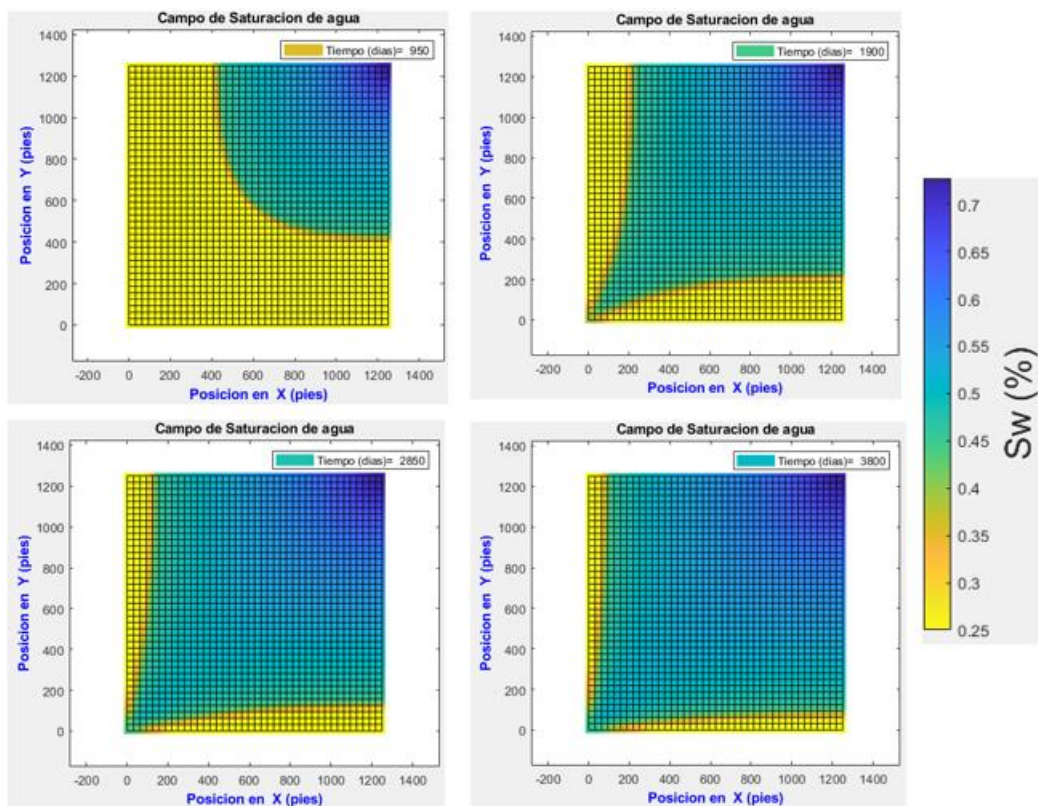


Figura 46. Perfiles de saturación para diferentes tiempos. $\mu_o=20$ [cP] (solución URV)

A partir de los datos de pozo obtenidos en la simulación se puede estimar con precisión el tiempo de arribo del frente de agua al pozo productor (momento en que se comienza a producir agua). La **Tabla 16** muestra la comparación de los tiempos de arribo esperados. Aunque el porcentaje de error aumenta para el caso de un frente de desplazamiento que se mueve más rápido, este se mantiene por debajo del 5%.

Tabla 16. Comparación del tiempo de arribo entre los dos simuladores.

Tiempo de arribo [días]			
Viscosidad del aceite	URV	MRST	% de error
2 [cP]	3100	3104	0.128
20 [cP]	1750	1815	3.581

Para el caso de flujo ligeramente compresible, se realizó un análisis de sensibilidad para evaluar su funcionamiento. Se utilizaron las mismas dimensiones que el ejemplo pasado, pero con un solo pozo productor en el centro del yacimiento operando a presión de fondo constante. Se usaron los mismos valores para las propiedades del fluido y de la roca, con excepción de la compresibilidad de las fases (**Tabla 18**). Se realizó una simulación para 500 días con un paso de tiempo igual a un día.

Tabla 17. Datos del pozo usado en el ejemplo 3.

