

DEMOSTRACIÓ DE LA CONJECTURA DEL TEOREMA DE FERMAT PER A LES TERNE PITAGÒRIQUES

*Defensa el teu dret a pensar, perquè fins i tot pensar de forma errònia és millor
que no pensar.
Hipatia*

Aina Llorach Rodríguez.

Institut Torredembarra

Sebastià Sastriques.

Curs 2012-2013

ÍNDEX

1. Introducció.....	3
2. Coneixem a Pierre Fermat.....	6
3. Obra matemàtica de Fermat.....	9
3.1. Espiral de Fermat.....	10
3.2. Nombres amics.....	13
3.3. Nombres perfectes.....	15
3.4. Nombres de Fermat.....	17
3.5. Teorema vers la suma de dos quadrats perfectes.....	18
3.6. Teorema del nombre poligonal de Fermat.....	20
3.7. Darrer teorema de Fermat.....	22
4. Proposició de demostració del Darrer Teorema de Fermat.....	24
4.1. Exemples.....	36
5. Reconeixements i anècdotes.....	39
6. Conclusions i Agraïments.....	43
7. Bibliografia.....	46

1.INTRODUCCIÓ

L'últim que un sap és per on començar.

Blaise Pascal

Faig front a aquest treball que he dedicat a les matemàtiques amb un immens respecte, i fins i tot amb una mica de por; però l'atractiu que les matemàtiques desprenen han fet que m'atraci com si d'un joc es tractés.

Les matemàtiques són una matèria amb la que em sento còmoda, la seva dificultat implica plantejar-me reptes personals que em suposen una grata satisfacció en veure que els vaig superant.

El motiu pel qual m'he decantat per les matemàtiques com a base principal del meu treball de recerca ha estat l'admiració pel meu avi Santiago. Ara té 85 anys, un cap privilegiat i una memòria com poques n'hi ha.

Fa uns anys em va explicar que creia haver trobat una solució a un problema que feia segles que estava per resoldre. A més a més, estava envoltat d'un curiós misteri: L'autor de la conjectura, Pierre Fermat, havia deixat escrit l'enunciat del problema al marge d'un llibre i havia afegit que havia descobert una demostració veritablement meravellosa, però aquell marge era massa estret per cabre-hi.

De fet, em va aclarir que l'havien donat per resolt amb la proposta d'un matemàtic contemporani que havia emprat una matemàtica molt moderna i que, segurament ni l'autor de la conjectura ni els seus coetanis coneixien al segle XVII.

A l'haver de triar el tema pel meu treball de recerca, de seguida em va venir al cap... "estaria bé poder entendre i donar a conèixer el desenvolupament matemàtic de la solució que el meu avi havia fet d'aquella misteriosa conjectura".

Això suposava haver d'adquirir nous coneixements. Molts dels conceptes i mètodes que s'utilitzen ja els coneixia, perquè formen part del programa educatiu fins a 2n de batxillerat, però d'altres no, com per exemple: el desenvolupament del Binomi de Newton, els Nombres amics, els Nombres perfectes, etc.

També el fet d'haver de plasmar tot un estudi matemàtic m'ha suposat aprofundir i investigar en les eines informàtiques utilitzades, com el tractament de texts Word o el full de càlcul Excel.

Així doncs, amb aquesta oportunitat no solament vull investigar i aprofundir sobre el treball del meu avi vers l'últim Teorema de Fermat, sinó que també vull expandir-me en tota la seva obra matemàtica, la seva persona i les seves relacions amb altres matemàtics de l'època.

El segle XVII fou un segle prolífer en el camp de la ciència. És per això que he cregut convenient esmentar altres erudits.

Els matemàtics busquen patrons, formulen noves conjectures i intenten aconseguir la veritat matemàtica mitjançant rigoroses deduccions.

Partint de principis fonamentals i seguint raonaments lògics, les matemàtiques analitzen estructures, magnituds i vincles dels ens abstractes. Això permet, un cop detectats certs patrons, formular conjectures i establir definicions a les quals s'arriben per deducció.

El rigor és una condició indispensable que ha de tenir una demostració matemàtica.

Els matemàtics volen que els seus Teoremes a partir dels axiomes segueixin un raonament sistemàtic. Això serveix per evitar Teoremes erronis, basats en intuïcions fal·libles, que s'han donat diverses vegades en la història d'aquesta ciència.

Es podria dir que gairebé totes les activitats humanes tenen algun tipus de vinculació amb les matemàtiques. Aquests vincles poden ser evidents, com en el cas de l'enginyeria, o ser menys notoris, com en la medicina o la música.

Em proposo que aquesta empresa a la que m'enfronto no sigui tan sols una obligació acadèmica sinó una "meravellosa demostració matemàtica" que em confirmi que amb esforç, temps i dedicació seré capaç de fer tot el que em proposi.



