

Josep Emili Vilanova Torà

**Redisseny, anàlisi i modelització de les màquines
industrials Romanes de serrar pedra**

**Treball Fi de Màster
dirigit pel Dr. Genaro González Baixauli**

Màster en Enginyeria Industrial



UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

Tarragona

2020

Josep Emili Vilanova Torà

**Redisseny, anàlisi i modelització de les màquines
industrials Romanes de serrar pedra**

DOCUMENT I: Índex General



UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

Tarragona

2020

Document I: Índex General

Document II: Memòria

1	Introducció.....	1
2	Dissenys estudiats	4
3	Funcionament de la màquina	7
4	Disseny general dimensional i modelització de la màquina.....	8
5	Moment motor de la màquina	11
	5.1 Situació de funcionament en estacionari.....	11
	5.2 Situació d'arranc	12
6	Força de fricció de l'eix.....	12
7	Força de fricció de les serres.....	12
8	Anàlisi de l'eficiència potencial en estacionari	13
9	Càlcul del arranc.....	13
10	Velocitat de funcionament	14
11	Càlcul resistent.....	14
	11.1 Optimització de l'eix	15
	11.2 Optimització de les bieles.....	16
12	Comparativa de materials	17
13	Conclusions.....	18
14	Referències	19

Document III: Annexos

A.	Annex de disseny.....	1
	A.1. Disseny general dimensional de la màquina.....	1
	A.2. Disseny de la roda.....	4
	A.3. Disseny del conjunt de serres.....	5
B.	Annex de càlculs.....	6
	B.1. Modelització de la màquina	6
	B.1.1. Modelització de la roda	6
	B.1.2. Modelització de l'eix.....	6
	B.1.3. Modelització dels cigonyals.....	7
	B.1.4. Modelització de les bieles	7
	B.1.5. Modelització de les serres.....	8
	B.2. Estudi de la compatibilitat cinemàtica.....	8
	B.3. Càlcul del moment motor	9
	B.3.1. Situació de funcionament en estacionari	10
	B.3.2. Situació d'arranc.....	11

B.4.	Força de fricció de l'eix	12
B.5.	Força de fricció de les serres	13
B.6.	Anàlisi de la eficiència potencial en estacionari.....	14
B.7.	Càlcul del arranc	18
B.7.1.	Introducció al mètode de càlcul: reducció dinàmica	18
B.7.2.	Explicació del càlcul	19
B.7.3.	Estudi en una posició aleatòria.....	20
B.7.4.	Estudi en la posició més desfavorable.....	22
B.8.	Velocitat de funcionament.....	24
B.9.	Càlcul resistent	28
B.9.1.	Optimització de l'eix.....	32
B.9.2.	Optimització de les bieles	33
B.9.3.	Comparativa de materials.....	37

Document IV: Plànols

00.	Conjunt
01.	Roda hidràulica
02.	Eix motor
03.	Cigonyal
04.	Biela
05.	Conjunt serres
05.1.	Conjunt serres optimització

Josep Emili Vilanova Torà

**Redisseny, anàlisi i modelització de les màquines
industrials Romanes de serrar pedra**

DOCUMENT II: Memòria



UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

Tarragona

2020

Índex

1	Introducció.....	1
2	Dissenys estudiats	4
3	Funcionament de la màquina	7
4	Disseny general dimensional i modelització de la màquina.....	8
5	Moment motor de la màquina	11
	5.1 Situació de funcionament en estacionari.....	11
	5.2 Situació d'arranc	12
6	Força de fricció de l'eix.....	12
7	Força de fricció de les serres.....	12
8	Anàlisi de l'eficiència potencial en estacionari	13
9	Càlcul del arranc.....	13
10	Velocitat de funcionament	14
11	Càlcul resistent	14
	11.1 Optimització de l'eix	15
	11.2 Optimització de les bieles.....	16
12	Comparativa de materials	17
13	Conclusions.....	18
14	Referències	19

1 Introducció

Des dels últims anys, i arrel de diferents escrits i descobriments arqueològics, la idea de que a l'època dels romans pogueren existir màquines en molins hidràulics per tal de tallar pedra de ha cobrat força.

L'arquitecte Vitruvioio, als seus escrits, ja va fer menció al molí hidràulic descrivint-lo com a que "la transmissió de la força d'una nòria es realitza a través d'un eix i unit a ell, una roda dentada que activa al mateix temps una altra roda que és la responsable de moure la mola. Els molins hidràulics funcionen seguint aquest principi, a diferència de que al final del eix porten una roda dentada colocada en paral·lel a la roda hidràulica i es mou en la seva direcció. Enganxada a aquesta roda gran es troba una altra en horitzontal, que és el que mou la mola" [1]. A pesar d'això, Vitruvioio mai arribà a dedicar cap escrit al tema del serratge de pedres, però sí va fer referència a les plaques de màrmol que decoraven la casa del rei Mausolos de Halikarnasos.

També Plini el vell mencionà la casa del rei Mausolos: "És possible que tallar el màrmol en plaques hagi estat invetat a Karien. Pel que jo sé, és la casa de Mausolos a Halikarnasos la més antiga que es coneix en les parets de totxana revestits en marbre. Mausolos morí al segon any de les 107 olimpíades, l'any 403 de la fundació de Roma (ab Urbe condita), el 351 a.C. . Segons Cornelio Nepos, el primer en tenir parets revestides de marbre a Roma fou Mamurra, un coronel de Cesar en la Galia. Tant M. Lepido com Q. Catulo Consul van posar esglaons de marbre de Numidia, cosa que produí bastanta revolta. Ell fou el cònsul l'any 676 de la fundació de Roma (78 a.C.)." [2]. Finalment, Plini menciona el serratge de pedra comparant-lo al serratge de fusta: "Aquell al que se li ocorris per primer cop el serratge de marbre per presumir, tingué una desgraciada idea. El serratge es realitza en arena i es la fulla metàl·lica la que serra, a la vegada que es balanceja sobre una linia molt fina presionant l'arena i al final serra el marbre...".

Fins que no es van trobar les primeres evidències del serratge de plaques de màrmol i de sarcòfags (que explicarem més a continuació) només es tenia com a referència directa de l'aplicació d'una serra accionada per un molí hidràulic en l'antiguitat un text del poeta romà Ausonio, el seu famós poema al riu Mosella, el qual es data a l'any 371 a.C: "A tu (Mosella) que t'arriben tan ràpid com poden les teves aigües, acariciant-te, empenyen el riu Kyll amb ímpetu i el riu Ruwer, famós pel seu marbre. Peixos excel·lents habiten dins el Kyll, en els seus remolins, girant allí al Ruwer els molins de grà i extraient fines plaques de marbre d'un bloc, grinyolant les fulles de tall, podent-se escoltar un soroll incesant desde ambdues vores" [3].

Els diferents texts de la època citats guanyen força un cop trobades les primeres evidències físiques del serratge de plaques de màrmol.

L'any 1930, a partir d'unes excavacions arqueològiques dutes a terme al temple d'Artemisa de **Gerasa**, es trobaren unes instal·lacions d'activitat secundària que es podrien definir com un taller de serratge de pedres [4]. Es trobaren espais per estancar aigua provinent d'aqüeductes, una rasa en murs als costats per recolzar un molí hidràulic (veure figura 1.1), i dos cilindres de pedra serrats de manera perfectament linial en quatre fulles (veure figura 1.2). El serratge que es pot observar en les pedres, per la profunditat i la linialitat, donà a entendre que la metodologia per dur-los a terme no havia sigut manual sinó industrial.

Aquest taller que, com s'ha mencionat, estava ubicat al temple d'Artemisa de Gerasa, es data al temps de Justinia (527-565 d.C) després de que el temple fos abandonat i abans del terratrèmol que va destruir-ho tot l'any 749 d.C. [5].



Figura 1.1. Taller de Gerasa



Figura 1.2. Cilindre de pedra ubicat al taller de Gerasa

Els resultats arqueològics evidenciaven haver trobat un taller de serratge relacionat en el que mencionà Ausonio. La referència més clara són els blocs de pedra serrats, que presentaven la mateixa profunditat i distància entre talls. Independentment d'això, no es va trobar cap de les peces de fusta ni de la roda ni de la transmissió. Però sí es localitza dins del canal del desaigüe per la roda hidràulica el sediment en l'arena de serrar.

L'Institut d'Arqueologia d'Àustria (OAI) entre l'any 1969 i 1985 trobaren un altre taller de serratge de pedra similar al de Gerasa quan excavaven la casa de la Pendent a **Efeso**. Aquest taller també es data al segle VI d.C [6]. Al igual que a Gerasa, es presenten uns murs per tal d'allotjar la roda hidràulica i un canal de desaigüe per evacuar l'aigua. L'evidència més clara de que era un taller de serratge de pedra són els blocs de pedra serrats, que presentaven novament la mateixa profunditat i distància entre talls (veure figures 1.3, 1.4 i 1.5).

El Museu Central Romanogermànic del Institut de Recerca d'Arqueologia de Leibniz (Römisch-Germanisches Zentralmuseum de Leibniz-Forschungsinstitut für Archäologie) realitzà un estudi al taller d'Efeso arribant a reconstruir la màquina de manera simple per estudiar la viabilitat de la mateixa [7]. També ha aportat documentació interna pel treball.



Figura 1.3. Taller de Efeso



Figura 1.4. Taller de Efeso



Figura 1.5. Detall del tall

Finalment, es crea una relació entre els dos descobriments arqueològics (Gerasa i Efeso) en un sarcòfag ubicat a Hieràpolis a principis del segle XXI. Al camp de tombes situat a la carretera que arriba a Hieràpolis (conegut a dia d'avui com Pamukkale, Turquia) es troben nombrosos sarcòfags amb inscripcions i (alguns) amb representacions d'imatges. Entre ells està el de Marco Aurelio Amiano (veure figura 1.5), datat a mitjans del segle III d.C i que conté una representació del que seria una màquina de serrar pedra mitjançant una roda hidràulica.



Figura 1.6. Sarcòfag de Marco Aurelio Amiano

Pareix que, en aquesta representació, Marco Aurelio Amiano demostrava l'autoria de la invenció del mecanisme de transmissió per engranatges, del mecanisme manovella – biela – pistó i la utilització per serrar pedres. L'epígraf gravat al sarcòfag el nombrava a ell com a constructor de la màquina, però no fa referència ni a la seva construcció ni al seu funcionament.

L'obtenció d'aquesta imatge al sarcòfag i els tallers trobats a Gerasa i Efeso permeten reconstruir, de manera lògica, la màquina.

2 Dissenys estudiats

Diferents persones o institucions del camp de la investigació han tret possibles dissenys per la màquina de serrar pedra dels Romans, a pesar de no haver arribat a calcular mai la seva funcionalitat i viabilitat. En primer lloc s'ha de tenir en compte els materials emprats per realitzar aquests dissenys. Trets que s'han obtingut de diferents referències ja deixaven constància dels materials emprats pels romans pel serratge de pedra: ferro i acer [8]. Els romans van professionalitzar els processos de tall mitjançant llimes de ferro. La primera descripció del procés de serratge de pedres es té per Plini, que parlà de la seva possible primera utilització al Mausoleo de Halicarnaso (352 a.C) i de com segurament es realitzava el procés de serratge [9]: "Esto se hace con arena, y parece que se hace con hierro, apretando la sierra las arenas en una delgada línea, moviéndola de una parte a otra, cortando con la misma tracción". També es coneix, degut a la seva abundància i al comerç internacional que van arribar a fer els Romans [10], que utilitzaven fusta de pi i/o roble per les seves construccions, pel que es presuposa que aquestes màquines estaven fetes en un d'aquests dos tipus de fusta.

A continuació es poden veure un sèguet de dissenys realitzats:

- Reconstrucció de la màquina de serrar pedra de F. Mangartz, Efeso [11]:

Figura a la següent pàgina degut al tamany

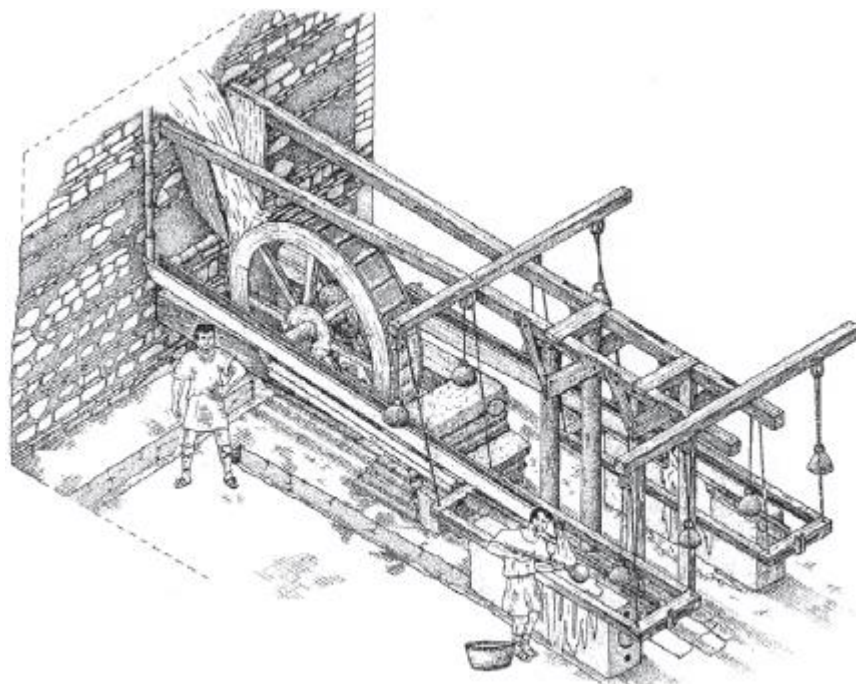


Figura 2.1. Disseny de la màquina de serrar de F. Mangartz.

- Reconstrucció de la màquina de serrar de pedra de Th. Schioler, Efeso [6]

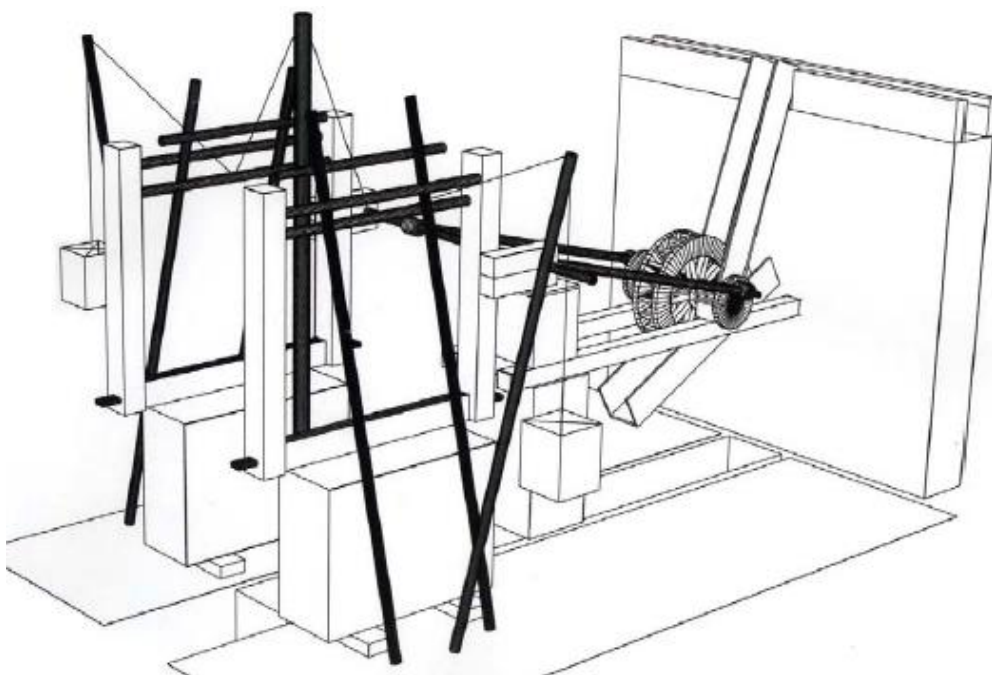


Figura 2.2. Disseny de la màquina de serrar de Th. Schioler.

- Reconstrucció de la màquina de serrar pedra de F. Russo i C. Rossi, Hierapolis [12]:

Figura a la següent pàgina degut al tamany

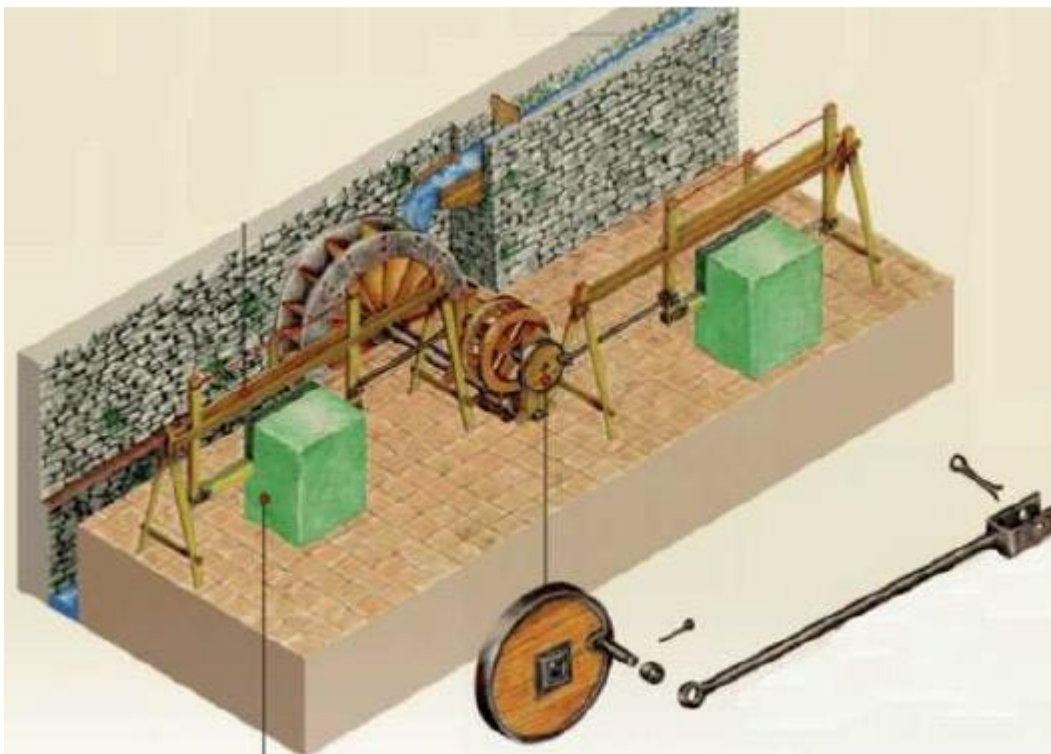


Figura 2.3. Disseny de la màquina de serrar de F. Russo i C.Rossi

- Reconstrucció de la màquina de serrar de Thierry Morin i Jacques Seigne, Gerasa [13].

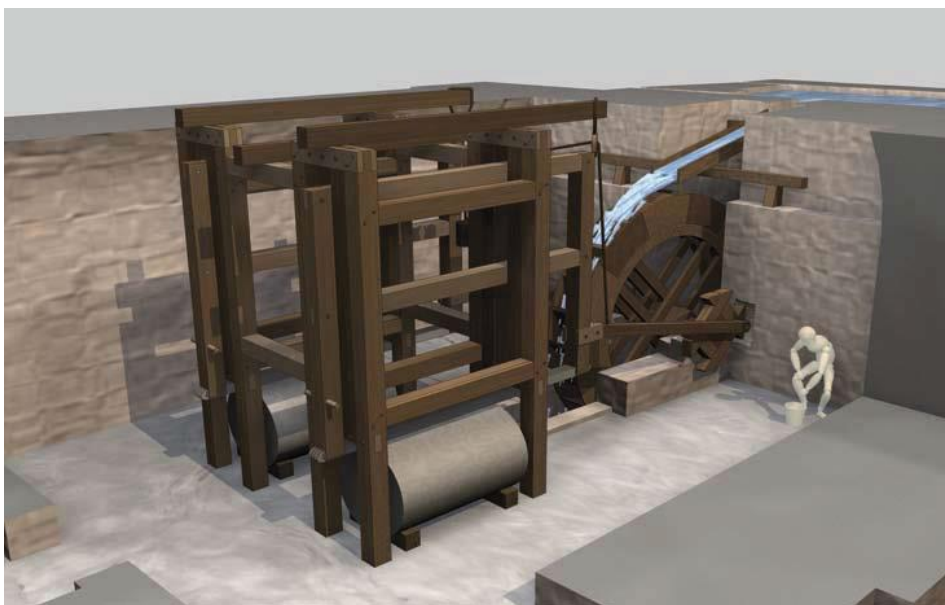


Figura 2.4. Disseny de la màquina de serrar de Thierry Morin i Jacques Seigne.

Aquests últims, además, van realitzar un projecte en l'objectiu de reconstruir la màquina físicament, aconseguint que funcionés:

Figura a la següent pàgina degut al tamany



Figura 2.5. Construcció de la màquina de serrar de Thierry Morin i Jacques Seigne.

Tal i com s'ha pogut observar, s'hi ha treballat bastant en fer dissenys sobre aquestes màquines degut al seu pes històric dins el camp de l'enginyeria. A pesar de tot, excepte per la reconstrucció física d'aquests últims, no hi han càlculs demostratius de que poguessin funcionar, des de l'arranc fins assolir una velocitat útil de treball per una banda, i la resistència per una altra.

En aquest treball es redissenya la màquina que podia estar ubicada a Gerasa a partir d'un estudi arqueològic i es realitzen tots els càlculs per tal de verificar la viabilitat de la mateixa.

3 Funcionament de la màquina

El taller disposa d'un estanc on guardar un volum d'aigua requerit per fer funcionar la màquina. L'aigua entra a la roda hidràulica fent-la girar provocant un moment respecte al seu centre de gir. La roda hidràulica és solidària a un eix que, mitjançant cigonyals o engranatges als seus extrems, transmet el moment i el moviment a les bieles que hi són connectades. Finalment, aquestes bieles transformen el moviment rotatori de l'eix i la roda en un moviment traslacional alternatiu als conjunts de serres. Les serres serren els blocs de pedra gràcies a la l'abradió produïda per la fricció d'aquestes en la sorra que les persones encarregades de dur a terme la tasca anaven tirant a la superfície de contacte.

4 Disseny general dimensional i modelització de la màquina

Per tal de poder dimensionar la màquina s'utilitza com a principal eina l'estudi arqueològic sobre el taller de serratge de pedra de Gerasa, realitzat per Archeovision i publicat al llibre Virtual Retrospect [13].

Es determinen les següents dimensions inicials pels elements que componen la màquina en funció de les troballes destacades en l'estudi esmentat:

- Roda: té un diàmetre de 13,5 peus romans i un espesor de 1 peu romà.
- Eix: té un diàmetre de 1 peu romà (0,2962 m) i una longitud de 10 peus romans.
- Cigonyals: tenen un diàmetre de 3 peus romans i un espesor de 1 peu romà.
- Bieles: tenen una secció de 1x2 peus romans i una longitud de 9 peus romans.
- Conjunt de serres: compost per 4 serres i un bastidor.

El disseny de la roda va més enllà del seu diàmetre i ample. S'ha dissenyat formant un total de 24 caixons dels quals només 10 són útils (tenen aigua) mirant la roda en un instant de temps. El disseny dels caixons s'ha realitzat tenint en compte el màxim volum d'emmagatzematge possible i la senzilla fabricació dels mateixos: dos llistons a 90°.

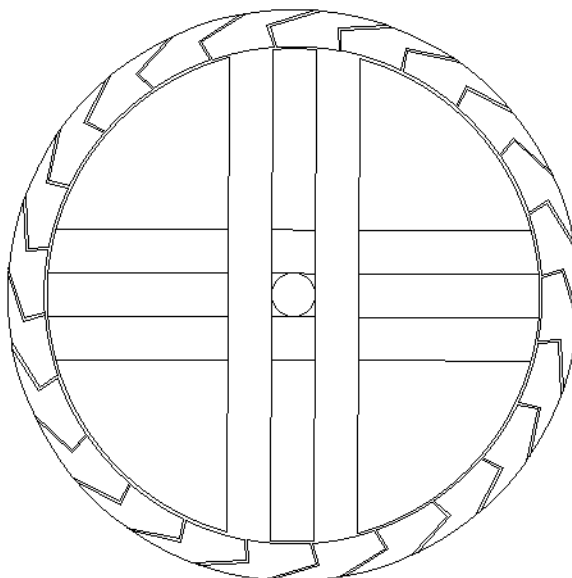


Figura 4.1. Gràfica del perfil de velocitat del pistó

El desenvolupament que s'ha portat a terme per obtenir les següents dimensions es pot consultar al document III: Anexos, apartat A.

Un cop determinades les dimensions dels components es procedeix a modelitzar-los per tal de possibilitar l'estudi del mecanisme. D'aquesta modelització s'obtenen les propietats físiques de cada element, així com la massa, l'àrea, el volúm i la inèrcia rotacional en funció dels dos materials que es preveu que utilitzaren.

A continuació es mostren les taules corresponents a cadascun dels elements i les seves propietats físiques.

