



## DESCRIPCIÓN GRÁFICA Y ANALÍTICA DE LAS COLUMNAS HELICOIDALES DE LAS LONJAS DE PALMA DE MALLORCA Y VALENCIA

### GRAPHIC AND ANALYTICAL DESCRIPTION OF THE HELICAL COLUMNS OF THE LONJAS OF PALMA DE MALLORCA AND VALENCIA

*Albert Samper Sosa, Blas Herrera Gómez*

doi: 10.4995/ega.2021.15067

En varias referencias encontramos que el arquitecto que edificó la Lonja de Valencia se inspiró en el diseño de la Lonja de Mallorca. Esta afirmación está fundamentada principalmente, porque ambas edificaciones se enmarcan dentro del mismo estilo arquitectónico, porque las dos construcciones tienen proporciones similares y, además, son las únicas lonjas de la Corona de Aragón que tienen unos rasgos muy parecidos en la ornamentación helicoidal que envuelve sus columnas. Es cierto que, visualmente y con simples

relaciones estéticas, cualquiera podría encontrar parecidos entre ambas columnas helicoidales, pero esta condición de similitud no ha sido examinada objetivamente hasta el presente trabajo. Con procedimientos geométricos rigurosos, que además mostramos gráficamente, constatamos que el único parecido existente entre ambas columnas es el propio concepto de hélice; demostramos que no existe ningún parámetro geométrico común entre ellas que dé pie a pensar que el diseño de unas se inspiró en las otras.

**PALABRAS CLAVE: LONJA DE PALMA DE MALLORCA, LONJA DE VALENCIA, COLUMNAS HELICOIDALES, GEOMETRÍA**

*In several references we have found that the architect who built the Lonja of Valencia was inspired by the design of the Lonja of Mallorca. This is substantiated mainly by the fact*

*that both buildings are in the same architectural style, that the two constructions have similar proportions and, in addition, they are the only lonjas in the Crown of Aragón that share similar features regarding the helical ornamentation that surrounds their columns. Making simple aesthetic relations, anyone could find similarities between both helical columns, but this condition of similarity hasn't been objectively examined thus far. By means of rigorous geometrical procedures, which we also present graphically, we have found that the only resemblance between both columns is the concept of helix itself; we demonstrate that there is no geometrical parameter common to both that would lead us to think that the design of one was inspired by the other.*

**KEYWORDS: LONJA OF PALMA DE MALLORCA, LONJA OF VALENCIA, HELICAL COLUMNS, GEOMETRY**





1. A la izquierda, fotografía del interior de la Lonja de Palma de Mallorca, y a la derecha, interior de la Lonja de Valencia. Fuente: los autores

1. On the left, photograph of the interior of the Lonja of Palma de Mallorca, and on the right, interior of the Lonja of Valencia. Source: authors

## 1. INTRODUCCIÓN

Las lonjas fueron establecimientos que, a lo largo del tiempo, fueron destinados al control de la actividad comercial, el tránsito de personas y al registro de expediciones de mercaderías. Como se indica en la referencia 1, las lonjas más importantes que encontramos en España fueron construidas principalmente en la Corona de Aragón (1164-1707): En el Reino de Valencia encontramos la Lonja de Castellón y la Lonja de Valencia; en el Prin-

cipado de Cataluña las Lonjas de Castellón de Ampurias, de Barcelona y de Tortosa; y finalmente, en el Reino de Mallorca se construyó la Lonja de Palma de Mallorca.

De las seis lonjas que se edificaron en la Corona de Aragón, destacamos las siguientes dos por sus relaciones cronológicas, arquitectónicas y estilísticas: La Lonja de Palma de Mallorca, conocida también como *Sa Llotja*, que fue diseñada por el arquitecto Guillem de Sagrera y construida entre 1426 y

## 1. INTRODUCTION

Lonjas were establishments that, over time, were used to control commercial activity, the transit of people and the registration of merchandise shipments. As indicated in reference 1, the most important lonjas in Spain were built mainly in the Crown of Aragón (1164-1707): in the Kingdom of Valencia we find the Lonja of Castellón and the Lonja of Valencia; in the Principality of Catalonia, the Lonja of Castellón de Ampurias, Barcelona and Tortosa; and finally, in the Kingdom of Mallorca, the Lonja of Palma de Mallorca was built.

Of the six lonjas that were built in the Crown of Aragón, we highlight the following two







2

because of their chronological, architectural and stylistic relationships: The Lonja of Palma de Mallorca, also known as Sa Llotja, which was designed by the architect Guillem de Sagrera and built between 1426 and 1447; and the Lonja of Valencia, known as the Lonja de la Seda, which was initially designed by Pere Compte and built between 1482 and 1548 (Fig. 1).

In several works and bibliographical references (2-5) have tried to compare and relate the two buildings, and have even claimed that the architect who built the Lonja of Valencia was inspired by the design of the one in Mallorca. This assertion has mainly been motivated by the following reasons:

- a) Both buildings are gothic in style.
- b) As stated in 2, the two buildings have similar dimensions and proportions. Specifically, the measurements of the floor plan of the interior hall of both aisles maintain the proportion of 3/2 and, in addition, the heights of their bays also reach approximately 16 meters. Therefore, the two buildings could be considered substantially the same.

In addition to the two general considerations above, there is a geometric reason that has often led to a comparison between the two lonjas. The naves of both buildings are separated by helical columns without capitals. This ornamentation, which envelops

1447; y la Lonja de Valencia, conocida como la *Lonja de la Seda*, que fue diseñada inicialmente por Pere Compte y construida entre 1482 y 1548 (Fig. 1).

Varios trabajos y referencias bibliográficas (2-5) han tratado de comparar y relacionar ambas edificaciones, e incluso han afirmado que el arquitecto que edificó la Lonja de Valencia se inspiró en el diseño de la de Mallorca. Principalmente, esta afirmación ha sido motivada por las siguientes razones:

- a) Ambas construcciones son de estilo gótico.

- b) Como dice 2, las dos construcciones tienen dimensiones y proporciones similares. Concretamente, las medidas de la planta del salón interior de ambas lonjas mantienen la proporción de 3/2 y, además, las alturas de sus naves alcanzan también aproximadamente los 16 metros. Por lo tanto, las dos edificaciones podrían ser consideradas sensiblemente iguales.

Además de las dos consideraciones generales anteriores, existe una

razón geométrica que ha motivado frecuentemente la comparación entre ambas lonjas. Las naves de ambas edificaciones están separadas por columnas helicoidales sin capitel. Esta ornamentación, que envuelve las columnas de los edificios y es la única decoración existente en ambas naves, no aparece en ninguna otra lonja de la Corona de Aragón.

Es cierto, que visualmente y con simples relaciones estéticas cualquiera podría encontrar parecidos entre ambas columnas helicoidales; no obstante, no conocemos ningún documento científicamente riguroso que compare ambas estructuras geométricas. Independientemente de las afirmaciones anteriores, nuestro trabajo pretende comprobar, con técnicas analíticas presentadas gráficamente, si es cierto o no que las columnas helicoidales de la Lonja de Valencia fueron inspiradas geométricamente por el diseño de las columnas de la Lonja de Mallorca (Figs. 2 y 3).



3

## 2. METODOLOGÍA

Para comparar analíticamente la geometría de ambas estructuras helicoidales, ha sido necesario previamente realizar un levantamiento gráfico de estos elementos. Para ello, hemos realizado un modelo tridimensional de dos columnas, una de cada lonja, combinando las técnicas fotogramétricas y las técnicas de medida tradicional y, además, hemos acudido a bibliografía especializada **2-11** Para ambas reconstrucciones fotogramétricas hemos usado alrededor de 160+175 fotografías tomadas con una cámara réflex modelo Canon EOS 5D Mark IV, obtenien-

do los resultados gráficos mostrados en la Figura 4 y cuyos parámetros se reflejan en la Tabla 1.

A continuación, y partiendo de las medidas obtenidas de ambos modelos fotogramétricos generados con el software PhotoScan, hemos elaborado un nuevo modelo tridimensional de sólidos 3D con el software Autocad. Este paso ha sido importante para tener un mejor control y conocimiento sobre el proceso constructivo de ambas columnas helicoidales, además de fijar todos los parámetros usados para la descripción analítica en la siguiente sub-sección 2.1.

2. Detalle de las columnas de la Lonja de Palma de Mallorca. Fuente: los autores

3. Detalle de las columnas de las Lonja de Valencia. Fuente: los autores

Tabla 1. Parámetros de ambos modelos generados con el software Photoscan

2. A detail of the columns located inside the Lonja of Palma de Mallorca. Source: authors

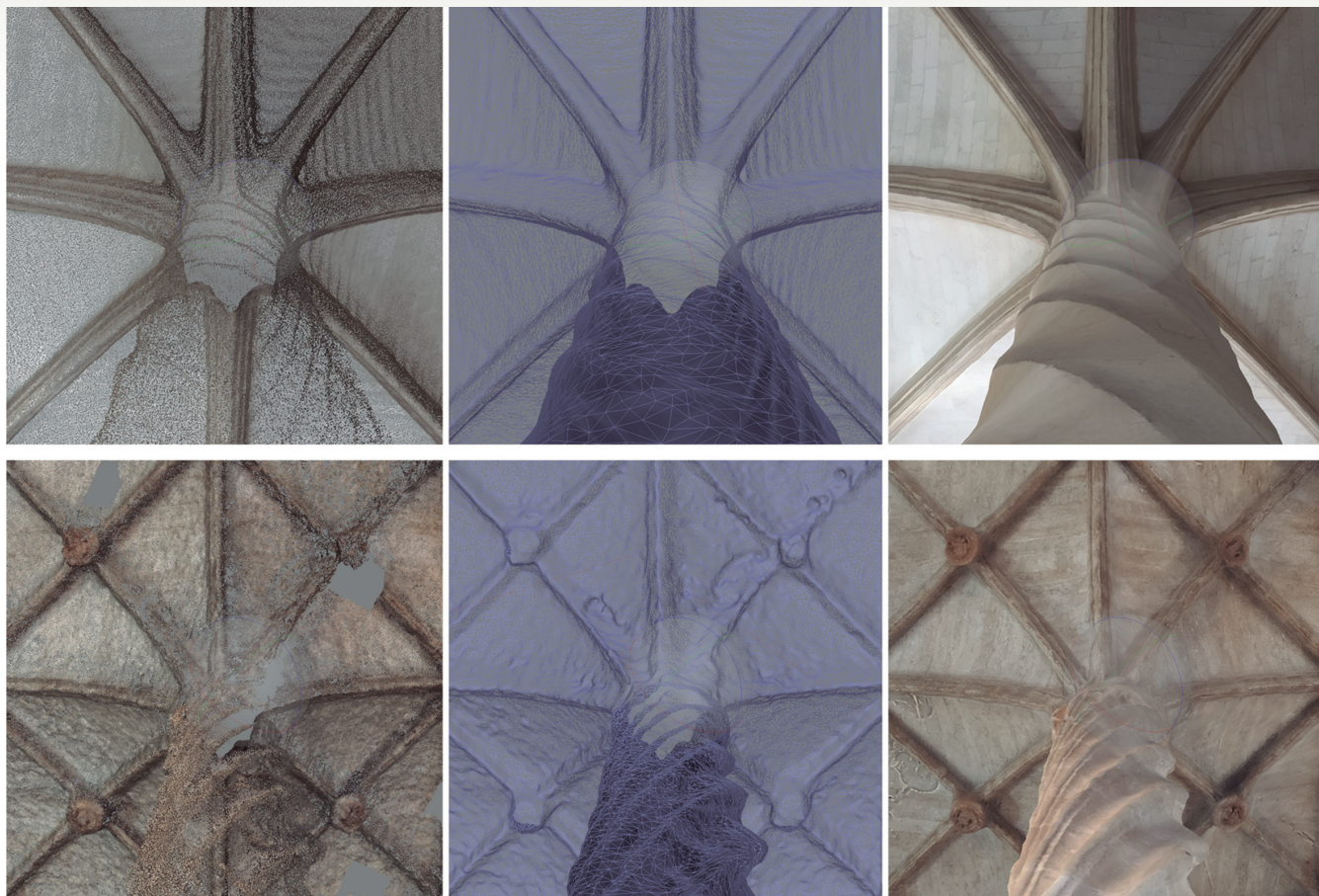
3. A detail of the columns located inside the Lonja of Valencia. Source: authors