2.CONEIXEM A PIERRE DE FERMAT

Les matemàtiques semblen constituir una facultat de la ment humana destinada a compensar la brevetat de la vida i la imperfecció dels sentits.

Joseph Fourier

Pierre de Fermat va néixer el 17 d'agost de 1601 a Beaumont de Lomagne, situat al sud de França.

El seu pare, Dominique Fermat era cònsol de la localitat i regentava un pròsper comerç de pells i cuirs. La mare, Claire de Long, descendia d'una família noble de juristes.

Aquestes circumstàncies van fer que Fermat rebés una educació fortament impregnada per l'estudi de les llengües i literatures clàssiques.



Va cursar estudis de dret a Tolosa, Bordeus i Orleans, on es va graduar al 1631. Es va especialitzar en llei civil i fou conseller al Parlament de Tolosa.

Fermat es va casar amb Louise de Long, cosina llunyana seva per via materna. El matrimoni va tenir cinc fills: dos fills i tres filles. El fill gran, Clément-Samuel, va ser l'únic que va heretar l'interès del seu progenitor per les matemàtiques, encara que no la seva genialitat. A Clément-Samuel li devem l'edició i la publicació de les obres completes del seu pare al 1679.

Fermat ocupà llocs d'influència a l'Església Catòlica, de la que va ser un fill devot.

Al 14 de maig del 1634 va ser nomenat conseller del Rei al Parlament de Tolosa i comissari de demandes de Palau, treballant a la cambra baixa del Parlament, però el 16 gener 1638 va ser nomenat a la cambra alta.

També, al 1638 va ser nomenat magistrat membre del tribunal criminal i finalment al 1652 va ser promogut al nivell més alt de la cort criminal.

Va ser un apassionat de la filologia i dominava les principals llengües europees, arribant a escriure poesia de certa qualitat en francès, llatí i castellà.

La passió autèntica de Fermat, més intensa que la que professava per la poesia clàssica, els assumptes eclesiàstics o inclús el dret, van ser les

matemàtiques. Les seves contribucions en les matemàtiques han estat profundes i transcendents.

Va desenvolupar importants papers en diversos camps, com la teoria de nombres, la probabilitat i el càlcul diferencial.

Entre els seus descobriments cal destacar, la formulació del que avui anomenem geometria analítica i teoria de nombres. Fou el primer en estudiar les tres dimensions mentre que Descartes seguia considerant únicament les dues dimensions.

Malgrat la visió privilegiada de Fermat vers les matemàtiques, lloada pel mateix Blaise Pascal, la seva figura es va veure eclipsada per Descartes.

Fermat era un matemàtic que acostumava a afirmar que tenia demostracions de resultats desconcertants encara que poques vegades les mostrava, doncs acostumava a només apuntar la idea de les seves demostracions als marges dels llibres que llegia en aquell moment o bé en epístoles als seus amics.

Fermat, per demostrar els seus teoremes solia adoptar el mètode *per descens a l'infinit*. Ell afirmava que aquest mètode era la base de totes les seves demostracions en la teoria dels nombres.

Cap al 1660, la seva salut començà a minvar. Fermat va viure tota la vida dins d'un radi de 200 kilòmetres de la seva ciutat natal.

Finalment, el 12 gener del 1665 va morir a la ciutat de Castres. No es sap exactament la causa de la mort, però es creu que va ser produïda per la pesta.

L'única publicació de Fermat va ser un article anomenat *De linearum curvarum compliment lineis rectis comparationes* (Comparació de les línies corbes amb les rectes) al 1660.

També va escriure un llibre que no va arribar a publicar sobre màxims i mínims *Methodus ad disquirendam maximam et Miniman* (Mètode de buscar el màxim i mínim).

3.OBRA MATEMÀTICA DE FERMAT

La ciència no és més que un refinament del pensament quotidià.