Taula 4.1. Valors de la roda

	Pi	Roure
Volum (m ³)	1162,39	
Massa (kg)	627,69	883,42
Diàmetre (m)	4,0	
Espesor (m)	0,31	
Inèrcia (kg·m ²)	784,56	1104,20

Taula 4.2. Valors de l'eix

	Pi	Roure
Diàmetre (m)	0,2962	
Longitud (m)	2,962	
Àrea (m ²)	0,0172	
Volum (m ³)	0,0510	
Massa (kg)	27,55	38,78
Inèrcia (kg·m ²)	0,302	0,425

Taula 4.3. Valors del cigonyal

	Pi	Roure
Diàmetre (m)	0,8886	
Espesor (m)	0,2962	
Àrea (m ²)	0,1550	
Volum (m ³)	0,0459	
Massa (kg)	24,80	34,90
Inèrcia (kg·m ²)	2,45	3,44

Taula 4.4. Valors de les bieles

	Pi	Roure
Base (m)	0,2962	
Altura (m)	0,5924	
Longitud (m)	2,6658	
Àrea (m ²)	0,1755	
Volum (m ³)	0,4678	
Massa (kg)	252,59	355,50
Inèrcia (kg·m ²)	149,59	210,53

Pel que fa a les serres, per tal de poder realitzar els càlculs sobre la màquina es modelitza el conjunt (de 4 serres més bastidor) segons les següents hipòtesis:

- Es modelitza el conjunt de 4 serres més bastidor com a un element equivalent: un pistó.
- Es desprecia el moment d'inèrcia rotatori produït degut al joc que apareix pel tall ja que es considera el seu valor negligible.

- Es considera que el punt d'aplicació referent al pistó és l'extrem de la biela, punt on es troba la unió entre aquesta i l'estructura portant.

La massa del conjunt que a partir d'ara es nombrarà com pistó, té una massa de 149,46 kg.

El desenvolupament que s'ha portat a terme per realitzar la modelització es pot consultar al document III: Anexos, apartat B.1.

A continuació es presenta un esquema del conjunt modelitzat pel càlcul:

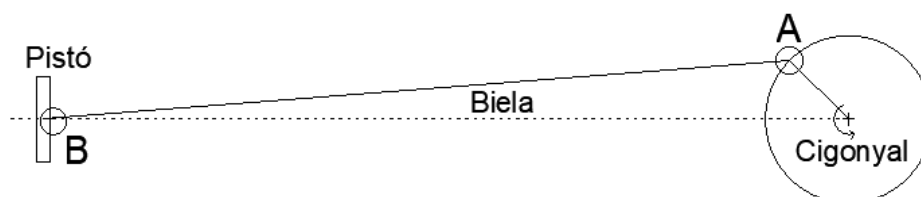


Figura 4.2. Gràfica del perfil de velocitat del pistó

Tal i com es pot observar a la figura, el sistema es pot reduir a un mecanisme manovella biela pistó, on la manovella té un radi igual a la distància entre l'eix i el passador que uneix la biela en el cigonyal (punt A). La manovella és accionada per la roda hidràulica degut a la seva connexió conjunta: l'eix. La biela transforma el moviment rotacional del cigonyal en traslacional alternatiu al pistó.

A partir de l'esquema modelat del mecanisme es realitza l'estudi de la seva compatibilitat cinemàtica deduint les equacions per tal de poder obtenir totes les velocitats en funció de la velocitat angular de la manovella i poder realitzar els diferents càlculs a continuació:

$$v_A = w_2 \cdot l_{OA} \qquad w_3 = \frac{l_{OA}}{l_{CIR3-A}} \cdot w_2$$

$$v_3 = \frac{l_{OA} \cdot l_{CIR3-cd.g3}}{l_{CIR3-A}} \cdot w_2 \qquad v_4 = \frac{l_{OA} \cdot l_{CIR3-B}}{l_{CIR3-A}} \cdot w_2$$

On:

- w_2 és la velocitat angular de la roda en rad/s.
- v_A és la velocitat al punt A mostrat a la figura anterior (unió cigonyal – biela) en m/s.
- w_3 és la velocitat angular de la biela en rad/s.
- v_3 és la velocitat lineal al centre de gravetat de la biela en m/s.
- v_4 és la velocitat lineal del pistó en m/s.

El desenvolupament que s'ha portat a terme per realitzar l'estudi de la compatibilitat cinemàtica es pot consultar al document III: Anexos, apartat B.2.

5 Moment motor de la màquina

El mecanisme és accionat degut a la potència hidràulica que aporta l'aigua sobre el volum de la roda produint un moment motor. Per tal de determinar el valor numèric provinent del concepte de moment motor s'han de contemplar dues situacions:

- Situació de funcionament en estacionari.
- Situació d'arranc.

A continuació es detalla cada situació.

5.1 Situació de funcionament en estacionari

Quan la màquina estigui en estat estacionari hi haurà un volum constant d'aigua realitzant un moment motor. Aquest volum d'aigua és el corresponent al que són capaços d'emmagatzemar els 10 caixons que, per geometria, s'abuiden i plenen de manera constant. Es desprecia les petites variacions que puguin coexistir deguda a l'entrada i sortida d'aigua dels caixons 1 i 10.

El pes de l'aigua emmagatzemat en cadascun d'aquests caixons provoca, per la distància perpendicular al centre de gir de la roda (l'eix), un moment torsor. En la següent figura es poden observar els braços de palanca:

Del disseny en CAD corresponent a la figura 4.1 s'obté l'àrea de cada un dels caixons que emmagatzemen aigua. Multiplicant aquestes àrees (m^2) per l'ample entre paret i paret de la roda (252,6 mm) s'obté el volum d'aigua (m^3) a cada caixó.

Mitjançant la densitat de l'aigua (kg/m^3) i multiplicant per la gravetat ($kg \cdot m/s^2$) s'obté el pes de cada caixó (N), i multiplicant aquest pes per la distància perpendicular al radi de gir s'obté finalment el moment motor que aporta cada caixó ($N \cdot m$).

A continuació es presenta una taula resum:

Taula 5.1. Resum de resultats de moment motor en estacionari

CAIXÓ	Àrea (mm^2)	V (mm^3)	V (m^3)	m (kg)	DIST X (mm)	F (N)	M ($N \cdot m$)	Mm ACUM (Nm)
1	1,06E+05	2,69E+07	2,69E-02	26,85	354,12	263,43	93,29	93,29
2	9,52E+04	2,40E+07	2,40E-02	24,05	833,77	235,92	196,71	289,99
3	9,06E+04	2,29E+07	2,29E-02	22,89	1235,65	224,57	277,49	567,48
4	8,50E+04	2,15E+07	2,15E-02	21,47	1550,44	210,63	326,56	894,04
5	7,43E+04	1,88E+07	1,88E-02	18,77	1762,94	184,10	324,55	1218,59
6	6,50E+04	1,64E+07	1,64E-02	16,43	1843,2	161,18	297,09	1515,69
7	5,63E+04	1,42E+07	1,42E-02	14,23	1752,76	139,56	244,62	1760,30
8	4,66E+04	1,18E+07	1,18E-02	11,77	1599,45	115,42	184,60	1944,90
9	3,29E+04	8,31E+06	8,31E-03	8,31	1295,07	81,50	105,54	2050,45
10	1,38E+04	3,49E+06	3,49E-03	3,49	908,83	34,20	31,08	2081,53

Així doncs, tal i com es pot observar a la taula, el valor del moment motor per quan la màquina treballa en estacionari és de 2081,53 $N \cdot m$.

El desenvolupament que s'ha portat a terme per realitzar el càlcul del moment motor de la màquina en situació de funcionament estacionari es pot consultar al document III: Anexos, apartat B.3.1.

5.2 Situació d'arranc

Per arrancar la màquina es tenen en compte dos fonts de moment motor: el provinent del pes d'aigua dipositats als 6 primers caixons i el provinent de la força del xoc entre el cabal d'aigua d'alimentació i la roda.

Es tenen en compte aquest 6 caixons ja que, en la roda parada, en quant el primer caixó s'ompli d'aigua sobreixirà l'aigua provinent del cabal plenat el segon caixó. Així successivament fins omplir el sisè caixó ja que per geometria és el que es pot arribar a plenar en la roda parada. A aquest moment motor es suma el provinent de la força del xoc entre el cabal d'aigua d'alimentació i la roda mentre la roda està parada.

El valor del moment motor en situació d'arranc és de 3386,93 N·m.

El desenvolupament que s'ha portat a terme per realitzar el càlcul del moment motor de la màquina en situació d'arranc es pot consultar al document III: Anexos, apartat B.3.2.

6 Força de fricció de l'eix

L'eix es recolza en dos punts que són el gruix del mur de pedra que tanca la roda. Tal i com s'ha explicat anteriorment, era molt comú que a l'època s'utilitzés bronze per tal de simular coixinets i reduir la fricció en els suports dels eixos, fent així doncs que la fricció existent fos entre la fusta i la llàmina de bronze: μ_{F-B} . S'obté el valor de fricció calculant la reacció als recolzaments, la fricció produïda degut a aquestes reaccions i el coeficient de fricció dels materials, i finalment multiplicant la fricció puntual pel radi de l'eix per tal d'obtenir un moment de fricció.

En el cas de fusta de pi, el valor és de 1144,82 N·m.

En el cas de fusta de roure, el valor és de 1541,52 N·m.

L'expressió de la modelització del moment de fricció a l'eix és la següent:

$$M_{f \text{ Torsional}} = 2 \cdot R_a \cdot \mu_{F-B} \cdot r_{eix}$$

$$M_{f \text{ Torsional}} = (m_{Roda} + m_{H2O} + m_{eix} + 2 \cdot m_{cigüenyal} + m_{biela}) \cdot g \cdot \mu_{F-B} \cdot r_{eix}$$

El desenvolupament que s'ha portat a terme per realitzar el càlcul del moment de fricció de l'eix es pot consultar al document III: Anexos, apartat B.4.

7 Força de fricció de les serres

S'obté la força de fricció de les serres de manera similar que la de l'eix.

$$F_{f \text{ pistó}} = m_{pistó} \cdot g \cdot \mu_{A-P}$$

El valor de la força de fricció de les serres és de 953,03 N.

El desenvolupament que s'ha portat a terme per realitzar el càlcul del moment de fricció de les serres es pot consultar al document III: Anexos, apartat B.5.

8 Anàlisi de l'eficiència potencial en estacionari

Tal i com es pot observar a l'apartat 10, la màquina treballa a velocitat màxima de manera constant degut a que la limita el cabal i no l'energia. Per aquest motiu es planteja l'anàlisi de l'eficiència des del punt de vista de potències en estat estacionari, ja que en el cas de que la potència d'entrada (o disponible) en estacionari fos major a la potència de sortida (o consumida) la màquina tendiria a accelerar. Recordant que el mecanisme funciona a velocitat màxima, si intentés accelerar es desperdiciaria aquesta potència per no poder assolir una velocitat major.

Així doncs, es calcula l'eficiència de la màquina obtenint un valor de 63,65%. El resultat l'eficiència és molt baix. Es proposa doncs millorar l'eficiència dipositant una càrrega sobre les serres en la finalitat d'augmentar la força de fricció produïda a les serres, ja que aquest augment suposa una millora en el serratge.

S'obté un valor de càrrega per tal d'augmentar l'eficiència del mecanisme al màxim de 240,06 kg pel cas del pi, essent 75,09 kg pel cas del roure.

Aquesta sobrecàrrega produeix un augment en la força de fricció del pistó, ja que l'equació que la calcula incloïa aquesta càrrega:

$$F_{f \text{ pistó}} = (m_{\text{pistó}} + m_{\text{càrrega}}) \cdot g \cdot \mu_{A-P}$$

Degut a la càrrega calculada es redissenya el conjunt de serres per tal de modelitzar-lo per a que pugui allotjar uns lastres que compreguin aquesta càrrega òptima.

El desenvolupament que s'ha portat a terme per realitzar l'anàlisi de l'eficiència potencial en estacionari es pot consultar al document III: Annexos, apartat B.6.

9 Càlcul del arranc

Una part important d'aquest treball és el càlcul de l'arranc: comprovar matemàticament que la màquina és capaç d'iniciar el moviment en les condicions a les quals estava. En gran part és un tret important ja que dels diferents articles i estudis que s'han realitzat sobre la serradora de pedra cap d'ells inclou aquest càlcul específic i, també, necessari per poder-li donar validesa.

Es realitza el càlcul d'arranc mitjançant el mètode de càlcul de reducció dinàmica (*la introducció/explicació del mètode de càlcul de reducció dinàmica es pot consultar al Document III: Annexos, apartat B.7.1 i B.7.2*).

Es calcula el moment motor necessari per tal de que la màquina arranqui en dues posicions, una aleatòria (que serveix per entendre millor el càlcul) i en la posició més desfavorable.

La posició més desfavorable és aquella on les serres tenen la velocitat màxima i produeixen la màxima potència en contra al sistema. Aquest instant succeeix quan el pistó es troba a la meitat de la seva carrera (L/2 sent L el seu recorregut).

Del càlcul realitzat s'obté un moment motor necessari d'arranc de 2706,44 N·m en el cas del pi i un moment motor de 2511,09 N·m en el cas del roure.

S'ha de tenir en compte que els valors anteriors s'han obtingut calculant l'arranc en la massa de la càrrega òptima calculada anteriorment a l'apartat 6. Pel moment d'arrancada el més coherent es descarregar aquesta càrrega per tal d'afavorir l'engegada, igual que es faria

en qualsevol màquina sempre que fos possible. Repetint el càlcul, eliminant aquesta massa podem observar el nou valor de 1795,43 N·m pel pi i 2226,11 N·m pel roure.

Així doncs, tenint en compte el moment motor disponible per l'arranc comentat a l'apartat 3.2, la màquina arranca.

El desenvolupament que s'ha portat a terme realitzar el càlcul del d'arranc necessari es pot consultar al document III: Anexos, apartat B.7.3.

10 Velocitat de funcionament

La velocitat de funcionament del mecanisme pot dependre del cabal d'alimentació i/o de l'energia que l'aigua aporta a la roda hidràulica i per això es realitza el càlcul del sistema hidràulic per determinar les velocitats (a partir de Bernouilli), els cabals i les energies podent així entendre com actua l'aigua sobre la roda.

S'adapta la metodologia de càlcul proposada per la Facultat Nacional d'Agronomia de Colòmbia [14] per tal d'obtenir la velocitat al nostre sistema.

Es conclou que la velocitat de funcionament depèn directament del cabal d'alimentació, tenint una part d'energia provinent de l'aigua desaprovechada, i el seu valor és de **28,62 rpm**.

El desenvolupament que s'ha portat a terme per realitzar el càlcul de la velocitat de funcionament del mecanisme es pot consultar al document III: Anexos, apartat B.8.

11 Càlcul resistent

Es realitza el càlcul per resistència inicialment sobre l'element més crític del sistema: l'eix. El càlcul es realitza seguint el Codi Tècnic de la Edificació, en concret el document bàsic de seguretat estructural per la fusta: CTE-DB SE-M [15]. No és un document enfocat a màquines, però contempla els càlculs resistents a elements de fusta d'un punt de vista més restrictiu, ja que la finalitat es trobar uns valors de resistència coherents per la fusta.

S'obtenen uns límits màxims admissibles del material de 1,15 MPa per tallant/torsió i 5,38 MPa per flexió.

Es calcula, per la secció més desfavorable, les tensions a les que està sotmés l'eix per tal de comparar-ho en els valor límits calculats en el CTE. S'obté una tensió per flexió de 0,68 MPa, una tensió per tallant de 0,42 MPa i una tensió per torsió de 0,41 MPa.

Es realitza la combinació de tensions més desfavorable per tal de comprovar que aguanta. Es calculen els coeficients de càrrega provinents de cadascun dels esforços. S'entén com a coeficient de càrrega el valor unitari que surt de la relació entre la sol·licitació del material i la seva tensió màxima admissible per tal d'apreciar el grau d'utilització de la capacitat resistent de l'element estudiat. S'obté un coeficient de càrrega provinent de la flexió del 12,64%, 36,26% provinent del tallant i 35,60% provinent de la torsió.

S'ha de tenir en compte que la tensió per flexió i per torsió s'aplica (els màxims) als extrems de la secció (essent 0 al centre) i la tensió per tallant s'aplica (el màxim) al centre (essent 0 als extrems). Per tant, com que les tensions es produeixen de forma simultània, es realitza la combinació de tensions més desfavorable (sense coeficients reductors per simultaneïtat típics), que és la suma aritmètica dels coeficients de càrrega aplicats al mateix punt, obtenint en el cas dels extrems de la secció un valor de 48,24%.

Així doncs, es conclou que l'element més crític de la màquina resisteix.

El desenvolupament que s'ha portat a terme realitzar el càlcul resistent es pot consultar al document III: Anexos, apartat B.9.

11.1 Optimització de l'eix

A continuació, i una vegada vist que l'eix té un marge resistent elevat, s'estudia la possibilitat d'optimitzar l'eix per resistència.

S'obté un valor de diàmetre de 0,2318 m mínim per tal de que la secció de l'eix utilitzi el 100% de la seva capacitat resistiva per afrontar els esforços als que està sotmès. Ja que es parla durant tot el treball de mesures romanes (majoritàriament peus) arrodonim aquest valor a $7/8$ peus = 0,2592 m

Amb aquest valor de diàmetre, es recalcula el moment de fricció de l'eix, la càrrega mitjana que posar sobre els pistons per aprofitar al màxim la seva potència, el moment d'arranc a assolir per a que la màquina arranqui (en la posició més desfavorable) i els marges resistents.

A la següent taula es poden observar els valors obtinguts inicialment i els valors recalculats en el nou diàmetre de l'eix:

Taula 11.1. Taula resum de resultats en pi

Propietat	Unitats	Cas 1	Eix optimitzat
D eix	(peus)	1	7/8 de peu
Base x altura bieles	(peus)	1x2	1x2
Ffricció eix	(N·m)	1144,82	995,97
Mcarrega mitja	(kg)	240,06	301,95
Mmotor necessari arranc	(N·m)	2706,44	2792,48
Mmotor necessari arranc (sense càrrega)	(N·m)	1795,43	1646,57
Mmotor disponible arranc	(N·m)	3386,92	3386,92
Cap. resistent per tallant	(%)	36,25	47,35
Cap. resistent per flexió i torsió	(%)	48,12	71,67

Tal i com es pot observar, la màquina segueix arrancant. Al disminuir el diàmetre de l'eix ha disminuït el moment de fricció provinent del mateix, podent així augmentar la càrrega mitjana a posar sobre els pistons per tal d'aprofitar la potència d'entrada a la sortida, el que es tradueix en que en el cas optimitzat els pistons desenvolupen més potència de tall.

A continuació es mostra la taula en roure:

Taula a la següent pàgina degut al tamany

Taula 11.2. Taula resum de resultats en roure

Propietat	Unitats	Cas 1	Eix optimitzat
D eix	(peus)	1	7/8 de peu
Base x altura bieles	(peus)	1x2	1x2
Ffricció eix	(N·m)	1541,52	1340,88
Mcarrega mitja	(kg)	75,09	158,52
Mmotor necessari arranc	(N·m)	2511,09	2627,07
Mmotor necessari arranc (sense càrrega)	(N·m)	2226,11	2025,45
Mmotor disponible arranc	(N·m)	3386,92	3386,92
Cap. resistent per tallant	(%)	53,26	79,27
Cap. resistent per flexió i torsió	(%)	48,759	63,673

Les observacions descrites pel cas del pi es repeteixen pel cas del roure, com era d'esperar.

El desenvolupament que s'ha portat a terme per realitzar l'optimització de l'eix es pot consultar al document III: Anexos, apartat B.9.1.

11.2 Optimització de les bieles

En la màquina amb l'eix optimitzat es proposa fer el mateix en les bieles. S'obté un valor de 56,73 mm per la base de la biela i 113,46 mm per l'altura (una condició de disseny és que l'altura és el doble que la base). Aquests valors a nivell funcional són molt baixos. Es determina una base de mig peu i per tant una altura d'un peu ($b = 148,1$ i $h = 296,2$ mm).

A la següent taula (Taula B.10) es poden observar els valors obtinguts inicialment, els valors recalculats en l'eix optimitzat i els valors recalculats en les bieles optimitzades:

Taula 11.3. Taula resum de resultats en pi

Propietat	Unitats	Cas 1	Eix optimitzat	Eix i bieles optimitzats
D eix	(peus)	1	7/8 de peu	7/8 de peu
Base x altura bieles	(peus)	1x2	1x2	0,5x1
Ffricció eix	(N·m)	1144,82	995,97	827,39
Mcarrega mitja	(kg)	240,06	301,95	372,06
Mmotor necessari arranc	(N·m)	2706,44	2792,48	2886,61
Mmotor necessari arranc (sense càrrega)	(N·m)	1795,43	1646,57	1474,66
Mmotor disponible arranc	(N·m)	3386,92	3386,92	3386,92
Marge tensió per tallant (eix)	(%)	36,25	47,35	39,18
Marge tensió per flexio i torsio (eix)	(%)	48,12	71,67	60,17
Marge tensió per flexió (bieles)	(%)	-	2,19	4,66
Marge tensió per axil (bieles)	(%)	-	0,55	0,73

A la següent taula es poden observar els valors obtinguts inicialment, els valors recalculats en l'eix optimitzat i els valors recalculats en les bieles optimitzades pel cas del roure:

Taula 11.4. Taula resum de resultats en roure

Propietat	Unitats	Cas 1	Eix optimitzat	Eix i bieles optimitzats
D eix	(peus)	1	7/8 de peu	7/8 de peu
Base x altura bieles	(peus)	1x2	1x2	0,5x1
Ffricció eix	(N·m)	1541,52	1340,88	1103,48
Mcarrega mitja	(kg)	75,09	158,52	257,25
Mmotor necessari arranc	(N·m)	2511,09	2627,07	2759,63
Mmotor necessari arranc (sense càrrega)	(N·m)	2226,11	2025,45	1783,37
Mmotor disponible arranc	(N·m)	3386,92	3386,92	3386,92
Cap. resistent per tallant (eix)	(%)	53,26	79,27	52,19
Cap. resistent per flexió i torsió (eix)	(%)	48,76	63,67	63,21
Cap. resistent per flexió (bieles)	(%)	-	2,77	8,06
Cap. resistent per axil (bieles)	(%)	-	0,39	1,94

D'aquestes taules s'extreuen conclusions de pes les quals es descriuen al apartat de conclusions.

El desenvolupament que s'ha portat a terme per realitzar l'optimització de les bieles es pot consultar al document III: Anexos, apartat B.9.2.

12 Comparativa de materials

Finalment, es recull en una taula resum la comparativa dels diferents materials de construcció i els valors corresponents per la màquina optimitzada.

Taula 11.5. Taula comparativa de materials

Propietat	Unitats	Pi	Roure
D eix	(peus)	7/8 de peu	7/8 de peu
Base x altura bieles	(peus)	0,5x1	0,5x1
Ffricció eix	(N·m)	827,39	1103,48
Mcarrega mitja	(kg)	372,06	257,25
Mmotor necessari arranc	(N·m)	2886,61	2759,63
Mmotor necessari arranc (sense càrrega)	(N·m)	1474,66	1783,37
Mmotor disponible arranc	(N·m)	3386,92	3386,92
Cap. resistent per tallant (eix)	(%)	39,18	52,19
Cap. resistent per flexió i torsió (eix)	(%)	60,17	63,21
Cap. resistent per flexió (bieles)	(%)	4,66	8,06
Cap. resistent per axil (bieles)	(%)	0,73	1,94

D'aquesta taula s'extreuen conclusions de pes les quals es descriuen al apartat de conclusions.

13 Conclusions

La part de recerca del present treball deixa evidències de pes de l'existència fa 1700 anys d'aquestes màquines, a pesar de no haver-ne trobat cap degut al material del que foren construïdes.

Del càlcul del arranc es pot concloure que la màquina iniciaria el moviment a la posició més desfavorable a la qual es podria trobar en qualsevol dels dos materials estudiats, amb o sense càrrega, i en la màquina optimitzada o sense optimitzar.

Del càlcul de la velocitat de funcionament es pot concloure que la màquina funciona, assolint la seva velocitat màxima de manera constant limitada pel cabal d'alimentació i no per l'energia disponible aportada a la roda hidràulica.

De l'anàlisi de l'eficiència potencial en estacionari es pot concloure que la màquina no aprofitava tota la potència que era capaç de generar en el cabal l'alimentació que tenia disponible. S'ha buscat la manera d'augmentar aquesta eficiència aportant càrrega al conjunt de serres per millorar el serratge.

De la optimització per resistència de l'eix i de les bieles es pot concloure que:

- Al optimitzar les dimensions, tant de l'eix com de les bieles, es redueix el moment de fricció sofert per l'eix.
- Al optimitzar les dimensions, tant de l'eix com de les bieles, s'obté més potència de sortida (a les serres), millorant el tall (la massa és major).
- Al optimitzar les dimensions, tant de l'eix com de les bieles, pot incrementar-se la càrrega del pistó i per tant s'obté un moment motor necessari d'arranc més alt quan la màquina està carregada en la càrrega mitja als pistons ja que aquesta augmenta. En canvi, el moment necessari per arrancar sense la càrrega mitja és més petit degut a la disminució de la inèrcia de la màquina.
- Al optimitzar les dimensions de l'eix la capacitat resistent consumida augmenta ja que al disminuir aquestes dimensions la resistència de la secció disminueix. Per una altra banda, el marge segueix sent alt.
- Al optimitzar les dimensions de les bieles la capacitat resistent consumida de l'eix disminueix ja que aquest suporta una càrrega per part de les bieles menor. En canvi, la capacitat resistent consumida per les bieles augmenta ja que a l'optimitzar les dimensions d'aquestes la resistència de la secció disminueix.

De la comparativa de materials es pot concloure que:

- La càrrega mitja per aprofitar la potència d'entrada a la sortida (les serres): la càrrega utilitzant pi és notablement superior a utilitzant roure, el que descriu que utilitzant pi la potència de tall és superior.
- Per arrancar la màquina sense càrrega es sol·licita menys moment motor en el cas del pi, pel que la màquina arrancaria en més facilitat i en una acceleració major.
- En quant a resistència de les bieles i de l'eix, utilitzant pi la màquina està més relaxada en quant a esforços, tenint més marge per arribar al 100% de la seva capacitat.

