

RECONSTRUCCIÓN DIGITAL DEL DESAPARECIDO TORNAVOZ DE GAUDÍ DE LA CATEDRAL DE MALLORCA

DIGITAL RECONSTRUCTION OF GAUDÍ'S LOST SOUNDING BOARD IN MALLORCA CATHEDRAL

Albert Samper Sosa; orcid: 0000-0002-4795-2127

David Moreno-García; orcid: 0000-0002-5322-8143

Blas Herrera Gómez; orcid: 0000-0003-2924-9195

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI DE TARRAGONA

doi: 10.4995/ega.2026.24620

En 1901, Antoni Gaudí recibió el encargo de restaurar los elementos litúrgicos de la Catedral de Mallorca. Entre sus aportaciones se encontraba el diseño de un característico tornavoz para el púlpito principal, compuesto por tres superficies de apariencia parabólica. Aunque declarado Monumento Histórico, el conjunto fue demolido en 1970, quedando únicamente un croquis de Le Corbusier y unas pocas fotografías históricas como testimonio. A partir de esta documentación limitada, este artículo presenta una reconstrucción digital y geométrica del tornavoz mediante un enfoque metodológico que combina geometría analítica y descriptiva con herramientas de modelado digital. El estudio se centra en reconstruir la lógica geométrica del diseño de Gaudí, en particular las superficies parabólicas, mediante un método de ajuste parabólico. Este proceso permite comprender

mejor la forma y las proporciones originales, a la vez que recupera un elemento perdido del legado arquitectónico de Gaudí a través de un esfuerzo riguroso y sistemático de reconstrucción.

PALABRAS CLAVE: ANTONI GAUDÍ; CATEDRAL DE MALLORCA; TORNAVOZ; PARABOLOIDE; RECUPERACIÓN DIGITAL; RECONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA

In 1901, Antoni Gaudí was commissioned to restore the liturgical elements of Mallorca Cathedral. Among his contributions was the design of a distinctive sounding board for the main pulpit, composed of three parabolic-looking surfaces. Although declared a Historic Monument, the structure was demolished in 1970, leaving only a sketch by

Le Corbusier and a few historic photographs as evidence. Based on this limited documentation, this paper presents a digital and geometrical reconstruction of the sounding board using a methodological approach that combines analytical and descriptive geometry with digital modelling tools. The study focuses on reconstructing the geometric logic behind Gaudí's design, particularly the parabolic surfaces, through a parabolic fitting method. This process enables a better understanding of the original form and proportions, while recovering a lost element of Gaudí's architectural legacy through a rigorous and systematic reconstruction effort.

KEYWORDS: ANTONI GAUDÍ; MALLORCA CATHEDRAL; SOUNDING BOARD; PARABOLOID; DIGITAL RECOVERY; GEOMETRICAL RECONSTRUCTION



1. Introducción

En 1901, el obispo Pere Joan Campins encargó a Antoni Gaudí la restauración y reforma de diversos elementos litúrgicos de la Catedral de Mallorca. El proyecto incluía el traslado del coro a la Capilla Real, la mejora de la acústica mediante un tornavoz en el púlpito mayor y una caja armónica bajo el presbiterio, así como el diseño de nuevos elementos arquitectónicos y decorativos. Entre los más destacados figuran el baldaquino, la reja del presbiterio, la iluminación de la nave y del presbiterio, una catenaria de lámparas ante la Capilla Real, las vidrieras, la escalinata del altar, la ornamentación del coro y la tumba de los Reyes de Mallorca. En estos trabajos participaron también colaboradores habituales de Gaudí, entre ellos Joan Rubió y Josep Maria Jujol (Cantarellas, 2013).

Las obras se iniciaron en junio de 1904 y en diciembre ya se había completado la fase inaugural, en la que destacó el tornavoz del púlpito mayor, de diseño inconfundible gaudiniano (Fig. 1). Tal como señaló Sagristá (1962), la estructura combinaba madera y tejido, se adaptaba a la geometría octogonal del púlpito y se coronaba con tres superficies de aspecto parabólico (en adelante, S_A , S_B y S_C) concebidas para potenciar la resonancia de la voz. Diseñado para amplificar y dirigir la voz del orador, el tornavoz aprovechaba las propiedades acústicas de las superficies cuadráticas, ampliamente utilizadas en arquitectura para concentrar y distribuir el sonido (González, Samper y Herrera, 2021; Vercammen, 2012).

Pese a su declaración como Monumento Histórico, el tornavoz fue demolido en noviembre de 1970, a raíz de un dictamen de 1968 de la Comisión Provincial de Monumentos (Boletín de la Sociedad Arqueológica Luliana, vol. XXIII, núms. 808-809, p. 69). La Comisión alegó que «carecía de valor artístico» y que había quedado obsoleto con la incorporación de altavoces modernos.

La pérdida patrimonial fue irreparable, pues no se conservaba documentación descriptiva o geométrica original precisa que aclarara su forma exacta. La única evidencia disponible consiste en un croquis de 1932 realizado por Le Corbusier (Jaume et al., 2009; Alomar, 1987) y varias fotografías históricas. En 2010, los arquitectos José Antonio Martínez-Lapeña y Elías Torres utilizaron estos documentos para reconstruir el tornavoz de Gaudí en un homenaje promovido por el Govern Balear. La pieza, elaborada en madera y poliestireno expandido, se definió visualmente a partir de las fotografías históricas (véase Fig. 1) y permaneció instalada durante tres años antes de ser retirada.

Tras abordar la complejidad histórica del tornavoz, se consideró pertinente acometer este estudio con el foco puesto en su reconstrucción digital. El análisis busca identificar una superficie parabólica, designada como P_S (que, como se mostrará más adelante, es un paraboloide elíptico). Dicha superficie queda determinada por la concurrencia geométrica de las tres superficies que componían el tornavoz, S_A , S_B y S_C ; es decir, P_S queda fijada simultáneamente por estas tres superficies. El paso siguiente consiste en determinar la posición relativa de S respecto de cada una de estas superficies, generando así tres paraboloides — P_A , P_B , P_C —, uno asociado a cada superficie.

Introduction

In 1901, Bishop Pere Joan Campins commissioned Antoni Gaudí to restore and reform several liturgical elements of Mallorca Cathedral. The project included relocating the choir to the Royal Chapel, improving acoustics with a sounding board on the main pulpit and a harmonic box under the presbytery, and designing new architectural and decorative features. Notable among these are the baldachin, main altar rostrum, presbytery grating, lighting in nave and presbytery, a catenary of lamps before the Royal Chapel, stained glass windows, altar staircase, conopeo and tintinabulum, choir ornamentation, and the tomb of the Kings of Mallorca. Gaudí's regular collaborators, including Joan Rubió and Josep Maria Jujol, also participated (Cantarellas 2013).

The works commenced in June 1904 and by December the inaugural phase was completed, featuring Gaudí's distinctively designed sounding board for the main pulpit (Fig. 1). As noted by Sagristá (1962), the structure combined wood and fabric, was shaped to respect the octagonal pulpit and crowned with three parabolic-looking surfaces (S_A , S_B and S_C) intended to enhance voice resonance. Designed to amplify and direct the speaker's voice, the sounding board drew on the acoustic properties of quadratic surfaces widely used in architecture for concentrating and distributing sound (González, Samper and Herrera 2021; Vercammen, 2012).

Despite its Historical Monument status, the sounding board was demolished in November 1970 following a 1968 statement by the Provincial Monuments Commission (Bulletin of the Luliana Archaeological Society, vol. XXIII, nos. 808-809, p. 69). The Commission claimed it "lacked artistic value" and had been rendered obsolete by modern loudspeakers.

The loss of this heritage was irreparable, with no precise original descriptive or geometric documentation to clarify the sounding board's exact form. The only evidence consists of a 1932 sketch by Le Corbusier (Jaume et al. 2009; Alomar 1987) and several historical photographs. In 2010, architects José Antonio Martínez-Lapeña and Elías Torres used these documents to reconstruct Gaudí's sounding board in a tribute promoted by the Balearic Government. Built from wood and expanded



Figura 1. Conjunto de fotografías históricas recopiladas para el estudio. Las fotografías 2 y 8 muestran las superficies de apariencia parabólica S_A , S_B y S_C .

Figure 1. Set of historical photographs compiled for the study. Photographs 2 and 8 show the parabolic-looking surfaces S_A , S_B and S_C .





Figura 2. Nube de puntos completa de la Catedral de Mallorca mostrando el sistema de referencia R , que define las coordenadas (x, y, z) empleadas en este trabajo, y el púlpito mayor resaltado en rojo. Imagen de los autores.

Figure 2. Complete point cloud of Mallorca Cathedral showing the reference system R , which defines the (x, y, z) coordinates used in this paper, and the main pulpit highlighted in red. Figure by the authors.

En este trabajo, al conjunto de las tres superficies S_A , S_B y S_C nos referiremos globalmente como $S_{(A,B,C)}$, y a sus paraboloides correspondientes como $P_{(A,B,C)}$. Los objetivos se abordan a partir del análisis de documentación gráfica limitada mediante un enfoque riguroso que combina geometría analítica y descriptiva con herramientas digitales avanzadas.

2. Metodología

Este apartado se estructura en cuatro subsecciones que detallan el proceso de reconstrucción digital y geométrica del tornavoz: digitalización del escenario de estudio para garantizar una representación precisa de las condiciones originales; selección y descarte de fotografías F_i ($i = 1, \dots, 10$) que no cumplen con los criterios óptimos de calidad para el análisis; determinación de paraboloides $P_{(A_i,B_i,C_i)}$ de regresión a partir de cada perspectiva fotográfica (S_{A_i} , S_{B_i} y S_{C_i}); y definición de la superficie parabólica P_S a partir de los datos procesados. Como se indicó en la introducción, P_S es un paraboloides elíptico determinado por la concurrencia geométrica de las tres superficies de $S_{(A,B,C)}$.

2.1. Descripción gráfica de la catedral y del púlpito mayor

Para llevar a cabo esta investigación se generó un modelo digital de alta precisión del conjunto catedralicio y del púlpito mayor en su estado actual. El modelo de la catedral se obtuvo mediante la digitalización de todos los espacios interiores y exteriores accesibles con un escáner láser Leica RTC 360, produciendo 1.250 escaneos y una nube de puntos de alta densidad de unos 21 millones de puntos (Fig. 2). El modelo del púlpito combinó técnicas

polystyrene, the design was visually derived from historical photographs (see Fig. 1). The piece remained in place for three years before its destruction.

Following an analysis of the historical intricacies of the sounding board it was deemed pertinent to conduct this study, with a focus on the digital reconstruction of the structure. The subsequent analysis will seek to identify a parabolic surface, designated P_S , which, as will be elucidated subsequently, is an elliptical paraboloid. This surface is determined by the concurrent geometric interaction of the three surfaces constituting the sounding board, S_A , S_B and S_C ; i.e. P_S is determined by the three surfaces simultaneously. The subsequent step involves the determination of the positioning of P_S relative to each of these three surfaces, thereby generating three paraboloids P_A , P_B , P_C one for each surface.

In this paper, the set of the three surfaces S_A , S_B and S_C are denoted as $S_{(A,B,C)}$ and their corresponding paraboloids as $P_{(A,B,C)}$. The objectives are pursued through analysis of limited graphic documentation using a rigorous approach combining analytical and descriptive geometry with advanced digital tools.