Table 1. Parameters of both models generated with PhotoScan software

| LONJA DE<br>LONJA OF | NÚMERO DE FOTOGRAFÍAS<br>NUMBER OF PHOTOGRAPHS | NÚMERO DE PUNTOS<br>NUMBER OF POINTS | CARAS<br>FACES | VÉRTICES<br>VERTICES | TAMAÑO (kb)<br>SIZE (kb) |
|----------------------|------------------------------------------------|--------------------------------------|----------------|----------------------|--------------------------|
| Palma<br>de Mallorca | 175                                            | 915385                               | 154944         | 43005                | 55379                    |
| Valencia             | 160                                            | 1083797                              | 271170         | 136376               | 81251                    |

Tabla / Table 1





4

the columns of the buildings and is the only decoration in both naves, does not appear in any other Lonja in the Crown of Aragon. It is true that visually and with simple aesthetic relations anyone could find similarities between both helical columns; however, we do not know of any scientifically rigorous document that compares both geometric structures. Regardless of the above statements, our work aims to prove, with analytical techniques presented graphically, whether or not it is true that the helical columns of the Lonja of Valencia were geometrically inspired by the design of the columns of the Lonja of Palma de Mallorca (Figs. 2 and 3).

## 2. METHODOLOGY

In order to analytically compare the geometry of both helical structures, it was first necessary to carry out a graphic survey of these elements. For this purpose, we have made a three-dimensional model of two columns, one of each slice, combining photogrammetric techniques and traditional measurement techniques, and we have also

### 2.1. Descripción gráfica y analítica

A continuación, se presentan los modelos tridimensionales y los parámetros geométricos básicos para desarrollar las fórmulas analíticas que mostraremos en la sub-sección 2.1.1 y que usaremos a lo largo de la sección 3.

En el espacio afín euclídeo tridimensional coordinado con un sistema de referencia ortonormal  $R=\{0; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ , la curva  $\gamma(\theta)=(a_x \cos \theta - a_y \sin \theta, a_x \sin \theta + a_y \cos \theta, b \frac{\theta}{2\pi})$  es una hélice cilíndrica de radio  $\sqrt{a_x^2 + a_y^2}$  y paso  $b$ .

Podemos considerar  $\theta \in [0, 2\pi]$  teniendo un arco completo de hélice con el punto inicial  $p = \gamma(0) = (a_x, a_y, 0)$  en el plano geometral  $XY$  de ecuación  $z = 0$ , y punto final  $q = \gamma(2\pi) = (a_x, a_y, b)$  en el plano  $z = b$  paralelo.

Las superficies de las columnas están formadas por hélices cuyos puntos iniciales están en  $XY$ , y estos forman un lugar geométrico  $Q$  compuesto por arcos de circunferencia ( $C_0, C_1, C_2$ ) o por segmentos ( $D_3, D_4$ ); Figuras 5 y 6.

#### 2.1.1. Fórmulas geométricas generales de arcos

Fijaremos las condiciones analíticas que ocurren en el lugar geométrico  $Q$  desde donde parten las hélices que forman las superficies de las columnas. Llamemos  $C$  a uno cualquiera de los arcos de  $Q$ . Las Figuras 5 y 6 nombran con  $C_0$  al arco de la columna de Mallorca y con  $C_1$  y  $C_2$  a los arcos de la columna de Valencia. Estas condiciones son:

a) El eje central de las hélices es el eje  $z$ .



b) El centro  $O_0$  del arco  $C_0$  está en el plano  $XY$  a distancia  $d_M$  del eje y sus coordenadas, haciendo un giro si fuera necesario, son  $(0, d_M, 0)$ . El centro  $O_i$  del arco  $C_i$ , siendo  $i = 1, 2$ , está en el plano  $XY$  a distancia  $d_V$  del eje y sus coordenadas, haciendo un giro si fuera necesario, son  $(0, d_V, 0)$ . Las distancias  $d_M$  y  $d_V$  son los diámetros de las columnas de Mallorca y Valencia respectivamente.

c) La recta que une  $O = (0,0,0)$  con el centro  $O_i$  es eje de simetría ortogonal del arco  $C_i$ , siendo  $i = 0, 1, 2$ .

d) El arco  $C_i$ , es arco de circunferencia de radio  $r_i$  subtendido por un ángulo central de amplitud  $\xi_i$ , siendo  $i = 0, 1, 2$ .

La curva [1], donde  $\alpha \in (\frac{3\pi}{2} - \frac{\xi_0}{2}, \frac{3\pi}{2} + \frac{\xi_0}{2})$  parametriza el arco  $C_0$  de la columna de Mallorca. El lugar geométrico del conjunto de las hélices  $\gamma_{0\alpha}(\theta)$ , con los puntos  $\delta_0(\alpha)$  como punto de origen, es una superficie helicoidal  $S_0$  con la parametrización [2], donde  $(\alpha, \theta) \in (\frac{3\pi}{2} - \frac{\xi_0}{2}, \frac{3\pi}{2} + \frac{\xi_0}{2}) \times (0, 2\pi)$ . La Figura 7 muestra  $S_0$  en color amarillo. La distancia  $b_M$  es el paso de la hélice.

$$[1] \delta_0(\alpha) = (r_0 \cos \alpha, r_0 \sin \alpha + d_M, 0)$$

$$[2] \vec{x}_0(\alpha, \theta) = \begin{pmatrix} r_0 \cos \alpha \cos \theta - (r_0 \sin \alpha + d_M) \sin \theta, \\ \cos \alpha \sin \theta + (r_0 \sin \alpha + d_M) \cos \theta, b_M \frac{\theta}{2\pi} \end{pmatrix}$$

La curva [3], donde  $\alpha \in (\frac{3\pi}{2} - \frac{\xi_1}{2}, \frac{3\pi}{2} + \frac{\xi_1}{2})$  parametriza el arco  $C_1$  de la columna de Valencia. El lugar geométrico del conjunto de las hélices  $\gamma_{1\alpha}(\theta)$ , con los puntos  $\delta_1(\alpha)$  como punto de origen, es una superficie helicoidal  $S_1$  con la parametrización [4] donde  $(\alpha, \theta) \in (\frac{3\pi}{2} - \frac{\xi_1}{2}, \frac{3\pi}{2} + \frac{\xi_1}{2}) \times (0, 2\pi)$ . La Figura 7 muestra  $S_1$  en color rojo. La distancia  $b_V$  es el paso de la hélice.

$$[3] \delta_1(\alpha) = (r_1 \cos \alpha, r_1 \sin \alpha + d_V, 0)$$

$$[4] \vec{x}_1(\alpha, \theta) = \begin{pmatrix} r_1 \cos \alpha \cos \theta - (r_1 \sin \alpha + d_V) \sin \theta, \\ r_1 \cos \alpha \sin \theta + (r_1 \sin \alpha + d_V) \cos \theta, b_V \frac{\theta}{2\pi} \end{pmatrix}$$

La curva [5], donde  $\alpha \in (\frac{\pi}{2} - \frac{\xi_2}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\xi_2}{2})$  parametriza el arco  $C_2$  de la columna de Valencia. El lugar geométrico del conjunto de las hélices  $\gamma_{2\alpha}(\theta)$ , con los puntos  $\delta_2(\alpha)$  como punto de origen, es una superficie helicoidal  $S_2$  con la parametrización [6], donde  $(\alpha, \theta) \in (\frac{\pi}{2} - \frac{\xi_2}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\xi_2}{2}) \times (0, 2\pi)$ . La Figura 7 muestra  $S_2$  en color azul.

$$[5] \delta_2(\alpha) = (r_2 \cos \alpha, r_2 \sin \alpha + d_V, 0)$$

$$[6] \vec{x}_2(\alpha, \theta) = \begin{pmatrix} r_2 \cos \alpha \cos \theta - (r_2 \sin \alpha + d_V) \sin \theta, \\ r_2 \cos \alpha \sin \theta + (r_2 \sin \alpha + d_V) \cos \theta, b_V \frac{\theta}{2\pi} \end{pmatrix}$$

Procedemos al cálculo general de la curvatura de la superficie  $S$  parametrizada por [7], obteniendo las siguientes fórmulas de la Curvatura de Gauss [8] y la Curvatura Media [9], respectivamente, en el punto de parametrización  $\vec{x}(\alpha, \theta)$ .

$$[7] \vec{x}(\alpha, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \alpha \cos \theta - (r \sin \alpha + d) \sin \theta, \\ r \cos \alpha \sin \theta + (r \sin \alpha + d) \cos \theta, b \frac{\theta}{2\pi} \end{pmatrix}$$

$$[8] K(\alpha, \theta) = K(\alpha) = 4\pi^2 b^2 \frac{d}{r} \frac{\sin \alpha}{(b^2 + 2\pi^2 d^2 (1 + \cos 2\alpha))^2}$$

$$[9] H(\alpha, \theta) = H(\alpha) = \frac{b}{2r} \frac{4\pi^2 d^2 + b^2 + 4\pi^2 d r \sin \alpha}{(-b^2 - 4\pi^2 d^2 \cos^2 \alpha) \sqrt{b^2 + 2\pi^2 d^2 (1 + \cos 2\alpha)}}$$

El parámetro angular  $\theta$  de la hélice  $\gamma_\alpha(\theta) = \vec{x}(\alpha, \theta)$  no afecta a las curvaturas.