Albert Einstein

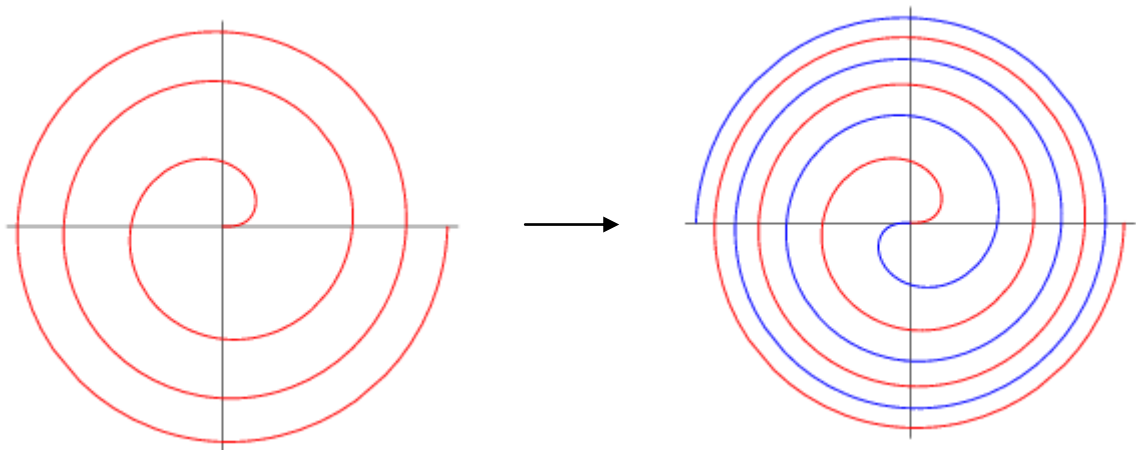
3.1.ESPIRAL DE FERMAT

Encara que aquesta espiral deu el seu nom a Pierre de Fermat, ell no va ser el primer en estudiar-la; sinó Menéalo d'Alexandria (any 70-130).

L'espiral de Fermat resulta quan per a qualsevol valor positiu donat a θ , hi ha dos valors corresponents de r , sent un oposat de l'altre (un positiu i l'altre negatiu a causa de l'arrel). L'espiral resultant serà per tant simètrica de la recta $y = -x$.

La corba divideix el pla en dues regions connexes i simètriques respecte a O (origen).

L'espiral de Fermat és considerada una versió més avançada de l'Espirale d'Arquímedes. També és coneguda com la "Espirale Parabòlica".



Espirale d'Arquímedes

Espirale de Fermat

Aquesta espiral és una corba que respon a la següent equació:

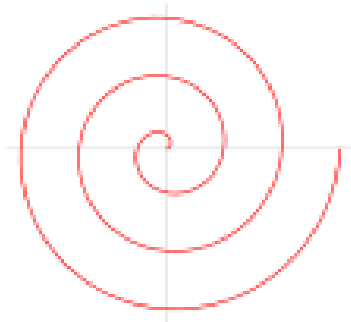
On a és una constant

$$r = \pm \theta^{1/2} a \quad \text{----} \quad r^2 = a^2 \theta$$

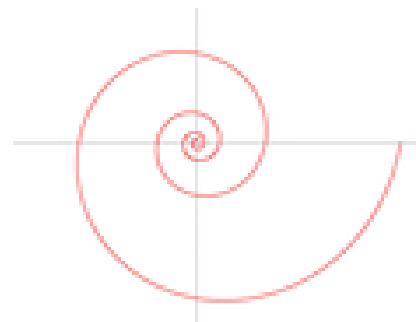
Concepte d'espiral

Una espiral és una corba descrita per un punt que gira al voltant d'un eix allunyant-se'n contínuament del centre alhora que gira al voltant de si mateix segons una llei determinada.

Normalment es defineix amb una funció que depèn de dos valors: l'angle del punt respecte a un eix de referència, i la distància des d'aquest punt al centre situat en el vèrtex de l'angle.

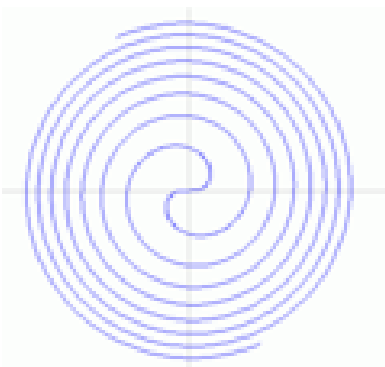


Espiral d'Arquímedes ($r = a + b\theta$)

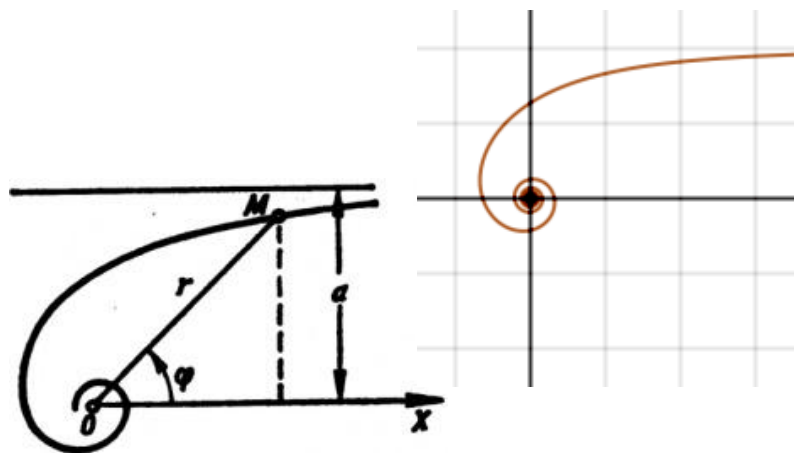


Espiral logarítmica (o de Descartes)