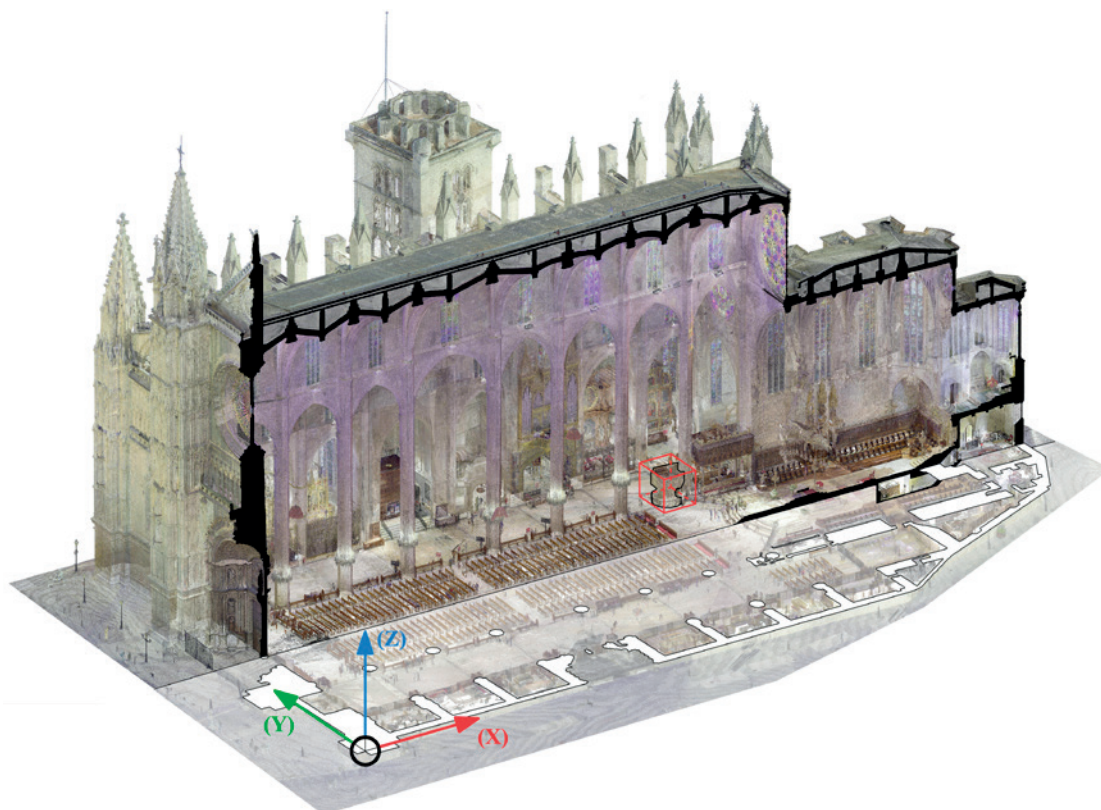




Figura 3. Proyecciones ortogonales de los componentes del púlpito mayor a partir de fotogrametría y escaneado láser, con el ortoedro envolvente mostrado en rojo. Imagen de los autores.

Figura 4. Vista axonométrica del púlpito mayor: a) modelo texturizado; b) modelo CAD; c) comparación geométrica. La barra de color (m) muestra diferencias entre modelos CAD y fotogramétrico. Imagen de los autores.

Figure 3. Orthogonal projections of the main pulpit components from photogrammetry and laser scanning, with the enclosing orthohedron shown in red. Figure by the authors.
Figure 4. Axonometric view of the main pulpit: a) textured model; b) CAD model; c) geometric comparison. The colour bar (m) shows differences between CAD and photogrammetric models. Figure by the authors.

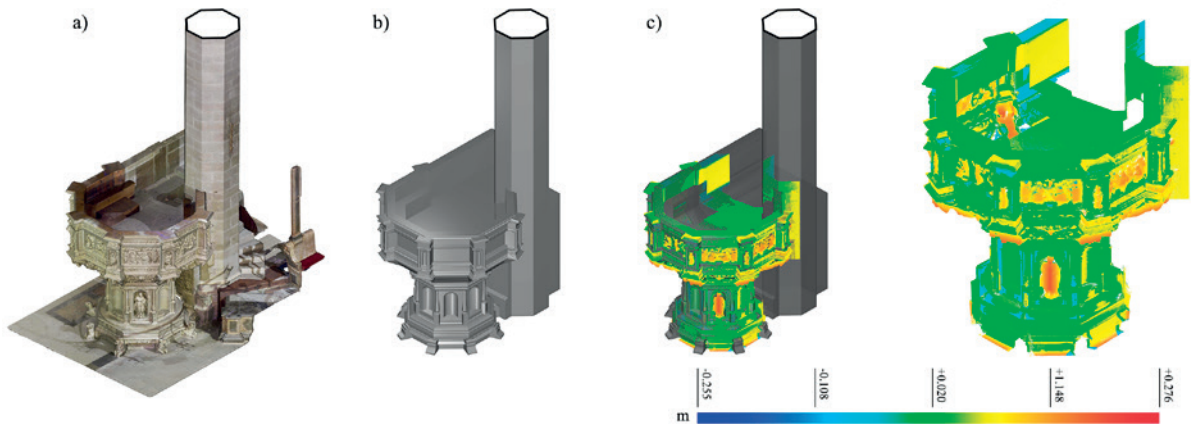
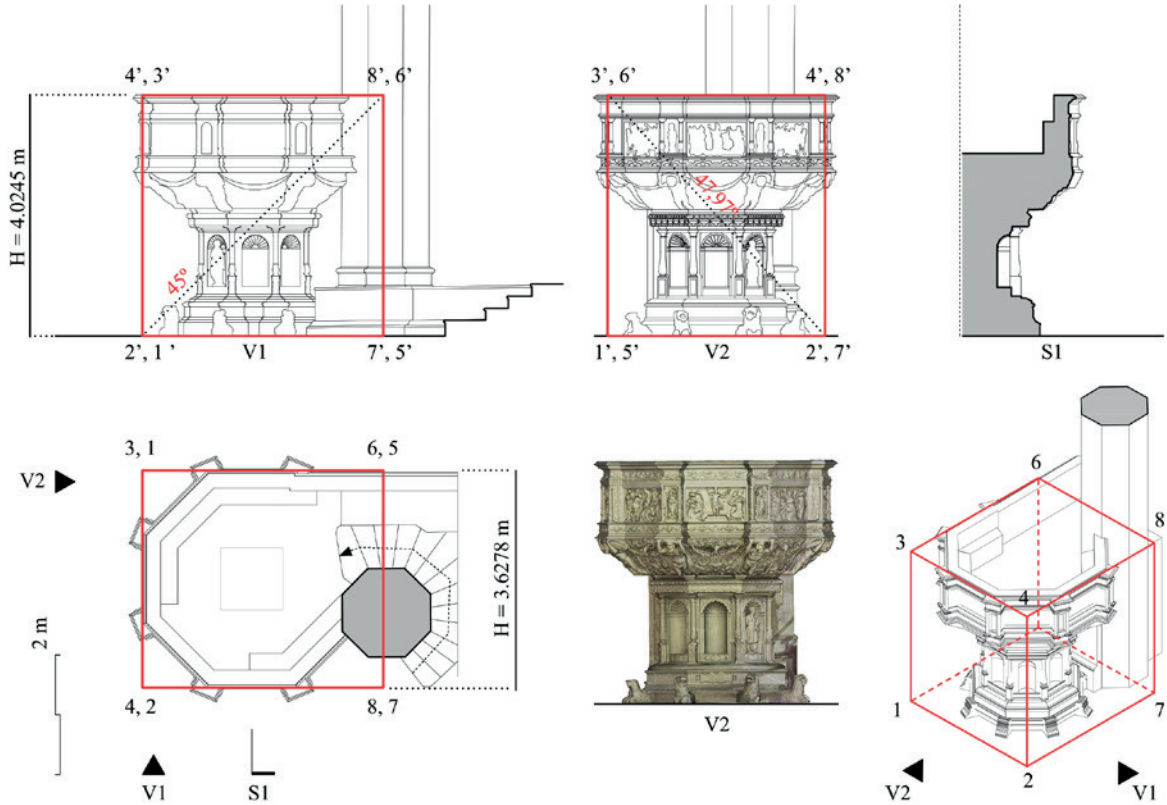




Tabla 1. Fotografías históricas utilizadas en este estudio, procedentes del Archivo Oficial de la Catedral de Mallorca, el Archivo del Colegio de Arquitectos de Baleares (COAIB) y el Centre Excursionista de Catalunya (CEC).

Table 1. Historical photographs for this study were supplied by the Official Archive of Mallorca Cathedral, the Archives of the Architects' Association of the Balearic Islands (COAIB) and the Catalan Hiking Club (CEC).

fotogramétricas con el software RealityCapture y un levantamiento detallado con el mismo escáner láser (Figs. 3 y 4).

Para garantizar un control gráfico preciso y facilitar la integración de los datos numéricos en los planos, se elaboró una planta vectorial CAD de la catedral con un margen de error de ± 2 mm. El púlpito mayor también fue modelado en 3D en CAD con un 95% de exactitud, y se generaron sus vistas diédrico-ortogonales (Figs. 3 y 4).

2.2. Selección objetiva de fotografías

Las fotografías históricas muestran que el tornavoz estaba compuesto por tres superficies de aspecto parabólico alineadas con los dos ejes principales de la catedral: S_A orientada hacia la nave lateral, S_B hacia la fachada principal y S_C hacia la nave central (Fig. 1). Se sustentaban en un pilar de sección cuadrada de unos 104 cm de lado, cuyos apoyos aún se conservan en el nivel superior del púlpito mayor.

Pese a la limitada información disponible, es fundamental establecer un criterio objetivo para elegir las fotografías adecuadas para definir la superficie parabólica P_S . Este criterio de elección es importante para el siguiente paso del estudio, que consiste, tal como explicaremos más adelante, en generar unas superficies parabólicas, que son paraboloides elípticos, de regresión (P_{A_i} , P_{B_i} y P_{C_i}), las cuales se obtienen a partir de las fotografías de cada superficie de $S_{(A,B,C)}$ de aspecto parabólico del tornavoz, identificada ella en las fotografías numeradas del 1 a 10 de la Figura 1. O sea, que el subíndice i indica la fotografía F_i , mientras que el subíndice A, B o C, indica la superficie de aspecto parabólico fotografiada del tornavoz. En este artículo llamaremos $P_{(A_i,B_i,C_i)}$ al conjunto de tales paraboloides. Por ejemplo, en la fotografía F_2 se observan las dos superficies de aspecto parabólico S_A y S_B , llamaremos S_{A2} y S_{B2} a estas dos visualizaciones fotográficas. Y, como veremos más adelante, vamos a generar dos nubes de puntos con esta fotografía F_2 , para luego además generar por regresión los paraboloides elípticos que llamaremos P_{A2} y P_{B2} . Mientras que, por ejemplo, en la fotografía F_8 aparecen las dos superficies S_B y S_C , llamaremos S_{B8} y S_{C8} a estas dos visualizaciones fotográficas. Y vamos a generar con esta fotografía F_8 dos nubes de puntos, para luego además generar por regresión los paraboloides elípticos P_{B8} y P_{C8} (Figura 1), esto quedará explicado en la sección 2.3.

F_i	Fuente o Autor Source	Año Year	Dimensiones Dimensions	Resolución Resolution	Tamaño Size	Tipo Type
1	CEC	1920	643x506 px	72 ppp	145 Kb	JPG
2	CEC	1920	1035x1618 px	96 ppp	405 Kb	JPEG
3	CEC	1912	758x1000 px	96 ppp	79 Kb	JPG
4	CEC	1940	446x709 px	96 ppp	258 Kb	JPG
5	COAIB	Sin fuente Unknown	1040x1366 px	150 ppp	227 Kb	JPG
6	COAIB	Sin fuente Unknown	1035x1392 px	72 ppp	207 Kb	JPG

Tabla 1

2. Methods

This section comprises four subsections detailing the process of digital and geometrical reconstruction of the sounding board: digitising the study scenario to ensure an accurate representation of the original conditions; selecting and discarding photographs F_i ($i = 1, \dots, 10$) according to quality criteria; determining regression paraboloids $P_{(A_i,B_i,C_i)}$ from each photographic perspective S_{A_i} , S_{B_i} and S_{C_i} ; and defining the parabolic surface P_S from the processed data. As noted above, P_S is an elliptic paraboloid determined by the geometric concurrence of the three surfaces in $S_{(A,B,C)}$.

2.1 Graphic description of the cathedral and the main pupil

To conduct this research, we generated a highly accurate digital model of the cathedral complex and the main pulpit in their current state. The cathedral model was obtained by digitising all accessible interior and exterior spaces with a Leica RTC 360 laser scanner, producing 1,250 scans and a high-density point cloud of about 21 million points (Fig. 2). The pulpit model combined photogrammetric techniques with RealityCapture software and a detailed laser survey using the same scanner (Figs. 3 and 4).

To ensure precise graphic control and streamline integration of numerical data into the plans, a CAD vector ground plan of the cathedral was produced with a ± 2 mm margin of error. The main pulpit was also 3D-modelled in CAD with 95% accuracy, and its dihedral views were generated (Figs. 3 and 4).

2.2. Objective choice of photographs

Historical photographs show the sounding board comprised three parabolic-like surfaces aligned with the cathedral's two main axes: S_A facing the aisle, S_B the main façade, and S_C the central nave (Fig. 1). They were supported by a square-section pillar about 104 cm per side, whose support marks remain on the upper level of the main pulpit.