Presentamos longitudes y áreas: Las longitudes de las hélices  $\gamma_\alpha(\theta) = \vec{x}(\alpha, \theta)$  vienen dadas por la fórmula [10]. El área  $A(S)$  en los casos  $S_0$  y  $S_1$  viene dada por [11], y en el caso de  $S_2$  por la fórmula [12].

$$[10] \int_0^{2\pi} \left\| \frac{d}{d\theta} \gamma_\alpha(\theta) \right\| d\theta = \sqrt{b^2 + 4\pi^2 d^2 + 8\pi^2 r d \sin \alpha + 4\pi^2 r^2} = \mathcal{L}(\alpha)$$

$$[11] r \int_{\frac{3\pi}{2} - \frac{\xi}{2}}^{\frac{3\pi}{2} + \frac{\xi}{2}} \sqrt{b^2 + 4\pi^2 d^2 \cos^2 \alpha} d\alpha = \mathcal{A}(S_i), i = 0, 1$$

$$[12] r \int_{\frac{\pi}{3} - \frac{\xi}{2}}^{\frac{\pi}{3} + \frac{\xi}{2}} \sqrt{b^2 + 4\pi^2 d^2 \cos^2 \alpha} d\alpha = \mathcal{A}(S_2)$$

Las parametrizaciones de las superficies  $S_3$  y  $S_4$ , generadas por los segmentos  $D_3$  y  $D_4$ , presentadas en

consulted specialized bibliography 2-11. For both photogrammetric reconstructions we have used about 160+175 photographs taken with a Canon EOS 5D Mark IV SLR camera, obtaining the graphic results shown in Figure 4 and whose parameters are reflected in Table 1. Next, and starting from the measurements obtained from both photogrammetric models generated with PhotoScan software, we have elaborated a new three-dimensional 3D solid model with AutoCAD software. This pitch has been important to have a better control and knowledge about the constructive process of both helical columns, besides fixing all the parameters used for the analytical description in the following subsection 2.1.

## 2.1. Graphical and analytical description

Next, we present the three-dimensional models and the basic geometric parameters to develop the analytical formulas that we will show in subsection 2.1.1 and that we will use throughout section 3.

In the three-dimensional Euclidean affine space coordinate with an orthonormal reference frame  $R = \{O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ , the curve  $\gamma(\theta) = (a_x \cos \theta - a_y \sin \theta, a_x \sin \theta + a_y \cos \theta, b \frac{\theta}{2\pi})$  is a cylindrical helix of radius  $\sqrt{a_x^2 + a_y^2}$  and pitch  $b$ .

We can consider  $\theta \in [0, 2\pi]$  having a complete helix arc with the initial point  $p = \gamma(0) = (a_x, a_y, 0)$  in the geometrical plane  $XY$  of equation  $z = 0$ , and end point in the parallel plane  $z = b$ .

The surfaces of the columns are formed by helices whose initial points are in at:  $XY$ , and these form a geometric locus composed of arcs of circumference ( $C_0, C_1, C_2$ ) or by segments ( $D_3, D_4$ ); Figures 5 and 6.

### 2.1.1. General geometric formulas for arcs

We will set the analytical conditions occurring in the geometric location  $Q$  from where the helices form the column surfaces. Let us call  $C$  any of the arcs of  $Q$ . Figures 5 and 6 name with as  $C_0$  the arc of the Mallorca column  $C_1$  and with  $C_2$  the arc of the Valencia column. These conditions are:

a) The central axis of the helices is the axis  $z$ .





b) The center  $O_0$  of the arc  $C_0$  is in the plane  $XY$  far from  $d_M$  the axis and its coordinates, rotating if necessary, are  $(0, d_M, 0)$ . The centre  $O_i$  of the arc  $C_i$ , being  $i = 1, 2$ , is on the plane  $XY$  at a distance  $d_V$  from the axis and its coordinates, rotating if necessary, being  $(0, d_V, 0)$ . The distances  $d_M$  and  $d_V$  are the diameters of the Mallorca and Valencia columns, respectively.

c) The straight line that joins  $O = (0,0,0)$  with the centre  $O_i$  is the axis of the arc's orthogonal symmetry  $C_i$ , being  $i = 0, 1, 2$ .

d) The arc  $C_i$  is an arc of radius circumference  $r_i$  subtended by a central angle

la Figura 7, las mostraremos en la sub-sección 3.2.2, y sus elementos en la sub-sección 3.2.4.

### 3. RESULTADOS

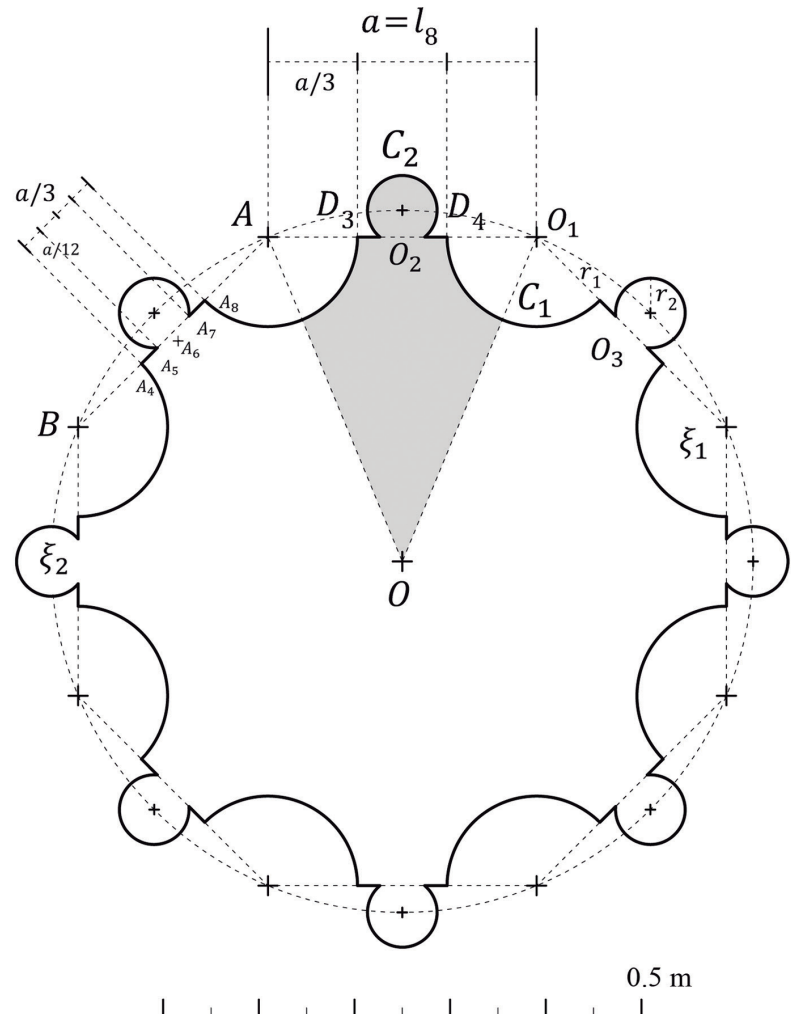
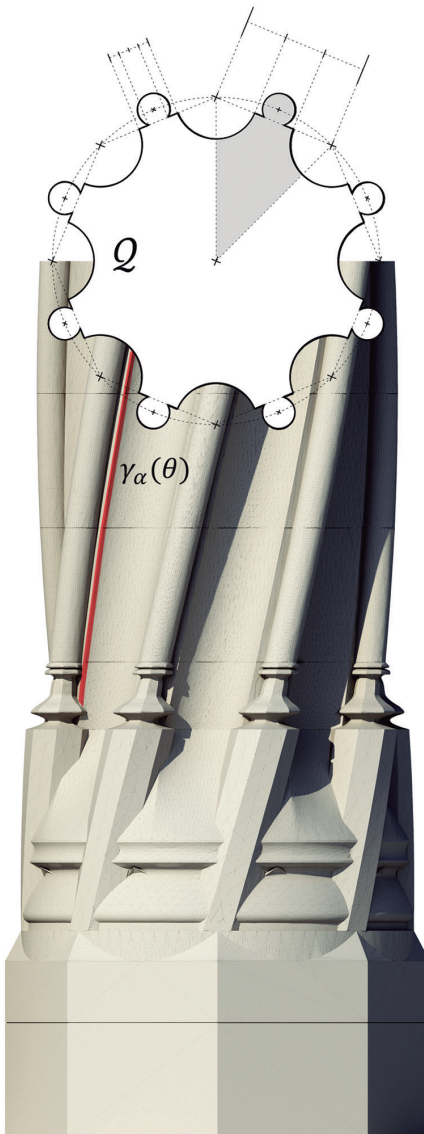
Fijadas las anteriores ecuaciones presentaremos los parámetros de las hélices para cada una de las superficies helicoidales que engendran las columnas de estudio, concretamente: diámetro ( $d_{M-V}$ ), paso ( $d_{M-V}$ ), curvatura de Gauss  $K_i$ , curvatura media  $H_i$ , longitud  $L_i$  y área  $A_i$ .