# de pozo	Tipo	Valor constante	Valor	Radio [ft]
#1	Producción	Presión de fondo	3000 [psi]	0.5

Tabla 18. Valores de compresibilidad usados en el ejemplo 3, [1/psi]

	Cw	Co	Ct
Caso 1	3.5E-06	1.0E-05	8.38E-06
Caso 2 (x2)	7.0E-06	2.0E-05	1.68E-05
Caso 3 (x5)	17.5E-06	5.0E-05	4.19E-05
Caso 4 (x10)	35.0E-06	10.0E-05	8.38E-05

En la **Figura 47** se muestra el gasto de aceite calculado para el pozo productor, para diferentes valores de compresibilidad. Aunque el yacimiento no presenta intrusión de agua ni ningún mecanismo para mantener la presión (sin pozos productores y fronteras cerradas), el pozo logra producir por un tiempo gracias a la compresibilidad de las fases. Si se tratara con fluidos incompresibles, se estaría violando el balance de masa y las condiciones impuestas sobre el sistema no serían físicamente posibles. Conforme la presión promedio del yacimiento decae desde los 4500 (psi) hasta los 3000 (psi) (presión de fondo a la que opera el pozo), también lo hace el gradiente de presión y, por ende, el gasto aportado por el pozo. Al aumentar la compresibilidad de las fases (y de la compresibilidad total), el aporte del pozo es mayor y dura más tiempo. Para el primer caso, el pozo aportara durante aproximadamente 100 días antes de que la presión del yacimiento se iguale con la presión del pozo y este deje de fluir. En comparación, si se aumenta la compresibilidad 10 veces, el pozo seguirá produciendo incluso después de los 500 días que dura la simulación.

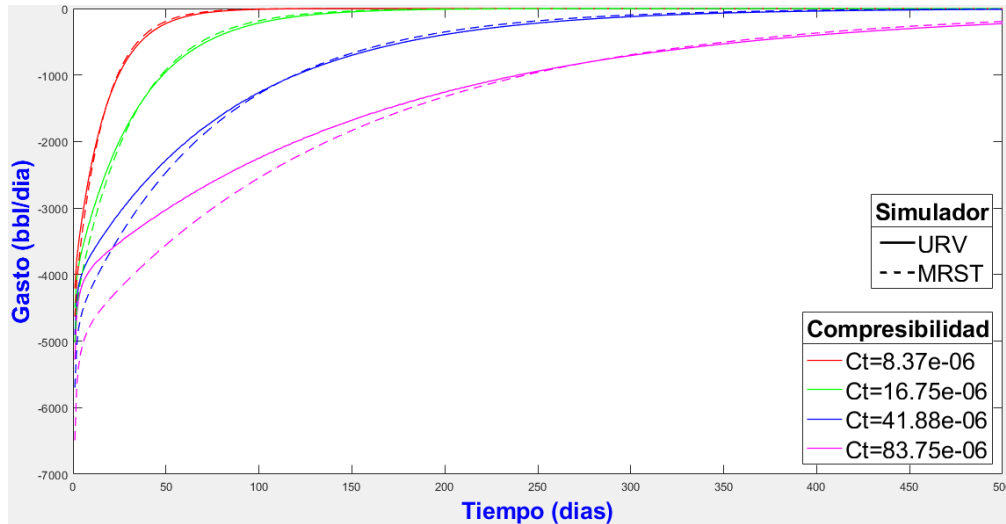


Figura 47. Gasto del pozo vs tiempo, para los diferentes valores usados de compresibilidad.

5.3. Medio heterogéneo

A continuación, se muestra un ejemplo donde se analiza un medio heterogéneo. Se utilizan las mismas dimensiones, mismo número de celdas y los mismos valores para las propiedades del fluido que en el ejemplo anterior. Para este caso, las permeabilidades en “x” y “y” son siempre iguales entre sí, pero su valor varía espacialmente de acuerdo con la Figura 48 . Es decir, se tienen dos tipos de roca diferente: la primera atraviesa en diagonal el yacimiento y tiene una permeabilidad diez veces mayor que la roca perteneciente al resto del yacimiento, (0.8 [Darcy] y .08 [Darcy], respectivamente)

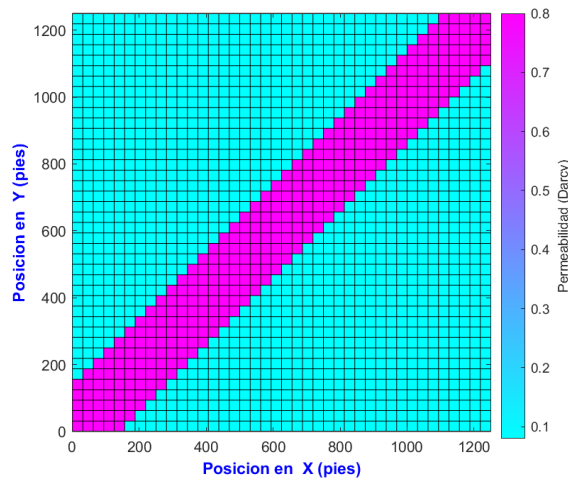


Figura 48. Mapa de permeabilidad para el ejemplo 4 ($k_x=k_y$).