Despite the limited information available, it is essential to establish an objective criterion for selecting the photographs used to define the parabolic surface P_S . This selection criterion is pivotal for the subsequent phase of the study, which involves the generation of parabolic surfaces (P_{A_i} , P_{B_i} and P_{C_i}) through regression



analysis. These surfaces are elliptical paraboloids derived from photographs of each surface in $S_{[A,B,C]}$ as depicted in photographs numbered from 1 to 10 in Figure 1. The subscript i indicates the photograph F_i , while the subscripts A, B or C indicate the photographed parabolic-looking surface of the sounding board. In this paper, $P_{[A_i,B_i,C_i]}$ denotes the set of such paraboloids. For instance, the photograph F_2 shows the two surfaces S_A and S_B . These two photographic perspectives are denoted S_{A2} and S_{B2} . As will be elucidated in later sections, two point clouds will be generated with this photograph F_2 , and then the elliptical paraboloids P_{A2} and P_{B2} will be generated by regression. Similarly, photograph F_8 shows the surfaces S_B and S_C . These two photographic perspectives are denoted S_{B8} and S_{C8} . The generation of two point clouds from photograph F_8 , followed by the generation of the elliptic paraboloids P_{B8} and P_{C8} by means of regression (Fig. 1), is outlined in Section 2.3. To select the photographs, their graphic properties (Table 1) were assessed, and two geometric procedures were applied to locate the photographer on the cathedral floor plan: an analytical method (P_{ia}) and a synthetic method (P_{is}).

The analytical method is based on a combination of concepts from analytical and projective geometry. For further technical and numerical details, the reader can refer to the references (Grañó, Llona, and Suau 1997; González, Homs y Solsona 1997). This paragraph only provides a brief summary of the procedure. So, starting from the given i -th photograph F_i , the necessary computational steps are as follows: a) Locate 5 edges in the photograph, denoted A, B, C, D and E, which have the shape of a straight line and are perpendicular to the ground. b) Draw on the photograph the 5 straight lines that represent these 5 edges. These straight lines are also denoted A, B, C, D and E, and they do not have to be parallel when drawn on the photograph, as this depends on the inclination of the picture's projection plane. c) Draw any orientated line that intersects the 5 previous straight lines at 5 points, also denoted A, B, C, D and E. d) Calculate the cross-ratio $k_E = (A,B,C,D) = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}$ of the 4 points A, B, C and D, where the lengths of the segments (AC, BD, AD and BC) have the sign of each segment's orientation; and calculate the cross-ratio $k_D = (A,B,C,E) = \frac{AC \cdot BE}{AE \cdot BC}$ of the 4 points A, B, C and E,

7	COAIB	Sin fuente Unknown	1410x1051 px	72 ppp	219 Kb	JPG
8	Archivo Catedral Cathedral Archives	Sin fuente Unknown	1062x1388 px	150 ppp	4210 Kb	BMP
9	Archivo Catedral Cathedral Archives	1933	524x836 px	150 ppp	1250 Kb	BMP
10	Archivo Catedral Cathedral Archives	Sin fuente Unknown	730x500 px	96 ppp	120 Kb	JPEG

Para llevar a cabo la selección, se consideraron las propiedades gráficas de cada fotografía F_i (Tabla 1) y se definieron dos procedimientos geométricos para determinar la posición del fotógrafo en la planta de la catedral: un procedimiento analítico (posición P_{ia}) y un procedimiento sintético (posición P_{is}).

El método analítico consiste en la interrelación de varios conceptos de geometría analítica y proyectiva. Para profundizar en los detalles técnicos y numéricos el lector puede acudir a las referencias (Grañó, Llona, y Suau 1997; González, Homs y Solsona 1997); aquí en este párrafo sólo desgranaremos el proceso a modo de breve resumen. Entonces, partiendo de la fijada i -ésima fotografía F_i , los pasos de cálculos necesarios consisten en: a) Localizar en la fotografía 5 objetos, llamados A, B, C, D y E, con forma de línea recta que sean perpendiculares al suelo. b) Trazar sobre la fotografía las 5 líneas rectas que representan esos 5 objetos, llamemos a estas 5 rectas igualmente A, B, C, D y E respectivamente. Esas 5 rectas no tienen por qué ser paralelas cuando se trazan sobre la fotografía, pues eso depende de la inclinación del plano de cuadro de la fotografía. c) Trazar una recta orientada cualquiera que corte a las 5 rectas anteriores en 5 puntos que de nuevo llamaremos A, B, C, D y E. d) Calcular la cross-ratio $k_E = (A,B,C,D) = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}$ de los 4 puntos A, B, C y D, donde las longitudes de los segmentos, en la fracción, tienen el signo de la orientación; y calcular la cross-ratio $k_D = (A,B,C,E) = \frac{AC \cdot BE}{AE \cdot BC}$ de los 4 puntos A, B, C y E, ver Figura 5. e) Localizar sobre la planta, el suelo, los 5 puntos en los que intersecan las 5 rectas, llamaremos de igual manera a esos puntos A, B, C, D y E con los mismos nombres de las rectas correspondientes. f) Determinar, fijado un sistema de referencia cartesiano cualquiera sobre la planta, coordenadas de tales puntos $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$, $C = (x_c, y_c)$, $D = (x_d, y_d)$, $E = (x_e, y_e)$. g) Resolver el siguiente sistema [1] de dos ecuaciones analíticas de dos cónicas según el teorema de Chasles (Semple y Kneebone 1963, 129–154; Audin 2003, 181–245). h) Las cuatro soluciones del sistema anterior son: $(x_a, y_a) = A$, $(x_b, y_b) = B$, $(x_c, y_c) = C$ y $(x_p, y_p) = P$. Donde, finalmente, $P_{ia} = P$ es el punto desde el cual se ha hecho la fotografía F_i . Las coordenadas y posiciones de cada punto de vista calculado mediante este procedimiento se presentan en la Tabla 2 y en la Figura 7.

$$[1] \begin{cases} k_E = \frac{x_a y_c - x_c y_a + (y_a - y_c)x + (x_c - x_a)y}{x_b y_c - x_c y_b + (y_b - y_c)x + (x_c - x_b)y} * \frac{x_b y_d - x_d y_b + (y_b - y_d)x + (x_d - x_b)y}{x_a y_d - x_d y_a + (y_a - y_d)x + (x_d - x_a)y} \\ k_D = \frac{x_a y_c - x_c y_a + (y_a - y_c)x + (x_c - x_a)y}{x_b y_c - x_c y_b + (y_b - y_c)x + (x_c - x_b)y} * \frac{x_b y_e - x_e y_b + (y_b - y_e)x + (x_e - x_b)y}{x_a y_e - x_e y_a + (y_a - y_e)x + (x_e - x_a)y} \end{cases}$$



Tabla 2. Coordenadas de las posiciones de cada uno de los puntos de vista, obtenidas mediante los métodos analítico y sintético. En la primera columna, se destacan con un asterisco las cinco fotografías determinadas finalmente en la selección para el estudio geométrico.

5. A modo de ejemplo, esta imagen presenta la posición del punto de vista P_{2a} de la fotografía 2 aplicando el método analítico y el punto de vista P_{2s} aplicando el método sintético. Los siguientes puntos: $A(61.709, 48.523)$, $B(85.072, 40.638)$, $C(71.932, 39.698)$, $D(68.131, 40.620)$, $E(84.492, 21.571)$ se han relacionado tanto en la fotografía como en el dibujo en planta obtenido con el escáner láser. Las siguientes longitudes: $\overline{AB} = 4.537 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 18.158 \text{ cm}$, $\overline{CD} = 5.635 \text{ cm}$, $\overline{DE} = 10.396 \text{ cm}$ se han medido directamente de la fotografía. Imagen de los autores.

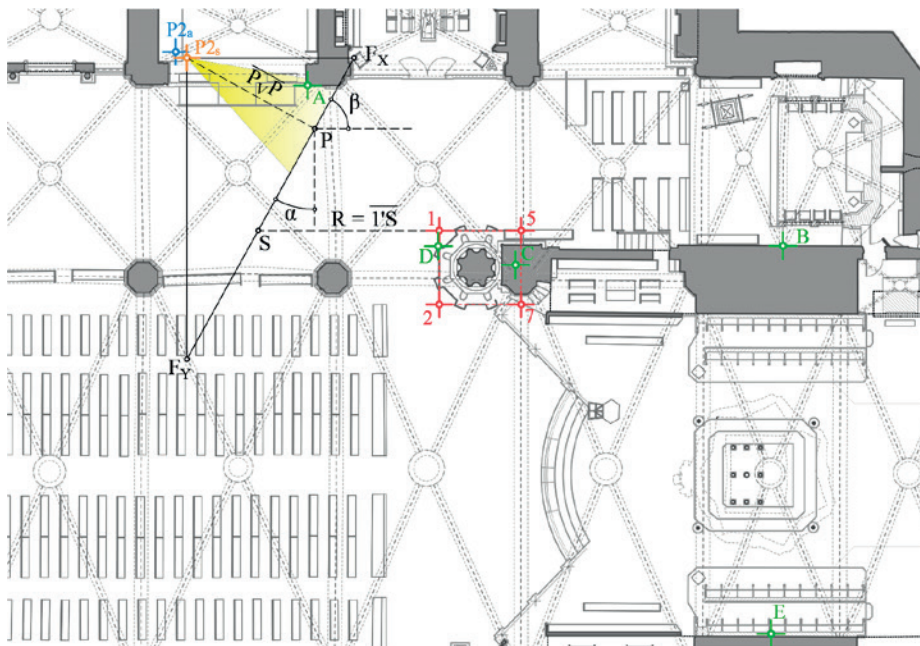
Table 2. Photographer coordinates from the analytical and synthetic method; the five photos used for the geometric study are marked with an asterisk in the first column.

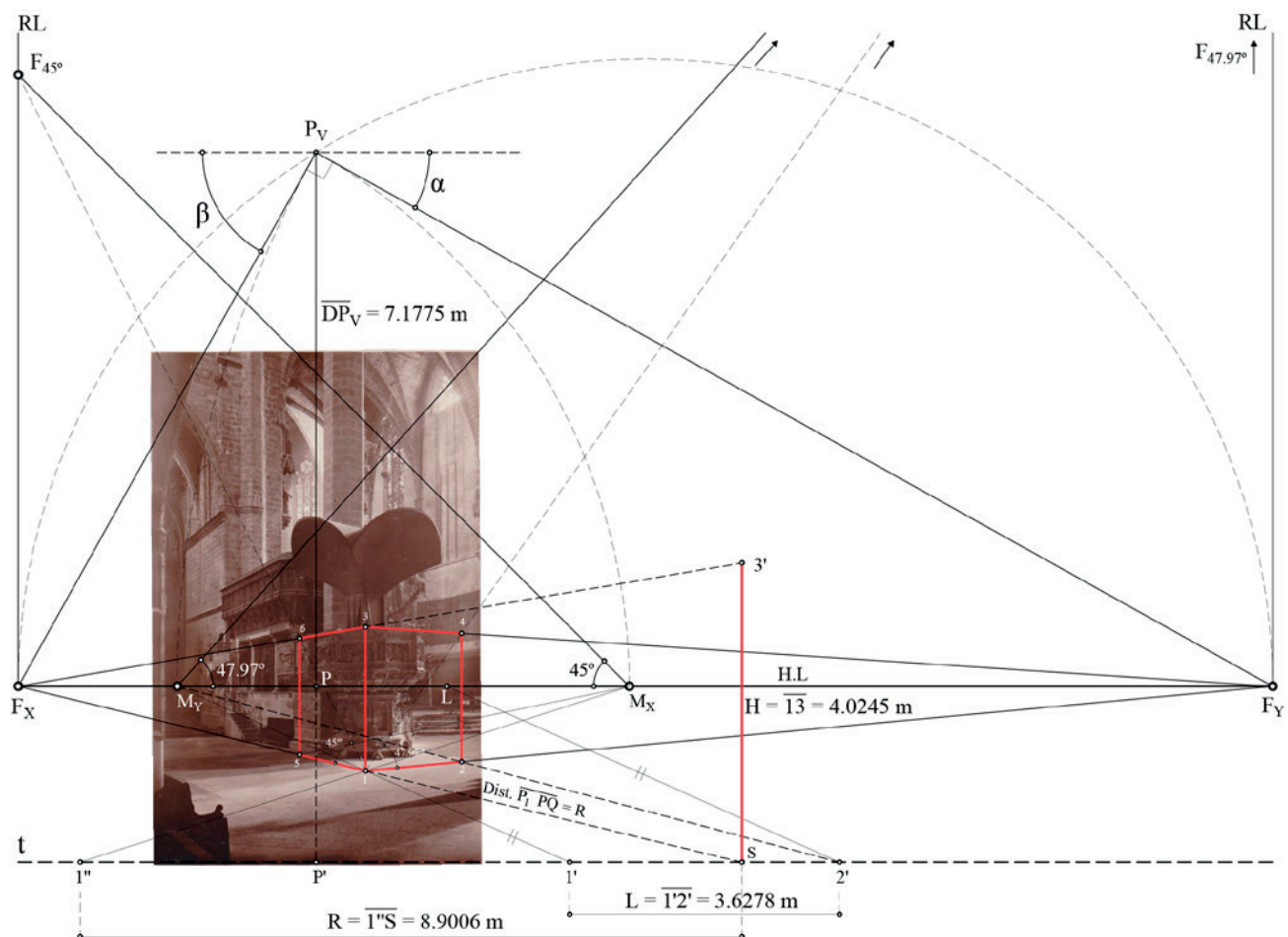
5. As an example, this figure shows the photographer's positions P_{2a} and P_{2s} for photograph 2, determined using the analytical method and synthetic method. Points $A(61.709, 48.523)$, $B(85.072, 40.638)$, $C(71.932, 39.698)$, $D(68.131, 40.620)$ and $E(84.492, 21.571)$ appear in the laser-scanned plan, while lines A-E are visible in the photograph. The measured lengths are $\overline{AB} = 4.537 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 18.158 \text{ cm}$, $\overline{CD} = 5.635 \text{ cm}$ and $\overline{DE} = 10.396 \text{ cm}$. Figure by the authors.