Aquestes conclusions obtingudes matemàticament demostren que, basant-nos en els fonaments de la física, la teoria de mecanismes i la fluidomecànica, els resultats són coherents i verifiquen tant la viabilitat de la màquina com la seva optimització.

14 Referències

- [1] Vitruvio, Zehn Bücher über Architektur, deutsch von C. Fensterbusch (Darmstadt 1976).
- [2] Plinio. C. Plinio Segundo d. Ä, Naturkunde, deutsch von R. König und J. Hopp (Darmstadt 1972).
- [3] Ausonius, Mosella; deutsch von K. Weis (Darmstadt 1984).
- [4] Jacques Seigne, A Sixth-Century Water-powered Sawmill at Jerash, *AAJ* 26, 2002, 205-213.
- [5] Jacques Seigne 200a. Una scierie mécanique au Vie siècle, *Archéologia* 385, 2002, 36-37.
- [6] Schioler 2005. Th. Schioler, How to Saw Marble, *Journal of the International Society of Molionology* 64, 2002, 14-16.
- [7] Römisch-Germanisches Zentralmuseum de Leibniz-Forschungsinstitut für Archäologie, Byzanz – das Römerreich im Mittelalter, 2010, 713-729.
- [8] Roman iron and Steel: A review. Volume 32, Issue 7-8, 2017, p.p 857-866.
- [9] Hernández, F. y HUERTA, 1999. Historia natural de Cayo Plinio Segundo (pp. 1106-1112).
- [10] Bernabei M, Bontadi J, Rea R, Büntgen U, Tegel W (2019) Dendrochronological evidence for long-distance timber trading in the Roman Empire.
- [11] F. Mangartz, 2006. Zur Rekonstruktion der wassergetriebenen byzantinischen Steinsägemaschine von Ephesos, Türkei – p.p. 573-590.
- [12] Messina A, Rossi C, 2015. Mechanical behavior and performance of the Onager. J.
- [13] Thierry Morin, Jacques Seigne. Restitution et reconstitution d'une scierie hydraulique du IVe siècle de notre ère à Gerasa/Jerash (Jordanie) . *Virtual Retrospect*, Robert Vergniew, Nov 2007, Pessac, France. pp.261-268.).
- [14] Alberto Alvarez Cardona. La rueda hidráulica. *Revista Facultad Nacional de Agronomía*, 1985, Vol. XXXVIII Nº 2.
- [15] Codi Tècnic de l'Edificació (CTE), Document Bàsic de Seguretat Estructural en Fusta, Abril 2019.

Josep Emili Vilanova Torà

**Redisseny, anàlisi i modelització de les màquines
industrials Romanes de serrar pedra**

DOCUMENT III: Annexos



UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

Tarragona

2020

Índex

A.	Annex de disseny.....	1
A.1.	Disseny general dimensional de la màquina.....	1
A.2.	Disseny de la roda.....	4
A.3.	Disseny del conjunt de serres.....	5
B.	Annex de càlculs.....	6
B.1.	Modelització de la màquina	6
B.1.1.	Modelització de la roda	6
B.1.2.	Modelització de l'eix.....	6
B.1.3.	Modelització dels cigonyals.....	7
B.1.4.	Modelització de les bieles	7
B.1.5.	Modelització de les serres.....	8
B.2.	Estudi de la compatibilitat cinemàtica.....	8
B.3.	Càlcul del moment motor	9
B.3.1.	Situació de funcionament en estacionari	10
B.3.2.	Situació d'arranc.....	11
B.4.	Força de fricció de l'eix	12
B.5.	Força de fricció de les serres	13
B.6.	Anàlisi de la eficiència potencial en estacionari.....	14
B.7.	Càlcul del arranc	18
B.7.1.	Introducció al mètode de càlcul: reducció dinàmica	18
B.7.2.	Explicació del càlcul	19
B.7.3.	Estudi en una posició aleatòria.....	20
B.7.4.	Estudi en la posició més desfavorable.....	22
B.8.	Velocitat de funcionament.....	24
B.9.	Càlcul resistent	28
B.9.1.	Optimització de l'eix.....	32
B.9.2.	Optimització de les bieles	33
B.9.3.	Comparativa de materials.....	37

A. Annex de disseny

A.1. Disseny general dimensional de la màquina

Per tal de poder dimensionar la màquina s'utilitzen diferents eines. La primera és l'estudi arqueològic realitzat per Archeovision publicat al llibre Virtual Retrospect [13]:

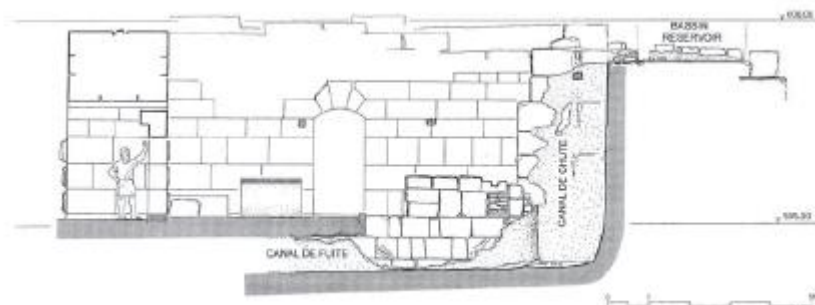


Figura A.1. Secció est/oest de les restes (dibuixos de Seigne [13])

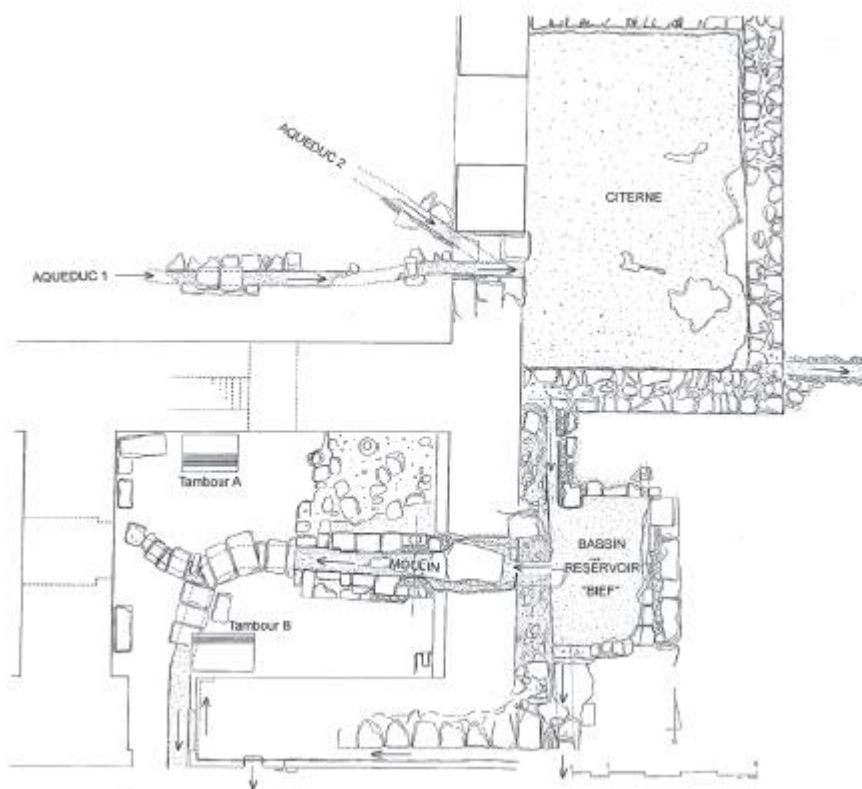


Figura A.2. Pla general de les restes in situ (dibuixos de Seigne [13])

A partir dels esquemes obtinguts en la referència nombrada, es realitzen els croquis a escala per tal d'obtenir les distàncies reals del taller on s'ubicà la màquina.

Figura a la següent pàgina degut al tamany

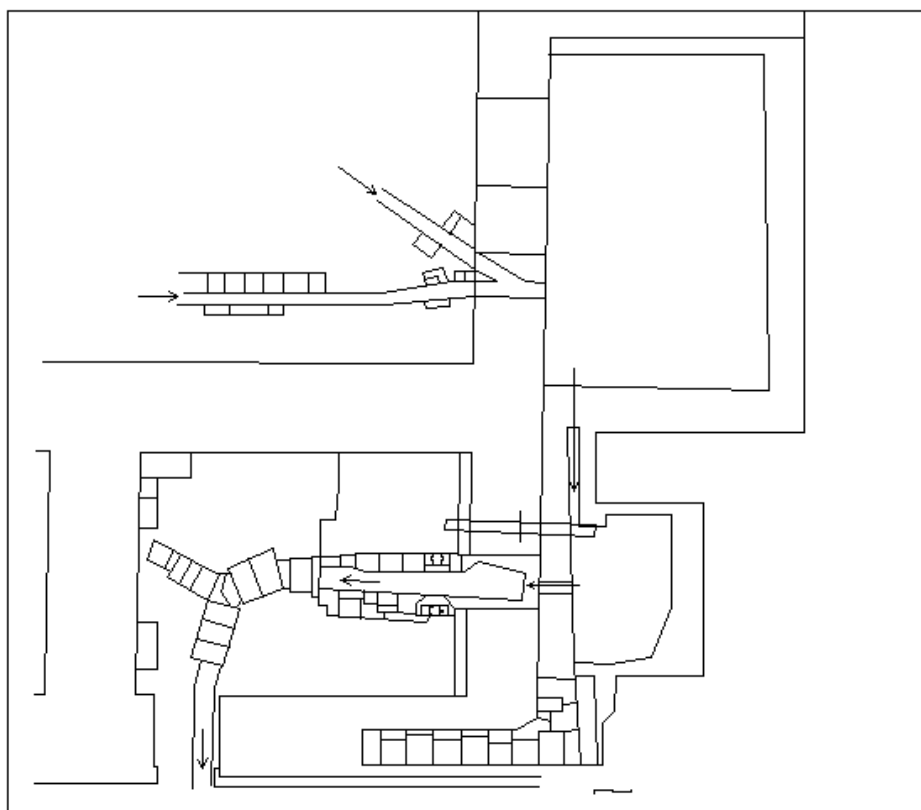


Figura A.3. Pla general de les restes in situ (redibuixat a CAD)

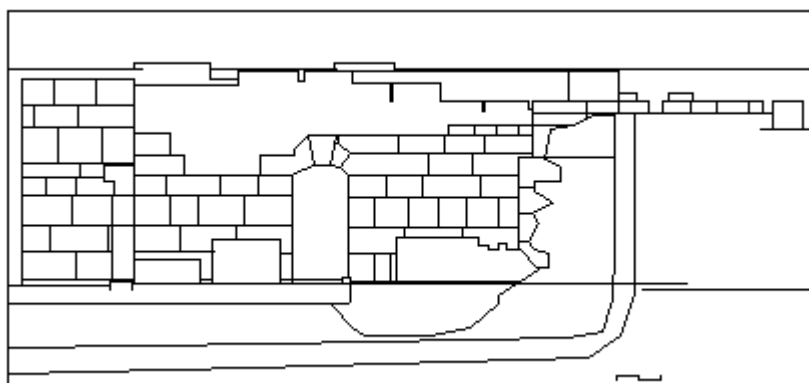


Figura A.4. Secció est/oest de les restes (redubuiat a CAD)

Tenir les dimensions del taller exactes dóna moltes pistes per poder determinar la magnitud dimensional de la màquina, com per exemple l'altura on es recolzà l'eix (dona una aproximació del diàmetre de la roda) o la longitud aproximada que havien de tenir les bieles.

Figura a la següent pàgina degut al tamany

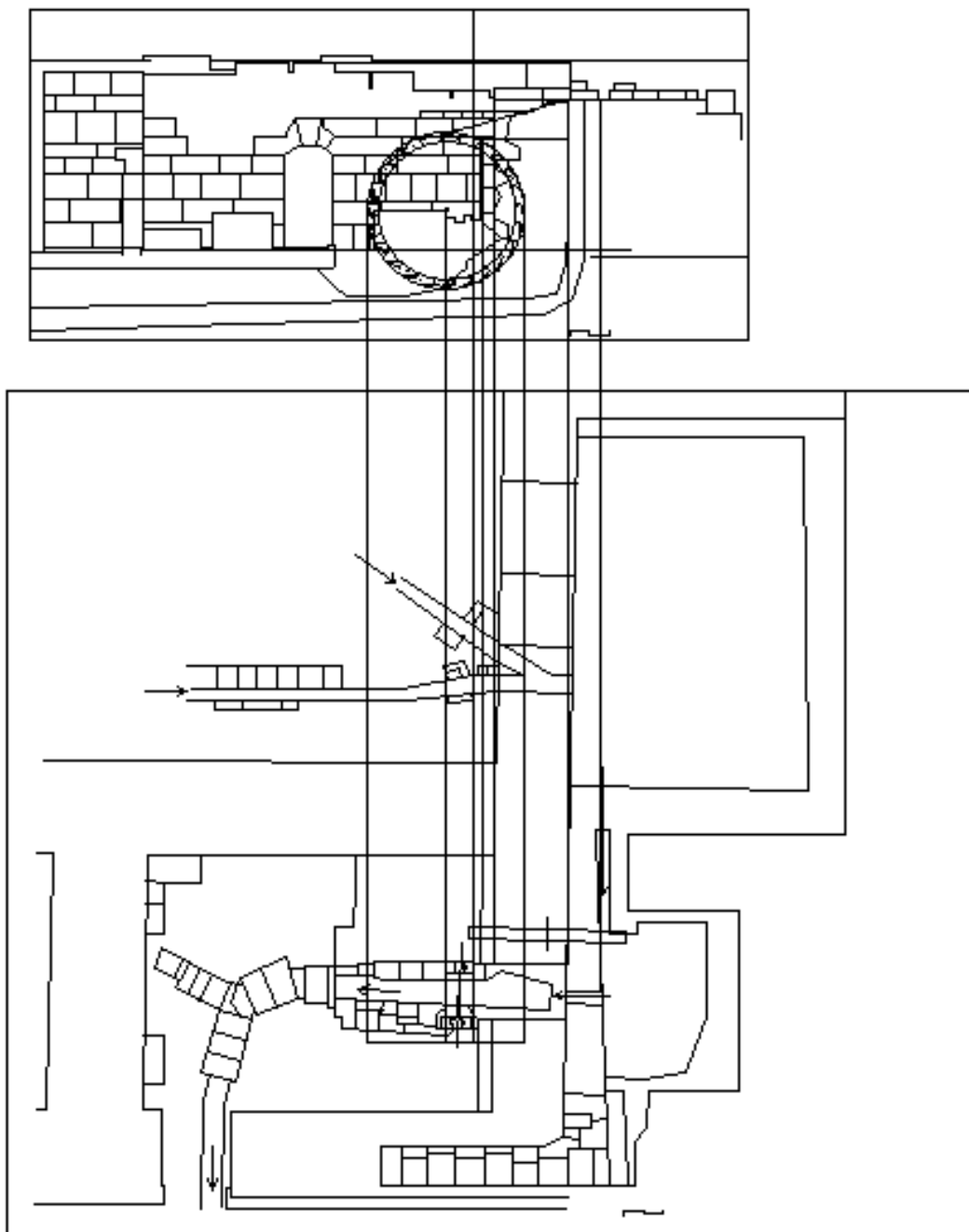


Figura A.5. Procés d'obtenció de dimensions de la roda

A més, dels plànols arqueològics es poden observar els dos blocs de pedra que tallaven tenint aquests unes dimensions de 1,5 metres de longitud i 0,90 metres de diàmetre. Partint del canal existent per evacuar l'aigua es determina la zona limitada a la qual es podien ubicar els blocs per tal de tallar-los i, partint també de que la màquina fos simètrica i en dimensions romanes, s'obté una aproximació acurada de les dimensions longitudinals de les bieles i de l'eix:

Figura a la següent pàgina degut al tamany

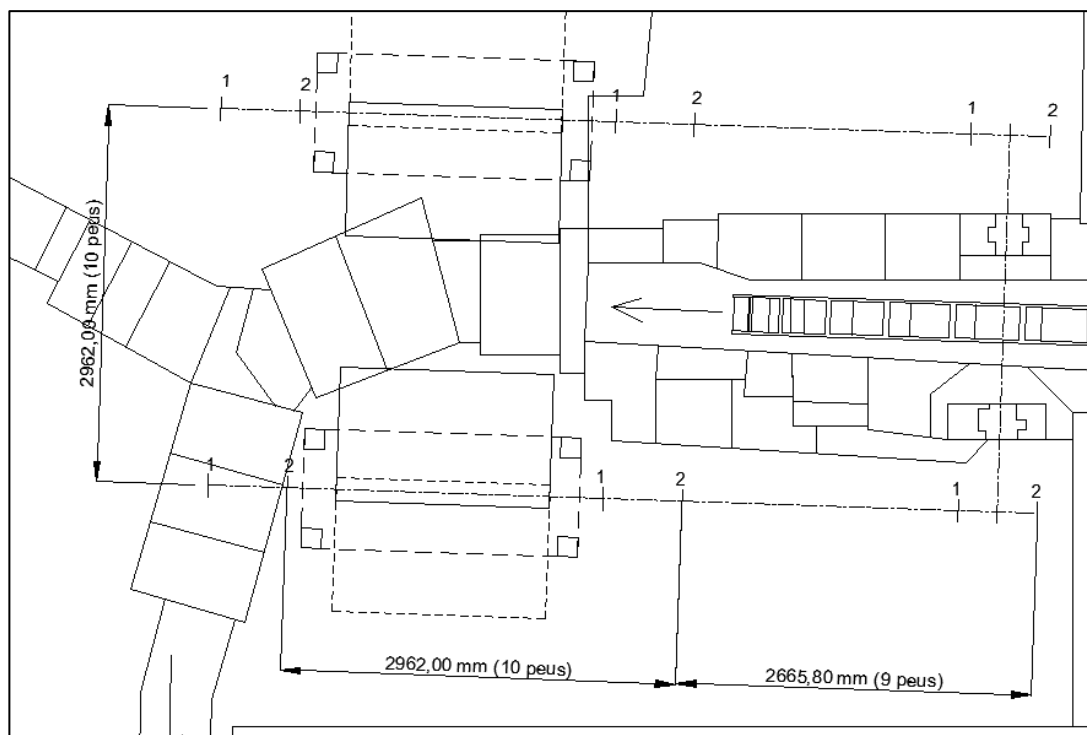


Figura A.6. Vista en planta en les dimensions longitudinal de l'eix, de les bieles i de les serres

Tal i com es pot observar a la figura anterior, les bieles tindrien una longitud de 9 peus mentre que la de l'eix seria de 10 peus. A més, es representa la cota aproximada de longitud que tindria el conjunt de tall considerant un cigonyal de 3 peus de diàmetre i en un recorregut de 2 peus (posicions 1 i 2 del mecanisme representades a la figura A.6).

A.2. Disseny de la roda

El disseny de la roda s'ha basat en els següents ítems relacionats amb les dimensions del taller on s'ubicà la màquina.

L'altura de la roda va condicionada a l'alçada disponible del salt de l'aigua (5,1 m) i l'alçada a la qual es troben els recolzaments de l'eix del terra (2,1 m). S'ha aprofitat al màxim per fer la roda el més gran possible ja que com més gran fos més parell produiria. Es determina un diàmetre 4 m, que coincideix en una mesura de 13,5 peus romans.

L'ample de la roda va condicionat, d'igual manera que l'alçada, a l'espai que existeix entre els murs que recolzen l'eix (636,7 mm) tenint en compte un marge de treball pels responsables de producció del taller. Es determina un espesor de la roda de 296,2 mm, que coincideix en una mesura de 1 peu romà.

Els caixons es dissenyen en forma de L ja que, com que la roda funciona pel pes de l'aigua, han de poder emmagatzemar la major quantitat d'aquesta possible. Aquestes L tenen l'angle de 90° ja que a l'hora de fabrica'ls resulta més senzill d'aquesta manera. Es realitza una distribució de caixons tenint en compte que siguin accessibles tant per a la fabricació com per al manteniment de la roda. A més, es colliquen de tal manera que l'entrada d'aigua sigui el menys agresiva possible facilitant que el flux entri sense variar la direcció fins arribar al fons del caixó. **Aquesta solució és una de tantes que podrien haver representat quan es va fabricar**, però s'estima que és una aproximació molt real al que pogueren arribar [14].

A.3. Disseny del conjunt de serres

S'ha assumit que el sistema de tall es produeix pel fet que un conjunt de planxes metàl·liques paral·leles friccionin contra el bloc a ser tallat, utilitzant sorra com a abrasiu.

Aquest conjunt de serres, per tal de ser utilitzades simultàniament, haurien d'estar muntades sobre un bastidor que permetés el seu moviment. Aquest bastidor, igualment, haurà d'estar connectat a la biela per tal de transmetre aquest desplaçament.

Per tal de mantenir el seu moviment únicament descendent quan es produeix el tall, es preveu que aquests bastidors haurien de disposar d'algun tipus de sistema de guiatge. Aquest podria haver estat una estructura secundària que impedís que les serres es desalineessin del seu pla de tall.

En base a les troballes arqueològiques, i deduït dels talls observats en la pedra, podríem deduir que cada bastidor allotjaria quatre serres idèntiques. A més, i de nou, s'entén que el mecanisme muntaria dos bastidors per tal de ser capaç de treballar simultàniament en dos pedres diferents.

Donat que no queden restes dels bastidors ni les serres, hem de deduir que respecte a la seva geometria, les serres han de ser com a mínim igual de llargues que les pedres a tallar, més el recorregut generat per moviment del mecanisme. És per això, que es fixarà la longitud de disseny de les serres en un total de 10 peus (2.96 m). A més, i sense conèixer la geometria del bastidor, és clar que aquesta hauria de permetre com a mínim que les serres generessin un tall igual a la profunditat dels talls vistos en el taller. Coneixent que les pedres tenen un alt d'aproximadament un metre, i que estan tallades gairebé fins al centre, podem afirmar que el bastidor hauria de permetre un tall del voltant de 2 peus (0.6 m).

B. Annex de càlculs

B.1. Modelització de la màquina

Per tal de realitzar els càlculs es necessita, de cada element:

- Conèixer les seves dimensions.
- Conèixer la seva massa i volum.
- Conèixer la seva inèrcia.

B.1.1. Modelització de la roda

La roda té un diàmetre de 4,0 m (13,5 peus) i un espesor de 1 peu.

Per obtenir el volum i la massa de la roda, degut a la seva complexa geometria, s'ha obtingut el valor exacte a partir del software Inventor.

Taula B.1. Densitat dels materials

MATERIAL	Roure	Pi
ρ (kg/m ³)	760	540

Resum de valors per la roda:

Taula B.2. Valors de la roda

	Pi	Roure
Volum (m ³)	1162,39	
Massa (kg)	627,69	883,42
Diàmetre (m)	4,0	
Espesor (m)	0,31	
Inèrcia (kg·m ²)	784,56	1104,20

B.1.2. Modelització de l'eix

L'eix té una longitud de 10 peus (2,962 m) i un diàmetre de 1 peu (0,2962 m).

En primer lloc es calcula el seu volum:

$$V \text{ (m}^3\text{)} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot L = \frac{\pi \cdot 0,2962^2}{4} \cdot 2,962 = 0,051 \text{ m}^3$$

A continuació es calcula la seva massa:

$$(\text{Roble}) \rightarrow m = V \cdot \rho_{\text{Roble}} = 0,051 \cdot 760 = 38,78 \text{ kg}$$

$$(\text{Pi}) \rightarrow m = V \cdot \rho_{\text{Pi}} = 0,051 \cdot 540 = 27,55 \text{ kg}$$

Finalment es calcula la seva inèrcia:

$$(\text{Roble}) \rightarrow I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 = \frac{1}{2} \cdot 38,78 \cdot \left(\frac{0,2962}{2}\right)^2 = 0,425 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$(\text{Pi}) \rightarrow I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 = \frac{1}{2} \cdot 27,55 \cdot \left(\frac{0,2962}{2}\right)^2 = 0,302 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Resum de valors per l'eix:

Taula B.3. Valors de l'eix

	Pi	Roure
Diàmetre (m)	0,2962	
Longitud (m)	2,962	
Àrea (m ²)	0,0172	
Volum (m ³)	0,0510	
Massa (kg)	27,55	38,78
Inèrcia (kg·m ²)	0,302	0,425

B.1.3. Modelització dels cigonyals

Els cigonyals tenen un diàmetre de 3 peus i un espesor de 1 peu.