Se utiliza el arreglo completo de 5 pozos mostrado en la Figura 38, (un productor en el centro y cuatro inyectores en las esquinas). Los datos de los pozos se muestran en la Tabla 19.

Tabla 19. Datos de los pozos usados en el ejemplo 4.

# de pozo	Tipo	Valor constante	Valor	Radio [ft]
#1	Producción	Presión de fondo	3000 [psi]	0.5
#2	Inyección	Gasto	70 [bbl/día]	0.5
#3	Inyección	Gasto	70 [bbl/día]	0.5
#4	Inyección	Gasto	70 [bbl/día]	0.5
#5	Inyección	Gasto	70 [bbl/día]	0.5

En la [Figura 49](#) se observa como el frente de agua de los dos pozos ubicados sobre la diagonal avanza más rápido y llega primero al pozo productor en comparación con el frente de agua de los otros dos pozos (debido a la alta permeabilidad). Una solución para evitar la canalización temprana del agua sería usar un patrón de pozos diferente.

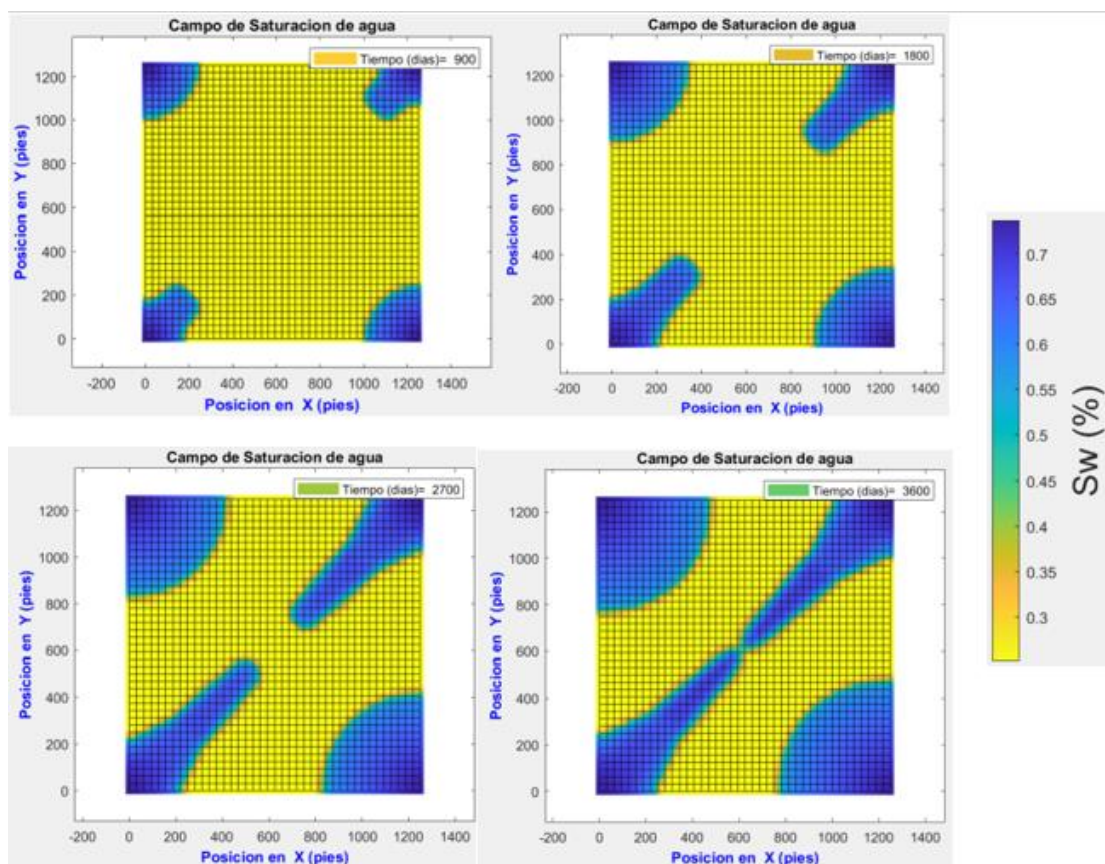


Figura 49. Perfiles de saturación para diferentes tiempos, ejemplo 4.