F_i	P_{ia}	Posición (x, y) Position (x, y)	P_{is}	Posición (x, y) Position (x, y)	$d(P_{ia}, P_{is})$
1	P_{1a}	(45.96, 23.24)	P_{1s}	(42.68, 22.48)	3.36 m
2*	P_{2a}	(55.22, 50.16)	P_{2s}	(55.77, 49.87)	0.62 m
3	P_{3a}	(6.94, 20.20)	P_{3s}	(11.03, 20.10)	4.08 m
4*	P_{4a}	(79.63, 26.72)	P_{4s}	(79.14, 27.43)	0.86 m
5*	P_{5a}	(83.24, 44.42)	P_{5s}	(82.71, 45.17)	0.91 m
6	P_{6a}	(5.70, 16.35)	P_{6s}	(9.43, 16.70)	3.74 m
7	P_{7a}	(76.70, 23.61)	P_{7s}	(76.39, 22.24)	1.40 m
8*	P_{8a}	(65.61, 24.36)	P_{8s}	(66.21, 23.69)	0.90 m
9*	P_{9a}	(59.54, 30.27)	P_{9s}	(59.78, 29.68)	0.63 m
10	P_{10a}	(68.66, 22.80)	P_{10s}	(68.81, 19.80)	3.01 m

Tabla 2

El método sintético se fundamenta en los procedimientos clásicos de la geometría descriptiva para realizar una restitución fotográfica (Izquierdo 1974). A través de la determinación gráfica de los principales parámetros de la perspectiva sobre las respectivas fotografías F_i , tales como los puntos de fuga, la línea del horizonte, la línea de tierra, los puntos métricos, el eje óptico y su punto principal, se obtiene la posición del punto de vista P_{is} , como en el ejemplo de la Figura 5 y 6. Para aplicar este método, se utilizaron las dimensiones reales del prisma envolvente del púlpito mayor, fijando sus ocho vértices (V_1 - V_8), previamente determinados en el levantamiento tridimensional descrito en el apartado anterior. Las coordenadas y posiciones de cada punto de vista calculado mediante este procedimiento se presentan en la Tabla 2 y en la Figura 7.





6



7



6. Como ejemplo, esta imagen ilustra el proceso sintético para la determinación del punto de vista P_{2s} a partir de la fotografía 2. En la Figura 5 se muestran algunos de los parámetros obtenidos durante este proceso. Imagen de los autores.
7. Posición en planta de todos los puntos de vista, determinados mediante los métodos analítico y sintético, para las diez fotografías. La figura muestra, como en la Figura 2, la posición del sistema de referencia R . Imagen de los autores.

6. As an example, this figure illustrates the synthetic process for determining the photographer's position P_{2s} based on photograph 2. Figure 5 shows some of the parameters obtained in this process. Figure by the authors.
7. Plan view of all photographer positions for the ten photos from the analytical and synthetic methods, showing reference system R as in Fig. 2. Figure by the authors.

Tras aplicar los dos procesos geométricos a todas las fotografías, se presentan los resultados en la Tabla 2. Estos resultados se requieren para definir un criterio objetivo, en el que implícitamente interviene la resolución gráfica de las imágenes fotográficas, que permite seleccionar las fotografías más adecuadas para su uso en el siguiente subapartado de la metodología. El criterio de selección se basa en elegir aquellas imágenes cuyos puntos de vista, P_{ia} y P_{is} , presenten una distancia, entre ellos dos, inferior a 1 metro, lo que equivale a menos del 1% de la longitud total de la edificación. En resumen, el criterio objetivo que hemos puesto en práctica arroja que las fotografías adecuadas para la recuperación de las superficies son las señaladas con un asterisco en la Tabla 2.

2.3. Determinación de los paraboloides de regresión de $P_{(Ai,Bi,Ci)}$

Este apartado describe el procedimiento geométrico utilizado para determinar el paraboloide de regresión de $P_{(Ai,Bi,Ci)}$ correspondiente a cada visualización S_{A_i} , S_{B_i} o S_{C_i} que generaremos para cada superficie S_{A^*} , S_{B^*} o S_{C^*} identificada en las fotografías F_i seleccionadas en el apartado anterior. Recordamos que i representa el número de la fotografía en la que aparece cada superficie. En las cinco fotografías elegidas por el método del apartado anterior ($i = 2, 4, 5, 8$ y 9): se identifica la superficie S_A en las fotografías F_2 y F_5 , así que vamos a llamar a estas dos visualizaciones fotográficas S_{A2} y S_{A5} respectivamente. Igualmente se identifica la superficie S_B en las fotografías F_2 , F_8 y F_9 , y vamos a llamar a estas tres visualizaciones fotográficas S_{B2} , S_{B8} , S_{B9} respectivamente. Y finalmente, se identifica la superficie S_C en las fotografías F_4 , F_8 y F_9 , y vamos a llamar a estas tres visualizaciones fotográficas S_{C4} , S_{C8} y S_{C9} respectivamente. De este modo las visualizaciones fotográficas quedarán definidas como: S_{A2} , S_{A5} , S_{B2} , S_{B8} , S_{B9} , S_{C4} , S_{C8} y S_{C9} . Denominaremos $S_{(Ai,Bi,Ci)}$ al conjunto completo de estas visualizaciones fotográficas.

El proceso se desarrolla en dos etapas principales: En la primera, se genera una nube de puntos N_{A_i} , N_{B_i} o N_{C_i} con la cual quedará determinada cada visualización fotográfica S_{A_i} , S_{B_i} o S_{C_i} , respectivamente. Llamaremos al conjunto de esas nubes de puntos $N_{(Ai,Bi,Ci)}$. Y en la segunda, y partir de cada nube de puntos de $N_{(Ai,Bi,Ci)}$, se calcula su correspondiente paraboloide de regresión P_{A_i} , P_{B_i} o P_{C_i} correspondiente.

Para determinar las nubes de puntos de $N_{(Ai,Bi,Ci)}$, se utiliza inicialmente la herramienta “Adaptar fotografía” del software SketchUp Pro 2023. Esta herramienta permite definir para cada una de las 8 visualizaciones de $S_{(Ai,Bi,Ci)}$ cinco curvas principales $C_{A2,j}$, $C_{A5,j}$, $C_{B2,j}$, $C_{B8,j}$, $C_{B9,j}$, $C_{C4,j}$, $C_{C8,j}$ y $C_{C9,j}$, con j de 1 a 5, que la delimitan. Llamaremos $C_{(Aij,Bij,Cij)}$ a este conjunto de 40 curvas. Para cada fotografía F_i , se ajustan las direcciones de las líneas de fuga, la posición de la línea de horizonte y la ubicación de los ejes de coordenadas. Posteriormente, se alinea el modelo tridimensional del púlpito con la fotografía y se escala todo el conjunto tomando como referencia una de sus dimensiones reales.

Esta configuración permite identificar, para cada visualización de $S_{(Ai,Bi,Ci)}$, sus cinco respectivas curvas de $C_{(Aij,Bij,Cij)}$: cuatro perimetrales y una central. A cada curva central la llamaremos C_{A2c} , C_{A5c} y C_{B2c} , C_{B8c} , C_{B9c} , C_{C4c} , C_{C8c} y

see Figure 5. e) Find the 5 points on the floor plan where the 5 straight lines intersect. These points are also denoted A, B, C, D and E, i.e. the same names as the corresponding straight lines. f) Using any Cartesian reference system on the Cathedral's floor plan, find the coordinates of these points $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$, $C = (x_c, y_c)$, $D = (x_d, y_d)$, $E = (x_e, y_e)$. g) Solve the following system [1] of two analytical equations, each determining a conic according to Chasles' theorem (Semple y Kneebone 1963, 129–154; Audin 2003, 181–245). h) The four solutions to this system are: $(x_a, y_a) = A$, $(x_b, y_b) = B$, $(x_c, y_c) = C$ and $(x_d, y_d) = P$. Finally, $P_{ia} = P$ is the point from which the photograph F_i was taken. The coordinates and locations of each photographer's position calculated by this procedure are presented in Table 2 and Figure 7.

$$(1) \begin{cases} k_E = \frac{x_a y_c - x_c y_a + (y_a - y_c)x + (x_c - x_a)y}{x_b y_c - x_c y_b + (y_b - y_c)x + (x_c - x_b)y} = \frac{x_b y_d - x_d y_b + (y_b - y_d)x + (x_d - x_b)y}{x_a y_d - x_d y_a + (y_a - y_d)x + (x_d - x_a)y} \\ k_D = \frac{x_a y_c - x_c y_a + (y_a - y_c)x + (x_c - x_a)y}{x_b y_c - x_c y_b + (y_b - y_c)x + (x_c - x_b)y} = \frac{x_b y_e - x_e y_b + (y_b - y_e)x + (x_e - x_b)y}{x_a y_e - x_e y_a + (y_a - y_e)x + (x_e - x_a)y} \end{cases}$$

The synthetic method is based on the classical procedures of descriptive geometry to carry out a photographic restitution (Izquierdo 1974). The photographer's position P_{is} is obtained by graphically determining the main perspective parameters on the respective photographs F_i , such as vanishing points, horizon line, ground line, metric points, optical axis and its main point (see example in Figs. 5 and 6). This method utilises the real dimensions of the prism enclosing the main pulpit, and the positions of the eight vertices of this prism ($V_1 - V_8$), as determined in the three-dimensional survey described in the previous section. The coordinates and locations of each photographer's position calculated by this procedure are presented in Table 2 and Figure 7.

After applying the two geometric methods to all the photographs, the results are shown in Table 2. These results are needed to define an objective criterion which implicitly takes into account the graphic resolution of the photographs. This objective criterion will allow the most suitable photographs to be selected for use in the following part of the method. The selection criterion is to select those images whose photographer's positions (P_{ia} and P_{is}) are less than 1 metre apart, which is less than 1% of the total length of the building. In summary, the objective criterion we have used shows that the photographs which are suitable for

surface reconstruction are those marked with an asterisk in Table 2.

2.3. Determination of the regression paraboloids of $P_{(Ai,Bi,Ci)}$

This section describes the geometric procedure used to determine the regression paraboloid of $P_{(Ai,Bi,Ci)}$ corresponding to each photographic perspective $S_{A'}$, $S_{B'}$ or $S_{C'}$ that will be generated for each of the surfaces $S_{A'}$, $S_{B'}$ or $S_{C'}$ identified in the previously selected photographs F_i . Remember that i represents the number of the photograph in which each surface appears. In the five photographs selected by the method described in the previous section ($i = 2, 4, 5, 8$ and 9), the surface S_A is identified in photographs F_2 and F_5 . Therefore, these two photographic perspectives will be denoted as S_{A2} and S_{A5} , respectively. Similarly, the surface S_B is identified in photographs F_2 , F_8 and F_9 . Therefore, these three photographic perspectives will be denoted as S_{B2} , S_{B8} , S_{B9} , respectively. Finally, the surface S_C is identified in the photographs F_4 , F_8 and F_9 . Therefore, these three photographic perspectives will be denoted as S_{C4} , S_{C8} and S_{C9} , respectively. Thus, the photographic perspectives are defined as: S_{A2} , S_{A5} , S_{B2} , S_{B8} , S_{B9} , S_{C4} , S_{C8} and S_{C9} . The complete set of these photographic perspectives will be denoted as $S_{(Ai,Bi,Ci)}$.