Al igual que en l'eix, a continuació es calcula el volum, la massa i la inèrcia:

$$V (m^3) = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot L = \frac{\pi \cdot 0,8886^2}{4} \cdot 0,2962 = 0,0459 m^3$$

$$m_{Roble} = V \cdot \rho_{Roble} = 0,0459 \cdot 760 = 34,90 kg$$

$$m_{Pi} = V \cdot \rho_{Pi} = 0,0459 \cdot 540 = 24,80 kg$$

$$I_{Roble} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 = \frac{1}{2} \cdot 34,90 \cdot \left(\frac{0,8886}{2}\right)^2 = 3,44 kg \cdot m^2$$

$$I_{Pi} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 = \frac{1}{2} \cdot 24,80 \cdot \left(\frac{0,8886}{2}\right)^2 = 2,45 kg \cdot m^2$$

Resum de valors pel cigonyal:

Taula B.4. Valors del cigonyal

	Pi	Roure
Diàmetre (m)	0,8886	
Espesor (m)	0,2962	
Àrea (m ²)	0,1550	
Volum (m ³)	0,0459	
Massa (kg)	24,80	34,90
Inèrcia (kg·m ²)	2,45	3,44

B.1.4. Modelització de les bieles

Les bieles tenen una secció de 2x1 peus, i una longitud de 9 peus.

$$V (m^3) = b \cdot h \cdot L = 0,2962 \cdot 0,5924 \cdot 2,6658 = 0,4678 m^3$$

$$m_{Roble} = V \cdot \rho_{Roble} = 0,4678 \cdot 760 = 355,5 kg$$

$$m_{Pi} = V \cdot \rho_{Pi} = 0,4678 \cdot 540 = 252,59 kg$$

$$I_{Roble} = \frac{1}{12} \cdot m \cdot L^2 = \frac{1}{12} \cdot 355,5 \cdot 2,6658^2 = 210,53 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{Pi} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 = \frac{1}{2} \cdot 252,59 \cdot 2,6658^2 = 149,59 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Resum de valors per les bieles:

Taula B.5. Valors de les bieles

	Pi	Roure
Base (m)	0,2962	
Altura (m)	0,5924	
Longitud (m)	2,6658	
Àrea (m ²)	0,1755	
Volum (m ³)	0,4678	
Massa (kg)	252,59	355,50
Inèrcia (kg·m ²)	149,59	210,53

B.1.5. Modelització de les serres

Per tal de poder realitzar els càlculs sobre la màquina es modelitza el conjunt de 4 serres més estructura portant segons les següents hipòtesis:

- Es modelitza el conjunt de 4 serres més estructura portant com a un element equivalent: un pistó.
- Es desprecia el moment d'inèrcia rotatori produït degut al joc que apareix pel tall ja que es considera el seu valor despreciable.
- Es considera que el punt d'aplicació referent al pistó és l'extrem de la biela, punt on es troba la unió entre aquesta i l'estructura portant.

Així doncs, la massa del pistó serà la resultant de la suma de les 4 serres més l'estructura portant. Aquesta massa s'obté de la modelització mitjançant el programa Inventor:

$$m_{pistó} = 4 \cdot m_{serra} + m_{est} = 149,46 \text{ kg}$$

Aquesta massa representa el valor exacte en funció de les dimensions.

B.2. Estudi de la compatibilitat cinemàtica

A continuació es descriuen les equacions per tal de poder obtenir totes les velocitats en funció de la velocitat angular de la manovella i poder realitzar el càlcul d'arranc.

$$v_A = w_2 \cdot l_{OA}$$

$$w_3 = \frac{v_A}{l_{CIR3-A}} = \frac{l_{OA}}{l_{CIR3-A}} \cdot w_2$$

$$v_{cdg3} = v_3 = l_{CIR3-cdg3} \cdot w_3 = \frac{l_{OA} \cdot l_{CIR3-cdg3}}{l_{CIR3-A}} \cdot w_2$$

$$v_{PISTÓ} = v_4 = w_3 \cdot l_{CIR3-B} = \frac{l_{OA} \cdot l_{CIR3-B}}{l_{CIR3-A}} \cdot w_2$$

A continuació es pot observar de forma pràctica la distribució dels CIR en una posició determinada per tal d'entendre millor les equacions:

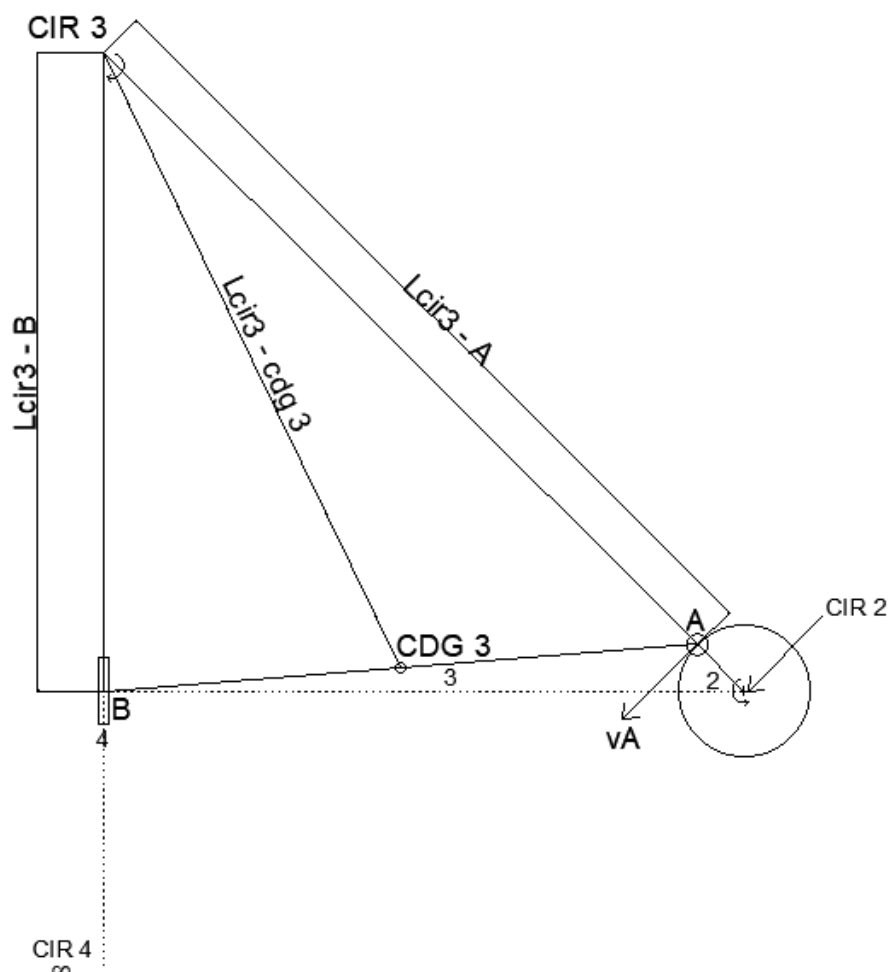


Figura B.1. Il·lustració explicativa les equacions de compatibilitat cinemàtica

En funció de la posició d'estudi els CIR varien la seva ubicació també (excepte el de la manovella que està en un punt fix: el recolçament). A més, el CIR del pistó es troba permanentment al infinit degut al seu moviment traslacional pur: no rota. El CIR de l'element 3 es troba buscant la intersecció entre les rectes formades del CIR de l'element 2 en punt d'unió a l'element 3 (A) i el CIR 4 i el punt d'unió a l'element 3 (B) ja que aquest rota en funció de la rotació dels dos elements que el subjecten.

Aquest serà el primer cas d'estudi d'arranc posteriorment a l'apartat B.7.3.

B.3. Càlcul del moment motor

Per tal de calcular el moment motor es té en compte l'origen d'aquest: l'aigua. Partint del disseny de la roda explicat en l'apartat A.2 es tenen un total de 10 caixons útils, i aquests són capaços d'emmagatzemar un volum d'aigua que proporcioni un moment motor.

Al parlar de càlculs del moment motor s'han de pensar en 2 valors: quan la màquina està en situació d'arranc i quan la màquina funciona de manera estacionària.

B.3.1. Situació de funcionament en estacionari

Quan la màquina estigui en estat estacionari hi haurà un volum constant d'aigua realitzant un moment motor. Aquest volum d'aigua és el corresponent al que són capaços d'emmagatzemar els 10 caixons que, per geometria, s'abuiden i plenen de manera constant. Es desprecia les petites variacions que puguin coexistir degudes a l'entrada i sortida d'aigua dels caixons 1 i 10.

El pes de l'aigua emmagatzemat en cadascun d'aquests caixons provoca, per la distància perpendicular al centre de gir de la roda (l'eix), un moment torsor. En la següent figura es poden observar els braços de palanca:

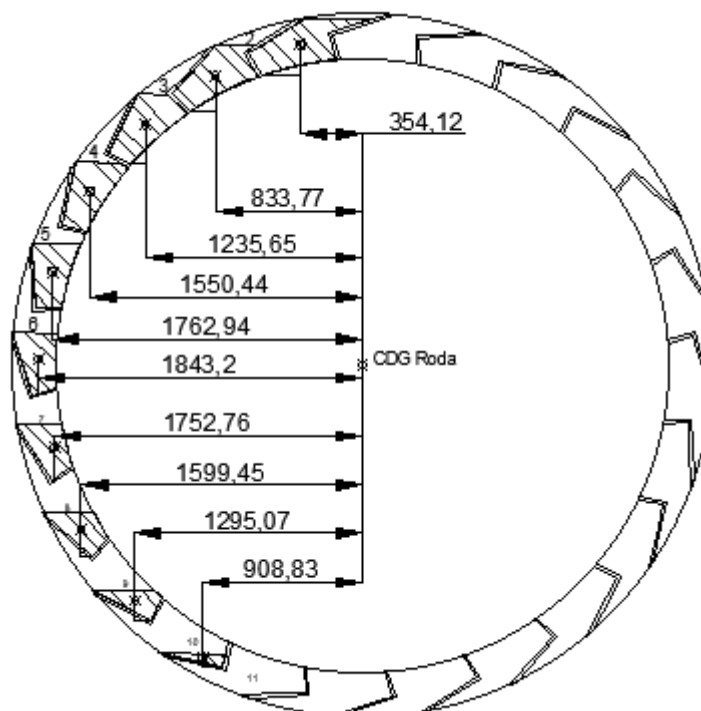


Figura B.2. Distàncies que causen moment degut al pes de l'aigua

Del disseny en CAD corresponent a la figura anterior s'obté l'àrea de cada un dels caixons que emmagatzemen aigua. Multiplicant aquestes àrees (m^2) per l'amplada entre paret i paret de la roda (252,6 mm) s'obté el volum d'aigua (m^3) a cada caixó.

Mitjançant la densitat de l'aigua (kg/m^3) i multiplicant per la gravetat ($kg \cdot m/s^2$) s'obté el pes de cada caixó (N), i multiplicant aquest pes per la distància perpendicular al radi de gir s'obté finalment el moment motor que aporta cada caixó ($N \cdot m$).

A continuació es presenta una taula resum:

Taula a la següent pàgina degut al tamany

Taula B.6. Resum de resultats de moment motor en estacionari

CAIXÓ	Àrea (mm ²)	V (mm ³)	V (m ³)	m (kg)	DIST X (mm)	F (N)	M (N·m)	Mm ACUM (Nm)
1	1,06E+05	2,69E+07	2,69E-02	26,85	354,12	263,43	93,29	93,29
2	9,52E+04	2,40E+07	2,40E-02	24,05	833,77	235,92	196,71	289,99
3	9,06E+04	2,29E+07	2,29E-02	22,89	1235,65	224,57	277,49	567,48
4	8,50E+04	2,15E+07	2,15E-02	21,47	1550,44	210,63	326,56	894,04
5	7,43E+04	1,88E+07	1,88E-02	18,77	1762,94	184,10	324,55	1218,59
6	6,50E+04	1,64E+07	1,64E-02	16,43	1843,2	161,18	297,09	1515,69
7	5,63E+04	1,42E+07	1,42E-02	14,23	1752,76	139,56	244,62	1760,30
8	4,66E+04	1,18E+07	1,18E-02	11,77	1599,45	115,42	184,60	1944,90
9	3,29E+04	8,31E+06	8,31E-03	8,31	1295,07	81,50	105,54	2050,45
10	1,38E+04	3,49E+06	3,49E-03	3,49	908,83	34,20	31,08	2081,53

Així doncs, tal i com es pot observar a la taula, el valor del moment motor per quan la màquina treballa en estacionari és de 2081,53 N·m.

B.3.2. Situació d'arranc

Per arrancar la màquina es tenen en compte dos fonts de moment motor: el provinent del pes d'aigua dipositats als 6 primers caixons i el provinent de la força del xoc entre el cabal d'aigua d'alimentació i la roda.

Tal i com es pot observar a la taula anterior, el moment motor que proporciona el pes de l'aigua emmagatzemats als primers 6 caixons és de 1515,69 N·m. Es tenen en compte aquest 6 caixons ja que, en la roda parada, en quant el primer caixó s'ompli d'aigua sobreirà l'aigua provinent del cabal plenat el segon caixó. Així succesivament fins omplir el sisè caixó ja que per geometria és el que es pot arribar a plenar en la roda parada.

A continuació es calcula el moment provinent per la força del xoc.

El fet de que un doll d'aigua incideixi en certa velocitat contra un element estàtic modificant la seva velocitat i direcció implica que l'element contra el que impacta està exercint una força contra el doll, tal i com descriu la primera llei de Newton. D'igual manera, i aprofitant el que descriu la tercera llei de Newton, es pot afirmar que el fet de que l'element actui sobre el doll implica alhora que el doll està actuant sobre l'element en la mateixa força però sentit contrari. Així doncs, aquesta força es transforma en moment motor degut al braç de palanca que genera la distància perpendicular a la direcció de la mateixa respecte al radi de gir de la roda.

Aquest plantejament funciona durant el moment d'arranc, o el que és el mateix, mentre la roda estigui parada. Per aquest motiu en el càlcul del moment motor en estat estacionari no es contempla.

La velocitat del doll quan impacta contra la roda és la calculada a l'apartat B.8, on es realitza el càlcul de la velocitat mitjançant Bernouilli. El cabal corresponent a aquest doll és el calculat al mateix apartat, considerant el resultat d'aplicar els coeficients de pèrdua.

Per tal de calcular la força que prové del cabal a aquesta velocitat utilitzem la següent expressió:

$$F_{xoc} = Q_{comperta} \cdot v_{doll} \cdot \rho_{H2O}$$

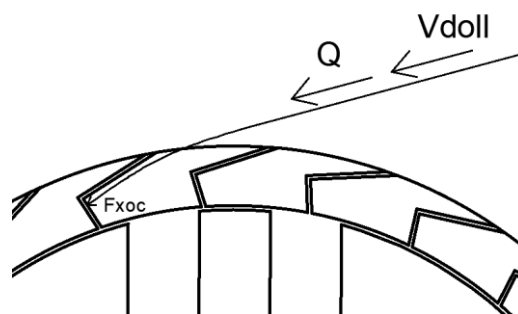


Figura B.3. Representació de la força de xoc

$$F_{xoc} = 0,201 \cdot 4,645 \cdot 1000 = 935,62 \text{ N}$$

A continuació es calcula el moment motor produït per aquesta força de xoc en el braç de palanca corresponent:

$$M_{xoc} = F_{xoc} \cdot r_{roda} = 935,62 \cdot 2,0 = 1871,24 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Es conclou doncs que el moment motor en situació d'arranc és la suma del moment produït pel pes de l'aigua més el moment produït pel xoc:

$$M_{motor \text{ arranc}} = 1515,69 + 1871,24 = 3386,93 \text{ N} \cdot \text{m}$$

B.4. Força de fricció de l'eix

L'eix es recolza en dos punts que són el gruix del mur de pedra que tanca la roda. Tal i com s'ha explicat anteriorment, era molt comú que a l'època s'utilitzés bronze per tal de simular coixinets i reduir la fricció en els suports dels eixos, fent així doncs que la fricció existent fos entre la fusta i la làmina de bronze: μ_{F-B} .

Per tal de modelitzar la força de fricció, en primer lloc es calcula la reacció als recolçaments (R_a i R_b), essent aquesta la meitat del pes del conjunt roda – eix – cigonyals – bieles per recolzament:

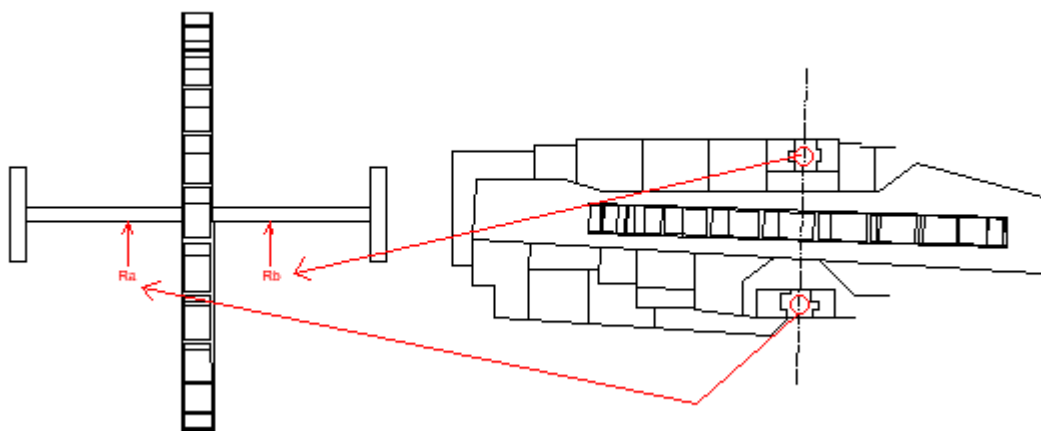


Figura B.4. Representació de les reaccions dels recolçaments

Per tant, tenim que:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow (m_{Roda} + m_{H20} + m_{eix} + 2 \cdot m_{cigüenyal} + 2 \cdot \frac{m_{biela}}{2}) \cdot g - R_a - R_b = 0$$

Considerant simètrica la distància entre la roda i cadascun dels recolçaments, tenim que:

$$R_a = R_b$$

Per tant:

$$(m_{Roda} + m_{H20} + m_{eix} + 2 \cdot m_{cigüenyal} + m_{biela}) \cdot g - 2 \cdot R_a = 0$$

$$R_a = R_b = \frac{(m_{Roda} + m_{H20} + m_{eix} + 2 \cdot m_{cigüenyal} + m_{biela}) \cdot g}{2}$$

$$R_a = R_b = \frac{(627,69 + 168,25 + 27,55 + 2 \cdot 24,80 + 252,59) \cdot 9,81}{2}$$

$$R_a = R_b = 5386,3 \text{ N}$$

A continuació es calcula la força de fricció puntual provocada per la normal en els punts de contacte (a i b):

$$F_{f a} = F_{f b} = R_a \cdot \mu_{F-B} = 5386,3 \cdot 0,7 = 3770,41 \text{ N}$$

Finalment, per tal de passar la força de fricció puntual a una força de fricció torsional degut al contacte en moviment rotacional, se la multiplica pel radi de l'eix:

$$M_{f Torsional a} = M_{f Torsional b} = F_{f a} \cdot r_{eix} = 3770,4 \cdot \frac{0,2962}{2} = 572,1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Al ser igual tant la del punt a com la del b, es pot reduir a una única força de fricció torsional sotmesa a l'eix:

$$M_{f Torsional} = 2 \cdot M_{f Torsional a} = 572,1 \cdot 2 = 1144,82 \text{ N} \cdot \text{m}$$

En el cas de fusta de roure, el valor seria de 1541,52 N·m.

Per tant, l'expressió de la modelització del moment de fricció a l'eix és la següent:

$$M_{f Torsional} = 2 \cdot R_a \cdot \mu_{F-B} \cdot r_{eix}$$

$$M_{f Torsional} = (m_{Roda} + m_{H20} + m_{eix} + 2 \cdot m_{cigüenyal} + m_{biela}) \cdot g \cdot \mu_{F-B} \cdot r_{eix}$$

B.5. Força de fricció de les serres

Recordem que per tal de poder realitzar els càlculs sobre la màquina es modelitza el conjunt de 4 serres més bastidor segons les següents hipòtesis:

- Es modelitza el conjunt de 4 serres més estructura portant com a un element equivalent: un pistó.
- Es desprecia el moment d'inèrcia rotatori produït degut al joc que apareix pel tall ja que es considera el seu valor despreciable.
- Es considera que el punt d'aplicació referent al pistó és l'extrem de la biela, punt on es troba la unió entre aquesta i l'estructura portant.

Així doncs, la massa del pistó serà la resultant de la suma de les 4 serres més l'estructura portant:

$$m_{\text{pistó}} = 149,46 \text{ kg}$$

Aquestes masses són de valor aproximat en funció de les dimensions.

Un cop obtinguda la massa, es calcula el pes i es multiplica pel coeficient de fricció entre la pedra i l'arena μ_{A-P} :

$$F_{f \text{ pistó}} = m_{\text{pistó}} \cdot g \cdot \mu_{A-P} = 149,46 \cdot 9,81 \cdot 0,65 = 953,03 \text{ N}$$

B.6. Anàlisi de la eficiència potencial en estacionari

Tal i com es podrà observar a l'apartat B.8 la màquina treballa a velocitat màxima de manera constant degut a que la limita el cabal i no l'energia. Per aquest motiu es planteja l'anàlisi de l'eficiència des del punt de vista de potències en estat estacionari, ja que en el cas de que la potència d'entrada (o disponible) en estacionari fos major a la potència de sortida (o consumida) la màquina tendiria a accelerar. Recordant que el mecanisme funciona a velocitat màxima, si intentés accelerar es desperdiciaria aquesta potència per no poder assolir una velocitat major.

Així doncs, en primer lloc es calcula l'eficiència de la màquina:

$$\varepsilon_{\text{Potència}} = \frac{P_{\text{sortida}}}{P_{\text{entrada}}} = \frac{F_{\text{pistó}} \cdot v_{\text{pistó}} + F_{f \text{ Torsional}} \cdot w_{\text{roda}}}{M_{\text{motor}} \cdot w_{\text{roda}}}$$

Al analitzar en estacionari un cycle complet de la màquina (de 0 a 2π) s'ha de tenir en compte que la roda en estacionari té una velocitat constant. En canvi, el pistó descriu un moviment rectilini alternatiu. Degut a aquest tret s'hauria de calcular, per un cycle de funcionament (una volta de la roda) la potència consumida pel pistó en infinits punts del cycle ja que aquesta està en funció de la velocitat del mateix. Per tal de reduir aquest problema es busca un valor mig assimilable al conjunt de velocitats que descriu el pistó en tot el cycle.

Per tal d'obtenir el valor mig s'estudia el perfil de velocitats del pistó dins del sistema. Aquest perfil de velocitats correspon a un cycle sinusoidal ja que, tal i com s'explicarà més detalladament al apartat B.7, el pistó assoleix la seva velocitat màxima quan la roda es troba a 90° i 270° , i la seva velocitat mínima (0) es troba als 0° i 360° quan varia el sentit del moviment. Per tant, el perfil de velocitats queda descrit per l'angle de gir (de la roda) tal com mostra la següent gràfica:

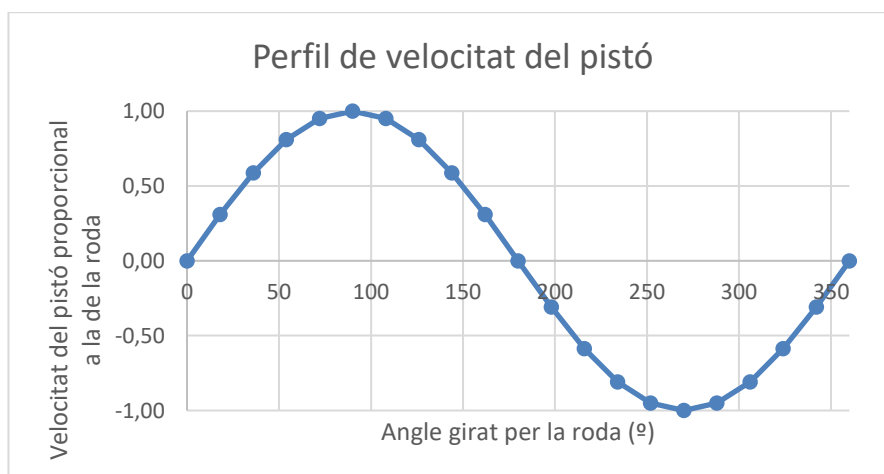


Figura B.5. Gràfica del perfil de velocitat del pistó

La gràfica surt de calcular la proporció sinusoidal de la velocitat màxima en funció de l'angle girat per la roda:

$$\text{Velocitat proporcional} = \sin(2 \cdot \pi \cdot \text{Fracció de gir})$$

Taula B.7. Velocitat proporcional en funció de l'angle

Fracció de gir	Angle (º)	Velocitat proporcional
0	0	0,00
0,05	18	0,31
0,1	36	0,59
0,15	54	0,81
0,2	72	0,95
0,25	90	1,00
0,3	108	0,95
0,35	126	0,81
0,4	144	0,59
0,45	162	0,31
0,5	180	0,00
0,55	198	-0,31
0,6	216	-0,59
0,65	234	-0,81
0,7	252	-0,95
0,75	270	-1,00
0,8	288	-0,95
0,85	306	-0,81
0,9	324	-0,59
0,95	342	-0,31
1	360	0,00

Per tal de mostrar realment el cicle del pistó s'ha de tenir en compte que aquest no té velocitats negatives, sinó canvis de sentit. Per tant, el perfil quedaria de la següent manera:

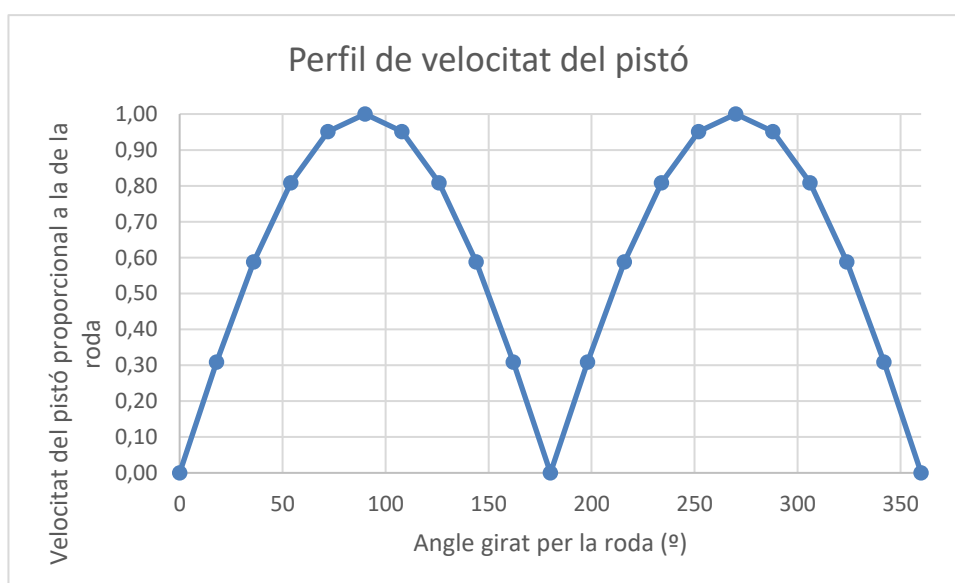


Figura B.6. Gràfica del perfil de velocitat del pistó recondicionat

A continuació s'obté el valor mig de la velocitat del pistó que descriu el perfil de velocitats. Per fer-ho, es calcula la integral d'aquesta funció per obtenir l'àrea que queda per sota de la corba, i a partir d'aquesta calcular el valor mig de la funció:

$$\int_0^{2\pi} |\sin(x)| dx = 2 \cdot \int_0^{\pi} |\sin(x)| dx = 2 \cdot \pi \cdot [-\cos(x)]$$

$$2 \cdot \pi \cdot [\cos(x)] = 2 \cdot [-\cos(\pi) - (-\cos(0))] = 4,0$$

Un cop conegut el valor adimensional de l'àrea que queda descrita sota el perfil de velocitat es pot adaptar a un rectangle de base coneguda (2π) en una altura la qual és el valor mig de la funció.

$$A = b \cdot h \rightarrow h = \frac{A}{b} = \frac{4}{2\pi} = 0,636$$

Així doncs, el valor mig de la velocitat del pistó és $0,636 \cdot v_{\text{pistó MÀXIMA}}$.