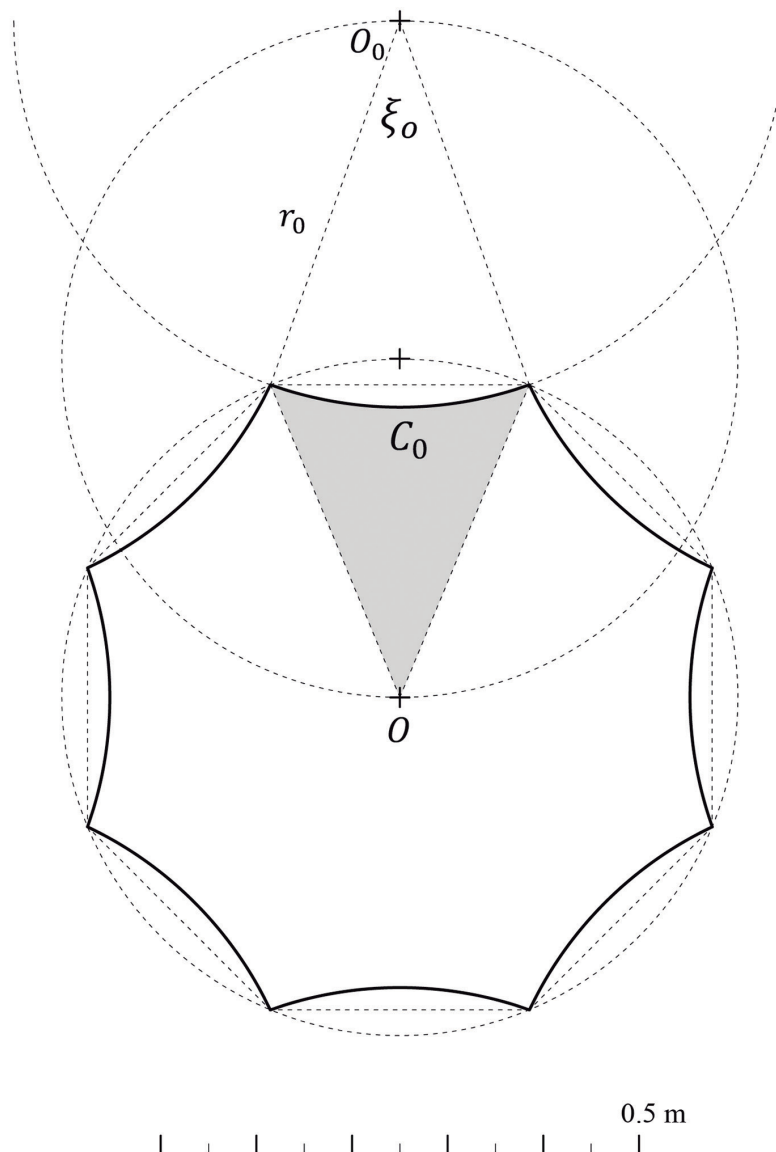
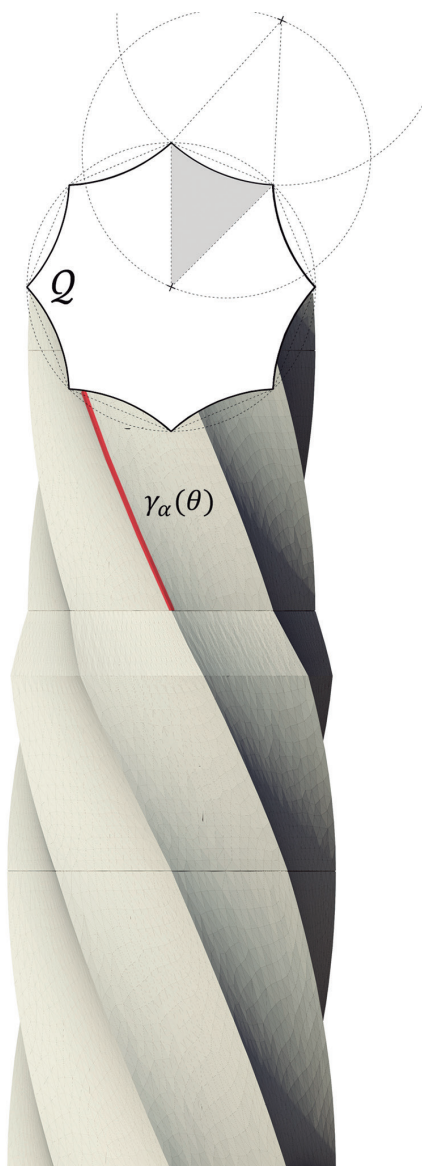
5. Construcción geométrica de la sección horizontal (lugar geométrico  $Q$ ) de la columna de la Lonja de Palma de Mallorca. En rojo una de las hélices  $\gamma_{0\alpha}(\theta)$ . Fuente: los autores

6. Construcción geométrica de la sección horizontal (lugar geométrico  $Q$ ) de la columna de la Lonja de Valencia. En rojo una de las hélices  $\gamma_{1\alpha}(\theta)$ . Fuente: los autores

5. An horizontal section (geometric location  $Q$ ) of a column at Lonja of Palma de Mallorca and the representation of it geometrical design. In red, one of the helices  $\gamma_{0\alpha}(\theta)$ . Source: authors

6. An horizontal section (geometric location  $Q$ ) of a column at Lonja of Valencia and the representation of it geometrical design. In red, one of the helices  $\gamma_{1\alpha}(\theta)$ . Source: authors





6

### 3.1. Parámetros geométricos de la columna de Mallorca

El lugar geométrico  $Q$  está formado por 8 arcos iguales salvo por su posición, todos se obtienen a partir de uno de ellos –que llamaremos  $C_0$  mediante giros centrados en  $O$  y amplitud  $\eta = \frac{2\pi}{8}$ , (Fig. 5). Tenemos lo siguiente:

Las coordenadas de  $O_0$ , centro de  $C_0$ , son  $(0, d_M, 0)$ . Con las medidas obtenidas en el proceso fotogramétrico tenemos que  $d_M \sim 0.707 \text{ m}$ .

Realizamos el estudio trigonométrico del proceso de construcción

geométrica presentado en la Figura 5, y obtenemos que el arco  $C_0$  es arco de radio  $r_0 = \frac{d}{2} \sqrt{5 - 2\sqrt{2} + 2} \sim 0.404 \text{ m}$ .

Con un análisis trigonométrico obtenemos que el arco  $C_0$  está sustentado por un ángulo central de amplitud  $\xi_0 = 2 \arcsin \left( \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{\sqrt{20 - 8\sqrt{2} - \sqrt{2}}} \right) \sim 0.683 \text{ rad}$ .

Y el paso  $b_M$  de las hélices es medido *in situ* y contrastado con el modelo tridimensional generado y se tiene que  $b_M \sim 5.12 \text{ m}$ .

Con lo anterior más [1], redondeando a la centésima, obtenemos la parametrización [13] de la superficie  $S_0$ , donde  $(\alpha, \theta) \in (4.37, 5.05) \times (0, 6.28)$ .

of amplitude  $\xi_i$ , being  $i = 0, 1, 2$ .

The [1] curve, where  $\alpha \in \left( \frac{3\pi}{2} - \frac{\xi_i}{2}, \frac{3\pi}{2} + \frac{\xi_i}{2} \right)$ , sets the arc  $C_0$  of the Mallorca column.

The geometric location of the set of helices  $\gamma_{0\alpha}(\theta)$ , with origin points  $\delta_0(\alpha)$ , is a helical surface  $S_0$  with [2] setting, where  $(\alpha, \theta) \in \left( \frac{3\pi}{2} - \frac{\xi_i}{2}, \frac{3\pi}{2} + \frac{\xi_i}{2} \right) \times (0, 2\pi)$ . Figure 7 shows in yellow. Distance  $b_M$  is the helix pitch.

$$[1] \quad \delta_0(\alpha) = (r_0 \cos \alpha, r_0 \sin \alpha + d_M, 0)$$

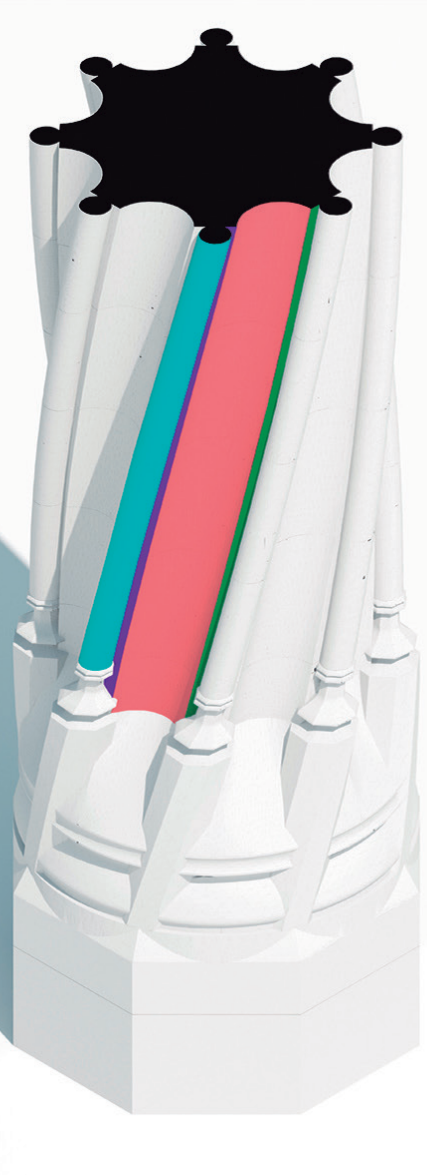
$$[2] \quad \vec{x}_0(\alpha, \theta) = \begin{pmatrix} r_0 \cos \alpha \cos \theta - (r_0 \sin \alpha + d_M) \sin \theta, \\ \cos \alpha \sin \theta + (r_0 \sin \alpha + d_M) \cos \theta, b_M \frac{\theta}{2\pi} \end{pmatrix}$$

Curve [3], where  $\alpha \in \left( \frac{3\pi}{2} - \frac{\xi_i}{2}, \frac{3\pi}{2} + \frac{\xi_i}{2} \right)$ , sets the arc  $C_1$  of the Valencia column. The geometric location of the set of helices  $\gamma_{1\alpha}(\theta)$ , with origin points  $\delta_1(\alpha)$ , is a helical surface  $S_1$  with setting [4] where  $(\alpha, \theta) \in \left( \frac{3\pi}{2} - \frac{\xi_i}{2}, \frac{3\pi}{2} + \frac{\xi_i}{2} \right) \times (0, 2\pi)$ . Figure 7 shows  $S_1$  in red. Distance



7. Esquemas de las superficies helicoidales estudiadas.  $S_0$  en amarillo,  $S_1$  en rojo,  $S_2$  en azul,  $S_3$  en morado y  $S_4$  en verde. Fuente: los autores

7. Schemes of the helical surfaces studied.  $S_0$  in yellow,  $S_1$  in red,  $S_2$  in blue,  $S_3$  in purple and  $S_4$  in green. Source: authors



7

$b_V$  is the helix pitch.