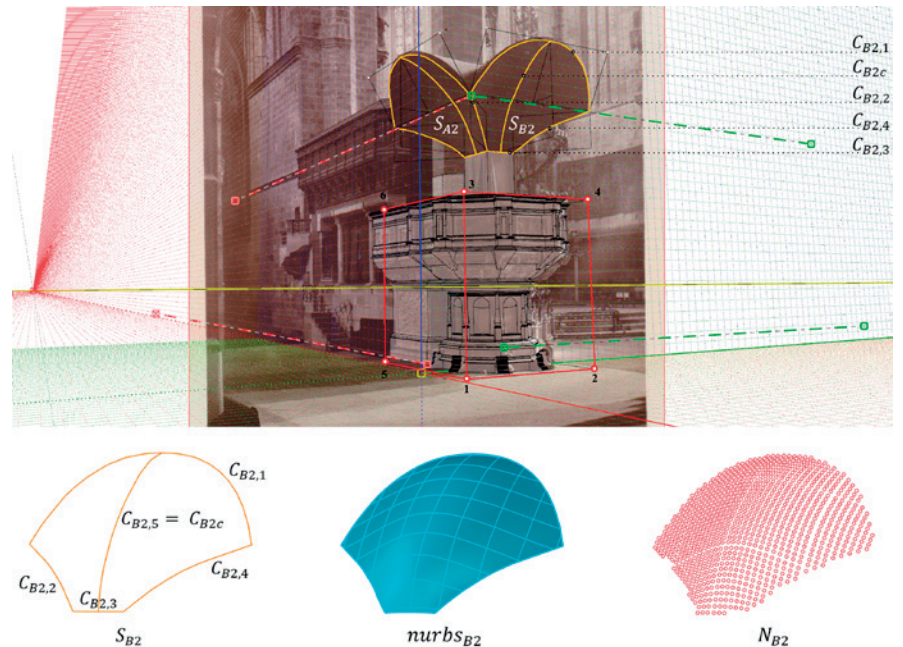
The process involves two main steps: First, for each photographic perspective (S_{A2} , S_{A5} , S_{B2} , S_{B8} , S_{B9} , S_{C4} , S_{C8} and S_{C9}) a point cloud (N_{A2} , N_{A5} , N_{B2} , N_{B8} , N_{B9} , N_{C4} , N_{C8} and N_{C9}) is generated. Hereinafter, the set of these point clouds will be denoted as $N_{(Ai,Bi,Ci)}$. In the second part of the process, for each point cloud in $N_{(Ai,Bi,Ci)}$ the corresponding regression paraboloid (P_{A2} , P_{A5} , P_{B2} , P_{B8} , P_{B9} , P_{C4} , P_{C8} and P_{C9}) is calculated.

In order to generate the point clouds in $N_{(Ai,Bi,Ci)}$, the "Adapt Photograph" tool in the software SketchUp Pro 2023 is used. This tool allows us to define five main curves ($C_{A2,j}$, $C_{A5,j}$, $C_{B2,j}$, $C_{B8,j}$, $C_{B9,j}$, $C_{C4,j}$, $C_{C8,j}$ and $C_{C9,j}$ with j ranging from 1 to 5) which delimit each of the 8 photographic perspectives of $S_{(Ai,Bi,Ci)}$. Hereinafter, this set of 40 curves will be denoted as $C_{(Aij,Bij,Cij)}$. For each photograph F_i , the directions of the vanishing lines, the position of the horizon line and the position of the coordinate axes are adjusted. The three-dimensional model of the pulpit is

C_{C9c} , y llamaremos $C_{(Aic,Bic,Cic)}$ a este conjunto de 8 curvas centrales. A partir de cada conjunto de cinco curvas de $C_{(Aij,Bij,Cij)}$ correspondientes a cada visualización de $S_{(Ai,Bi,Ci)}$, se genera una superficie *nurbs*, que llamaremos *nurbs*_{A2}, *nurbs*_{A5}, *nurbs*_{B2}, *nurbs*_{B8}, *nurbs*_{B9}, *nurbs*_{C4}, *nurbs*_{C8} y *nurbs*_{C9}, respectivamente, mediante la herramienta "Superficie desde red de curvas" del software *Rhinoceros*. Llamaremos *nurbs*_(Ai,Bi,Ci) a este conjunto de 8 superficies. Finalmente, utilizando la herramienta "Cubrir objetos con rejilla de puntos", se obtienen las nubes de puntos N_{A2} , N_{A5} , N_{B2} , N_{B8} , N_{B9} , N_{C4} , N_{C8} y N_{C9} , respectivamente. Llamaremos $N_{(Ai,Bi,Ci)}$ a este conjunto de 8 nubes de puntos, con sus respectivas coordenadas en el espacio, en el sistema de referencia R .

Fijada inicialmente una de las 8 visualizaciones fotográficas de $S_{(Ai,Bi,Ci)}$, vamos a proceder al cálculo de la regresión para obtener su correspondiente paraboloide elíptico de $P_{(Ai,Bi,Ci)}$. El resumen del proceso numérico del cálculo de esa regresión es el siguiente: Primero tomaremos la nube de puntos definida por la curva central de $C_{(Aic,Bic,Cic)}$ correspondiente a la visualización fijada. Mediante regresión geométrica se obtendrá el plano de regresión de la mima, plano que se encuentra en el espacio tridimensional. Luego se proyectará esa nube ortogonalmente sobre ese plano, obteniéndose una nube a la que se le realizará una regresión geométrica para obtener una parábola que la aproxime. Se trata de una parábola localizada en el espacio tridimensional a la cual se le buscará su vértice V y su eje r . Seguidamente se procederá a hacer un cambio de coordenadas de todo el espacio tridimensional, desde el sistema R a un nuevo sistema ortonormal cartesiano R' . Este nuevo sistema R' es tal que tiene origen de coordenadas en el vértice V de la parábola y tiene eje z el eje r de la parábola.

A continuación, aplicamos el cambio de coordenadas a todos los puntos de la nube de $N_{(Ai,Bi,Ci)}$ correspondiente a la visualización fotográfica fijada.





8. Ejemplo gráfico aplicado a la fotografía 2 para la determinación de las nubes de puntos N_{A2} y N_{B2} . En particular, se muestra el proceso de obtención de la nube N_{B2} a partir de la $nurbs_{B2}$ y el conjunto de curvas C_{B2} . Imagen de los autores.

8. Determination of the point clouds N_{A2} and N_{B2} for photograph 2. In particular, this image illustrates the process of obtaining the cloud N_{B2} from $nurbs_{B2}$ and from the set of curves C_{B2} . Figure by the authors.

A partir de las nuevas coordenadas $\{(x_k, y_k, z_k)\} = \sum_{k=1}^n$ de la nube de puntos fijada de $N(A_i, B_i, C_i)$, se calcula su correspondiente paraboloides de regresión. El paraboloides de regresión lo llamaremos $P_{A2}, P_{A5}, P_{B2}, P_{B8}, P_{B9}, P_{C4}, P_{C8}$ y P_{C9} , según su correspondiente visualización $S_{A2}, S_{A5}, S_{B2}, S_{B8}, S_{B9}, S_{C4}, S_{C8}$ y S_{C9} , respectivamente. Llamaremos al conjunto de estos paraboloides $P_{(A_i, B_i, C_i)}$.

Para determinar el paraboloides de $P_{(A_i, B_i, C_i)}$ correspondiente a la visualización fijada inicialmente de $S_{(A_i, B_i, C_i)}$, consideramos una superficie Δ con la siguiente ecuación normalizada general, ecuación [2], en el sistema de referencia R' :

$$[2] \Delta \equiv 0 = Bx^2 + Cy^2 + Exy + Hx + Iy + Jz + 1$$

Esta superficie de regresión, Δ , cuya ecuación es la Ecuación [2] en el sistema de referencia R' , es aquella que mejor ajusta a la nube de puntos fijada de $N_{(A_i, B_i, C_i)}$, minimizando la suma de residuos cuadráticos $\sum_{k=1}^n \epsilon_k^2 = \sum_{k=1}^n (Bx_k^2 + Cy_k^2 + Ex_k y_k + Hx_k + Iy_k + Jz_k + 1)^2$. La ecuación [3] siguiente consiste en la ecuación normal de Gauss, la cual ofrece la solución al problema de cálculo de Δ . Esta ecuación varía en el rango de 1 a n según el convenio de la suma de Einstein cuando el índice k se repite, donde $1_k = 1$.

$$[3] \begin{pmatrix} 1_k x_k^4 & x_k^2 y_k^2 & x_k^3 y_k & x_k^3 & x_k^2 y_k & x_k^2 z_k \\ x_k^2 y_k^2 & 1_k y_k^4 & x_k y_k^3 & y_k^2 x_k & 1_k y_k^3 & y_k z_k \\ x_k^3 y_k & x_k y_k^3 & x_k^2 y_k^2 & x_k y_k & x_k y_k^2 & x_k y_k z_k \\ x_k^3 & y_k^2 x_k & x_k y_k & 1_k x_k^2 & x_k y_k & x_k z_k \\ x_k^2 y_k & 1_k y_k^3 & x_k y_k & x_k y_k & 1_k y_k^2 & y_k z_k \\ x_k^2 z_k & y_k z_k & x_k y_k z_k & x_k z_k & y_k z_k & 1_k z_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \\ E \\ H \\ I \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1_k x_k^2 \\ -1_k y_k^2 \\ -x_k y_k \\ -1_k x_k \\ -1_k y_k \\ -1_k z_k \end{pmatrix}$$

Una vez encontrada esta superficie Δ , le aplicamos el cambio inverso de coordenadas hacia el sistema de referencia R , y obtenemos el paraboloides elíptico de regresión de $P_{(A_i, B_i, C_i)}$ determinado por la visualización fijada de $S_{(A_i, B_i, C_i)}$.

La Figura 9 muestra en amarillo las ocho superficies de $nurbs_{(A_i, B_i, C_i)}$ y muestra en naranja cada una de las ocho superficies parabólicas de regresión de $P_{(A_i, B_i, C_i)}$ calculadas para cada visualización de $S_{(A_i, B_i, C_i)}$.

Ahora, con las ecuaciones obtenidas para cada paraboloides de $P_{(A_i, B_i, C_i)}$, procedemos al cálculo algebraico que nos ofrece las ecuaciones canónicas [4] de los ocho paraboloides de regresión. Estos datos se presentan en la Tabla 3.

$$[4] \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

then aligned with the photograph and all the items are scaled using one of the pulpit's real dimensions as a reference.

For each photographic perspective of $S_{(A_i, B_i, C_i)}$, this process makes it possible to identify its five curves in $C_{(A_i, B_i, C_i)}$ (four perimeter curves and one central curve). Each central curve will be denoted as C_{A2}, C_{A5} and $C_{B2}, C_{B8}, C_{B9}, C_{C4}, C_{C8}$ and the set of 8 central curves will be denoted as $C_{(A_i, B_i, C_i)}$. From each set of five curves in $C_{(A_i, B_i, C_i)}$ corresponding to each photographic perspective of $S_{(A_i, B_i, C_i)}$, a nurbs surface is generated using the tool "Surface from network of curves" in the software Rhinoceros. These nurbs surfaces will be denoted as $nurbs_{A2}, nurbs_{A5}, nurbs_{B2}, nurbs_{B8}, nurbs_{B9}, nurbs_{C4}, nurbs_{C8}$ and $nurbs_{C9}$, respectively. Hereinafter, this set of 8 surfaces will be denoted as $nurbs_{(A_i, B_i, C_i)}$. Finally, using the "Cover objects with points grid" tool, the point clouds $N_{A2}, N_{A5}, N_{B2}, N_{B8}, N_{B9}, N_{C4}, N_{C8}$ and N_{C9} are obtained. As an example, Figure 8 shows the process for the cloud N_{B2} . This set of 8 point clouds, with their respective coordinates in the reference system R , will be denoted as $N_{(A_i, B_i, C_i)}$.

Based on one of the eight photographic perspectives of $S_{(A_i, B_i, C_i)}$, we calculate its corresponding regression elliptic paraboloid (part of $P_{(A_i, B_i, C_i)}$). The process is as follows: the point cloud $C_{(A_i, B_i, C_i)}$ from the central curve of that perspective is used to obtain its regression plane by geometric regression. This plane, in three-dimensional space, receives the orthogonal projection of the cloud, which is then regressed to produce an approximating parabola. The vertex V and axis r of the parabola are determined, and the coordinates are transformed from system R to a new orthonormal Cartesian system R' , whose origin is V and whose z-axis coincides with r .