La velocitat màxima del pistó s'obté de la compatibilitat cinemàtica del sistema explicada a l'apartat B.2, però per la posició adequada.

La posició on el pistó assoleix la seva velocitat màxima ocorre quan el pistó està al mig del seu cicle de funcionament, a $L/2$ essent L el seu recorregut:

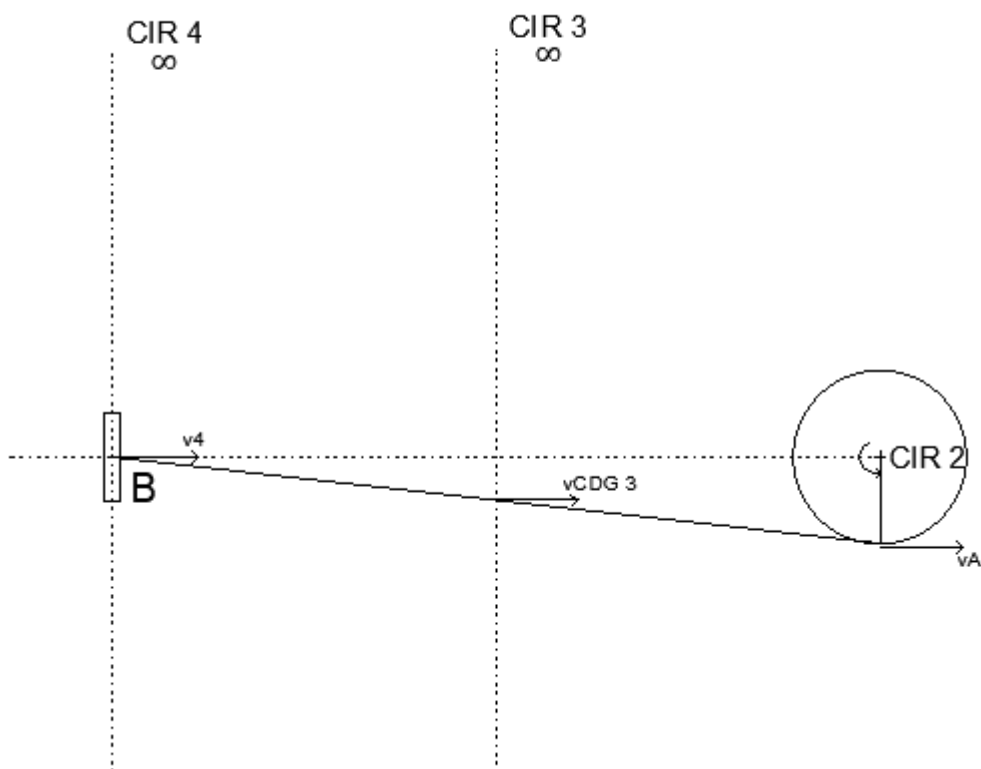


Figura B.7. Esquema cinemàtic de la posició on la velocitat del pistó és màxima

Tal i com es pot observar a la figura B.7, en la posició corresponent a la velocitat màxima del pistó el centre instantani de rotació es troba al infinit també (ja que la recta entre el CIR 2 i el punt A, i la recta entre el CIR 4 i el punt B mai es creuen), **per tant la biela no rota, només es trasllada.**

Per tant, la relació de velocitats queda de la següent manera:

$$v_A = l_{OA} \cdot \omega_2 = 0,2962 \cdot \omega_2$$

$$\omega_3 = \frac{v_A}{l_{CIR\ 3-A}} = \frac{0,2962}{\infty} \cdot \omega_2 = 0$$

La biela, al no estar rotant en aquest instant, presenta la mateixa velocitat lineal en tots els punts de la mateixa describint un moviment traslacional pur, per tant:

$$v_{cdg\ 3} = v_3 = v_{pistó} = v_4 = v_a = 0,2962 \cdot \omega_2$$

Ara doncs ja es disposa de la velocitat màxima del pistó, i en ella es pot calcular el valor mig de la velocitat del mateix en un cicle:

$$h = v_{mitja\ pistó} = 0,636 \cdot v_{pistó\ MÀXIMA} = 0,636 \cdot 0,2962 \cdot \omega_2 = 0,189 \cdot \omega_2$$

A continuació es pot calcular l'eficiència de la màquina:

$$\varepsilon_{Potència} = \frac{P_{sortida}}{P_{entrada}} \cdot 100 = \frac{F_{pistó} \cdot v_{pistó} + M_f \text{ Torsional} \cdot \omega_{roda}}{M_{motor} \cdot \omega_{roda}} \cdot 100$$

$$\varepsilon_{Potència} = \frac{953,03 \cdot 0,189 \cdot \omega_2 + 1144,82 \cdot \omega_2}{2081,53 \cdot \omega_2} \cdot 100 = 63,65 \%$$

Tal i com es pot observar en el resultat l'eficiència és molt baixa. Com ja s'ha explicat la màquina tendiria a accelerar, però al estar funcionant a velocitat màxima limitada pel cabal no és possible. Es proposa doncs millorar l'eficiència dipositant una càrrega sobre les serres en la finalitat de millorar el serratge.

Es desglosa la força del pistó (que és la força de fricció del mateix) i s'inclou el terme de la càrrega extra:

$$F_{pistó} = F_{f\ pistó} = 2 \cdot \mu_{arena-piedra} \cdot g \cdot (m_{carga} + m_{pistón})$$

A continuació, es calcula la càrrega per a una eficiència màxima:

$$\varepsilon_{Potència} = 1 = \frac{2 \cdot \mu_{A-P} \cdot g \cdot (m_{carga} + m_{pistó}) \cdot v_{pistó} + M_f \text{ Torsional} \cdot \omega_{roda}}{M_{motor} \cdot \omega_{roda}}$$

$$1 = \frac{2 \cdot 0,65 \cdot 9,81 \cdot (m_{carga} + 149,46) \cdot 0,189 \cdot \omega_2 + 1144,82 \cdot \omega_2}{2081,53 \cdot \omega_2}$$

$$m_{carga} = \frac{2081,53 - 1144,82}{2 \cdot 0,65 \cdot 9,81 \cdot 0,189} - 149,46 = 240,06 \text{ kg}$$

Per tant, la càrrega que s'hauria de posar sobre cada conjunt de serres serien 240,06 kg aprofitant així tota la potència disponible i millorant doncs el tall de les pedres. En el cas de la fusta de roure, la càrrega seria de 75,09 kg.

A continuació es calcula la nova força de fregament del pistó:

$$F_{f\ pistó} = (m_{pistó} + m_{carga}) \cdot g \cdot \mu_{A-P} = (149,46 + 240,06) \cdot 9,81 \cdot 0,65 = 2483,75 \text{ N}$$

Degut a la càrrega calculada es redissenya el conjunt de serres per tal de modelitzar-lo per a que pugui allotjar uns lastres que compreguin aquesta càrrega òptima. Aquest nou conjunt de bastidor està pensat per a que les serres puguin baixar 2 peus.

B.7. Càlcul del arranc

Una part important d'aquest treball és el càlcul de l'arranc: comprovar matemàticament que la màquina és capaç d'iniciar el moviment en les condicions a les quals estava. En gran part és un tret important ja que dels diferents articles i estudis que s'han realitzat sobre la serradora de pedra cap d'ells inclou aquest càlcul específic i, també, necessari per poder-li donar validesa històrica.

B.7.1. Introducció al mètode de càlcul: reducció dinàmica

La màquina es pot traduir en un sistema d'un grau de llibertat (sistema manovella, biela i pistó), en el qual les forces i parells que s'apliquen en uns punts concrets del mecanisme donen lloc a altres forces i parells en altres punts del mecanisme que seran capaços de realitzar un treball útil, a més de comunicar el moviment desitjat.

Per analitzar correctament la relació que hi ha entre les forces que actuen en un mecanisme i l'acceleració i velocitat que aquest mecanisme assoleix es pot substituir tot el mecanisme per un model dinàmicament equivalent reduït. Per tal de poder fer aquesta substitució anomenada **reducció dinàmica** el mecanisme s'ha de substituir per un sistema anomenat **sistema reduït**.

Aquest sistema reduït ha de:

- Tenir la mateixa energia cinètica (E_c) que tot el mecanisme original.
- Tenir la mateixa potència (P) que tot el mecanisme original.

La reducció dinàmica d'un mecanisme d'un grau de llibertat es pot realitzar reduint tot el mecanisme a un eix de rotació, en aquest cas la roda hidràulica.

Per tal d'aplicar el mètode de reducció mecànica existeixen dues restriccions:

- El mecanisme ha de ser d'un grau de llibertat.
- Les relacions de velocitats entre la baula motora (la roda) i la baula de sortida (les serres) han de ser constants per qualsevol posició. Si les relacions no són constants (com és el cas) el mecanisme ha d'estar en **fase d'arrencada**.

En primer lloc s'han d'introduir dos conceptes clau:

1. Concepte de moment d'inèrcia reduït, I_r : aquell moment d'inèrcia que situat a l'eix de reducció i girant amb ell té, en qualsevol moment del cicle de treball del mecanisme, la mateixa energia cinètica que tot el mecanisme original.

$$\frac{1}{2} \cdot I_r \cdot \omega_r^2 = E_r = E_{C_{mec}}$$

2. Concepte de parell reduït, M_r : totes les forces i parells aplicats al mecanisme es substitueixen per un únic parell reduït que, aplicat a l'eix reduït ha de produir la mateixa potència que el conjunt de forces i parells aplicats al mecanisme original.

$$M_r \cdot \omega_r = P_{mec}$$

3. L'acceleració d'un sistema reduït a un eix compleix l'equació dinàmica d'un sistema reduït.

$$M_r = I_r \cdot \alpha_r$$

Per tant, s'utilitza el mètode de reducció mecànica per tal de comprovar que la màquina pot arrancar.

B.7.2. Explicació del càlcul

Es parteix de la hipòtesi en la que es redueix el sistema a un eix de rotació el qual és la roda, que a efectes mecànics es equiparable al cigonyal, ja que aquest és solidari a la roda i a l'eix compartint el parell i la velocitat.

Com s'ha dit al subapartat B.7.1 el modelitza la màquina com un sistema manovella biela pistó, on:

- La manovella és el cigonyal (a continuació l'element 2).
- La biela és la biela de la màquina (a continuació l'element 3).
- El pistó és el conjunt de les serres, el bastidor i la càrrega d'optimització d'eficiència (a continuació l'element 4).

Al reduir a l'eix (la manovella) tenim que:

- La velocitat angular de l'eix és igual a la velocitat angular reduïda:

$$w_2 = w_R$$

- L'acceleració angular de l'eix és igual a l'acceleració angular reduïda:

$$\alpha_2 = \alpha_R$$

A continuació plantejem la primera equació de la reducció mecànica:

$$E_r = E_{C_{mec}}$$

L'energia cinètica pot ser rotacional (com en el cas de la manovella) o translacional (com en el cas del pistó). En canvi, la biela en funció de la seva posició pot tenir les dues, o qualsevol d'una sola:

$$\frac{1}{2} \cdot I_r \cdot w_r^2 = E_{c,rotacional} + E_{c,translacional}$$

$$\frac{1}{2} \cdot I_r \cdot w_r^2 = \frac{1}{2} \cdot I_2 \cdot w_2^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot I_3 \cdot w_3^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot v_{cdg3}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot v_4^2$$

D'aquesta equació s'ha d'obtenir la inèrcia reduïda del sistema reduït. Per tal de poder aïllar-ho, s'obté la relació de velocitats a partir de la compatibilitat cinemàtica (apartat 3.3) per tal de poder ficar tots els components en funció de la velocitat angular de 2 (o el que és el mateix en funció de la velocitat angular reduïda).

Un cop obtinguda la inèrcia reduïda es calcula el moment reduït (concepte 3 explicat de la reducció dinàmica).

$$M_r = I_r \cdot \alpha_r$$

Per tal d'obtenir un valor de moment reduït es podria calcular utilitzant l'acceleració angular de la roda si coneguessim el valor experimental. D'acord a que aquest valor es desconeix es procedeix a utilitzar un valor d'acceleració angular de 0,1, ja que és el valor mínim necessari per comprovar que la màquina arranca.

Finalment, s'aplica l'equació del concepte nº 2 de la reducció dinàmica.

$$M_r \cdot w_r = P_{mec}$$

$$M_r \cdot w_r = M_2 \cdot w_2 - M_{f\ Torsional} \cdot w_r \pm 2 \cdot F_{pes3} \cdot v_{cdg3} \pm 2 \cdot F_{f\ pistó} \cdot v_4$$

Es pot observar que tant per la biela com pel pistó la potència pot ser positiva (a favor) o negativa (en contra) en funció de la posició d'estudi.

D'aquesta equació s'aïlla el moment de l'eix.

$$M_2 = \frac{M_r \cdot w_r + M_f \text{ Torsional} \cdot w_r \pm 2 \cdot F_{pes\ 3} \cdot v_{cdg\ 3} \pm 2 \cdot F_{f\text{pistó}} \cdot v_4}{w_2}$$

Si aquest és igual o inferior al moment disponible a la màquina, arranca. En cas contrari, significaria que la màquina no arranca.

B.7.3. Estudi en una posició aleatòria

A continuació es calcula el moment necessari per arrancar en una posició aleatòria, la quan correspon a l'exemple utilitzat per explicar la compatibilitat cinemàtica del sistema al apartat B.2.

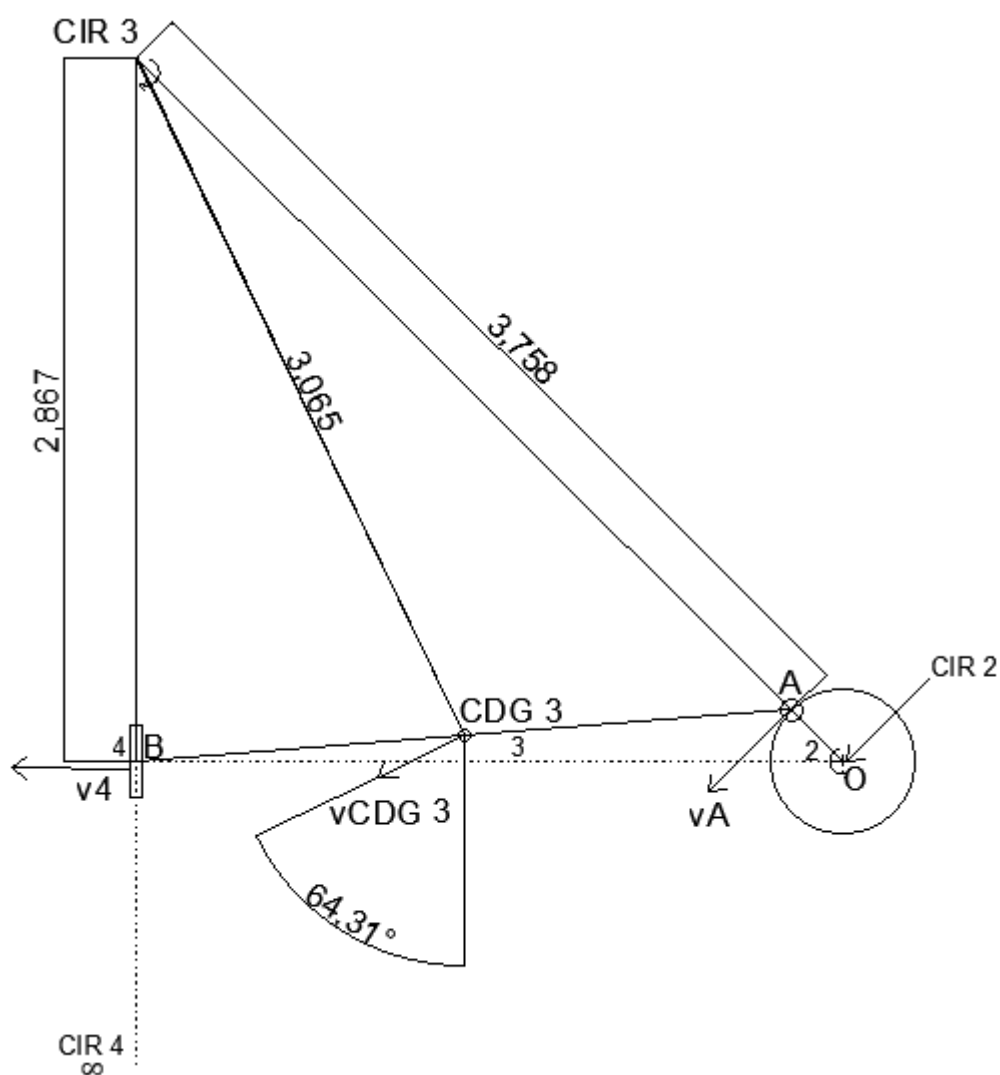


Figura B.8. Esquema cinemàtic en una posició aleatòria

En primer lloc s'obtenen les relacions de velocitats:

$$v_A = l_{OA} \cdot w_2 = 0,2962 \cdot w_2$$

$$w_3 = \frac{v_A}{l_{CIR3-A}} = \frac{0,2962}{3,758} \cdot w_2 = 7,88 \cdot 10^{-2} \cdot w_2$$

$$v_{cdg3} = v_3 = l_{CIR3-cdg3} \cdot w_3 = 7,88 \cdot 10^2 \cdot 3,065 \cdot w_2 = 0,284 \cdot w_2$$

$$v_{PISTÓ} = v_4 = w_3 \cdot l_{CIR3-B} = 7,88 \cdot 10^2 \cdot 2,867 \cdot w_2 = 0,226 \cdot w_2$$

A continuació es pot calcular la inèrcia reduïda (simplifiquem els $\frac{1}{2}$ i els termes de w_2):

$$\frac{1}{2} \cdot I_r \cdot w_r^2 = \frac{1}{2} \cdot I_2 \cdot w_2^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot I_3 \cdot w_3^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot v_{cdg3}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot v_4^2$$

$$I_r \cdot w_r = I_2 \cdot w_2 + 2 \cdot I_3 \cdot (7,88 \cdot 10^{-2} \cdot w_2)^2 + 2 \cdot m_3 \cdot (0,284 \cdot w_2)^2 + 2 \cdot m_4 \cdot (0,226 \cdot w_2)^2$$

$$I_r = I_2 + 2 \cdot I_3 \cdot (7,88 \cdot 10^{-2})^2 + 2 \cdot m_3 \cdot (0,284)^2 + 2 \cdot m_4 \cdot (0,226)^2$$

Recordem que I_2 és el conjunt de l'eix, la roda i els cigonyals, per tant:

$$I_2 = I_{roda} + I_{eix} + 2 \cdot I_{cigonyal} = 784,56 + 0,302 + 2 \cdot 2,45 = 789,46 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_r = 789,46 + 2 \cdot 149,59 \cdot (7,88 \cdot 10^{-2})^2 + 2 \cdot 252,59 \cdot (0,284)^2 + 2 \cdot 389,52 \cdot (0,226)^2$$

$$I_r = 872,18 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Una vegada obtinguda la inèrcia reduïda, es calcula el moment reduït:

$$M_r = I_r \cdot \alpha_r$$

$$M_r = 872,18 \cdot 0,1 = 87,22 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Finalment es calcula el moment motor mínim requerit per a que arranqui:

$$M_2 = \frac{M_r \cdot w_r + M_{f \text{ Torsional}} \cdot w_r \pm 2 \cdot F_{pes3} \cdot v_{cdg3} \pm 2 \cdot F_{f \text{ pistó}} \cdot v_4}{w_2}$$

En aquest cas, la potència generada per la massa de la biela és positiva, mentre que la del pistó és negativa. També s'ha de tenir en compte que la velocitat del centre de gravetat de la biela (3) i el pes de la mateixa han d'estar en la mateixa direcció per fer potència, pel que s'aplica el cosinus pertinent:

$$M_2 = \frac{M_r \cdot w_r + M_{f \text{ Torsional}} \cdot w_r - 2 \cdot m_4 \cdot g \cdot v_{cdg3} \cdot \cos(64,31) + 2 \cdot F_{f \text{ pistó}} \cdot v_4}{w_2}$$

Substituïm velocitats:

$$M_2 = \frac{M_r \cdot w_r + M_{f \text{ Torsional}} \cdot w_r - 2 \cdot m_4 \cdot g \cdot 0,284 \cdot w_2 \cdot \cos(64,31) + 2 \cdot F_{f \text{ pistó}} \cdot 0,226 \cdot w_2}{w_2}$$

$$M_2 = M_r + M_{f \text{ Torsional}} - 2 \cdot m_4 \cdot g \cdot 0,284 \cdot \cos(64,31) + 2 \cdot F_{f \text{ pistó}} \cdot 0,226$$

Substituïm valors:

$$M_2 = 87,22 + 1144,82 - 2 \cdot 252,59 \cdot 9,81 \cdot 0,284 \cdot \cos(64,31) + 2 \cdot 2483,75 \cdot 0,226$$

$$M_2 = 1744,03 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Per tant, com que el moment motor disponible al arranc és de 3386,93 N·m, la màquina arranca.

Els càlculs s'han realitzat utilitzant les masses i inèrcies suposant que s'utilitza fusta de pi. En el cas d'utilitzar roure el moment motor necessari per arrancar seria 1448,91 N·m pel que també arrancaria.

B.7.4. Estudi en la posició més desfavorable

A continuació es realitza el càlcul en la posició d'arranc més desfavorable ja que, podent arrancar en aquesta posició, queda demostrat que la màquina no ha de tenir inconvenients en cap.

La posició més desfavorable és aquella on les serres tenen la velocitat màxima, produint la màxima potència en contra al sistema. Aquest instant on ocorreix això és quan el pistó està al mig del seu cicle de funcionament, a L/2 essent L el seu recorregut tal i com s'ha explicat en l'apartat B.6: Càlcul de l'eficiència.

Per tant, la relació de velocitats queda de la següent manera:

$$v_A = l_{OA} \cdot w_2 = 0,2962 \cdot w_2$$

$$w_3 = \frac{v_A}{l_{CIR\ 3-A}} = \frac{0,2962}{\infty} \cdot w_2 = 0$$

Recordem que la biela, al no estar rotant en aquest instant, presenta la mateixa velocitat lineal en tots els punts de la mateixa describint un moviment traslacional pur, per tant:

$$v_{cdg\ 3} = v_3 = v_{pistó} = v_4 = v_a = 0,2962 \cdot w_2$$

Així doncs, es calcula la inèrcia reduïda ($w_3 = 0$):

$$\frac{1}{2} \cdot I_r \cdot w_r^2 = \frac{1}{2} \cdot I_2 \cdot w_2^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot I_3 \cdot w_3^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot v_{cdg\ 3}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot v_4^2$$

$$I_r \cdot w_r = I_2 \cdot w_2 + 2 \cdot m_3 \cdot (0,2962 \cdot w_2)^2 + 2 \cdot m_4 \cdot (0,2962 \cdot w_2)^2$$

$$I_r = 789,46 + 2 \cdot 252,59 \cdot (0,2962)^2 + 2 \cdot 389,52 \cdot (0,2962)^2 = 902,43 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Una vegada obtinguda la inèrcia reduïda, es calcula el moment reduït:

$$M_r = I_r \cdot \alpha_r$$

$$M_r = 902,43 \cdot 0,1 = 90,24 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Finalment es calcula el moment motor mínim requerit per a que arranqui:

$$M_2 = \frac{M_r \cdot w_r + M_{f\ Torsional} \cdot w_r \pm 2 \cdot F_{pes\ 3} \cdot v_{cdg\ 3} \pm 2 \cdot F_{f\ pistó} \cdot v_4}{w_2}$$

En aquest cas, la potència generada per la massa de la biela és nula ja que forma un angle de 90° en la velocitat. Per altra banda, la del pistó és negativa.

$$M_2 = \frac{M_r \cdot w_r + M_{f\ Torsional} \cdot w_r + 2 \cdot F_{f\ pistó} \cdot v_4}{w_2}$$

Substituïm velocitats:

$$M_2 = \frac{M_r \cdot w_r + M_{f \text{ Torsional}} \cdot w_r + 2 \cdot F_{f \text{ pistó}} \cdot 0,2962 \cdot w_2}{w_2}$$

$$M_2 = M_r + M_{f \text{ Torsional}} + 2 \cdot F_{f \text{ pistó}} \cdot 0,2962$$

Substituïm valors:

$$M_2 = 90,24 + 1144,82 + 2 \cdot 2483,75 \cdot 0,2962 = 2706,44 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Per tant, com que el moment motor disponible al arranc és de 3386,93 N·m, la màquina arrancaria. Els càlculs s'han realitzat utilitzant les masses i inèrcies suposant que s'utilitza fusta de pi. En el cas d'utilitzar roure el moment motor necessari per arrancar seria 2511,09 N·m pel que també arrancaria.