$$[3] \quad \delta_1(\alpha) = (r_1 \cos \alpha, r_1 \sin \alpha + d_V, 0)$$

$$[4] \quad \tilde{x}_1(\alpha, \theta) = (r_1 \cos \alpha \cos \theta - (r_1 \sin \alpha + d_V) \sin \theta, r_1 \cos \alpha \sin \theta + (r_1 \sin \alpha + d_V) \cos \theta, b_V \frac{\theta}{2\pi})$$

Curve [5], where  $\alpha \in (\frac{\pi}{2} - \frac{\xi_1}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\xi_1}{2})$ , sets the arc  $C_2$  of the Valencia column. The geometric location of the set of helices  $\gamma_{2\alpha}(\theta)$ , with origin points,  $\delta_2(\alpha)$  is a helical surface  $S_2$  with [6] setting, where  $(\alpha, \theta) \in (\frac{\pi}{2} - \frac{\xi_1}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\xi_1}{2})$

$$[13] \quad \tilde{x}^2(\alpha, \theta) \sim (0.40 \cos \alpha \cos \theta - (0.40 \sin \alpha + 0.71) \sin \theta, 0.40 \cos \alpha \sin \theta + (0.40 \sin \alpha + 0.71) \cos \theta, 0.11\theta)$$

Calculando con las fórmulas [8-9] obtenemos:

- La curvatura de Gauss

$$K_0(\alpha) \sim \frac{1812.22 \sin \alpha}{(36.08 + 9.87 \cos 2\alpha)^2}$$

- La curvatura media

$$H_0(\alpha) \sim \frac{-582.67 - 142.91 \sin \alpha}{(26.21 + 19.73 \sin^2 \alpha) \sqrt{36.08 + 9.87 \cos 2\alpha}}$$

Dado que  $\alpha \in (4.37, 5.05)$ , ambas curvaturas son negativas para cualquier  $\alpha$ . Para la curvatura de Gauss, su valor mínimo se obtiene en los puntos de la hélice central  $\gamma_0, \frac{3\pi}{2}(\theta)$ , siendo  $K_0(\frac{3\pi}{2}) \sim -2.64$ . Para



la curvatura media, su valor mínimo es  $H_0(\frac{3\pi}{2}) \sim -1.64$ .

Con las fórmulas [10-11] obtenemos:

Las longitudes de las hélices  $\gamma_{0\alpha}(\theta)$  son  $L_0(\alpha) \sim \sqrt{22.54 \sin \alpha + 52.38} m$ . El área de  $S_0$  es  $A(S_0) \sim 1.43 m^2$ . En particular la longitud de la hélice central  $\gamma_0, \frac{3\pi}{2}(\theta)$  es  $L_0(\frac{3\pi}{2}) \sim 5.46 m$ .

### 3.2. Parámetros geométricos de la columna de Valencia

La Figura 6 muestra el lugar geométrico  $Q$  formado por: 8 arcos iguales salvo por su posición que se obtienen a partir de uno de ellos –al cual llamaremos  $C_1$ – mediante giros centrados en  $O$  de amplitud  $\eta = \frac{2\pi}{8}$ ; 8 arcos iguales salvo por su posición que se obtienen a partir de uno de ellos –al cual llamaremos  $C_2$ –; y 8 segmentos iguales salvo por su posición que se obtienen a partir de uno de ellos –que llamaremos  $D_3$ – y de forma similar, 8 segmentos iguales salvo por su posición –que llamaremos  $D_4$ –.

#### 3.2.1. Parametrizaciones generadas por los arcos $C_1$ y $C_2$

Así, salvo los giros correspondientes, tenemos:

Las coordenadas de  $O_1$ , centro de  $C_1$ , son  $(0, \frac{d_v}{2}, 0)$ . Con las medidas obtenidas en el proceso fotogramétrico tenemos que  $d_v \sim 0.807 m$ .

Realizamos el estudio trigonométrico del proceso de construcción geométrica presentado en la Figura 6, y obtenemos que el arco  $C_1$  es de radio  $r_1 = \frac{d_v \sqrt{2-\sqrt{2}}}{6} \sim 0.1 m$ . Donde  $r_1$  es la tercera parte del lado del octógono regular inscrito en la circunferencia de diámetro  $d_v$ .

Además, el arco  $C_1$  está sustentado por un ángulo central de amplitud  $\xi_1 = \frac{3\pi}{4} \sim 2.356$ .

El paso  $b_v$  de las hélices es medido *in situ* y contrastado con el modelo tridimensional y se tiene que  $b_v \sim 10.56 m$ .

Con lo anterior más [1], obtenemos la parametrización [14] de la superficie  $S_1$ , donde  $(\alpha, \theta) \in (3.53, 5.89) \times (6.28)$ .

$$[14] \quad \vec{x}_1(\alpha, \theta) \sim (0.1 \cos \alpha \cos \theta - (0.1 \sin \alpha + 0.4) \sin \theta, 0.1 \cos \alpha \sin \theta, + (0.1 \sin \alpha + 0.4) \cos \theta, 1.68\theta)$$

Para el arco  $C_2$  tenemos que las coordenadas de  $O_2$ , centro de  $C_2$ , son  $(0, \frac{d_v}{2}, 0)$ .

Realizamos el estudio trigonométrico del proceso de construcción geométrica presentado en la Figura 6, y obtenemos que el arco  $C_2$  es de radio

$$r_2 = \frac{d_v \sqrt{35\sqrt{2}-144\sqrt{\sqrt{2}+2}+218}}{24} \sim 0.04 m.$$

Donde  $r_2$  es la longitud del segmento construido de la siguiente forma: Se considera un lado  $l_8$  del octógono regular inscrito en la circunferencia de diámetro  $d_v$  cuyos vértices son  $A$  y  $B$ . Se divide el lado  $l_8 = AB$  en 12 segmentos iguales, pongamos que  $A = A_0, A_1, \dots, A_{11}$  y  $A_{12} = B$  son los vértices de tales segmentos. El diámetro que pasa por  $O_2$  interseca al octógono en  $A_6$ , y  $r_2$  es la longitud del segmento  $O_2 A_5$ , (Fig. 6).

Y obtenemos que el arco  $C_2$  está sustentado por un ángulo central de amplitud  $\xi_2 = 2\pi - 2\arcsin$

$$\left( \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{35\sqrt{2}-144\sqrt{\sqrt{2}+2}+218}} \right) \sim 4.888.$$

Con lo anterior más [1] obtenemos la parametrización [15] de la superficie  $S_2$ , donde  $(\alpha, \theta) \in (-0.87, 4.01) \times (6.28)$ .

$$[15] \quad \vec{x}_2(\alpha, \theta) \sim (0.04 \cos \alpha \cos \theta - (0.04 \sin \alpha + 0.4) \sin \theta, 0.04 \cos \alpha \sin \theta, + (0.04 \sin \alpha + 0.4) \cos \theta, 1.68\theta)$$

$\times (0, 2\pi)$ . Figure 7 shows  $S_2$  in blue.

$$[5] \quad \delta_2(\alpha) = (r_2 \cos \alpha, r_2 \sin \alpha + d_v, 0)$$

$$[6] \quad \vec{x}_2(\alpha, \theta) = \left( r_2 \cos \alpha \cos \theta - (r_2 \sin \alpha + d_v) \sin \theta, r_2 \cos \alpha \sin \theta + (r_2 \sin \alpha + d_v) \cos \theta, b_v \frac{\theta}{2\pi} \right)$$

We proceed to the general computation of the curvature of the surface  $S$  set by [7], obtaining the following formulas for the Gaussian Curvature [8] and the Mean Curvature [9], respectively, at the setting point  $\vec{x}^2(\alpha, \theta)$ .

$$[7] \quad \vec{x}(\alpha, \theta) = \left( r \cos \alpha \cos \theta - (r \sin \alpha + d) \sin \theta, r \cos \alpha \sin \theta + (r \sin \alpha + d) \cos \theta, b \frac{\theta}{2\pi} \right)$$

$$[8] \quad K(\alpha, \theta) = K(\alpha) = 4\pi^2 b^2 \frac{\sin \alpha}{r(b^2 + 2\pi^2 d^2(1 + \cos 2\alpha))^2}$$

$$[9] \quad H(\alpha, \theta) = H(\alpha) = \frac{b}{2r} \frac{4\pi^2 d^2 + b^2 + 4\pi^2 d r \sin \alpha}{(-b^2 - 4\pi^2 d^2 \cos^2 \alpha) \sqrt{b^2 + 2\pi^2 d^2(1 + \cos 2\alpha)}}$$

The angular setting  $\theta$  of the helix  $\gamma_\alpha(\theta) = \vec{x}^2(\alpha, \theta)$  does not affect curvatures.

We present lengths and areas: The lengths of helices  $\gamma_\alpha(\theta) = \vec{x}^2(\alpha, \theta)$  are given by formula [10]. The area  $A(S)$  in cases  $S_0$  and  $S_1$  is given by [11], and in the case of  $S_2$  by formula [12].

$$[10] \quad \int_0^{2\pi} \left\| \frac{d}{d\theta} \gamma_\alpha(\theta) \right\| d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{b^2 + 4\pi^2 d^2 + 8\pi^2 d r \sin \alpha + 4\pi^2 r^2}} = \mathcal{L}(\alpha)$$

$$[11] \quad r \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\xi}{2}} \sqrt{b^2 + 4\pi^2 d^2 \cos^2 \alpha} d\alpha = \mathcal{A}(S_i), i = 0, 1$$

$$[12] \quad r \int_{\frac{\pi}{3} + \frac{\xi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\xi}{2}} \sqrt{b^2 + 4\pi^2 d^2 \cos^2 \alpha} d\alpha = \mathcal{A}(S_2)$$

Settings of surfaces  $S_3$  and  $S_4$ , generated by segments  $D_3$  and  $D_4$ , presented in Figure 7, are shown in subsection 3.2.2, and its elements in subsection 3.2.4.

## 3. RESULTS

Having fixed the above equations, we present the settings of the helices for each of the helical surfaces that generate the columns under study, namely: diameter ( $d_{M-V}$ ), pitch ( $d_{M-V}$ ), Gaussian curvature  $K_i$ , mean curvature  $H_i$ , length  $L_i$  and area  $A_i$ .

### 3.1. Geometric Parameters of the Mallorca Column

The geometric location  $Q$  is formed by 8 identical arcs, except for their position. They are all obtained from one of them –which we will call  $C_0$ – by means of turns centered in  $O$  and amplitude  $\eta = \frac{2\pi}{8}$ , Figure 5. We have the following:





The coordinates of  $O_0$ , center of  $C_0$ , are  $(0, d_M, 0)$ . With measurements obtained in the photogrammetric process, we have that  $d_M \sim 0.707 \text{ m}$ .