Next, the change in coordinates is applied to all the points of the cloud in $N_{(A_i, B_i, C_i)}$ which corresponds to that photographic perspective. Based on the new coordinates $\{(x_k, y_k, z_k)\} = \sum_{k=1}^n$ of this point cloud, its corresponding regression paraboloid is calculated. This regression paraboloid will be denoted as $P_{A2}, P_{A5}, P_{B2}, P_{B8}, P_{B9}, P_{C4}, P_{C8}$ or P_{C9} depending on its photographic perspective $S_{A2}, S_{A5}, S_{B2}, S_{B8}, S_{B9}, S_{C4}, S_{C8}$ or S_{C9} , respectively. Hereinafter, the set of these paraboloids will be denoted as $P_{(A_i, B_i, C_i)}$. In order to determine the paraboloid corresponding to the photographic perspective, a surface Δ is considered which has the

following general standard equation in the reference system R :

$$[2] \Delta \equiv 0 = Bx^2 + Cy^2 + Exy + Hx + Iy + Jz + 1$$

This regression surface Δ , whose equation is Equation [2] in the reference system R , is the one which best fits its point cloud in $N_{(Ai, Bi, Ci)}$ minimising the sum of the quadratic residues $\sum_{k=1}^{k=n} \epsilon_k^2 = \sum_{k=1}^{k=n} (Bx_k^2 + Cy_k^2 + Ex_ky_k + Hx_k + Iy_k + Jz_k + 1)^2$. Equation [3] below is the Gaussian normal equation that provides the solution to the calculation problem of . This equation has a range of variation from 1 to n in Einstein summation convention when the index k is repeated, where $1_k = 1$.

$$[3] \begin{pmatrix} 1_k x_k^4 & x_k^2 y_k^2 & x_k^3 y_k & x_k^2 & x_k^2 y_k & x_k^2 z_k \\ x_k^2 y_k^2 & 1_k y_k^4 & x_k y_k^3 & y_k^2 x_k & y_k^2 y_k & y_k^2 z_k \\ x_k^3 y_k & x_k y_k^3 & x_k^2 y_k^2 & x_k y_k & x_k y_k^2 & x_k y_k z_k \\ x_k^2 & y_k^2 & x_k y_k & 1_k x_k^2 & x_k y_k & x_k z_k \\ x_k^2 y_k & x_k y_k^2 & x_k^2 y_k & x_k y_k & 1_k y_k^2 & y_k z_k \\ x_k^2 z_k & y_k^2 z_k & x_k y_k z_k & x_k z_k & y_k z_k & 1_k z_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \\ E \\ H \\ I \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1_k x_k^3 \\ -1_k y_k^3 \\ -x_k y_k^2 \\ -1_k x_k^2 \\ -1_k y_k^2 \\ -1_k x_k z_k \end{pmatrix}$$

Once surface Δ is found, the inverse coordinate transformation to system R yields the elliptic regression paraboloid in $P_{(Ai, Bi, Ci)}$ corresponding to each photographic perspective. Figure 9 shows in yellow the eight *nurbs* $_{(Ai, Bi, Ci)}$ surfaces and in orange the eight elliptic paraboloids calculated for $S_{(Ai, Bi, Ci)}$. Using the eight equations of $P_{(Ai, Bi, Ci)}$ an algebraic calculation produces their canonical forms [4], listed in Table 3.

$$[4] \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

2.4. Determination of the representative paraboloid P_s

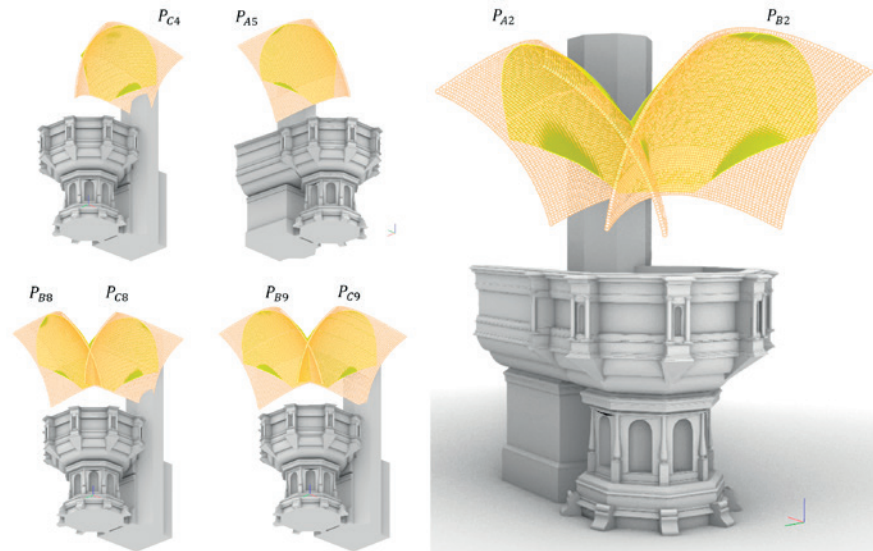
As already mentioned in the introduction, the next step is to find a parabolic surface PS (an elliptical paraboloid) which is determined by the geometric concurrence of the three surfaces S_A , S_B and S_C that made up the sounding board, i.e. P_s is a parabolic surface which is determined by the three surfaces simultaneously.

To do this, the paraboloid selected as P_s must be one of the eight paraboloids in $P_{(Ai, Bi, Ci)}$ precisely the one which is representative of the set of eight paraboloids.

In order to select the representative paraboloid P_s , it is first necessary to determine a parabolic reference surface, denoted as P_{Gaudi} which synthesises the characteristics of the eight regression paraboloids in $P_{(Ai, Bi, Ci)}$. Then,

$P_{(Ai, Bi, Ci)}$	a^2	b^2	d
P_{A2}	3.326	2.047	0.350
P_{B2}	3.217	1.722	0.345
P_{C4}	2.250	1.969	0.732
P_{A5}	3.877	2.399	0.989
P_{B8}	3.165	1.071	0.923
P_{C8}	2.243	1.924	0.741
P_{B9}	3.303	1.686	0.431
P_{C9}	2.586	1.863	0.412
P_{Gaudi}	2.983	1.976	

Tabla 3



9

2.4.Determinación del paraboloide representativo P_s

Como dijimos en la introducción, buscaremos ahora una superficie parabólica P_s , un paraboloide elíptico, el cual quedará determinado por el concurso geométrico simultáneo de las tres superficies S_A , S_B y S_C que componía el tornavoz, o sea P_s está determinado por las tres superficies a la vez. Para ello, elegiremos como P_s al paraboloide del conjunto de los ocho paraboloides $P_{(Ai, Bi, Ci)}$ que sea el representativo del propio conjunto de los ocho.

El proceso para elegir el paraboloide representativo P_s se basa, primero, en la determinación de una superficie parabólica de referencia, a la que llamaremos P_{Gaudi} , que sintetiza las características de los ocho paraboloides de regresión de $P_{(Ai, Bi, Ci)}$. Y luego, a partir de esta superficie de referencia P_{Gaudi} identificaremos geoméricamente el paraboloide de $P_{(Ai, Bi, Ci)}$ que más se aproxima a P_{Gaudi} , y consideraremos a este como el representativo P_s del conjunto.

El resumen del proceso numérico del cálculo de P_{Gaudi} es el siguiente.



Tabla 3. Parámetros de la ecuación canónica correspondientes a cada paraboloides de regresión de $P_{(Ai,Bi,Ci)}$. Parámetros de la ecuación canónica de P_{Gaudi} .
9. Sobre el modelo digital del púlpito mayor, mostramos en amarillo las ocho superficies de $nurbs_{(Ai,Bi,Ci)}$ y en naranja las ocho superficies parabólicas de regresión de $P_{(Ai,Bi,Ci)}$. Imagen de los autores.

Table 3. Canonical equation parameters for each regression paraboloid in $P_{(Ai,Bi,Ci)}$. Also, parameters of the canonical equation of PGaudi.
9. Above the digital model of the main pulpit, eight surfaces in $nurbs_{(Ai,Bi,Ci)}$ are shown in yellow, and the eight parabolic regression surfaces $P_{(Ai,Bi,Ci)}$ in orange. Figure by the authors.

Primero, tomamos las ocho ecuaciones canónicas de los paraboloides de $P_{(Ai,Bi,Ci)}$ y con ellas generamos ocho nubes de puntos asociadas a los mismos. Obsérvese que al fijar un sistema de referencia ortonormal cartesiano y generar las superficies con las ecuaciones en el mismo sistema de referencia, los ocho paraboloides pasan por el origen de coordenadas, y el eje transversal de las ocho es el eje z del sistema. Para cada nube hemos tomado coordenadas x entre -1.5 y 1.5, y coordenadas y entre -1.5 y 1.5, y una malla de 2000 puntos equiespaciada, generando las coordenadas z de los 2000 con las ecuaciones canónicas de la Tabla 3. Ahora, giramos las nubes entorno al eje z , si fuera necesario, para hacer que los 8 paraboloides estén colocados de tal forma que en el mismo plano se encuentren las cónicas principales de mayor parámetro de los 8 paraboloides y en otro plano perpendicular, se encuentren las cónicas principales de menor parámetro de los 8 paraboloides. En naranja, en la Figura 10, se ilustran los ocho paraboloides generados así con las ecuaciones canónicas. Así, con esta configuración de capas superpuestas, tomamos la nube de puntos N formadas por estas ocho nubes puntos giradas de los ocho paraboloides. Finalmente, de manera similar a como se ha explicado en la sección anterior, buscamos el paraboloides de regresión de N , obtenemos un paraboloides elíptico. Ahora hacemos el cálculo algebraico para obtener su ecuación canónica y obtenemos sus parámetros, que el lector encontrará en la Tabla 3. En la Tabla 3, llamamos a este paraboloides elíptico P_{Gaudi} , el cual es nuestra superficie de referencia global. En azul, en la Figura 10, se ilustra el paraboloides P_{Gaudi} .

Una vez determinada la superficie parabólica de referencia P_{Gaudi} . A partir de los parámetros canónicos de cada paraboloides de regresión de $P_{(Ai,Bi,Ci)}$ presentados en la Tabla 3 y que se muestran en la Figura 10, se observa que el paraboloides P_{B2} es el geométricamente más próximo al paraboloides P_{Gaudi} debido a que la proximidad geométrica de sus parámetros es mínima, con una distancia de $d = 0.345$ m determinada por la distancia Euclídea entre ellos. En la cuarta columna de la Tabla 3 hemos mostrado esas distancias de los parámetros de cada paraboloides de $P_{(Ai,Bi,Ci)}$ respecto de los parámetros del paraboloides P_{Gaudi} . Por tanto, la superficie de regresión P_{B2} es el paraboloides representativo P_S del conjunto $P_{(Ai,Bi,Ci)}$ y por ende del conjunto $P_{(A,B,C)}$. Y, por tanto, se emplea posteriormente para la recuperación digital del modelo final, y también este ajuste parabólico lo usaremos para evaluar la eficacia geométrica acústica del tornavoz.

3. Resultados

La determinación del paraboloides $P_S = P_{B2}$ como el representativo de todas las superficies parabólicas de regresión de $P_{(Ai,Bi,Ci)}$ permite usar sus cinco curvas C_{B2j} con j desde 1 a 5, identificadas en la fotografía 2 y empleadas en la generación de la superficie $nurbs_{B2}$ (Figura 8), para la recuperación digital completa del tornavoz. A partir de la superficie $nurbs_{B2}$, las superficies S_A , S_B y S_C se definen mediante los giros de -90° , 0° y 90° respectivamente en el plano XY , con el centro en la base del pilar de sección cuadrada del tornavoz. El resultado final se presenta en la Figura 11. Así, finalmente hemos obtenido el conjunto de superficies $S_{(A,B,C)}$.

based on this reference surface PGaudi, we will geometrically identify the paraboloid in $P_{(Ai,Bi,Ci)}$ that most closely approximates PGaudi. This paraboloid will be considered the representative paraboloid P_S of the set of eight paraboloids.

The numerical process for calculating P_{Gaudi} is as follows. The eight canonical equations of $P_{(Ai,Bi,Ci)}$ generate eight point clouds in a Cartesian orthonormal system where all paraboloids pass through the origin and share the z -axis as their transverse axis. For each cloud, x and y coordinates from -1.5 to 1.5 are sampled, producing 2000 equispaced points whose z values are computed from the canonical equations (Table 3). The clouds are then rotated about the z -axis so that sections with the highest parameter p lie in one plane and those with the lowest in a perpendicular plane (Fig. 10). This produces a combined point cloud N from the eight rotated clouds, from which the regression elliptic paraboloid is determined. Its canonical equation and parameters (Table 3) define the global reference surface P_{Gaudi} shown in blue in Figure 10.