Igualment, s'ha de tenir en compte que el càlcul s'està fent considerant els 240,06 kg damunt de cada conjunt de serres per tal d'aprofitar al màxim la potència útil quan la màquina està funcionant en estacionari. Pel moment d'arrancada el més coherent es descarregar aquesta càrrega per tal d'afavorir l'engegada, igual que es faria en qualsevol màquina sempre que fos possible. Repetint el càlcul, eliminant aquesta massa podem observar el nou valor de

$$I_r = 789,46 + 2 \cdot 252,59 \cdot (0,2962)^2 + 2 \cdot (525,89 - 240,06) \cdot (0,2962)^2 = 860,40 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$M_r = 860,40 \cdot 0,1 = 86,04 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_2 = 86,04 + 1144,82 + 2 \cdot F_{f \text{ pistó}} \cdot 0,2962$$

La força de fricció del pistó és el que restringeix el moment, i s'ha de recordar que aquest té en conte de manera directa el pes afegit. Tal com s'ha calculat al modelitzar la força de fricció del pistó, sense tenir en compte aquesta càrrega òptima el valor és de 956,45 N, per tant:

$$M_2 = 86,04 + 1144,82 + 2 \cdot 953,03 \cdot 0,2962 = 1795,43 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Finalment es pot observar com, retirant la càrrega la màquina arranca amb molta més facilitat. Els càlculs s'han realitzat utilitzant les masses i inèrcies suposant que s'utilitza fusta de pi. En el cas d'utilitzar roure el moment motor necessari per arrancar seria 2226,11 N·m pel que també arrancaria.

B.8. Velocitat de funcionament

A continuació es calcula la velocitat de funcionament del mecanisme. Aquesta velocitat depèn del cabal d'alimentació i de l'energia que aquest li aporta al mecanisme.

En primer lloc es calcula la velocitat a la sortida del estanc d'aigua:

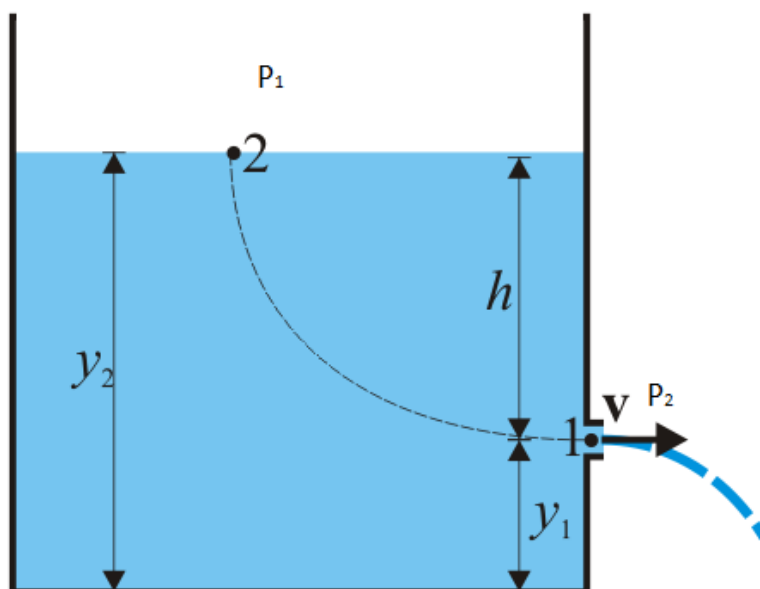


Figura B.9. Esquema representatiu del estanc d'aigua

Aplicant Bernoulli s'obté:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + y_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + y_2$$

On:

- P_1 és la pressió de l'aigua a la sortida del estanc en Pa.
- P_2 és la pressió de l'aigua a la superfície del estanc (nivell més alt d'aigua) en Pa.
- v_1 és la velocitat de l'aigua a la sortida del estanc en m/s.
- v_2 és la velocitat de l'aigua a la superfície del estanc (nivell més alt d'aigua) en m/s.
- y_1 i y_2 són les altures a les que es troben els diferents punts respecte la base de l'estanc en m (0,13 i 1,0 respectivament).
- g és el valor de la gravetat en m/s^2 .

$$\frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2 - P_1}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + y_2 - y_1$$

Tant la pressió al punt 1 com la pressió del punt 2 són iguals a 0, ja que són punts que es troben a l'atmosfera.

La velocitat al punt 2 és 0 ja que l'aigua a la superfície no té velocitat.

Per tant:

$$\Delta y = \frac{v_2^2}{2g} \rightarrow v_2 = \sqrt{2g \cdot \Delta y} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot (1,0 - 0,13)} = 4,13 \text{ m/s}$$

Una vegada obtinguda la velocitat a la sortida de l'estanc, es pot calcular el cabal teòric d'alimentació que proporioni l'energia a la roda.

$$Q_t = A \cdot v$$

On:

- Q_t és el cabal teòric d'aigua en m^3/s .
- A és l'àrea de l'orifici de sortida ($b \cdot h$) en m^2 .

$$Q_t = (0,32 \cdot 0,26) \cdot 4,13 = 0,344 \text{ m}^3/\text{s}$$

A continuació es calcula el cabal real contemplant pèrdues:

$$Q_R = 0,625 \cdot A \cdot v$$

On:

- Q_R és el cabal real d'aigua en m^3/s .
- 0,625 és un factor adimensional de reducció per a sortides en tapa (o comporta) vertical.

$$Q_R = 0,625 \cdot (0,32 \cdot 0,26) \cdot 4,13 = 0,201 \text{ m}^3/\text{s}$$

Per tant, aquest és el cabal d'alimentació de la màquina.

A continuació es calcula la velocitat de l'aigua a l'entrada de la roda. En primer lloc s'obté l'altura des de la superfície de l'aigua a l'estanc fins l'entrada a la roda: 1,76 m.

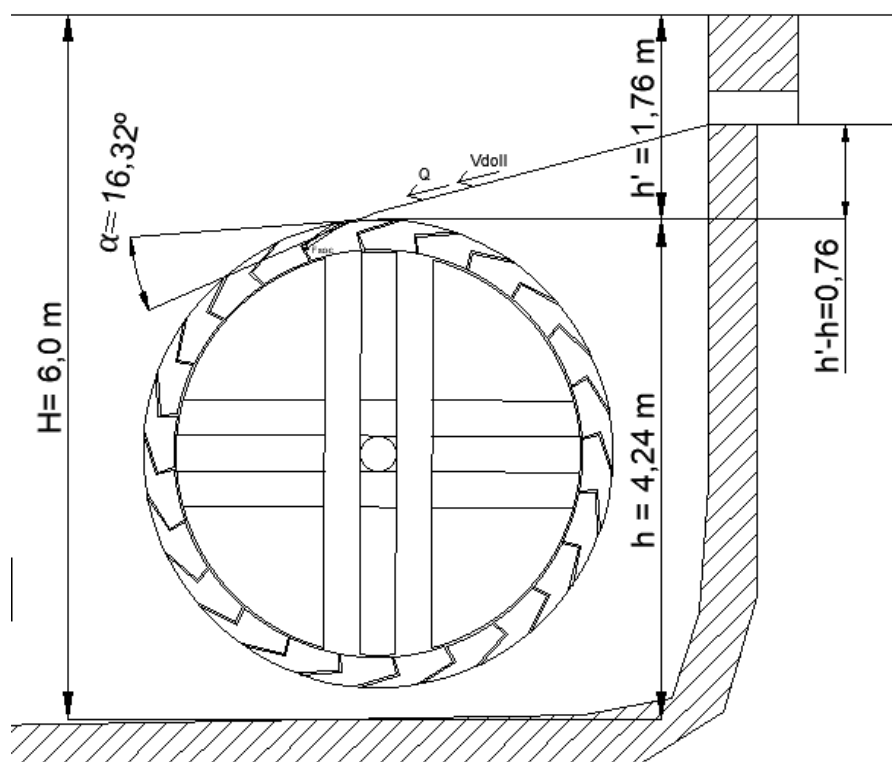


Figura B.10. Cotes representatives per al càlcul

A continuació es calcula la velocitat a l'entrada de la roda aplicant novament Bernoulli, on el punt 1 és l'entrada de la roda i el punt 2 és la sortida del tanc:

$$\frac{v_1^2}{2g} + (h + 0,76) = \frac{v_2^2}{2g} + h$$

S'ha de recordar que, igual que en el cas anterior, les pressions són atmosfèriques als dos punts.

$$\frac{(4,321 \cdot 0,625)^2}{2g} + 0,76 + h = \frac{v_2^2}{2g} + h$$

$$(4,321 \cdot 0,625)^2 + 0,76 \cdot 2g = v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{(4,321 \cdot 0,625)^2 + 0,76 \cdot 2 \cdot 9,81} = 4,65 \text{ m/s}$$

A continuació es calcula la velocitat tangencial de l'aigua (mateixa direcció que la velocitat lineal de la roda):

$$v_T = v_2 \cdot \cos(\alpha)$$

On:

- v_T és la velocitat tangencial a la roda de l'aigua en m/s.
- α és l'angle format entre la tangent de la roda i la direcció de l'aigua.

$$v_{T \text{ h20}} = 4,65 \cdot \cos(16,32) = 4,46 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A continuació es calcula l'energia disponible que rep la roda per l'aigua:

$$E_{Roda} = E_c^{Cilindre} + E_p^{Roda} - E_c^{Xoc} - E_c^{Sortida}$$

On:

- E_{Roda} és l'energia total de la roda en J.
- $E_c^{Cilindre}$ és l'energia cinètica en la que l'aigua entra a la roda degut al seu pas pel cilindre, en J.
- E_p^{Roda} és l'energia potencial generada per l'aigua continguda a la roda, en J.
- E_c^{Xoc} és l'energia cinètica perduda al xoc quan l'aigua entra en contacte amb la roda degut al diferencial de velocitats, en J.
- $E_c^{Sortida}$ és l'energia cinètica perduda a la sortida de la roda, en J.

$$E_c^{Cilindre} = \frac{1}{2} \cdot m_{h20} \cdot v_2^2$$

$$E_p^{Roda} = m_{h20} \cdot g \cdot D_{roda}$$

$$E_c^{Xoc} = \frac{1}{2} \cdot m_{h20} \cdot (v_{T \text{ h20}} - v_{T \text{ Roda}})^2$$

On $v_{T \text{ Roda}}$ és la velocitat lineal tangencial de la roda en m/s.

$$E_c^{Sortida} = \frac{1}{2} \cdot m_{h20} \cdot v_{T Roda}^2$$

La velocitat lineal tangencial de la roda es pot definir com:

$$v_{T Roda} = w_{Roda} \cdot R_{Roda}$$

On w_{Roda} és la velocitat angular de la roda en rad/s.

$$E_{Roda} = \frac{1}{2} \cdot m_{h20} \cdot v_2^2 + m_{h20} \cdot g \cdot D_{roda} - \frac{1}{2} \cdot m_{h20} \cdot (v_{T h20} - w_{Roda} \cdot R_{Roda})^2 - \frac{1}{2} \cdot m_{h20} \cdot (w_{Roda} \cdot R_{Roda})^2$$

La energia disponible de la roda E_{Roda} és l'energia disponible que té el pistó per dissipar (no es contemplen la resta d'elements degut a que en estacionari i a velocitat constant el seu diferencial d'energia al llarg d'un cicle de treball és 0. És a dir, que els elements que es mantenen permanentment dins el volum de control, no afecten el còmput global sempre que es treballi en règim estacionari, o sigui que els elements de la pròpia màquina no absorbeixen ni entreguen energia al llarg d'un cicle complet).

Per tant, per aconseguir aprofitar tota l'energia disponible d'entrada (la roda) aquesta ha de ser igual a l'energia dissipada a la sortida (el pistó):

$$E_{Roda} = 2 \cdot E_{pistó}$$

$$E_{pistó} = \frac{1}{2} \cdot (m_{pistó} + m_{carga}) \cdot v_{pistó}^2$$

S'ha de recordar d'apartats anteriors que m_{carga} pel pi és de 240,06 kg i la relació de velocitats pel cas d'estudi (posició més desfavorable) és $v_{pistó} = 0,2962 \cdot w_{Roda}$

$$E_{Roda} = 2 \cdot E_{pistó} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (m_{pistó} + m_{carga}) \cdot (0,2962 \cdot w_{Roda})^2$$

A continuació substituïm la Energia de la roda per l'equació obtinguda abans:

$$\frac{1}{2} \cdot m_{h20} \cdot v_2^2 + 2 \cdot m_{h20} \cdot g \cdot D_{roda} - \frac{1}{2} \cdot m_{h20} \cdot (v_{T h20} - w_{Roda} \cdot R_{Roda})^2 - \frac{1}{2} \cdot m_{h20} \cdot (w_{Roda} \cdot R_{Roda})^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (m_{pistó} + m_{carga}) \cdot (0,2962 \cdot w_{Roda})^2$$

Es substitueixen termes i es simplifiquen els 1/2:

$$168,25 \cdot 4,65^2 + 2 \cdot 168,25 \cdot 9,81 \cdot 4,0 - 168,25 \cdot (4,46 - w_{Roda} \cdot 2,0)^2 - 168,25 \cdot (w_{Roda} \cdot 2,0)^2 = 2 \cdot (149,46 + 240,06) \cdot (0,2962 \cdot w_{Roda})^2$$

Es resol l'equació obtenint la velocitat angular de la roda.

$$w_{Roda} = 4,19 \frac{rad}{s} \cdot \frac{1 rev}{2\pi rad} \cdot \frac{60 s}{1 min} = 40,04 rpm$$

En el cas de la màquina de roure: $w_{Roda} = 41,12 rpm$. Es pot observar un valor de velocitat major en el cas del roure ja que només té en compte la massa de la càrrega que s'afegeix al pistó, i en el cas del roure aquesta és menor (75,09 kg).

Per tant s'ha obtingut la velocitat de treball de la màquina per energies. A continuació es calcula la velocitat màxima que pot assolir la màquina en funció del cabal d'entrada, ja que aquest podria limitar la velocitat de la roda en funció del temps que triga en plenar el volum dels caixons d'aigua.

Tal i com s'ha calculat anteriorment es té un cabal real de 0,201 m³/s. En primer lloc es passa a cabal màssic:

$$Q_R = 0,201 \frac{m^3}{s} \cdot \frac{1000 L}{1 m^3} \cdot \frac{1 kg \text{ aigua}}{1 L \text{ aigua}} = 201 \frac{kg}{s}$$

En tot moment l'aigua té plens la meitat dels caixons ($m_{h20} = 168,25$ kg). Per tant, per donar una volta sencera (1 rev) hauran de passar pels caixons el doble d'aigua ($2 \cdot m_{h20}$), per tant:

$$w_{rev} = \frac{201}{2 \cdot 168,25} = 0,597 \frac{rev}{s}$$

On w_{rev} és la velocitat de la roda en el cabal real que té.

$$w_{rev} = 0,597 \frac{rev}{s} \cdot \frac{60 s}{1 min} = 35,82 rpm$$

Finalment, s'aplica un coeficient de pèrdua de 0,8 degut a possibles variabilitats que dismineixin l'eficiència de la roda.

$$w_{rev} = 35,82 \cdot 0,8 rpm = 28,66 rpm$$

Per tant, es conclou que la velocitat angular de la roda vindrà limitada pel cabal i que, per tant, part de l'energia generada per la roda no es podrà aprofitar pel tall.

B.9. Càlcul resistent

Es realitza el càlcul per resistència sobre l'element més crític del sistema: l'eix.

Per tal de realitzar aquest càlcul es segueix el Codi Tècnic de la Edificació, en concret el document bàsic de seguretat estructural per la fusta: CTE-DB SE-M [15]. No és un document enfocat a màquines, però contempla els càlculs resistents a elements de fusta d'un punt de vista més restrictiu, ja que la finalitat es trobar uns valors de resistència coherents per la fusta.

En primer lloc es calcula el valor de tensió del límit elàstic aplicant els coeficients de minoració:

$$X_d = k_{mod} \cdot \left(\frac{X_k}{\gamma_M} \right)$$

On:

- X_d és el valor de càlcul de la tensió del límit elàstic del material.
- X_k és el valor característic de la tensió del límit elàstic del material (Taula E.1).
- k_{mod} és el factor de modificació, els quals els seus valors figuren a la taula 2.4 tenint en compte, previament, la classe de duració de la combinació de la càrrega d'acord a la taula 2.2 i la classe de servei del apartat 2.2.2.2.
- γ_M és el coeficient parcial de seguretat per la propietat del material definit a la taula 2.3.

Segons la taula E.1 del CTE DB SE-M, per fusta aserrada i espècies de coníferes i pollancre (on entraria el pi silvestre) ubiquem com a valors característics X_k de 14 MPa per flexió i 3 MPa per tallant (essent la qualitat més desfavorable).

Segons la taula 2.3. per maderes macisses el coeficient parcial de seguretat γ_M és 1.3.

Segons l'apartat 2.2.2.2. ens trobariem en la classe de servei del tipus 3 (condicions ambientals que condueixin a un contingut d'humetat superior al de les altres classes de servei [el més desfavorable]).

Segons la taula 2.2 considerant que la màquina estigués en servei més de 10 anys la classe de duració seria permanent (la més desfavorable).

Així doncs, per mader macissa, segons la norma UNE-EN 14081-1:2016 i per una classe de servei 3 i una classe de duració de la càrrega permanent, el valor del factor de modificació k_{mod} és 0,5.

$$X_d (\text{tallant/torsió}) = 0,5 \cdot \left(\frac{3,0}{1,3}\right) = 1,15 \text{ MPa}$$

El tallant pot proveir d'una càrrega vertical (com el pes) o del tallant provocat per un moment torsor.

$$X_d (\text{flexió}) = 0,5 \cdot \left(\frac{14,0}{1,3}\right) = 5,38 \text{ MPa}$$

A continuació es calcula, per la secció més desfavorable, les tensions a les que està sotmés l'eix per tal de comparar-ho en els valor límits calculats en el CTE. A continuació es mostra el diagrama del sòlid lliure de l'eix:

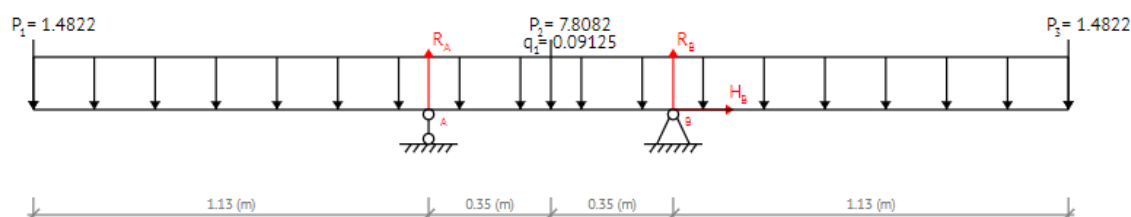


Figura B.11. Diagrama del sòlid lliure de l'eix

On:

- P_1 i P_3 són el pes dels cigonyals més el pes de les bieles (meitats):

$$P_1 = P_3 = \left(m_{\text{cigüenyal}} + \frac{m_{\text{biela}}}{2}\right) \cdot g = \left(24,80 + \frac{252,59}{2}\right) \cdot 9,81 = 1482,2 \text{ N} = 1,4822 \text{ kN}$$

- P_2 és el pes de la roda tenint en compte la càrrega de l'aigua en ple funcionament:

$$P_2 = (m_{\text{Roda}} + m_{H2O}) \cdot g = (627,69 + 168,25) \cdot 9,81 = 7808,2 \text{ N} = 7,8082 \text{ kN}$$

- q_1 és la càrrega repartida deguda al propi pes de l'eix:

$$q_1 = A_{\text{eix}} \cdot \rho \cdot g = 1,72 \cdot 10^{-2} \cdot 540 \cdot 9,81 = 91,25 \text{ N/m} = 9,125 \cdot 10^{-2} \text{ kN/m}$$

- R_A i R_B són les reaccions als recolzaments tenint en compte la càrrega de l'aigua en ple funcionament:

$$R_A = R_B = \frac{\left(2 \cdot m_{\text{cigüenyal}} + m_{\text{Roda}} + m_{H2O} + m_{\text{eix}} + \frac{2 \cdot m_{\text{biela}}}{2}\right) \cdot g}{2}$$

$$R_A = R_B = \frac{(2 \cdot 24,80 + 627,69 + 168,25 + 27,55 + 252,59)}{2} \cdot 9,81$$

$$R_A = R_B = 5386,3 \text{ N} = 5,3863 \text{ kN}$$

Hi han dos seccions d'estudi: als recolzaments i al centre de l'eix. A continuació es calcula el tallant i el moment per flexió.

Valors pel punt A/B

$$T_A = T_B = 5386,3 \text{ N}$$

On T_A és el tallant al punt A (punts de recolzament).

$$M_A = M_B = P_1 \cdot x + q_1 \cdot \frac{x^2}{2}$$

Per a $x = 1,13 \text{ m}$ (distància de l'extrem al recolzament) es té:

$$M_A = M_B = 1,4822 \cdot 1,13 + 8,78 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{1,13^2}{2} = 1,7344 \text{ kN} \cdot \text{m} = 1734,4 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Valors pel centre de l'eix

$$T_C = 7808,2 \text{ N}$$

On T_C és el tallant al centre del eix.

$$M_C = P_1 \cdot x + q_1 \cdot \frac{x^2}{2} - R_A \cdot (x - 1,13)$$

Per a $x = L_{eix}/2 \text{ m}$ es té:

$$M_C = P_1 \cdot \frac{L_{eix}}{2} + q_1 \cdot \frac{\left(\frac{L_{eix}}{2}\right)^2}{2} - R_A \cdot \left(\frac{L_{eix}}{2} - 1,13\right)$$

$$M_C = 1,4822 \cdot \frac{2,962}{2} + 8,78 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{\left(\frac{2,962}{2}\right)^2}{2} - 5,3863 \cdot \left(\frac{2,962}{2} - 1,13\right)$$

$$M_C = 0,4101 \text{ kN} \cdot \text{m} = 410,1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

A continuació es poden dibuixar els diagrames d'esforços de l'eix:

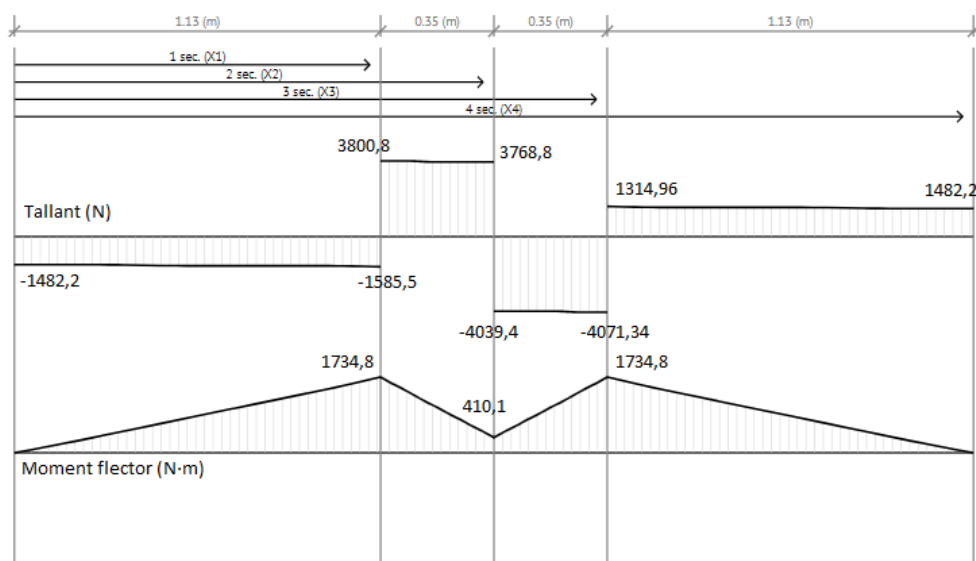


Figura B.12. Diagrama d'esforços de l'eix

El moment torsor és constant entre els recolzaments: 2081,53 N·m.