We perform the trigonometric study of the geometric construction process presented in Figure 5, and obtain that the arc  $C_0$  has a radius of  $r_0 = \frac{d}{2} \sqrt{5-2\sqrt{2}+2} \sim 0.404 \text{ m}$ . By trigonometric analysis we obtain that the arc  $C_0$  is supported by a central angle of amplitude  $\xi_0 = 2 \arcsin \left( \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{\sqrt{20-8\sqrt{2}-\sqrt{2}}} \right) \sim 0.683 \text{ rad}$ .

The helices' pitch  $b_M$  is measured on site and contrasted with the generated 3-D model, and it is held that  $b_M \sim 5.12 \text{ m}$ .

With the above plus [1], rounded to the hundredth, we obtain the setting [13] of the surface  $S_0$ , where  $(\alpha, \theta) \in (4.37, 5.05) \times (0, 6.28)$ .

[13]  $\vec{x}^*(\alpha, \theta) \sim (0.40 \cos \alpha \cos \theta - (0.40 \sin \alpha + 0.71) \sin \theta, 0.40 \cos \alpha \sin \theta, + (0.40 \sin \alpha + 0.71) \cos \theta, 0.11 \theta)$

Calculating with formulas [8-9] we obtain:  
- Gaussian curvature

$$K_0(\alpha) \sim \frac{1812.22 \sin \alpha}{(36.08 + 9.87 \cos 2\alpha)^2}$$

- Mean curvature

$$H_0(\alpha) \sim \frac{-582.67 - 142.91 \sin \alpha}{(26.21 + 19.73 \sin^2 \alpha) \sqrt{36.08 + 9.87 \cos 2\alpha}}$$

Given  $\alpha \in (4.37, 5.05)$ , both curvatures are negative for any  $\alpha$ . For the Gaussian curvature, its minimum value is obtained at the points of the central helix  $\gamma_0, \frac{3\pi}{2}(\theta)$ , being  $K_0(\frac{3\pi}{2}) \sim -2.64$ . For the mean curvature, its minimum value is  $H_0(\frac{3\pi}{2}) \sim -1.64$ .

With formulas [10-11] we obtain:

The lengths of helices  $\gamma_{0,\alpha}(\theta)$  are  $L_0(\alpha) \sim \sqrt{22.54 \sin \alpha + 52.38 \text{ m}}$ . The area of  $S_0$  is  $A(S_0) \sim 1.43 \text{ m}^2$ . In particular, the length of the central helix  $\gamma_0, \frac{3\pi}{2}(\theta)$  is  $L_0(\frac{3\pi}{2}) \sim 5.46 \text{ m}$ .

### 3.2. Geometric parameters of the Valencia Column

Figure 6 shows the geometric location  $Q$  formed by: 8 identical arcs except for their location that are obtained from one of them—which we will call  $C_1$ —by means of turns centered in  $O$  of amplitude  $\eta = \frac{2\pi}{8}$ ; 8 identical arcs except for their location that are obtained from one of them—which we will call  $C_2$ —and 8 identical segments except for their location that are obtained from one of

### 3.2.2 Parametrizaciones generadas por los segmentos $D_3$ y $D_4$

En cuanto a los segmentos  $D_3(A_4A_5)$  y  $D_4(A_7A_8)$ , (Fig. 6), obtenemos:

Las curvas que parametrizan  $D_3$  y  $D_4$  son respectivamente:  $\delta_2(t) = A_4t + A_5(1-t)$  y  $\delta_4(t) = A_7t + A_8(1-t)$  con  $t \in (0, 1)$ ; y analíticamente:

$$\delta_3(t) = \left( \left(1 - \frac{t}{2}\right) \frac{d_v \sqrt{2-\sqrt{2}}}{12}, \frac{d_v \sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}, 0 \right) \text{ y}$$

$$\delta_4(t) = \left( -(1+t) \frac{1}{24} d_v \sqrt{2-\sqrt{2}}, \frac{1}{4} d_v \sqrt{\sqrt{2}+2}, 0 \right)$$

con  $t \in (0, 1)$ . Así, [16] parametriza la superficie  $S_3$ , generada por las hélices  $\gamma_{3,t}(\theta)$  cuyos puntos iniciales son los puntos de  $\delta_3(t)$ , donde  $(t, \theta) \in (0, 1) \times (0, 6.18)$ :

$$[16] \quad \vec{x}_3(t, \theta) \sim \left( \left(1 - \frac{t}{2}\right) 0.05 \cos \theta - 0.37 \sin \theta, \left(1 - \frac{t}{2}\right) 0.05 \sin \theta + 0.37 \cos \theta, 1.68 \theta \right)$$

Igualmente, [17] parametriza la superficie  $S_4$ , generada por las hélices  $\gamma_{4,t}(\theta)$  cuyos puntos iniciales son los puntos de  $\delta_4(t)$ , donde  $(t, \theta) \in (0, 1) \times (0, 6.18)$ :

$$[17] \quad \vec{x}_4(t, \theta) \sim \left( -(1+t) 0.03 \cos \theta - 0.37 \sin \theta, -(1+t) 0.03 \sin \theta + 0.37 \cos \theta, 1.68 \theta \right)$$

La Figura 7 muestra las superficies  $S_3$  y  $S_4$ .

### 3.2.3. Curvaturas y longitudes de $S_1$ y $S_2$

Calculando con [8-9] obtenemos:

- La curvatura de Gauss de  $S_1$ :

$$K_1(\alpha) \sim \frac{17255.96 \sin \alpha}{(114.73 + 3.21 \cos 2\alpha)^2}$$

- La curvatura media de  $S_1$ :

$$H_1(\alpha) \sim \frac{84.11 \sin \alpha + 6049.33}{(-111.51 - 6.43 \cos^2 \alpha) \sqrt{114.73 + 3.21 \cos 2\alpha}}$$

Dado que  $\alpha \in (3.53, 5.89)$ , ambas curvaturas son negativas para cualquier  $\alpha$ . Para la curvatura de Gauss, su valor mínimo se obtiene en los puntos de la hélice central  $\gamma_1$ ,

$\frac{3\pi}{2}(\theta)$ , siendo  $K_1(\frac{3\pi}{2}) \sim -1.39$ . Para la curvatura media, su valor mínimo es  $H_1(\frac{3\pi}{2}) \sim -5.07$ .

Con las fórmulas [10-11] obtenemos: las longitudes de las hélices  $\gamma_{1,\alpha}(\theta)$  son  $L_1(\alpha) \sim \sqrt{3.28 \sin \alpha + 118.36}$ ; el área de  $S_1$  es  $A(S_1) \sim 2.58 \text{ m}^2$ ; y en particular la longitud de la hélice central  $\gamma_1, \frac{3\pi}{2}(\theta)$  es  $L_1(\frac{3\pi}{2}) \sim 10.72 \text{ m}$ .

Igualmente procedemos para la superficie  $S_2$  y obtenemos:

- La curvatura de Gauss de  $S_2$ :

$$K_2(\alpha) \sim \frac{44330.10 \sin \alpha}{(114.73 + 3.21 \cos 2\alpha)^2}$$

- La curvatura media de  $S_2$ :

$$H_2(\alpha) \sim \frac{84.11 \sin \alpha + 15540.57}{(-111.51 - 6.43 \cos^2 \alpha) \sqrt{114.73 + 3.21 \cos 2\alpha}}$$

Para la curvatura de Gauss, su valor máximo se obtiene en los puntos de la hélice central  $\gamma_2, \frac{\pi}{2}(\theta)$ , siendo  $K_2(\frac{\pi}{2}) \sim 3.56$ . Para la curvatura media se obtiene que su valor mínimo es  $H_2(\frac{\pi}{2}) \sim -13.27$ .

Con las fórmulas [10-11] obtenemos: las longitudes de las hélices  $\gamma_{2,\alpha}(\theta)$  son  $L_2(\alpha) \sim \sqrt{1.28 \sin \alpha + 118.00}$ ; el área de  $S_2$  es  $A(S_2) \sim 2.10 \text{ m}^2$ ; en particular la longitud de la hélice central  $\gamma_2, \frac{\pi}{2}(\theta)$  es  $L_2(\frac{\pi}{2}) \sim 10.92 \text{ m}$ .

Con las funciones encontradas, es fácil comprobar que las longitudes de las hélices de las tres superficies  $S_0$  (de Mallorca) y  $S_1, S_2$  (de Valencia) nunca coinciden, no existen hélices de la misma longitud en ambas columnas.

### 3.2.4. Curvaturas y longitudes de $S_3$ y $S_4$

En cuanto a la superficie  $S_3$  cuya parametrización es [16] y procediendo al cálculo numérico de su curvatura de Gauss y su curvatura media mediante las técnicas de la geometría diferencial, encontramos:  $K_3(t) \sim 0.00$  y  $H_3(t) \sim 5.34(18.73 - 0.02t)^{-3/2}$ , que no dependen de  $\theta$ .



Con las fórmulas [10-11] obtenemos: las longitudes de las hélices  $\gamma_{3,t}(\theta)$  son  $L_3(t) \sim \sqrt{0.03t^2 - 0.1t + 117.1}$ ; el área de  $S_3$  es  $A(S_3) \sim 2\pi \int_0^1 \sqrt{0.002} dt \sim 0.28 m^2$ ; en particular la longitud de la hélice central  $\gamma_{3,\frac{1}{2}}(\theta)$  es  $L_3(\frac{1}{2}) \sim 10.82 m$ .

Igualmente realizamos este cálculo para  $S_4$  cuya parametrización es [17] y obtenemos; la curvatura de Gauss y la curvatura media es:  $K_4(t) \sim 0.66$  y  $H_4(t) \sim 5.34(18.71 - 0.02t)^{-3/2}$ ; las longitudes de las hélices  $\gamma_{4,t}(\theta)$  son  $L_4(t) \sim \sqrt{0.03t^2 + 0.05t + 117.02}$ ; el área de  $S_4$  es  $A(S_4) \sim 2\pi \int_0^1 \sqrt{0.002} dt \sim 0.28 m^2$ ; en particular, la longitud de la hélice central  $\gamma_{4,\frac{1}{2}}(\theta)$  es  $L_4(\frac{1}{2}) \sim 10.82 m$ .