6. Conclusiones

La aplicación desarrollada permite predecir exitosamente los campos de presión y saturación en un yacimiento heterogéneo, así como las condiciones de operación para los diferentes pozos planteados. La herramienta se validó con éxito al comparar los resultados obtenidos para fluido incompresible con la solución analítica de Buckley-Leverett para el caso 1D, logrando predecir con gran exactitud la ubicación del frente de agua. Para el caso 2D, se validó con los resultados arrojados por el software MRST, tanto para fluidos incompresibles como compresibles al comparar los campos de saturación obtenidos con ambas herramientas. También se comparó la presión de fondo y los gastos de los pozos, obteniéndose valores muy parecidos a los obtenidos con el software de código libre. Se encontró una pequeña diferencia entre ambas herramientas en el cálculo de la velocidad del frente de agua. Conforme se incrementa la velocidad de dicho frente, la diferencia en el tiempo de arribo calculado entre ambas herramientas también se incrementa. Para el caso de fluidos compresibles, el gasto calculado de los pozos entre ambas herramientas es el mismo cuando se establecen compresibilidades bajas para ambas fases. Conforme la compresibilidad se incrementa, la diferencia en el gasto inicial entre ambas herramientas también se incrementa. Sin embargo, dicha diferencia se reduce conforme el tiempo avanza hasta que ambos gastos se igualan, independientemente de la compresibilidad establecida.

Para el caso de un medio heterogéneo con diferentes valores de permeabilidad, la herramienta toma en cuenta los cambios espaciales en la propiedad de la roca y logra simular de forma esperada la canalización de agua. La herramienta también predice exitosamente la canalización de agua debido al cambio en la movilidad de las fases. En resumen, la aplicación puede ser usada para establecer la mejor estrategia de producción de un yacimiento determinado. Por ejemplo, para establecer la mejor ubicación de los pozos, calcular el aceite producido (y corte de agua) para un tiempo dado y estimar el factor de recobro esperado, o para determinar si el yacimiento en cuestión es candidato para implementar un proceso de inyección de agua.

7. Bibliografía

- [1] «International Energy Outlook (IEO),» 2021. [En línea]. Available: <https://www.eia.gov/outlooks/ieo/>. [Último acceso: 2023].
- [2] J. Laherrère, C. A. S. Hall y R. Bentley, «How much oil remains for the world to produce? Comparing assessment methods, and separating fact from fiction,» *Current Research in Environmental Sustainability*, vol. 4, 2022.
- [3] K.-A. Lie, *An Introduction to Reservoir Simulation Using MATLAB/GNU Octave: User Guide for the MATLAB Reservoir Simulation Toolbox (MRST)*, Cambridge University Press, 2019.
- [4] L. A. García Navarrete, *Modelación numérica de flujos monofásicos de crudos ligeros y pesados en yacimientos homogéneos e isotrópicos*, UNAM, 2019.
- [5] S. E. Buckley y M. Leverett, «Mechanism of fluid displacement in sands,» *Transactions of the AIME*, vol. 146, nº 01, pp. 107-116, 1942.
- [6] P. M. Blair y C. F. Weinaug, «Solution of two-phase flow problems using implicit difference equations,» *SPE*, vol. 9, nº 04, pp. 417-424, 1969.
- [7] K. H. Coats, «Computer Simulation of Three-Phase Flow in Reservoirs,» *U. of Texas*, 1968.
- [8] V. Karović Maričić, B. Leković y D. Danilović, «Factors Influencing Successful Implementation Of Enhanced Oil Recovery Projects,» *Podzemni radovi*, vol. 22, pp. 41-50, 2014.
- [9] B. Amjad, A. Bhatti y S. Mahmood, «Effect of Stratification on Segregation in Carbon Dioxide Miscible Flooding in a Water-Flooded Oil Reservoir,» *Pakistan Journal of Engineering and Applied Sciences*, vol. 13, pp. 29-36, 2013.
- [10] A. Satter y G. Thakur, *Integrated Petroleum Reservoir Management: A Team Approach*, Tulsa, Oklahoma: Pennwell Books, 1994.
- [11] T. Ahmed y N. Meehan, *Advanced Reservoir Management and Engineering*, 2nd Edition ed., Gulf Professional Publishing, 2011.
- [12] H. P. G. Darcy, *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*, V. Dalmont, Ed., Paris, 1856.