From the canonical parameters of each regression paraboloid in $P_{(Ai,Bi,Ci)}$ it can be seen that the paraboloid P_{B2} is the geometrically closest to the paraboloid P_{Gaudi} since the geometric proximity of their parameters is maximum (the Euclidean distance between them is $d = 0.345$ m). The distance between the parameters of each paraboloid in $P_{(Ai,Bi,Ci)}$ and the parameters of the paraboloid P_{Gaudi} is given in the fourth column of Table 3. Thus, the regression surface P_{B2} is the representative paraboloid P_S of the set $P_{(Ai,Bi,Ci)}$ and therefore of the set $P_{(A,B,C)}$.

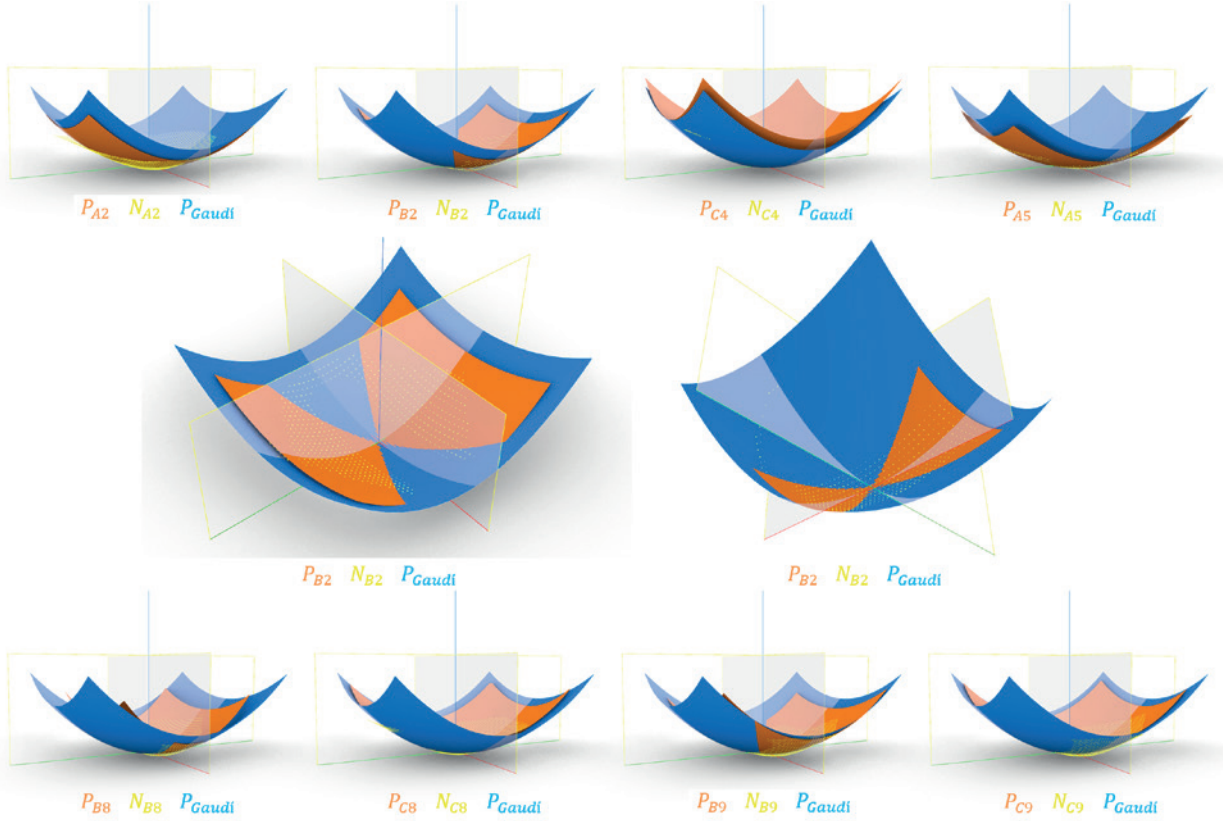
3. Results

Following the determination of the paraboloid $P_S = P_{B2}$ as the representative of all the parabolic regression surfaces in $P_{(Ai,Bi,Ci)}$ its five curves C_{B2j} (illustrated in Figure 8, with j ranging from 1 to 5, identified in photograph 2 and used in the generation of the surface $nurbs_{B2}$) can be used for the complete digital reconstruction of the sounding board. The digital reconstruction of the surfaces S_A , S_B and S_C which made up the sounding board is achieved through -90° , 0° and 90° rotations, respectively, of the surface $nurbs_{B2}$ in the XY plane, with the rotation centre situated at the base of the square section pillar



10. En amarillo se presentan las nubes de puntos de $N_{(A_i, B_i, C_i)}$, y en naranja se muestran los paraboloides de regresión de $P_{(A_i, B_i, C_i)}$, todos en las posiciones de las ecuaciones canónicas. En azul, igualmente, se ilustra el paraboloides P_{Gaudi} . En el centro de la figura, con un aumento en el tamaño de visualización y desde dos perspectivas adicionales, se destacan la nube N_{B2} , el paraboloides de regresión P_{B2} y el paraboloides P_{Gaudi} . Imagen de los autores.

10. Point clouds $N_{(A_i, B_i, C_i)}$ in yellow, regression paraboloids $P_{(A_i, B_i, C_i)}$ in orange (at their canonical positions), and P_{Gaudi} in blue. N_{B2} , P_{B2} and P_{Gaudi} are highlighted at larger scale and from two additional perspectives. Figure by the authors.



10

of the sounding board. Figure 11 shows the final result, i.e. the digital reconstruction of the set of surfaces $S_{(A, B, C)}$. If the same rotations are applied to the surface of the regression paraboloid $P_S = P_{B2}$, the three parabolic surfaces P_A , P_B and P_C (elliptic paraboloids) are defined. These surfaces are associated to the surfaces S_A , S_B and S_C respectively, and collectively constitute the set of surfaces $P_{(A, B, C)}$. To further demonstrate the potential acoustic intent of the geometry, we determined the coordinates of the foci F1 and F2 for each surface S_A , S_B and S_C . These correspond to the foci of the paraboloids P_A , P_B and P_C in $P_{(A, B, C)}$. F1 denotes the focus of the section with the lowest parameter p and F2 that with the highest, with all other sections lying along the segment connecting F1 and F2. Figures 11 and 12 illustrate these positions, and Table 4 lists the vertex coordinates of the three paraboloids. Beyond the digital reconstruction and recovery

Aplicando los mismos giros a la superficie del paraboloides de regresión $P_S = P_{B2}$, definimos igualmente las tres superficies P_A , P_B y P_C parabólicas asociadas S_A , S_B y S_C , respectivamente. Así, finalmente hemos obtenido el conjunto de superficies $P_{(A, B, C)}$.

Más allá de la mera reconstrucción y recuperación digital del tornavoz, el ajuste parabólico permitió calcular las coordenadas de los focos F1 y F2 de los paraboloides P_A , P_B y P_C en $P_{(A, B, C)}$, así como determinar la localización óptima del orador en relación con dichos focos, con el objetivo de maximizar el potencial acústico del diseño original. Tal como se aprecia en la Figura 11, las distancias L de F1 y F2 hasta un orador de 1,80 m de altura oscilan entre 1,30 y 1,60 m, delimitando la zona aproximada de máximo rendimiento. Las Figuras 11 y 12 ilustran gráficamente estas posiciones, mientras que la Tabla 4 recoge las coordenadas de los focos y de los vértices de los tres paraboloides correspondientes a cada superficie S_A , S_B y S_C .

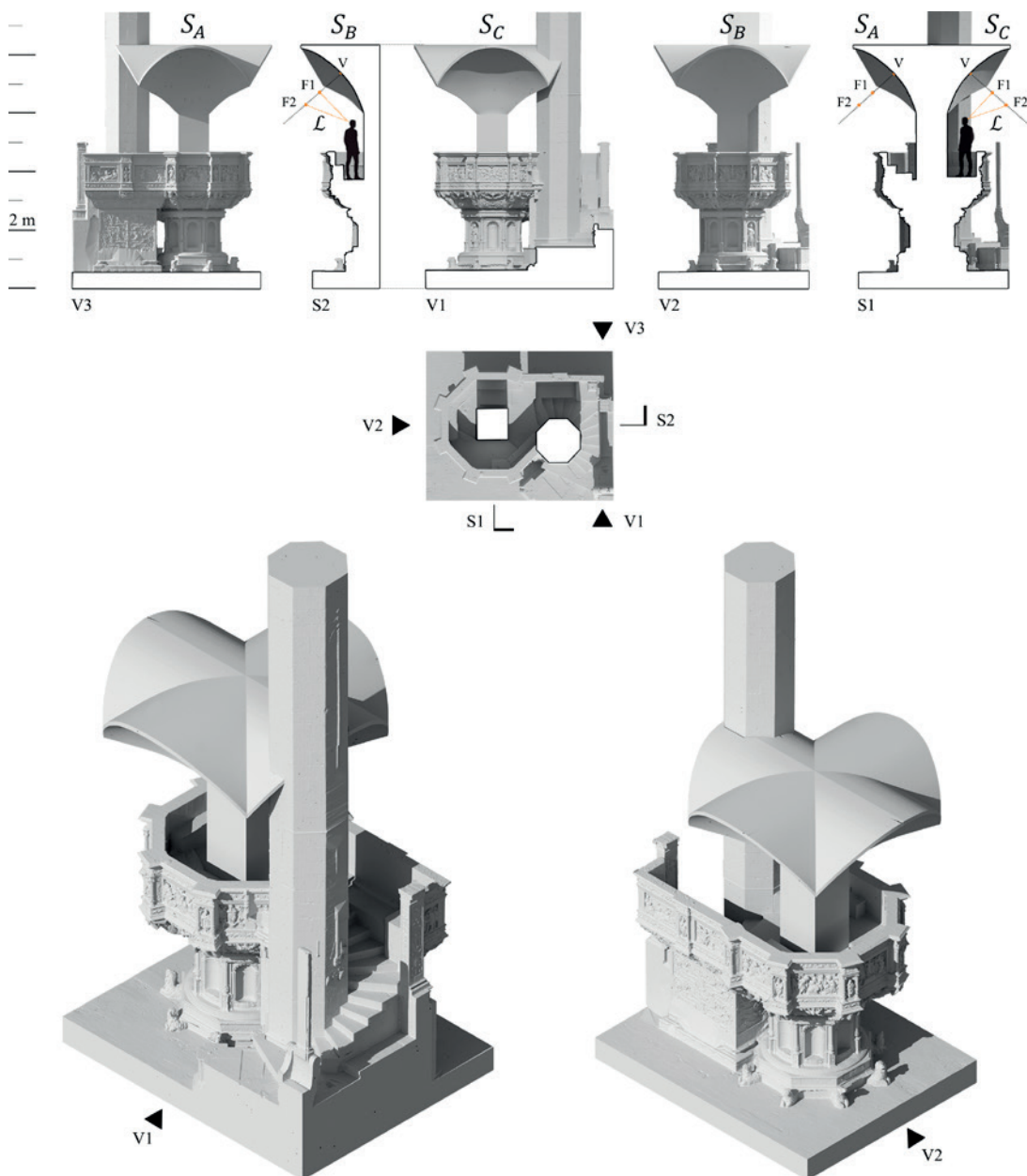
S	$F1 (x, y, z)$	$F2 (x, y, z)$	$V (x, y, z)$
S_A	(69.996, 41.513, 6.246)	(69.996, 42.057, 5.733)	(69.996, 40.886, 6.837)
S_B	(68.065, 39.561, 6.246)	(67.522, 39.561, 5.733)	(68.692, 39.561, 6.837)
S_C	(69.996, 37.631, 6.246)	(69.996, 37.087, 5.733)	(69.996, 38.257, 6.837)

11. Proyecciones ortogonales de la reconstrucción digital del tornavoz basada en el estudio geométrico del paraboloides representativo P_s que hemos expuesto en este artículo. En las secciones S1 y S2 se muestra la distancia L , que corresponde al rango de longitud entre los focos F1 y F2 y un orador de altura 1.80 metros. Imagen de los autores.

Tabla 4. Coordenadas de los focos y vértices de los tres paraboloides de $P_{(A,B,C)}$ determinados por las superficies S_A , S_B y S_C .

11. Orthogonal projections of the digital reconstruction of the sounding board based on the representative paraboloid P_s . Sections S_1 and S_2 show distance L between foci F1-F2 and a 1.80 metres tall speaker. Figure by the authors.

Table 4. Coordinates of the foci and vertices of the three paraboloids P_A , P_B and P_C as determined by the surfaces S_A , S_B and S_C .