Tal i com es pot observar, els esforços màxims es troben als recolzaments, per tant aquesta és la secció més desfavorable. A continuació es calculen les tensions:

$$\sigma_{flexió} = \frac{M_{flexió}}{W_{flexió}} = \frac{M_{flexió}}{\frac{\pi \cdot D^3}{32}} = \frac{32 \cdot M_{flexió}}{\pi \cdot D^3} = \frac{32 \cdot 1734,8}{\pi \cdot 0,2962^3} = 679969,1 \text{ N/m}^2$$

$$\sigma_{flexió} = 679969,1 \text{ N/m}^2 = 0,68 \text{ N/mm}^2 = 0,68 \text{ MPa}$$

$$X_d (\text{flexió}) \geq \sigma_{flexió} \rightarrow \text{Resisteix}$$

$$\tau_{tallant} = \frac{4}{3} \cdot \frac{T_c}{A} = \frac{4}{3} \cdot \frac{5386,3}{1,72 \cdot 10^2} = 416898,5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 0,42 \text{ N/mm}^2 = 0,42 \text{ MPa}$$

$$X_d (\text{tallant/torsió}) \geq \tau_{tallant} \rightarrow \text{Resisteix}$$

$$\tau_{Torsió} = \frac{M_{torsió}}{W_{torsió}} = \frac{M_{torsió}}{\frac{\pi \cdot D^3}{16}} = \frac{16 \cdot M_{torsió}}{\pi \cdot D^3} = \frac{16 \cdot 2081,53}{\pi \cdot 0,2962^3} = 407941,4 \text{ N/m}^2$$

$$\tau_{Torsió} = 407941,4 \text{ N/m}^2 = 0,41 \text{ N/mm}^2 = 0,41 \text{ MPa}$$

$$X_d (\text{tallant/torsió}) \geq \tau_{torsió} \rightarrow \text{Resisteix}$$

Realitzant la combinació més desfavorable es pot comprovar que seguiria aguantant. Es calculen els coeficients de càrrega provinents de cadascun dels esforços. S'entén com a coeficient de càrrega el valor unitari que surt de la relació entre la sol·licitació del material i la seva tensió admissible per tal d'apreciar el grau d'utilització de la capacitat resistent de l'element estudiat.

$$\gamma_{flexió} = \frac{\sigma_{flexió}}{X_d (\text{flexió})} = \frac{0,68}{5,38} \cdot 100 = 12,64 \%$$

$$\gamma_{tallant} = \frac{\tau_{tallant}}{X_d (\text{tallant})} = \frac{0,42}{1,15} \cdot 100 = 36,26 \%$$

$$\gamma_{torsió} = \frac{\tau_{torsió}}{X_d (\text{torsió})} = \frac{0,41}{1,15} \cdot 100 = 35,60 \%$$

S'ha de tenir en compte que la tensió per flexió i per torsió s'aplica (els màxims) als extrems de la secció (essent 0 al centre) i la tensió per tallant s'aplica (el màxim) al centre (essent 0 als extrems).

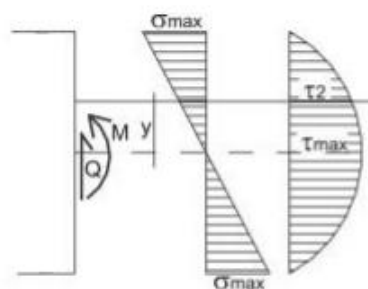


Figura B.13. Representació de les tensions produïdes per flexió, torsió i tallant

Per tant, com que les tensions es produeixen de forma simultània, es realitza la combinació de tensions més desfavorable (sense coeficients reductors per simultaneïtat típics), que és la suma aritmètica dels coeficients de càrrega aplicats al mateix punt:

- Als extrems de la secció:

$$Flexió + Torsió = 12,64 + 35,60 = 48,24 \%$$

- Al centre de la secció:

$$Tallant = 36,26 \%$$

Tal com es pot observar als resultats, la utilització de la capacitat resistent de la secció es troba considerablement per sota dels límits de l'eix. Es conclou així doncs que l'element més crític de la màquina resisteix.

B.9.1. Optimització de l'eix

A continuació, i una vegada vist que l'eix té un marge resistent elevat, s'estudia la possibilitat d'optimitzar l'eix.

En primer lloc s'obté el diàmetre resultant del càlcul resistent tenint en compte que l'eix utilitza tota la seva càrrega resistiva enfront a les sol·licitacions tensionals a les que està exposat. Estudiant dos casos (centre de secció i extrem de secció) s'ha observat que la secció de l'eix sofreix més als extrems de la secció. S'escull, per tant, el límit a l'extrem de la secció (flexió + torsió) ja que és el limitant:

$$Flexió + Torsió = \gamma_{flexió} + \gamma_{torsió} = 100 \%$$

$$\left(\frac{\sigma_{flexió}}{X_d(tallant)} + \frac{\tau_{torsió}}{X_d(torsió)} \right) \cdot 100 = 100 \rightarrow \frac{\sigma_{flexió}}{5,38} + \frac{\tau_{torsió}}{1,15} = \frac{100}{100}$$

$$\frac{M_{flexió}}{W_{flexió}} + \frac{M_{torsió}}{W_{torsió}} = 1 \rightarrow \frac{32 \cdot M_{flexió}}{\pi \cdot D^3} + \frac{16 \cdot M_{torsió}}{\pi \cdot D^3} = 1$$

$$\frac{32 \cdot M_{flexió}}{5,38 \cdot \pi \cdot D^3} + \frac{16 \cdot M_{torsió}}{1,15 \cdot \pi \cdot D^3} = 1 \rightarrow \frac{16}{\pi \cdot D^3} \cdot \left(\frac{2 \cdot M_{flexió}}{5,38} + \frac{M_{torsió}}{1,15} \right) = 1$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \cdot \left(\frac{2 \cdot M_{flexió}}{5,38} + \frac{M_{torsió}}{1,15} \right)} = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \cdot \left(\frac{2 \cdot 1734,8 \cdot 10^3}{5,38} + \frac{2081,53 \cdot 10^3}{1,15} \right)}$$

$$D = 231,8 \text{ mm} = 0,2318 \text{ m}$$

Aquest valor de diàmetre és el mínim que pot tenir per que suporti els esforços als que està sotmès. Ja que es parla durant tot el treball de mesures romanes (majoritàriament peus) arrodonim aquest valor a 7/8 peus = 0,2592 m

Amb aquest valor de diàmetre, es recalcula el moment de fricció de l'eix, la càrrega mitjana que posar sobre els pistons per aprofitar al màxim la seva potència, el moment d'arranc a assolir per a que la màquina arranqui (en la posició més desfavorable) i els marges resistents.

A la següent taula (Taula B.8) es poden observar els valors obtinguts inicialment i els valors recalculats en el nou diàmetre de l'eix:

Taula B.8. Taula resum de resultats en pi

Propietat	Unitats	Cas 1	Eix optimitzat
D eix	(peus)	1	7/8 de peu
Base x altura bieles	(peus)	1x2	1x2
Ffricció eix	(N·m)	1144,82	995,97
Mcarrega mitja	(kg)	240,06	301,95
Mmotor necessari arranc	(N·m)	2706,44	2792,48
Mmotor necessari arranc (sense càrrega)	(N·m)	1795,43	1646,57
Mmotor disponible arranc	(N·m)	3386,92	3386,92
Cap. resistent per tallant	(%)	36,25	47,35
Cap. resistent per flexió i torsió	(%)	48,12	71,67

Tal i com es pot observar, la màquina segueix arrancant. Al disminuir el diàmetre de l'eix ha disminuït el moment de fricció provinent del mateix, podent així augmentar la càrrega mitjana a posar sobre els pistons per tal d'aprofitar la potència d'entrada a la sortida, el que es tradueix en que en el cas optimitzat els pistons desenvolupen més potència de tall.

A continuació es mostra la taula en roure:

Taula B.9. Taula resum de resultats en roure

Propietat	Unitats	Cas 1	Eix optimitzat
D eix	(peus)	1	7/8 de peu
Base x altura bieles	(peus)	1x2	1x2
Ffricció eix	(N·m)	1541,52	1340,88
Mcarrega mitja	(kg)	75,09	158,52
Mmotor necessari arranc	(N·m)	2511,09	2627,07
Mmotor necessari arranc (sense càrrega)	(N·m)	2226,11	2025,45
Mmotor disponible arranc	(N·m)	3386,92	3386,92
Cap. resistent per tallant	(%)	53,26	79,27
Cap. resistent per flexió i torsió	(%)	48,759	63,673

B.9.2. Optimització de les bieles

En la màquina amb l'eix optimitzat es proposa fer el mateix en les bieles. En primer lloc es calcula la capacitat resistent d'aquestes.

Es calcula el límit resistent tenint en compte que X_k (valor característic de la tensió del límit elàstic del material) per axil és 8,0 MPa (Taula E.1).:

$$X_d(axil) = 0,5 \cdot \left(\frac{8,0}{1,3}\right) = 3,08 \text{ MPa}$$

Recordem que el límit resistent per flexió són 5,38 MPa.

Seguidament es calculen els esforços a les bieles. Aquestes s'estudien en el cas més desfavorable (quan la velocitat del pistó és màxima i el tallant és màxim).

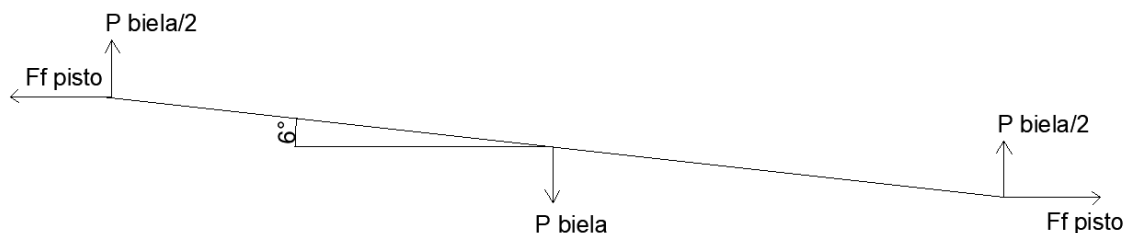


Figura B.14. Diagrama del sòlid lliure de les bieles

En primer lloc es calcula la força axil a la que està sotmesa la biela:

$$N_{axil} = F_{f \text{ pistó}} \cdot \cos(6^\circ) + \frac{P_{biela}}{2} \cdot \sin(6^\circ)$$

$$N_{axil} = 2878,44 \cdot \cos(6^\circ) + \frac{252,59 \cdot 9,81}{2} \cdot \sin(6^\circ) = 2992,18 \text{ N}$$

A continuació es calcula el moment flector al centre de la biela (secció crítica):

$$M_{flector \ C} = F_{tallant} \cdot L_{biela}/2$$

On:

- $M_{flector \ C}$ és el moment flector al centre de la biela.
- $F_{tallant}$ és la força tallant als extrems de la biela.
- L_{biela} és la longitud de la biela.

$$F_{tallant} = F_{f \text{ pistó}} \cdot \sin(6^\circ) + \frac{P_{biela}}{2} \cdot \cos(6^\circ)$$

$$F_{tallant} = 2878,44 \cdot \sin(6^\circ) + \frac{252,59 \cdot 9,81}{2} \cdot \cos(6^\circ) = 1533,1 \text{ N}$$

$$M_{flector \ C} = 1533,1 \cdot \frac{2,6658}{2} = 2043,4 \text{ N} \cdot \text{m}$$

A continuació es calculen les tensions per flexió i per axil:

$$\sigma_{flexió} = \frac{M_{flector \ C}}{W_{flexió}} = \frac{M_{flector \ C}}{\frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2} = \frac{6 \cdot M_{flector \ C}}{b \cdot h^2}$$

$$\sigma_{flexió} = \frac{6 \cdot 2043,4}{0,2962 \cdot (0,2962 \cdot 2)^2} = 117948,2 \text{ N/m}^2 = 0,118 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{Axil} = \frac{N_{axil}}{A_{biela}} = \frac{2992,18}{0,1755 \cdot 10^6} = 0,017 \text{ MPa}$$

A continuació es calculen les capacitats resistents per flexió i axil:

$$\gamma_{flexió} = \frac{\sigma_{flexió}}{X_d \text{ (flexió)}} = \frac{0,118}{5,38} \cdot 100 = 2,19 \%$$

$$\gamma_{Axil} = \frac{\sigma_{Axil}}{X_d \text{ (axil)}} = \frac{0,017}{3,08} \cdot 100 = 0,55 \%$$

$$\gamma_{flexió} + \gamma_{Axil} = 2,74 \%$$

Tal com es podia preveure, la resistència de les bieles és excel·lent.

Llavors, d'igual manera que en l'eix, s'optimitza per buscar les dimensions que facin que absorbeixin la seva capacitat màxima de resistència (tenint en compte que l'altura de la biela és dos cops la base: $h = 2 \cdot b$).

$$\gamma_{flexió} + \gamma_{Axil} = 100 \% \rightarrow \left(\frac{\sigma_{flexió}}{X_d (flexió)} + \frac{\sigma_{Axil}}{X_d (axil)} \right) \cdot 100 = 100$$

$$\frac{6 \cdot M_{flector c}}{b \cdot h^2} + \frac{N_{axil}}{A_{biela}} = \frac{6 \cdot M_{flector c}}{b \cdot h^2} + \frac{N_{axil}}{b \cdot h} = 1$$

Tenint en compte que $h = 2b$:

$$\frac{6 \cdot M_{flector c}}{b \cdot (2b)^2} + \frac{N_{axil}}{b \cdot 2b} = \frac{6 \cdot M_{flector c}}{4b^3} + \frac{N_{axil}}{2b^2} =$$

$$= \frac{6 \cdot M_{flector c}}{4b^3 \cdot X_d (flexió)} + \frac{N_{axil}}{2b^2 \cdot X_d (axil)} = 1$$

$$\frac{6 \cdot F_{tallant} \cdot L_{biela}/2 + F_{f pistó} \cdot \cos(6^\circ) + \frac{P_{biela}}{2} \cdot \sin(6^\circ)}{4b^3 \cdot 5,38} + \frac{F_{f pistó} \cdot \cos(6^\circ) + \frac{P_{biela}}{2} \cdot \sin(6^\circ)}{2b^2 \cdot 3,08} = 1$$

$$\frac{6 \cdot \left(F_{f pistó} \cdot \sin(6^\circ) + \frac{P_{biela}}{2} \cdot \cos(6^\circ) \right) \cdot L_{biela}/2 + F_{f pistó} \cdot \cos(6^\circ) + \frac{P_{biela}}{2} \cdot \sin(6^\circ)}{4b^3 \cdot 5,38} + \frac{F_{f pistó} \cdot \cos(6^\circ) + \frac{P_{biela}}{2} \cdot \sin(6^\circ)}{2b^2 \cdot 3,08} = 1$$

Tenint en compte el pes de la biela: $P_{biela} = b \cdot h \cdot L_{biela} \cdot \rho \cdot g$

$$\frac{6 \cdot \left(F_{f pistó} \cdot \sin(6^\circ) + \frac{b \cdot h \cdot L_{biela} \cdot \rho \cdot g}{2} \cdot \cos(6^\circ) \right) \cdot \frac{L_{biela}}{2} + F_{f pistó} \cdot \cos(6^\circ) + \frac{b \cdot h \cdot L_{biela} \cdot \rho \cdot g}{2} \cdot \sin(6^\circ)}{4b^3 \cdot 5,38} + \frac{F_{f pistó} \cdot \cos(6^\circ) + \frac{b \cdot h \cdot L_{biela} \cdot \rho \cdot g}{2} \cdot \sin(6^\circ)}{2b^2 \cdot 3,08} = 1$$

$$\frac{6 \cdot (2878,44 \cdot \sin(6^\circ) + \frac{2b \cdot 540 \cdot 9,81 \cdot 2,6658}{2} \cdot \cos(6^\circ)) \cdot \frac{2,6658}{2} + 2878,44 \cdot \cos(6^\circ) + \frac{2b \cdot 9,81 \cdot 2,6658 \cdot 540}{2} \cdot \sin(6^\circ)}{4b^3 \cdot 5,38 \cdot 10^6} + \frac{2878,44 \cdot \cos(6^\circ) + \frac{2b \cdot 9,81 \cdot 2,6658 \cdot 540}{2} \cdot \sin(6^\circ)}{2b^2 \cdot 3,08 \cdot 10^6} = 1$$

Resolent l'equació anterior s'obté un valor de b de 56,73 mm, per tant l'altura h és de 113,46 mm.

Aquests valors a nivell funcional són molt baixos. Es determina una base de mig peu i una altura d'un peu ($b = 148,1$ i $h = 296,2$ mm).

A la següent taula (Taula B.10) es poden observar els valors obtinguts inicialment, els valors recalculats en l'eix optimitzat i els valors recalculats en les bieles optimitzades:

Taula a la següent pàgina degut al tamany

Taula B.10. Taula resum de resultats en pi

Propietat	Unitats	Cas 1	Eix optimitzat	Eix i bieles optimitzats
D eix	(peus)	1	7/8 de peu	7/8 de peu
Base x altura bieles	(peus)	1x2	1x2	0,5x1
Ffricció eix	(N·m)	1144,82	995,97	827,39
Mcarrega mitja	(kg)	240,06	301,95	372,06
Mmotor necessari arranc	(N·m)	2706,44	2792,48	2886,61
Mmotor necessari arranc (sense càrrega)	(N·m)	1795,43	1646,57	1474,66
Mmotor disponible arranc	(N·m)	3386,92	3386,92	3386,92
Marge tensió per tallant (eix)	(%)	36,25	47,35	39,18
Marge tensió per flexió i torsió (eix)	(%)	48,12	71,67	60,17
Marge tensió per flexió (bieles)	(%)	-	2,19	4,66
Marge tensió per axil (bieles)	(%)	-	0,55	0,73

Finalment es pot concloure que:

- La màquina arranca.
- Al optimitzar les dimensions, tant de l'eix com de les bieles, es redueix el moment de fricció sofert per l'eix.
- Al optimitzar les dimensions, tant de l'eix com de les bieles, s'obté més potència de sortida (a les serres), millorant el tall (la massa és major).
- Al optimitzar les dimensions, tant de l'eix com de les bieles, pot incrementar-se la càrrega del pistó i per tant s'obté un moment motor necessari d'arranc més alt quan la màquina està carregada en la càrrega mitja als pistons ja que aquesta augmenta. En canvi, el moment necessari per arrancar sense la càrrega mitja és més petit degut a la disminució de la inèrcia de la màquina.
- Al optimitzar les dimensions de l'eix la capacitat resistent consumida augmenta ja que al disminuir aquestes dimensions la resistència de la secció disminueix. Per una altra banda, el marge segueix sent alt.
- Al optimitzar les dimensions de les bieles la capacitat resistent consumida de l'eix disminueix ja que aquest suporta una càrrega per part de les bieles menor. En canvi, la capacitat resistent consumida per les bieles augmenta ja que a l'optimitzar les dimensions d'aquestes la resistència de la secció disminueix.

Aquestes conclusions obtingudes matemàticament demostren que, basant-nos en els fonaments de la física, la teoria de mecanismes i la fluidomecànica, els resultats són coherents.

Es pot observar que en el roure passa exactament el mateix:

Taula a la següent pàgina degut al tamany

Taula B.11. Taula resum de resultats en roure

Propietat	Unitats	Cas 1	Eix optimitzat	Eix i bieles optimitzats
D eix	(peus)	1	7/8 de peu	7/8 de peu
Base x altura bieles	(peus)	1x2	1x2	0,5x1
Ffricció eix	(N·m)	1541,52	1340,88	1103,48
Mcarrega mitja	(kg)	75,09	158,52	257,25
Mmotor necessari arranc	(N·m)	2511,09	2627,07	2759,63
Mmotor necessari arranc (sense càrrega)	(N·m)	2226,11	2025,45	1783,37
Mmotor disponible arranc	(N·m)	3386,92	3386,92	3386,92
Cap. resistent per tallant (eix)	(%)	53,26	79,27	52,19
Cap. resistent per flexió i torsió (eix)	(%)	48,76	63,67	63,21
Cap. resistent per flexió (bieles)	(%)	-	2,77	8,06
Cap. resistent per axil (bieles)	(%)	-	0,39	1,94

B.9.3. Comparativa de materials

Finalment, es recull en una taula resum la comparativa dels diferents materials de construcció i els valors corresponents per la màquina optimitzada.

Taula B.12. Taula comparativa de materials

Propietat	Unitats	Pi	Roure
D eix	(peus)	7/8 de peu	7/8 de peu
Base x altura bieles	(peus)	0,5x1	0,5x1
Ffricció eix	(N·m)	827,39	1103,48
Mcarrega mitja	(kg)	372,06	257,25
Mmotor necessari arranc	(N·m)	2886,61	2759,63
Mmotor necessari arranc (sense càrrega)	(N·m)	1474,66	1783,37
Mmotor disponible arranc	(N·m)	3386,92	3386,92
Cap. resistent per tallant (eix)	(%)	39,18	52,19
Cap. resistent per flexió i torsió (eix)	(%)	60,17	63,21
Cap. resistent per flexió (bieles)	(%)	4,66	8,06
Cap. resistent per axil (bieles)	(%)	0,73	1,94

Tal i com es pot observar, la diferència entre utilitzar un material o l'altre destaca en:

- La càrrega mitja per aprofitar la potència d'entrada a la sortida (les serres): la càrrega utilitzant pi és notablement superior a utilitzant roure, el que descriu que utilitzant pi la potència de tall és superior.
- Per arrancar la màquina sense càrrega es sol·licita menys moment motor en el cas del pi, pel que la màquina arrancaria en més facilitat i en una acceleració major.
- En quant a resistència de les bieles i de l'eix, utilitzant pi la màquina està més relaxada en quant a esforços, tenint més marge per arribar al 100% de la seva capacitat.

Josep Emili Vilanova Torà

**Redisseny, anàlisi i modelització de les màquines
industrials Romanes de serrar pedra**

DOCUMENT IV: Plànols



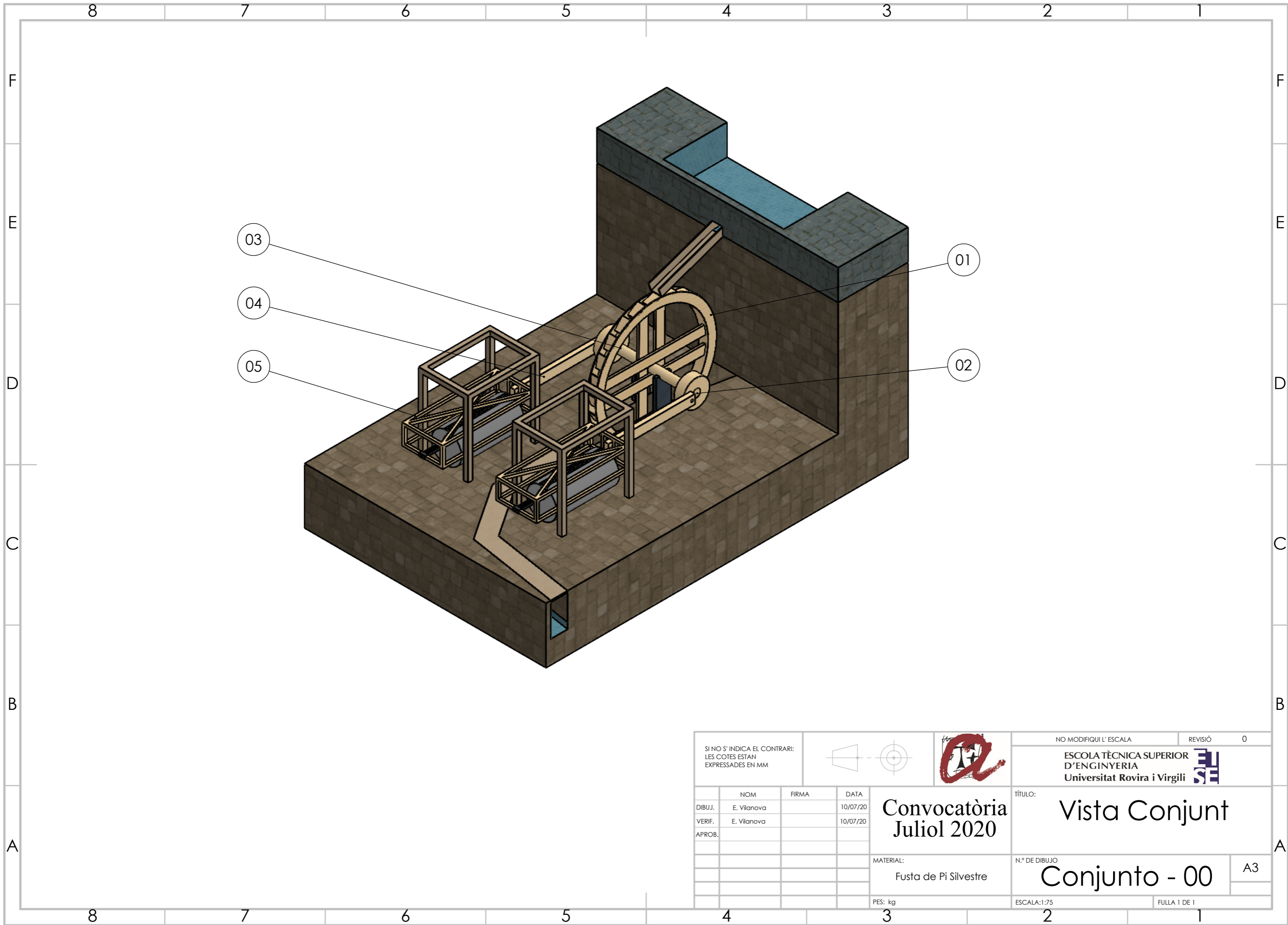
UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