- [13] T. Kogure, K. Kitamura, Y. Tatsuya, O. Nishizawa y Z. Xue, «Relative Permeability of Water and Supercritical CO₂ System under Steady-state Flow Conditions in Porous Sandstones,» *Journal of Geography (Chigaku Zasshi)*, vol. 120, pp. 944-959, 2011.
- [14] M. Muskat y R. D. Wyckoff, *The Flow of Homogeneous Fluids through*, vol. 12, New York: McGraw-Hill, 1937.
- [15] R. D. Sydansk y L. Romero-Zerón, *Reservoir Conformance Improvement*, SPE, 2011.
- [16] A. Bahadori, *Fundamentals of Enhanced Oil and Gas Recovery from Conventional and Unconventional Reservoirs*, Gulf Professional Publishing, 2018.
- [17] T. Ahmed, *Reservoir Engineering Handbook*, 4th Edition ed., Gulf Professional Publishing, 2010.
- [18] V. Vishnyakov, B. Suleimanov, A. Salmanov y E. Zeynalov, *Primer on Enhanced Oil Recovery*, Gulf Professional Publishing, 2019.
- [19] F. Craig, T. Geffen y R. Morse, «Oil Recovery Performance Of Pattern Gas Or Water Injection Operations From Model Tests,» *Transactions, AIME*, vol. 204, p. 7–15, 1955.
- [20] G. M. Iqbal y A. Satter, *Reservoir engineering : the fundamentals, simulation, and management of conventional and unconventional recoveries*, Gulf Professional Publishing, 2016.
- [21] D. Guérrillot, M. Kadiri y S. Trabelsi, «Buckley–Leverett Theory for Two-Phase Immiscible Fluids Flow Model with Explicit Phase-Coupling Terms,» *Water*, vol. 12, p. 3041, 2020.
- [22] L. Ding, Q. Wu, L. Zhang y D. Guérrillot, «Application of Fractional Flow Theory for Analytical,» *Water*, vol. 12, p. 2195, 2020.
- [23] H. J. Welge, «A Simplified Method for Computing Oil Recovery by Gas or Water Drive,» *Journal of Petroleum Technology*, vol. 4, pp. 91-98, 1952.
- [24] W. Lyons, *Working Guide to Reservoir Engineering*, Gulf Professional Publishing, 2009.
- [25] P. Terwilliger, L. Wilsey, H. N. Hall, P. Bridges y R. Morse, «An Experimental and Theoretical Investigation of Gravity Drainage Performance,» *Transactions of the AIME*, vol. 192, p. 285–296, 1951.
- [26] M. K. Hubbert, «Darcy's law and the field equations of the flow of underground fluids,» *AIME*, vol. 207, pp. 22-239, 1956.

- [27] T. Ertekin, J. H. Abou-Kassem y G. R. King, *Basic Applied Reservoir Simulation*, vol. 7, Society of Petroleum Engineers, 2001.
- [28] D. W. Peaceman, «Interpretation of Well-Block Pressures in Numerical Reservoir Simulation With Nonsquare Grid Blocks and Anisotropic Permeability,» *SPE J*, vol. 23, nº 03, 1983.
- [29] K. Aziz y A. Settari, *Petroleum Reservoir Simulation*, Applied Science Publishers, 1979.
- [30] M. J. Wheatley, «A Version Of Two Point Upstream Weighting For Use In Implicit Numerical Reservoir Simulators,» *Artículo presentado en: SPE Reservoir Simulation Symposium*, nº SPE-7677-MS, 1979.
- [31] . M. R. Todd, P. M. O'Dell y G. .. Hirasaki, «Methods for Increased Accuracy in Numerical Reservoir Simulators,» *SPE J*, vol. 12, p. 515–530, 1972.
- [32] «MATLAB Reservoir Simulation Toolbox (MRST),» 2023. [En línea]. Available: <https://www.sintef.no/projectweb/mrst/>. [Último acceso: 2023].
- [33] A. T. Corey, «The interrelation between gas and oil relative permeabilities,» *Producers Monthly*, vol. 19, pp. 38-41, 1954.
- [34] S. Krumdieck, A. Dantas y S. Page, «Energy Risk to Activity Systems as a Function of Urban Form,» *New Zealand Transport Authority*, vol. 311, 2012.