## 4. CONCLUSIONES

Como dijimos al principio de este trabajo, en varias referencias bibliográficas encontramos que el arquitecto que edificó la Lonja de Valencia se inspiró en el diseño de la Lonja de Palma de Mallorca. Esta afirmación está fundamentada principalmente porque ambas edificaciones se enmarcan dentro del mismo estilo arquitectónico, porque las dos construcciones tienen proporciones similares y, además, son las únicas lonjas de la Corona de Aragón que tienen unos rasgos estilísticos muy parecidos en la ornamentación helicoidal que envuelve sus columnas.

Es cierto que visualmente y con simples relaciones estéticas cualquiera podría encontrar parecidos entre ambas columnas helicoidales. Pero científicamente no basta con sacar conclusiones de forma visual, por ello, el presente trabajo pretende responder a la siguiente pregunta de manera objetiva: ¿en cuánto se parecen ambas columnas

helicoidales? Y para ello hemos hecho los cálculos de los correspondientes parámetros geométricos de las superficies helicoidales de esas columnas.

Así, con procedimientos geométricos rigurosos, y mostrados gráficamente, este trabajo constata que el único parecido existente entre ambas columnas es el propio concepto de hélice. Dicho de otra forma: el arquitecto de la Lonja de Valencia solo se inspiró con la solución ornamental helicoidal que observó en las columnas de la Lonja de Palma de Mallorca para el diseño y construcción de las mismas en el caso de Valencia; no usó en su inspiración ninguna transposición geométrica, pues ninguno de los parámetros geométricos examinados, y que presentamos de forma resumida en las Tablas 2 y 3 (redondeados a la centésima), puede ser considerado parecido entre ambas columnas; ningún parámetro geométrico puede ser considerado como algo que justifique la posible inspiración de una columna para la otra, salvo, como hemos dicho, el propio concepto de hélice. ■

## Referencias

- 1/ LARA, S., 2007. *Las seis grandes lonjas de la Corona de Aragón*. Valencia: TC Cuadernos.
- 2/ CIFUENTES, F., 2015. *La Lonja de Guillelmo de Sagrera - El Salón de los Mercaderes*. Tesis Doctoral dirigida por Josep Quetglas. Universitat Politècnica de Catalunya.
- 3/ IBORRA, F. y GARCÍA, V., 2012. La lonja que no fue. Reflexiones e hipótesis sobre el proyecto inicial de la Lonja de Valencia, *Anales de Historia del Arte*, 22, pp. 295-315. doi: [https://doi.org/10.5209/rev\\_ANHA.2012.39090](https://doi.org/10.5209/rev_ANHA.2012.39090).
- 4/ SANJURJO, A., 2007. El caracol de Mallorca en los tratados de cantería españoles de la edad moderna. *Actas del Quinto Congreso Nacional de Historia de la Construcción*. Burgos, 7-9 de junio de 2007. Madrid: Instituto Juan de Herrera, SEHC, CEHOPU, pp. 835-845.

them—which we will call  $D_3$ —and similarly, 8 identical segments except for their position—which we will call  $D_4$ .

## 3.2.1 Parameterizations generated by arcs $C_1$ and $C_2$ .

Thus, except for the corresponding twists, we have:

The coordinates of  $O_1$ , center of  $C_1$ , are  $(0, \frac{d_v}{2}, 0)$ . With the measurements obtained in the photogrammetric process, we have  $d_v \sim 0.807 m$ .

We carry out the trigonometric study of the geometric construction process presented in Figure 6, and we obtain that the arc  $C_1$  has a radius of  $r_1 = \frac{d_v \sqrt{2-\sqrt{2}}}{4} \sim 0.1 m$ .

Where  $r_1$  is the third part of the side of the regular octagon inscribed in the circle with a diameter of  $d_v$ .

In addition, the arc  $C_1$  is supported by a central angle of amplitude  $\xi_1 = \frac{3\pi}{4} \sim 2.356$ .

The pitch  $b_v$  of the helices is measured on site and contrasted with the 3-D model, and it is found that  $b_v \sim 10.56 m$ .

Considering all of the above, plus [1], we obtain the setting [14] of the surface  $S_1$ , where  $(\alpha, \theta) \in (3.53, 5.89) \times (6.28)$ .

$$[14] \quad x_1^2(\alpha, \theta) \sim (0.1 \cos \alpha \cos \theta - (0.1 \sin \alpha + 0.4) \sin \theta, 0.1 \cos \alpha \sin \theta, + (0.1 \sin \alpha + 0.4) \cos \theta, 1.68 \theta)$$

For the arc  $C_2$  we have the coordinates of  $O_2$ , center of  $C_2$ , are  $(0, \frac{d_v}{2}, 0)$ .

We carry out the trigonometric study of the geometric construction process presented in Figure 6, and we obtain that the arc  $C_2$  has a radius of  $r_2 = \frac{d_v \sqrt{35\sqrt{2}-144\sqrt{\sqrt{2}+2}+218}}{24} \sim 0.04 m$ .

Where  $r_2$  is the length of the segment built thus: One side of the regular octagon is considered  $l_8$  within the diameter circumference  $d_v$  whose vertices are  $A$  and  $B$ . We divide the side  $l_8=AB$  into 12 identical segments, and let us assume that  $A=A_0$ ,  $A_1, \dots, A_{11}$  and  $A_{12}=B$  are the vertices of these segments. The diameter that goes through  $O_2$  intersects the octagon at  $A_6$ , and  $r_2$  is the segment length  $O_2 A_5$ , see Figure 6. We conclude that the arc  $C_2$  is held by a central angle with amplitude  $\xi_2 = 2\pi - 2 \arcsin \left( \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{35\sqrt{2}-144\sqrt{\sqrt{2}+2}+218}} \right) \sim 4.888$ .

With the data presented above, plus [1] we obtain the setting [15] of the surface  $S_2$ , where  $(\alpha, \theta) \in (-0.87, 4.01) \times (6.28)$ .



| DIÁMETRO<br>$d_M$ | PASO<br>$b_M$  | SUPERFICIE<br>$S_0$ | SENTIDO<br>DE GIRO<br>Dextrógiro<br>Dextrorotatory | CURVATURA<br>GAUSS $K_0$    | CURVATURA<br>MEDIA $H_0$ | LONGITUD<br>HÉLICE $L_0$     | ÁREA<br>$A$        |
|-------------------|----------------|---------------------|----------------------------------------------------|-----------------------------|--------------------------|------------------------------|--------------------|
| DIAMETER<br>$d_M$ | PITCH<br>$b_M$ | SURFACE             | DIRECTION<br>OF ROTATION                           | GAUSSIAN<br>CURVATURE $K_0$ | MEAN<br>CURVATURE $H_0$  | LENGTH OF THE<br>HELIX $L_0$ | AREA<br>$A$        |
| 10.70 m           | 5.12m          | $S_0$               | Dextrógiro<br>Dextrorotatory                       | -2.64                       | -1.64                    | 5.46m                        | 1.43m <sup>2</sup> |

Tabla / Table 2

[15]  $\vec{x}_2(\alpha, \theta) \sim (0.04 \cos \alpha \cos \theta - (0.04 \sin \alpha + 0.4) \sin \theta, 0.04 \cos \alpha \sin \theta, + (0.04 \sin \alpha + 0.4) \cos \theta, 1.68\theta)$

### 3.2.2 Settings generated by segments $D_3$ and $D_4$ .

Regarding segments  $D_3(A_4A_5)$  and  $D_4(A_7A_8)$ , Figure 6, we obtain:

The curves setting  $D_3$  and  $D_4$  are, respectively:  $\delta_2(t) = A_4t + A_5(1-t)$  and  $\delta_4(t) = A_7t + A_8(1-t)$  with  $t \in (0,1)$ ; and analytically:

$$\delta_3(t) = \left( \left(1 - \frac{t}{2}\right) \frac{d_v \sqrt{2-\sqrt{2}}}{12}, \frac{d_v \sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}, 0 \right) \text{ and}$$

$$\delta_4(t) = \left( -(1+t) \frac{1}{24} d_v \sqrt{2-\sqrt{2}}, \frac{1}{4} d_v \sqrt{2-\sqrt{2}}, 0 \right)$$

with  $t \in (0,1)$ . Thus, [16] sets the surface  $S_3$ , generated by helices  $\gamma_{3,t}(\theta)$  whose initial points are  $\delta_3(t)$ , where  $(t, \theta) \in (0,1) \times (0, 6.18)$ :

$$[16] \quad \vec{x}_3(t, \theta) \sim \left( \left(1 - \frac{t}{2}\right) 0.05 \cos \theta - 0.37 \sin \theta, \left(1 - \frac{t}{2}\right) 0.05 \sin \theta + 0.37 \cos \theta, 1.68 \theta \right)$$

Likewise, [17] sets the surface  $S_4$ , generated by helices  $\gamma_{4,t}(\theta)$  whose initial points are the points of  $\delta_4(t)$ , where  $(t, \theta) \in (0,1) \times (0, 6.18)$ :

$$[17] \quad \vec{x}_4(t, \theta) \sim (-(1+t)0.03 \cos \theta - 0.37 \sin \theta, -(1+t)0.03 \sin \theta + 0.37 \cos \theta, 1.68\theta)$$

Figure 7 shows surfaces  $S_3$  and  $S_4$ .