11

4. Conclusiones

La investigación presentada ha permitido recuperar y reconstruir digitalmente el tornavoz diseñado por Antoni Gaudí para la Catedral de Mallorca, un elemento desaparecido en 1970 pese a su condición de Monumento Histórico. A partir de una documentación gráfica limitada —fotografías históricas y un croquis— se ha desarrollado un proceso riguroso que combina geometría analítica y descriptiva con herramientas avanzadas de modelado digital,

of the sounding board, the parabolic fitting enabled calculation of the optimal speaker location relative to the foci to maximise the original design's acoustic potential. Distances from F1 and F2 to a speaker 1.80 m tall (Fig. 11) range between 1.30 and 1.60 m, indicating the approximate area of optimal performance.

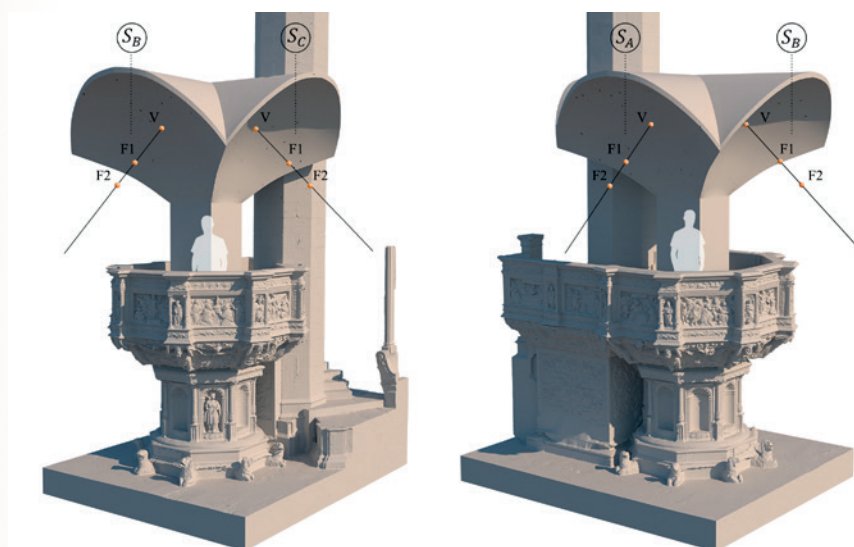
Conclusions

The research presented has made it possible to digitally recover and reconstruct the sounding board designed by Antoni Gaudí for Mallorca Cathedral, an element that disappeared in 1970 despite its designation as a Historic Monument. Based on limited graphic documentation—historical photographs and a sketch—a rigorous process has been developed combining analytical and descriptive geometry with advanced digital modelling tools, enabling the formal and geometric logic of the ensemble to be restituted according to verifiable criteria (Figures 11, 12 and 13).

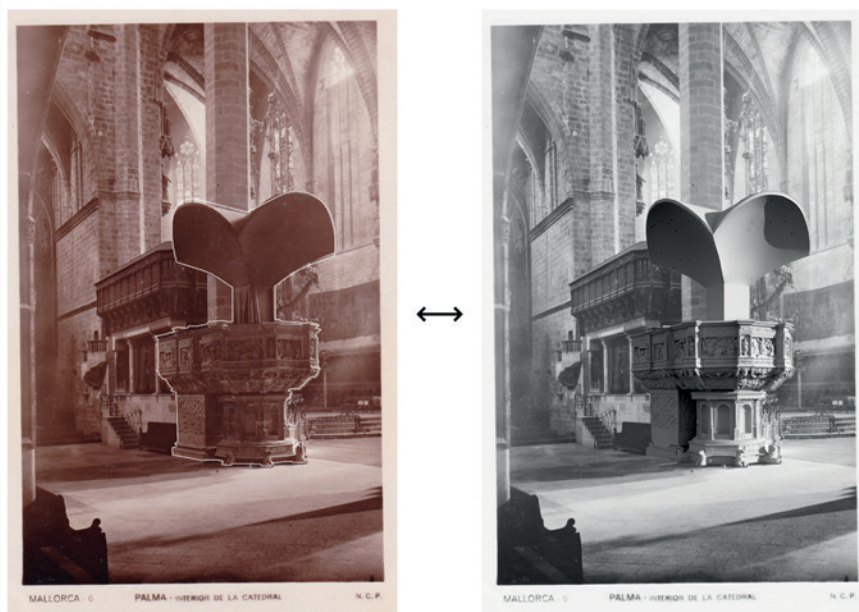
Beyond the case study, this work contributes the definition of an extrapolable graphic and geometric methodology capable of transforming incomplete historical information into verifiable architectural knowledge. The use of objective procedures—such as viewpoint restitution, the generation of point clouds from historical images, and the regression fitting of parabolic surfaces—helps to reduce the subjectivity inherent in formal reconstruction processes, introducing comparable and reproducible parameters.

The identification of a representative paraboloid derived from multiple geometric hypotheses constitutes an operational criterion of particular interest, as it allows the internal coherence of the proposed solutions to be assessed and graphic decisions to be supported on a quantitative basis. This approach is especially relevant for the study of historical architectures characterised by the use of ruled or quadric surfaces, which are common in complex heritage contexts.

In order to overcome the limitations inherent in static graphic representation and to enable a more rigorous analysis of the results, the authors make the final three-dimensional model of the sounding board available to the research community upon request, so that any interested researcher may contact the authors to obtain access. Likewise, the model is preserved in interoperable standard formats (3ds, obj and stl), facilitating detailed geometric analysis, reuse in research and teaching contexts, as well as potential physical reproduction through digital fabrication techniques. To ensure traceability, preservation and protection of authorship, the resulting model has been registered in Safe Creative under number 2601224340026 on 23/01/2026.



12



13

logrando restituir la lógica formal y geométrica del conjunto con criterios verificables (Figura 11, 12 y 13).

Más allá del caso de estudio, este trabajo aporta la definición de una metodología gráfica y geométrica extrapolable, capaz de transformar información histórica incompleta en conocimiento arquitectónico contrastable. El uso de procedimientos objetivos —como la restitución del punto de vista, la generación de nubes de puntos a partir de imágenes históricas y el ajuste por regresión de superficies parabólicas— permite reducir la subjetividad inherente a los procesos de reconstrucción formal, introduciendo parámetros comparables y reproducibles.

La identificación de un paraboloide representativo a partir de múltiples hipótesis geométricas constituye un criterio operativo de especial interés, ya



12. Vistas de la reconstrucción digital del tornavoz basada en el estudio geométrico del paraboloides representativo P_s que hemos expuesto en este artículo. Imagen de los autores.

13. Comparación entre la fotografía histórica F_2 del púlpito mayor con el tornavoz original y una imagen, generada desde el mismo punto de vista, del modelo 3D reconstruido, para verificar la correspondencia geométrica de la restitución. Imagen de los autores.

12. Views of the digital reconstruction of the sounding board from the representative paraboloid P_s . Figure by the authors.

13. Comparison between the historical photograph F_2 of the main pulpit with the original sounding board and an image, generated from the same viewpoint, of the reconstructed 3D model, in order to verify the geometric correspondence of the restitution. Image by the authors.

que permite evaluar la coherencia interna de las soluciones propuestas y fundamentar las decisiones gráficas desde una base cuantitativa. Este enfoque resulta particularmente pertinente en el estudio de arquitecturas históricas caracterizadas por el uso de superficies regladas o cuadráticas, frecuentes en contextos patrimoniales complejos.

Con el objetivo de superar las limitaciones inherentes a la representación gráfica estática y favorecer un análisis más riguroso de los resultados, los autores ponen el modelo tridimensional final del tornavoz a disposición de la comunidad investigadora previa solicitud, de modo que cualquier investigador o investigadora interesado pueda ponerse en contacto con los autores para acceder al mismo. Asimismo, el modelo se conserva en formatos estándar interoperables (3ds, obj y stl), lo que facilita su análisis geométrico detallado, su reutilización en contextos de investigación y docencia, así como su eventual reproducción física mediante técnicas de fabricación digital. Con el fin de garantizar la trazabilidad, preservación y protección de la autoría, el modelo resultante ha sido registrado en Safe Creative con el número 2601224340026 y fecha 23/01/2026.

Finalmente, la disponibilidad del modelo tridimensional resultante en formatos abiertos refuerza el carácter abierto y transferible de la investigación, facilitando su análisis, reutilización y aplicación en ámbitos como la docencia, la difusión patrimonial o la fabricación digital. En conjunto, el trabajo contribuye a consolidar una línea de investigación en torno a la reconstrucción digital rigurosa del patrimonio arquitectónico, situando la expresión gráfica no solo como herramienta de representación, sino como instrumento activo de generación de conocimiento.

Referencias

- Alomar, G. (1987) “Sobre les estades a Mallorca dels arquitectes Gaudí i Le Corbusier”, *Estudis Baleàrics*, 27, pp. 71–74.
- Audin, M. (2003) *Geometry*. New York: Springer.
- Cantarellas, C. (2013) “El tornavoz de Gaudí en el púlpito mayor de la Catedral de Mallorca: de la fortuna crítica a una nueva obra”, CDF International Congress. Barcelona: Universitat de Barcelona, pp. 88–98.
- González, G., Samper, A. y Herrera, B. (2021) “Acoustic simulation of the central hall in Palau Güell by Gaudí”, *Architecture and Engineering*, 6(2), pp. 18–30. doi: 10.23968/2500-0055-2021-6-2-18-30.
- González, R., Homs, J. y Solsona, J. (1997) “Estimació de l’error comès en determinar el lloc des d’on s’ha pres una fotografia”, *Bulletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 12(1), pp. 51–71.
- Grañó, N., Llona, A. y Suau, F. (1997) “Geometria projectiva: El problema de la fotografia”, *Bulletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 12(1), pp. 73–83.
- Izquierdo, F. (1974) *Geometría descriptiva*. Madrid: Editorial Dossat.
- Jaume, M. et al. (2009) *Le Corbusier a Mallorca en 1932. Massilia: Annuaire d’Études Corbusiennes*. Mallorca: Govern de les Illes Balears.
- Sagristá, E. (1962) *Gaudí en la catedral de Mallorca: anécdotas y recuerdos*. Castellón de la Plana: Editorial Castellonense de Cultura.
- Semple, J. G. y Kneebone, G. T. (1963) *Algebraic Projective Geometry*. London: Oxford at the Clarendon Press.
- Vercammen, M. (2012) *Sound Concentration Caused by Curved Surfaces*. Tesis doctoral. Eindhoven: Eindhoven University of Technology. Disponible en: <http://repository.tue.nl/732483> (Acceso: 16/01/2026).

Finally, the availability of the resulting three-dimensional model in open formats reinforces the open and transferable nature of the research, facilitating its analysis, reuse and application in areas such as teaching, heritage dissemination and digital fabrication. Overall, the work contributes to consolidating a line of research focused on the rigorous digital reconstruction of architectural heritage, positioning graphic expression not only as a tool for representation, but also as an active instrument for the generation of knowledge.

References

- Alomar, G. (1987) “Sobre les estades a Mallorca dels arquitectes Gaudí i Le Corbusier”, *Estudis Baleàrics*, 27, pp. 71–74.
- Audin, M. (2003) *Geometry*. New York: Springer.
- Cantarellas, C. (2013) “El tornavoz de Gaudí en el púlpito mayor de la Catedral de Mallorca: de la fortuna crítica a una nueva obra”, CDF International Congress. Barcelona: Universitat de Barcelona, pp. 88–98.
- González, G., Samper, A. and Herrera, B. (2021) “Acoustic simulation of the central hall in Palau Güell by Gaudí”, *Architecture and Engineering*, 6(2), pp. 18–30. doi: 10.23968/2500-0055-2021-6-2-18-30.
- González, R., Homs, J. and Solsona, J. (1997) “Estimació de l’error comès en determinar el lloc des d’on s’ha pres una fotografia”, *Bulletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 12(1), pp. 51–71.
- Grañó, N., Llona, A. and Suau, F. (1997) “Geometria projectiva: El problema de la fotografia”, *Bulletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 12(1), pp. 73–83.
- Izquierdo, F. (1974) *Geometría descriptiva*. Madrid: Editorial Dossat.
- Jaume, M. et al. (2009) *Le Corbusier a Mallorca en 1932. Massilia: Annuaire d’Études Corbusiennes*. Mallorca: Govern de les Illes Balears.
- Sagristá, E. (1962) *Gaudí en la catedral de Mallorca: anécdotas y recuerdos*. Castellón de la Plana: Editorial Castellonense de Cultura.
- Semple, J. G. and Kneebone, G. T. (1963) *Algebraic Projective Geometry*. London: Oxford at the Clarendon Press.
- Vercammen, M. (2012) *Sound Concentration Caused by Curved Surfaces*. Tesis doctoral. Eindhoven: Eindhoven University of Technology. Disponible en: <http://repository.tue.nl/732483> (Acceso: 16/01/2026).