Anexo A. Código MRST

MRST es un software gratuito de código abierto usado para el modelado y la simulación de flujo en medio poroso, desarrollado por el grupo de Geociencias Computacionales del Departamento de Matemáticas y Cibernética de SINTEF (en noruego: Stiftelsen for industriell og teknisk forskning). MRST permite la simulación de yacimientos composicionales y de petróleo negro. El software contiene una amplia variedad de modelos matemáticos, métodos computacionales, herramientas y rutinas en MATLAB enfocadas en la simulación de yacimientos. MRST utiliza el método de discretización de volumen finito, específicamente, la técnica de TPFA (two point flux approximation). A continuación, se presenta el código usado para la validación del caso de fluidos incompresibles.

```

mrstModule add incomp diagnostics
gravity reset off

fluid = initCoreyFluid('mu' , [ 1, 2] .* centi*poise , ...
                      'rho', [500, 500] .* kilogram/meter^3, ...
                      'n' , [ 3, 2.5] , ...
                      'sr' , [ 0.25, .25] , ...
                      'kwm', [ .4, .6]);

s=linspace(0,1,100)';
kr = fluid.relperm(s);
plot(s,kr(:,1),'-s',s,kr(:,2),'-o');

cartDim = [40 40 1]; % dimensiones (# de celdas)
domain = [1250*ft 1250*ft 100*ft]; % tamaño en metros
% # dimensiones y tamaño
G = computeGeometry(cartGrid(cartDim,domain));
rock = makeRock(G, .08*darcy, 0.2);
pv = poreVolume(G, rock); % se calcula el volumen poroso para cada celda

W = addWell([],G, rock, 1600, 'Type', 'rate', ...
            'Val', 600*stb/day(), 'name', 'I', 'radius', 0.1524, 'Comp_i', [1 0]);
W = addWell(W,G, rock, 1, 'Type', 'bhp', ...
            'Val', 3000*psia, 'name', 'P', 'radius', 0.1524, 'Comp_i', [.25 .75]);

hT = computeTrans(G, rock);

% se prepara la ventana donde se plotearán los resultados
figure('Position',[300 550 1100 650]);
nval = 20;
cval = linspace(0,1,nval+1);
cval=.5*cval(1:end-1)+.5*cval(2:end);
colormap(flipud(.5*jet(nval)+.5*ones(nval,3)));

x = initState(G,W,4500*psia, [.25 .75]); % se inicializa el problema
x = incompTPFA(x, G, hT, fluid, 'wells', W); % se resuelve el estado inicial,

%----tiempo final de simulación (penúltimo tiempo, falta sumarle un delta t)
T = 3800*day; % T = 3800días
Numdt=3800; % número de pasos de tiempo
DT=T/Numdt
snapTime = floor(Numdt/8)

```

```

% arreglo donde se guardará la info. de los pozos (nombre, bhp,qw,qo, etc)
% para cada uno de los pasos de tiempo
wellSols = cell(Numdt+1,1);
wellSols{1} = getWellSol(W, x, fluid); % getWellSol=función creada internamente,
                                        % calcula las soluciones de cada pozo
oip      = zeros(Numdt+1,1);          % oil in place
oip(1) = sum(x.s(:,2).*pv);

for n=2:(Numdt+1)
    fprintf(1,'Main step %d: ',n);
    % se resuelve el estado inicial, para flujo incompresible
    % se obtiene presión y flujos, usando el método TPAF.
    x = incompTPFA(x, G, hT, fluid, 'wells', W);

    % --se actualizan las saturaciones
    % --NO utiliza transmisibilidades como INPUT
    x = explicitTransport(x, G, DT, rock, fluid, 'wells', W);
    wellSols{n} = getWellSol(W, x, fluid);
    oip(n) = sum(x.s(:,2).*pv);

    % se grafican los pasos de tiempo
    if mod(n,snapTime)==0
        subplot(2,4,n/snapTime);
        contourf(reshape(G.cells.centroids(:,1), G.cartDims),...
            reshape(G.cells.centroids(:,2), G.cartDims), ...
            reshape(x.s(:,1),G.cartDims), [0 cval 1], 'EdgeColor','none');
        title(['Tiempo: ',num2str(n*DT/(60*60*24) ),'dias'])
        hold on;
    else
    end

end

dt = [0; ones(Numdt,1)*T/(Numdt)];
t = cumsum(dt)/(60*60*24);

mrstModule add ad-core
plotWellSols(wellSols,cumsum(dt))

function wellSol = getWellSol(W, x, fluid)
mu = fluid.properties();
wellSol(numel(W))=struct;
for i=1:numel(W)
out = min(x.wellSol(i).flux,0); iout = out<0; % find producers
in = max(x.wellSol(i).flux,0); iin = in>0; % find injectors
lamc = fluid.relperm(x.s(W(i).cells,:))./mu; % mob in completed cell
fc = lamc(:,1)./sum(lamc,2); %
lamw = fluid.relperm(W(i).compi)./mu; % mob inside wellbore
fw = lamw(:,1)./sum(lamw,2); %
wellSol(i).name = W(i).name;
wellSol(i).bhp = x.wellSol(i).pressure;
wellSol(i).wcut = iout.*fc + iin.*fw;
wellSol(i).Sw = iout.*x.s(W(i).cells,1) + iin.*W(i).compi(1);
wellSol(i).qWs = sum(out.*fc) + sum(in.*fw);
wellSol(i).qOs = sum(out.*(1-fc)) + sum(in.*(1-fw));
end
end