### 3.2.3. Curvatures and lengths of $S_1$ and $S_2$

Calculating [8-9] we obtain:

- Gaussian curvature of  $S_1$ :

$$K_1(\alpha) \sim \frac{17255.96 \sin \alpha}{(114.73 + 3.21 \cos 2\alpha)^2}$$

- Mean curvature of  $S_1$ :

$$H_1(\alpha) \sim \frac{84.11 \sin \alpha + 6049.33}{(-111.51 - 6.43 \cos^2 \alpha) \sqrt{114.73 + 3.21 \cos 2\alpha}}$$

Given  $\alpha \in (3.53, 5.89)$ , both curvatures are negative for any  $\alpha$ . For the Gaussian

**Tabla 2. Parámetros geométricos de las columnas de la Lonja de Palma de Mallorca  $K_0$ ,  $H_0$  y  $L_0$  están referidas a las hélices centrales de las superficies**  
**Tabla 3. Parámetros geométricos de las columnas de la Lonja de Valencia.  $K_0$ ,  $H_0$  y  $L_0$  están referidas a las hélices centrales de las superficies**

**Table 2. Geometric parameters of the columns located inside the Lonja of Palma de Mallorca  $K_0$ ,  $H_0$  and  $L_0$  refer to the central helices of the surfaces**  
**Table 3. Geometric parameters of the columns located inside the Lonja of Valencia.  $K_0$ ,  $H_0$  and  $L_0$  refer to the central helices of the surfaces**

- 5/ HERNÁNDEZ, E. J., 2015. *El levantamiento gráfico arquitectónico de precisión: La jamba de la portada de acceso principal a la Lonja de la Seda de Valencia*. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Valencia.
- 6/ DILMÉ, E., 2013. *La restauració històrica de la Llotja de Palma de Mallorca (1866-1905). Lliçons d'una intervenció vuitcentista*. Tesis Doctoral dirigida. Universitat Politècnica de Catalunya.
- 7/ ALOMAR, G., 1970. *Guillem Sagrera y la arquitectura gòtica del siglo xv*. Barcelona: Editorial Blume.
- 8/ BÉRCHEZ, J. y GÓMEZ, M., 2013. *Lonja de Valencia patrimonio de la humanidad*. Valencia: Ajuntament de València, Delegació de Cultura.
- 9/ RAMÍREZ, M., 2016. *Lonja de Valencia. Lonja de la Humanidad*. Valencia: Ayuntamiento de Valencia.
- 10/ ZARAGOZÁ, A., 2000. *Arquitectura gòtica valenciana*. Valencia: Generalitat Valenciana.
- 11/ ZARAGOZÁ, A., 1992. *El arte del corte de piedras en la arquitectura valenciana del cuatrocientos*. Francesc Baldomar y el inicio de la estereotomía moderna. *Primer Congreso de Historia del Arte Valenciano*. Valencia: Generalitat Valenciana, pp. 97-104.

curvature, its minimum value is obtained at the points of the central helix  $\gamma_1, \frac{3\pi}{2}(\theta)$ , being  $K_1\left(\frac{3\pi}{2}\right) \sim -1.39$ . For the mean curvature, its minimum value is  $H_1\left(\frac{3\pi}{2}\right) \sim -5.07$ .

With formulas [10-11] we obtain: the lengths of helices  $\gamma_{1,\alpha}(\theta)$  are  $L_1(\alpha) \sim \sqrt{3.28 \sin \alpha + 118.36}$ ; the area of  $S_1$  is  $A(S_1) \sim 2.58m^2$ ; and in particular the length of the central helix  $\gamma_1, \frac{3\pi}{2}(\theta)$  is  $L_1\left(\frac{3\pi}{2}\right) \sim 10.72m$ .

We likewise proceed for surface  $S_2$  and obtain:

- Gaussian curvature of  $S_2$ :

$$K_2(\alpha) \sim \frac{44330.10 \sin \alpha}{(114.73 + 3.21 \cos 2\alpha)^2}$$

- Mean curvature of  $S_2$ :

$$H_2(\alpha) \sim \frac{84.11 \sin \alpha + 15540.57}{(-111.51 - 6.43 \cos^2 \alpha) \sqrt{114.73 + 3.21 \cos 2\alpha}}$$

For the Gaussian curvature, its maximum value is obtained at the points of the central helix  $\gamma_2, \frac{\pi}{2}(\theta)$ , being  $K_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \sim -3.56$ . For the mean curvature we find its minimum value is  $H_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \sim -13.27$ . With formulas [10-11] we obtain: the lengths of helices  $\gamma_{2,\alpha}(\theta)$  are  $L_2(\alpha) \sim \sqrt{1.28 \sin \alpha + 118.00}$ ; the area of  $S_2$  is  $A(S_2) \sim 2.10 m^2$ ; in particular the length of the central helix  $\gamma_2, \frac{\pi}{2}(\theta)$  is  $L_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \sim 10.92 m$ .

With the functions found, it is easy to verify that the lengths of the helices in the three surfaces  $S_0$  (for Mallorca) and  $S_1, S_2$  (for Valencia) never matches, there are no helices of the same length in both columns.

### 3.2.4. Curvatures and lengths of $S_3$ and $S_4$

As for the surface whose parametrization is [16] and proceeding to the numerical calculation of its Gaussian curvature and mean curvature by means of differential geometry techniques, we find:  $K_3(t) \sim 0.00$



| DIÁMETRO<br>$d_v$ | PASO<br>$b_v$  | SUPERFICIE | SENTIDO<br>DE GIRO       | CURVATURA<br>GAUSS $K_0$    | CURVATURA<br>MEDIA $H_0$ | LONGITUD<br>HÉLICE $L_0$     | ÁREA<br>$A$        |
|-------------------|----------------|------------|--------------------------|-----------------------------|--------------------------|------------------------------|--------------------|
| DIAMETER<br>$d_v$ | PITCH<br>$b_v$ | SURFACE    | DIRECTION<br>OF ROTATION | GAUSSIAN<br>CURVATURE $K_0$ | MEAN<br>CURVATURE $H_0$  | LENGTH OF THE<br>HELIX $L_0$ | AREA<br>$A$        |
| 0.807 m           | 10.56m         | $S_1$      | Levógiro<br>Levorotatory | -1.39                       | -5.07                    | 10.72m                       | 2.58m <sup>2</sup> |
|                   |                | $S_2$      | Levógiro<br>Levorotatory | 3.56                        | -13.27                   | 10.92m                       | 2.10m <sup>2</sup> |
|                   |                | $S_3$      | Levógiro<br>Levorotatory | 0.00                        | 0.66                     | 10.82m                       | 0.28m <sup>2</sup> |
|                   |                | $S_4$      | Levógiro<br>Levorotatory | 0.66                        | 0.66                     | 10.82m                       | 0.28m <sup>2</sup> |

Tabla / Table 3

and  $H_3(t) \sim 5.34(18.73 - 0.02t)^{-3/2}$ , do not depend on  $\theta$ .

With formulas [10-11] we obtain: the lengths of helices  $\gamma_{3,t}(\theta)$  are  $L_3(t) \sim \sqrt{0.03t^2 - 0.1t + 117.1}$ ; the area of  $S_3$  is  $A(S_3) \sim 2\pi \int_0^1 \sqrt{0.002dt} \sim 0.28m^2$ ; in particular, the length of the central helix  $\gamma_{3, \frac{1}{2}}(\theta)$  is  $L_3(\frac{1}{2}) \sim 10.82 m$ .

We also perform this calculation for  $S_4$  whose parameterization is [17] and we obtain: the Gaussian curvature and mean curvature is:  $K_4(t) \sim 0.66$  and  $H_4(t) \sim 5.34(18.71 - 0.02t)^{-3/2}$ ; the lengths of the helices  $\gamma_{4,t}(\theta)$  are  $L_4(t) \sim \sqrt{0.03t^2 + 0.05t + 117.02}$ ; the area of  $S_4$  is  $A(S_4) \sim 2\pi \int_0^1 \sqrt{0.002dt} \sim 0.28m^2$ ; in particular, the length of the central helix  $\gamma_{4, \frac{1}{2}}(\theta)$  is  $L_4(\frac{1}{2}) \sim 10.82 m$ .

## 4. CONCLUSIONS

As we said at the beginning of this work, in several references we find that the architect who built the Lonja of Valencia was inspired by the design of the Lonja of Palma de Mallorca. This statement is based mainly on the fact that both buildings fall within the same architectural style, because the two constructions have similar proportions and, in addition, they are the only lonjas in the Crown of Aragon that have very similar stylistic features in the helical ornamentation that surrounds their columns.

It is true that visually and with simple aesthetic relations anyone could find

similarities between both helical columns. But scientifically it is not enough to draw conclusions visually, therefore, the present work aims to answer the following question in a objective way: how much do both helical columns resemble each other? For this purpose, we have calculated the corresponding geometrical parameters of the helical surfaces of these columns.

Thus, with rigorous geometrical procedures and shown graphically, this work shows that the only resemblance between the two columns is the very concept of helix. More clearly: the architect of the Lonja of Valencia was really only inspired by the helical ornamental solution he observed in the columns of the Lonja of Palma de Mallorca for the design and construction of the same in the case of Valencia; he did not use any geometric transposition in his inspiration, since none of the geometric parameters examined, and which we present in summary form in Tables 2 and 3 (rounded to the hundredth), can be considered similar between the two columns; no geometric parameter can be considered as something that justifies this possible inspiration of one column for the other, except, as we have said, the main concept of helix. ■

## References

- 1/ LARA, S., 2007. *Las seis grandes lonjas de la Corona de Aragón*. Valencia: TC Cuadernos.

- 2/ CIFUENTES, F., 2015. *La Lonja de Guillem de Sagrera - El Saló de los Mercaderes*. Tesis Doctoral dirigida por Josep Quetglas. Universitat Politècnica de Catalunya.
- 3/ IBORRA, F. and GARCÍA, V., 2012. La lonja que no fue. Reflexiones e hipótesis sobre el proyecto inicial de la Lonja de Valencia, *Anales de Historia del Arte*, 22, pp. 295-315. doi: [https://doi.org/10.5209/rev\\_ANHA.2012.39090](https://doi.org/10.5209/rev_ANHA.2012.39090).
- 4/ SANJURJO, A., 2007. El caracol de Mallorca en los tratados de cantería españoles de la edad moderna. *Actas del Quinto Congreso Nacional de Historia de la Construcción*. Burgos, 7-9 de junio de 2007. Madrid: Instituto Juan de Herrera, SEHC, CEHOPU, pp. 835-845.
- 5/ HERNÁNDEZ, E. J., 2015. *El levantamiento gráfico arquitectónico de precisión: La jamba de la portada de acceso principal a la Lonja de la Seda de Valencia*. Tesis Doctoral. Universidad Politècnica de Valencia.
- 6/ DILMÉ, E., 2013. *La restauració històrica de la Llotja de Palma de Mallorca (1866-1905). Lliçons d'una intervenció vuitcentista*. Tesis Doctoral dirigida. Universitat Politècnica de Catalunya.
- 7/ ALOMAR, G., 1970. *Guillem Sagrera y la arquitectura gótica del siglo xv*. Barcelona: Editorial Blume.
- 8/ BÉRCHÉZ, J. and GÓMEZ, M., 2013. *Lonja de Valencia patrimonio de la humanidad*. Valencia: Ajuntament de València, Delegació de Cultura.
- 9/ RAMÍREZ, M., 2016. *Lonja de Valencia. Lonja de la Humanidad*. Valencia: Ayuntamiento de Valencia.
- 10/ ZARAGOZÁ, A., 2000. *Arquitectura gótica valenciana*. Valencia: Generalitat Valenciana.
- 11/ ZARAGOZÁ, A., 1992. El arte del corte de piedras en la arquitectura valenciana del cuatrocientos. Francesc Baldomar y el inicio de la estereotomía moderna. *Primer Congreso de Historia del Arte Valenciano*. Valencia: Generalitat Valenciana, pp. 97-104.