Tarragona

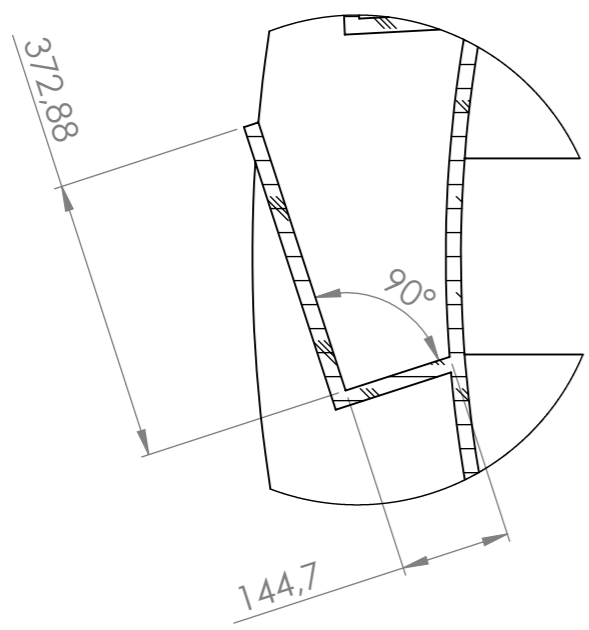
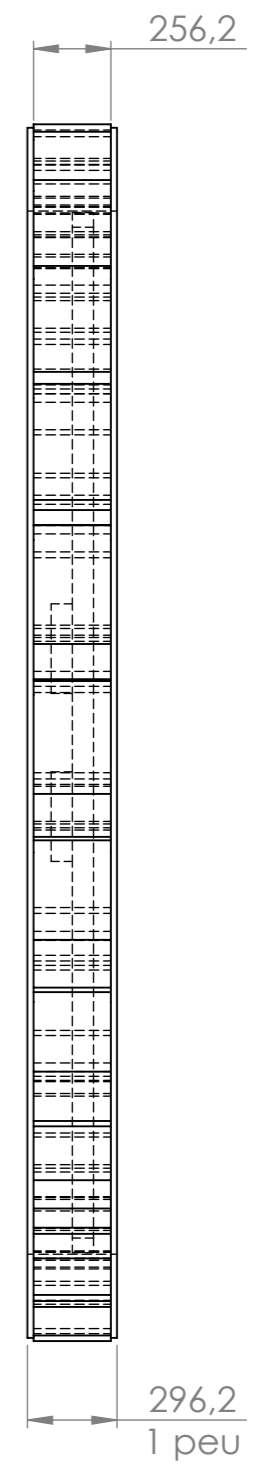
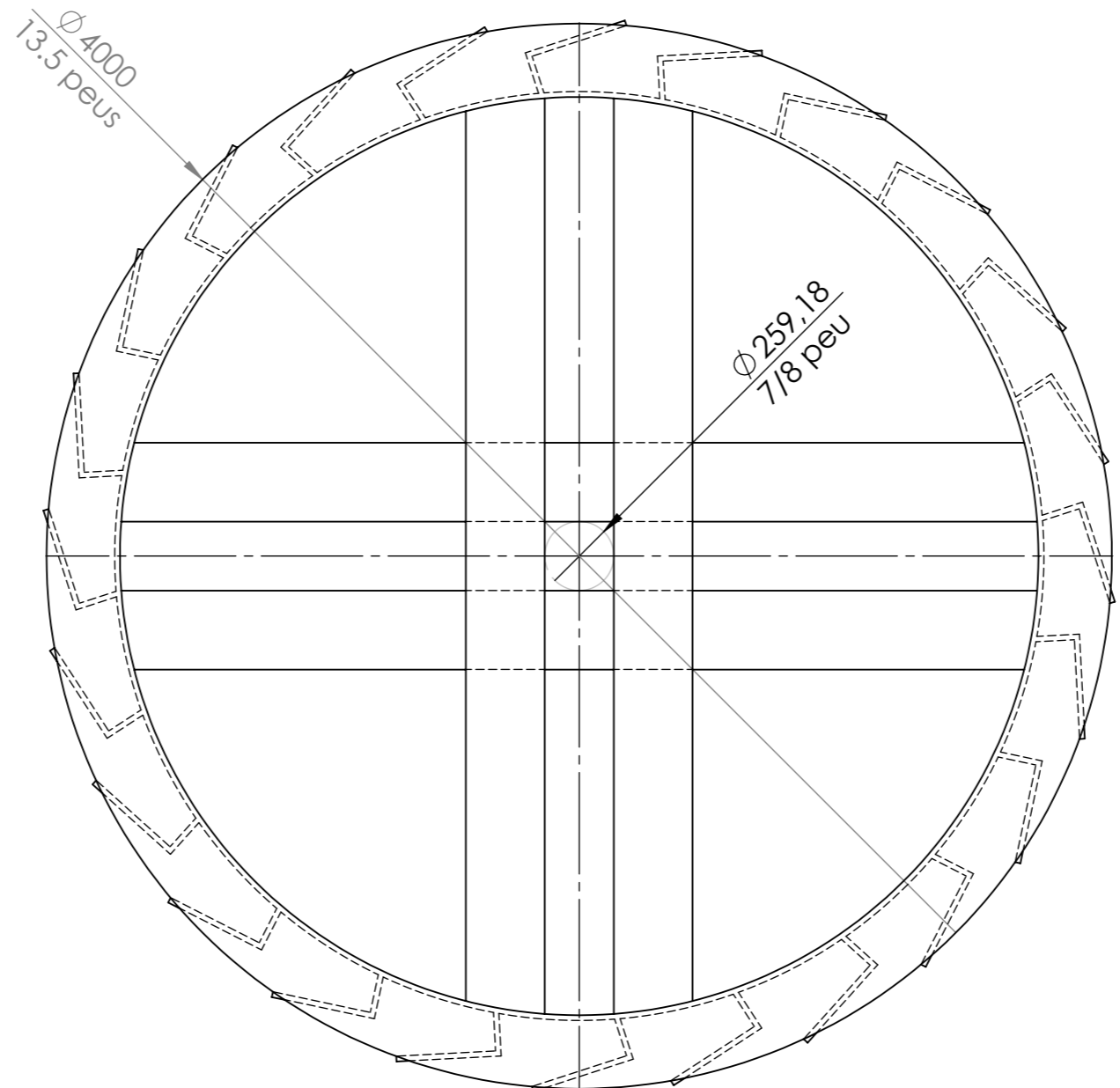
2020

Índex

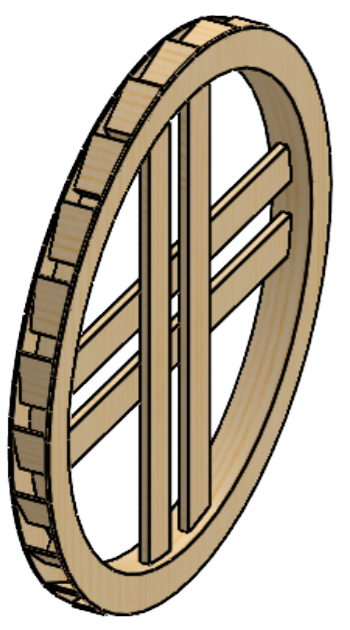
- 00. Conjunt
- 01. Roda hidràulica
- 02. Eix motor
- 03. Cigonyal
- 04. Biela
- 05. Conjunt serres
- 05.1. Conjunt serres optimització



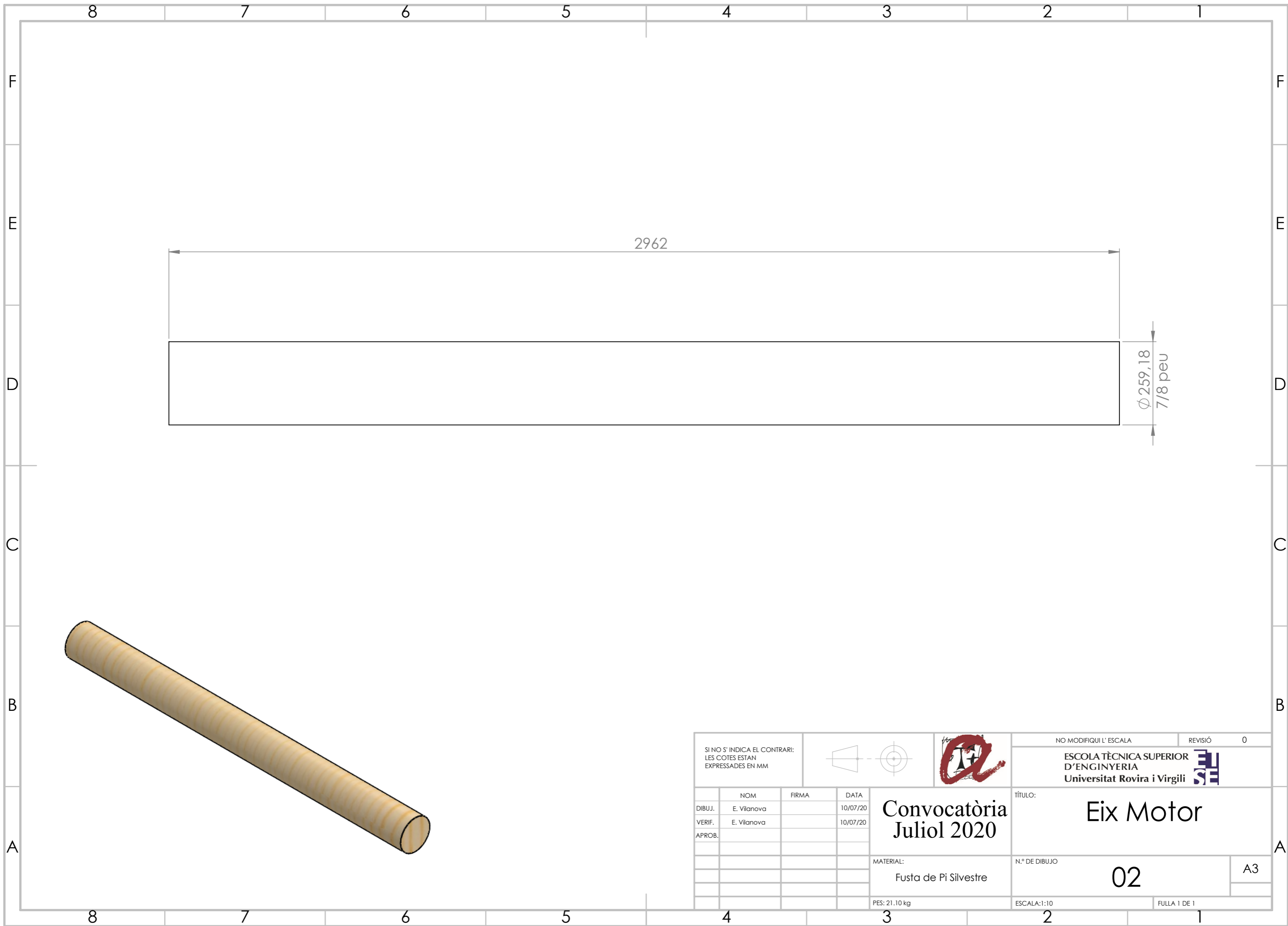
SI NO S'INDICA EL CONTRARI: LES COTES ESTAN EXPRESSADES EN MM							NO MODIFIQUI L' ESCALA		REVISIÓ 0	
							ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA Universitat Rovira i Virgili			
					Convocatòria Juliol 2020		TÍTULO:		Vista Conjunt	
DIBUJ. E. Vilanova VERIF. E. Vilanova APROB.			NOM FIRMA DATA 10/07/20 10/07/20		MATERIAL: Fusta de Pi Silvestre		N.º DE DIBUJO Conjunto - 00		A3	
			PES: kg		ESCALA:1:75		FULLA 1 DE 1			



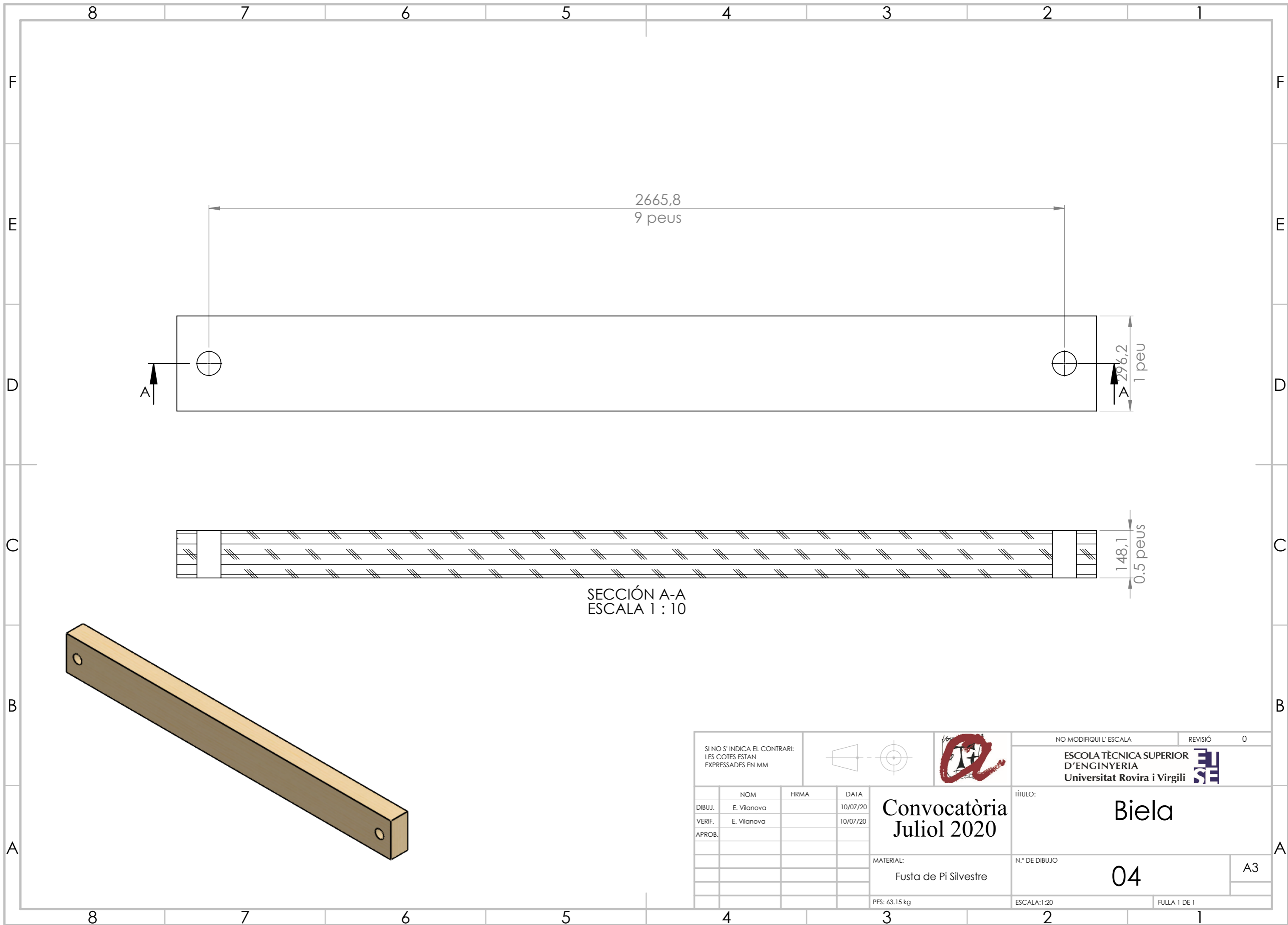
DETALLE Cajón
ESCALA 1 : 10



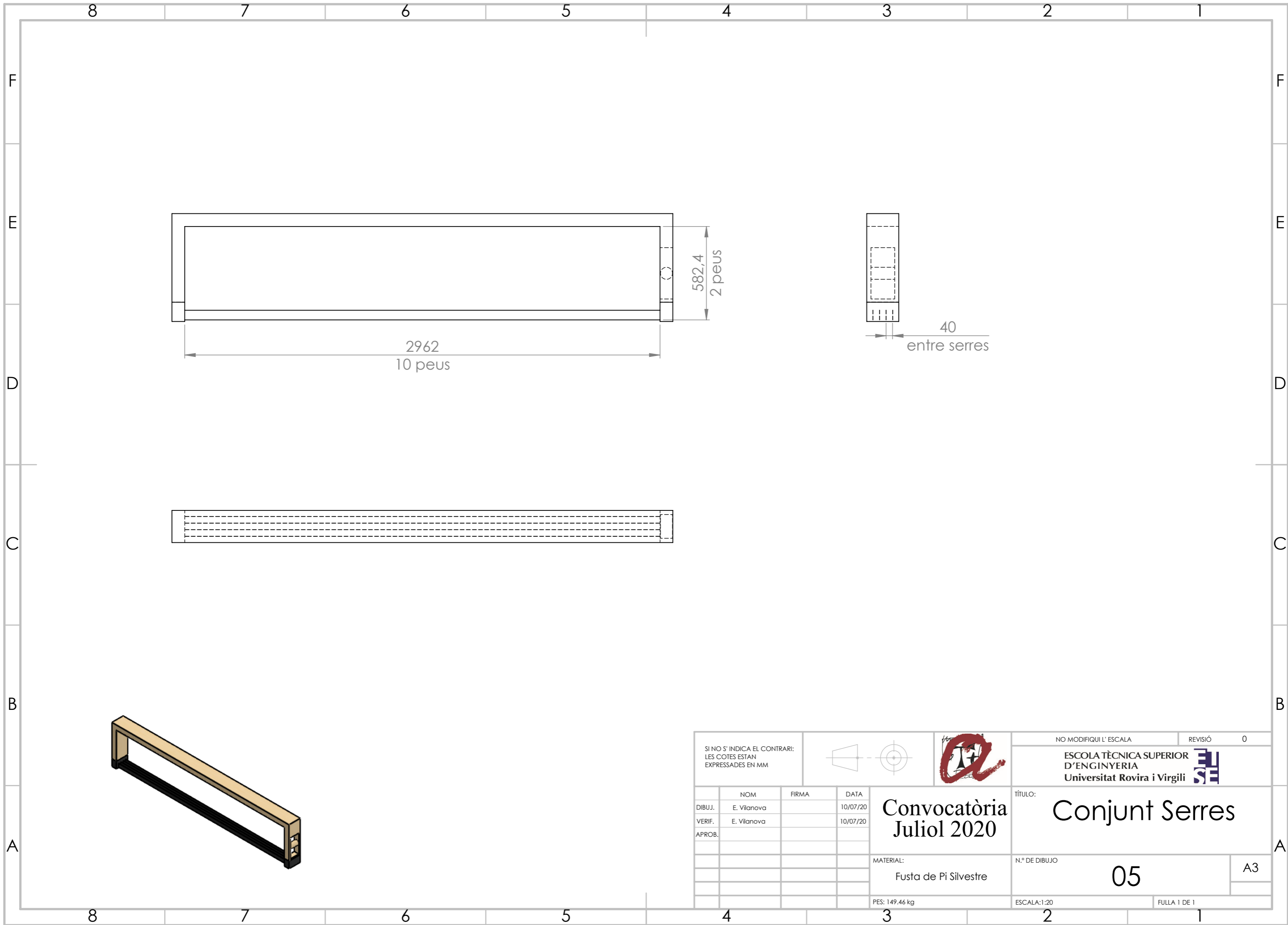
SI NO S' INDICA EL CONTRARI: LES COTES ESTAN EXPRESSADES EN MM			NO MODIFIQUI L' ESCALA		REVISIÓ	0
			ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA			
			Universitat Rovira i Virgili		TÍTULO: Roda Hidràulica	
DIBUJ.	NOM	FIRMA	DATA	Convocatòria Juliol 2020		N.º DE DIBUJO
VERIF.	E. Vilanova		10/07/20			01
APROB.	E. Vilanova		10/07/20			A3
			MATERIAL: Fusta de Pi Silvestre		ESCALA: 1:50	
			PES: 627.69 kg		FULLA 1 DE 1	



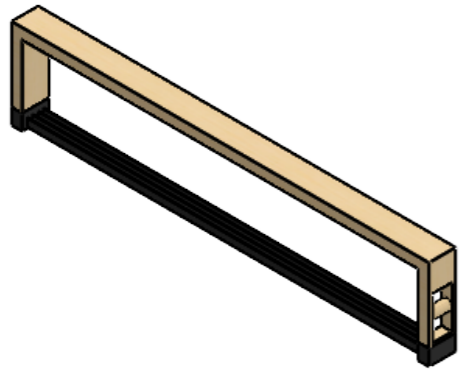
SI NO S' INDICA EL CONTRARI: LES COTES ESTAN EXPRESADES EN MM							NO MODIFIQUI L' ESCALA	REVISIÓ	0
							ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA Universitat Rovira i Virgili		
					Convocatòria Juliol 2020		TÍTULO: Eix Motor		
					MATERIAL: Fusta de Pi Silvestre		N.º DE DIBUJO 02		A3
					PES: 21.10 kg		ESCALA: 1:10		FULLA 1 DE 1

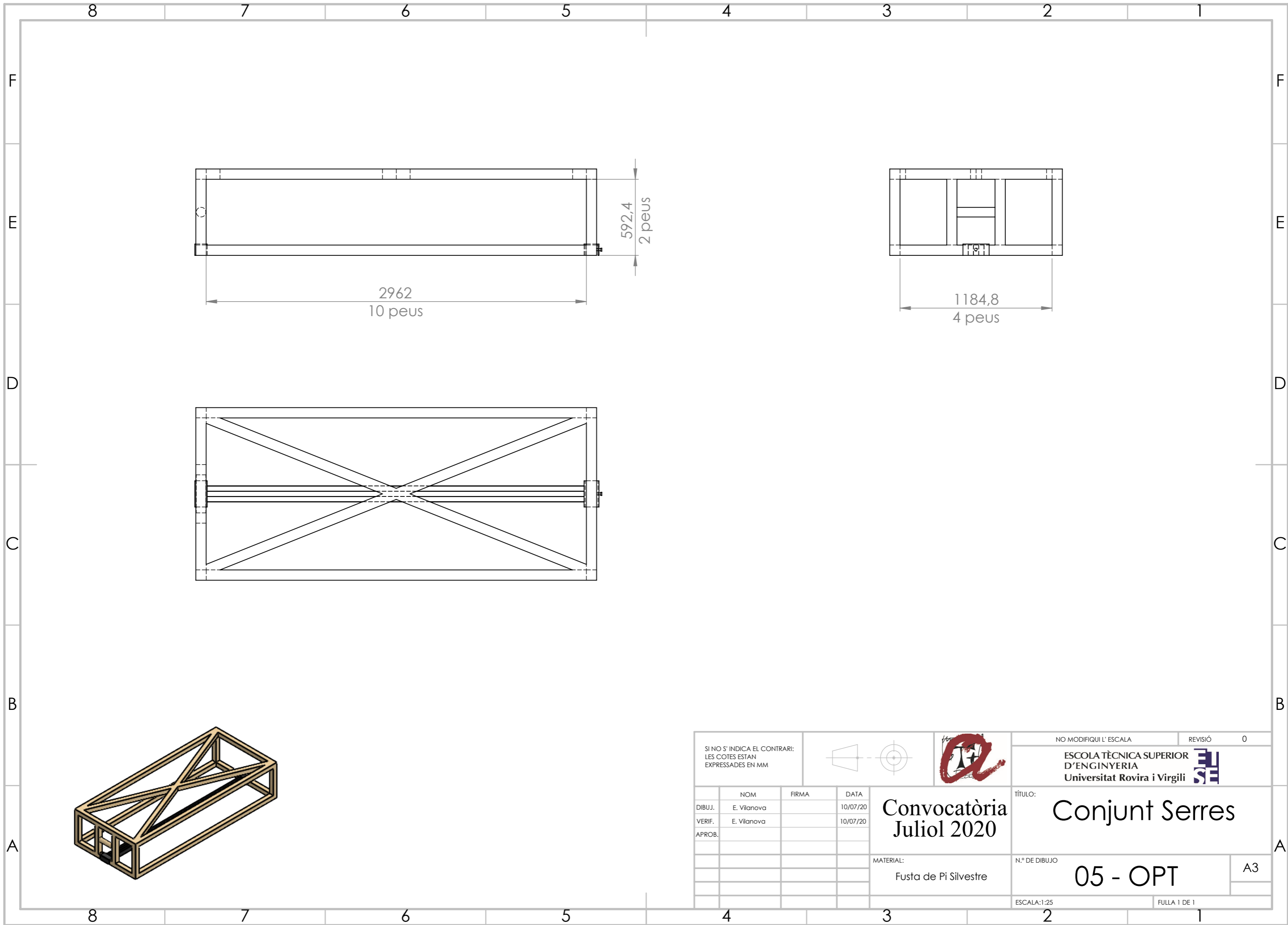



SI NO S' INDICA EL CONTRARI: LES COTES ESTAN EXPRESSADES EN MM							NO MODIFIQUI L' ESCALA		REVISIÓ	0
							ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA Universitat Rovira i Virgili			
							TÍTULO:			
							Biela			
							MATERIAL:		N.º DE DIBUJO	
							Fusta de Pi Silvestre		04	
							PES: 63.15 kg		ESCALA: 1:20	
									FULLA 1 DE 1	
									A3	



SI NO S'INDICA EL CONTRARI: LES COTES ESTAN EXPRESSADES EN MM							NO MODIFIQUI L'ESCALA		REVISIÓ 0	
							ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA Universitat Rovira i Virgili			
							TÍTULO:		Conjunt Serres	
							MATERIAL:		N.º DE DIBUJO	
							Fusta de Pi Silvestre		05	
							PES: 149.46 kg		ESCALA:1:20	
									FULLA 1 DE 1	





SI NO S' INDICA EL CONTRARI: LES COTES ESTAN EXPRESSADES EN MM			 		NO MODIFIQUI L' ESCALA	REVISIÓ	0	
			Convocatòria Juliol 2020		ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA Universitat Rovira i Virgili 			
DIBUJ.	NOM	FIRMA			DATA	TÍTULO:		
VERIF.	E. Vilanova				10/07/20	Conjunt Serres		
APROB.	E. Vilanova		10/07/20	MATERIAL:		N.º DE DIBUJO	A3	
			Fusta de Pi Silvestre		05 - OPT			
			ESCALA:1:25		FULLA 1 DE 1			