```

Para el caso de fluidos compresibles, MRST utiliza el método completamente implícito, usando la técnica de diferenciación automática para completar el Jacobiano dentro del método de Newton-Raphson. A continuación, se presenta el código usado para la validación del caso de fluidos compresibles.

```

mrstModule add incomp diagnostics

if exist('isCompr','var')~=1
    isCompr = true;
end

cartDim = [40 40 1];
domain = [1250*ft 1250*ft 100*ft];
G      = computeGeometry(cartGrid(cartDim,domain));

figure(1); clf
plotGrid(G); view(3); axis tight

rock = makeRock(G, .08*darcy, 0.2);
cr   = 0;
pR   = 200*barsa;
pvR  = poreVolume(G, rock);
pv   = @(p) pvR .* exp(cr * (p - pR) );

p = linspace(100*psia,5000*psia,30)';
s = linspace(0,1,50)';
figure(1), clf
plot(p/barsa, pvR(1).*exp(cr*(p-pR)), 'LineWidth', 2);

fluid = initCoreyFluid('n' , [ 3, 2.5] , ...
                      'sr' , [ 0.25, .25] , ...
                      'kwm', [ .4, .6]);

muW   = 1*centi*poise;
cw    = 35.0e-6/psia*double(isCompr);
rhoWR = 1000*kilogram/meter^3;
rhoWS = 1000*kilogram/meter^3;
rhoW  = @(p) rhoWR .* exp( cw * (p - pR) );
krW   = @(S) S.^3;

muO   = 2*centi*poise;
co    = 10.0e-5/psia*double(isCompr);
rhoOR = 1000*kilogram/meter^3;
rhoOS = 1000*kilogram/meter^3;
rhoO  = @(p) rhoOR .* exp( co * (p - pR) );
krO   = @(S) S.^2.5;

figure(1), subplot(1,2,1)
plot(p/barsa, [rhoW(p), rhoO(p)], 'LineWidth', 2);
legend('Water density', 'Oil density', 'Location', 'best')

subplot(1,2,2);
plot(s, [krW(s), krO(s)], 'LineWidth', 2);

```

```

legend('krW', 'kr0', 'Location', 'NorthWest');

nf = G.faces.num;
nc = G.cells.num;
N = double(G.faces.neighbors);
F = G.cells.faces(:,1);
intInx = all(N ~= 0, 2);
N = N(intInx, :);

hT = computeTrans(G, rock);
T = 1 ./ accumarray(F, 1 ./ hT, [nf, 1]);
T = T(intInx);
nf = size(N,1);

D = sparse([(1:nf)'; (1:nf)'], N, ones(nf,1)*[-1 1], nf, nc);
grad = @(x) D*x;
div = @(x)-D'*x;
avg = @(x) 0.5 * (x(N(:,1)) + x(N(:,2)));
upw = @(flag, x) flag.*x(N(:, 1)) + ~flag.*x(N(:, 2));
gradz = grad(G.cells.centroids(:,3));
spy(D)

gravity reset off,
g = norm(gravity);
equil = ode23(@(z,p) g.* rho0(p), [0, max(G.cells.centroids(:,3))], pR);
p0 = reshape(deval(equil, G.cells.centroids(:,3)), [], 1); clear equil
p0(:)=4500*psia
sw0 = zeros(G.cells.num, 1);
sw0(:)=.25
ioip = sum(pv(p0).*(1-sw0).*rho0(p0));

nstep = 500;
Tf = 500*day;
dt = Tf/nstep*ones(1,nstep);
nstep = numel(dt);

W = addWell([],G, rock, 780, 'name', 'P', 'radius', 0.1524);
wc = W(1).cells;
WI = W(1).WI;

q_conn = @(p) WI .* (rho0(p(wc)) / mu0) .* (3000*psia - p(wc));
[outPres, outIx] = deal(3000*psia, wc);

[p, sw] = initVariablesADI(p0, sw0);
[pIx, sIx] = deal(1:nc, (nc+1):(2*nc));
[tol, maxits] = deal(1e-5,15);
pargs = {};

sol = repmat(struct('time',[],'pressure',[], 's', []),[nstep+1,1]);
sol(1) = struct('time', 0, 'pressure', value(p), 's', value(sw));

t = 0;
hwb = waitbar(t, 'Simulation ..');
nits = nan(nstep,1);

```

```

i = 1; clear cnd;

for n=1:nstep

    t = t + dt(n);
    fprintf('\nTime step %d: Time %.2f -> %.2f days\n', ...
        n, convertTo(t - dt(n), day), convertTo(t, day));

    resNorm = 1e99;
    [p0, sw0] = deal(value(p), value(sw));
    nit = 0;
    while (resNorm > tol) && (nit <= maxits)

        [rW,rW0,r0,r00] = deal(rhoW(p), rhoW(p0), rho0(p), rho0(p0));
        [vol, vol0] = deal(pv(p), pv(p0));

        mobW = krW(sw)./muW;
        mob0 = kr0(1-sw)./mu0;

        lol=fluid.relperm(sw.val);

        mobW.val=lol(:,1)./muW;
        mob0.val=lol(:,2)./mu0;

        dp = grad(p);
        dpW = dp-g*avg(rW).*gradz;
        dp0 = dp-g*avg(r0).*gradz;

        vW = -upw(value(dpW) <= 0, rW.*mobW).*T.*dpW;
        v0 = -upw(value(dp0) <= 0, r0.*mob0).*T.*dp0;

        water = (1/dt(n)).*(vol.*rW.*sw - vol0.*rW0.*sw0) + div(vW);
        oil = (1/dt(n)).*(vol.*r0.*(1-sw) - vol0.*r00.*(1-sw0)) + div(v0);

        oil(outIx) = oil(outIx) - q_conn(p)

        eqs = {oil, water};
        eq = combineEquations(eqs{:});

        cnd(i) = condest(eq.jac{1}); i = i+1;

        res = eq.val;
        upd = -(eq.jac{1} \ res);
        p.val = p.val + upd(pIx);
        sw.val = sw.val + upd(sIx);
        sw.val = max( min(sw.val, 1), 0);

        resNorm = norm(res);
        nit = nit + 1;
        fprintf(' Iteration %3d: Res = %.4e\n', nit, resNorm);
    end

    cnd(i) = NaN; i=i+1;

```

```

if nit > maxits
    error('Newton solves did not converge')
else % plot
    nits(n) = nit;

    figure(1); clf
    subplot(2,1,1)
    plotCellData(G, value(p)/barsa, pargs{:});
    title('Pressure'), view(30, 40); caxis([100 250]);

    subplot(2,1,2)
    plotCellData(G, 1-value(sw), pargs{:});
    caxis([0, 1]), view(30, 40); title('Saturation')
    drawnow

    sol(n+1) = struct('time', t, ...
                    'pressure', value(p), ...
                    's', value(sw));
    waitbar(t/Tf,hwb);
    pause(.1);
end
end

close(hwb);

t = arrayfun(@(x) x.time, sol)/day;
figure; hold all
oip = arrayfun(@(x) sum(pv(x.pressure).*(1-x.s).*rho0(x.pressure)), sol);

PodAcum=convertTo((ioip - oip)./rhoOS , stb)
PodDiaria(1)=PodAcum(1)

for n=2:length(PodAcum)
    PodDiaria(n)=PodAcum(n)-PodAcum(n-1)
end

PodDiaria=-PodDiaria
plot(t,PodDiaria,'-o','MarkerFaceColor',[.6 .6 .6])

```