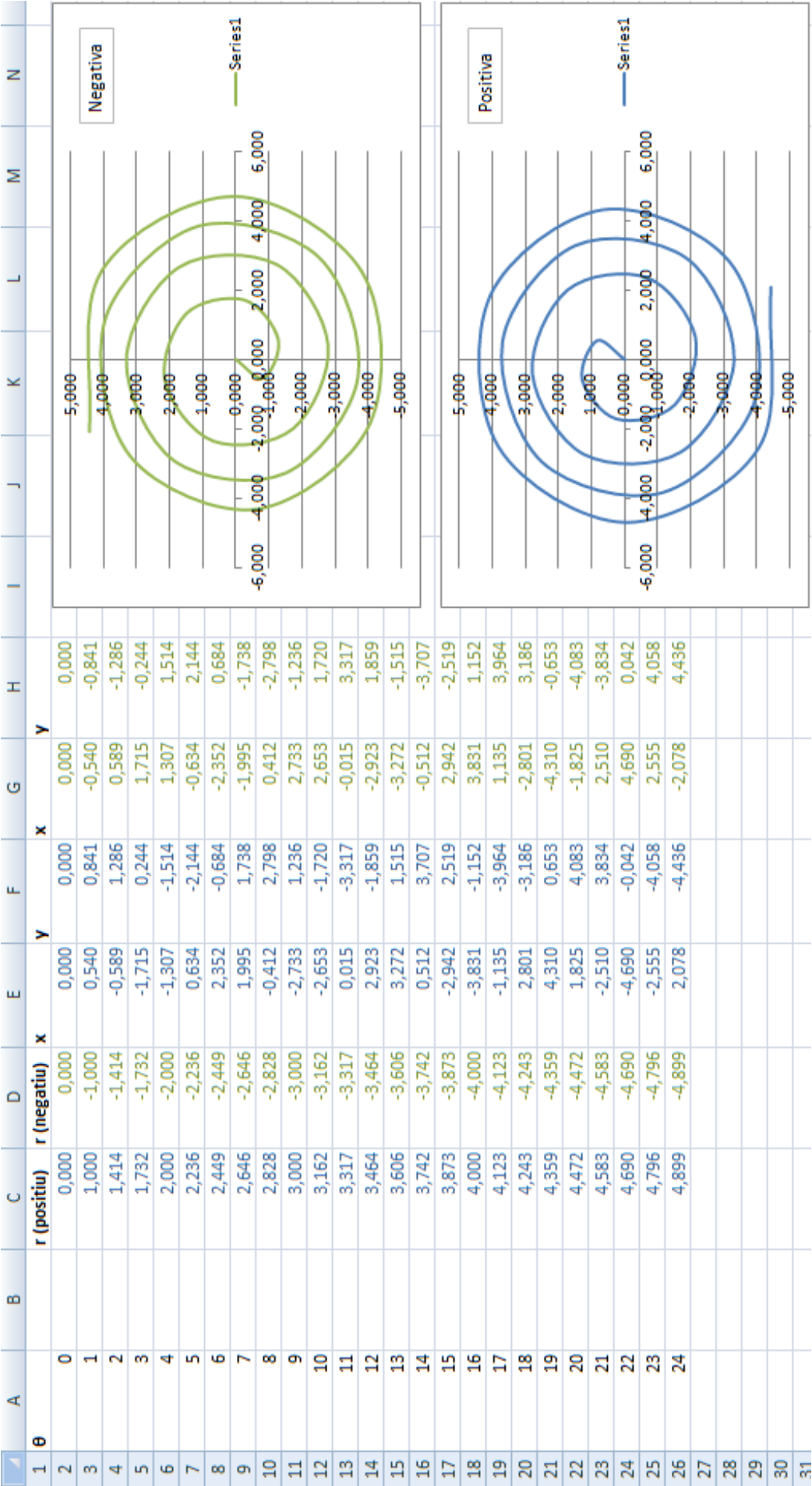
$$r = Ce^{k\theta}$$



Espiral de Fermat ($r = \theta^{1/2}$)



Espiral hiperbòlica ($r = a/\theta$)



3.2.NOMBRES AMICS

El concepte dels nombres amics es remunta als temps de la cultura hel·lenística. Els grecs van definir que dos nombres eren “amics” **a** i **b** quan **a** és la suma dels divisors propis de **b**; i **b** és la suma dels divisors propis de **a**. Entenent com a divisors propis tots els divisors del nombre excloent-hi el mateix.

Els nombres 220 i 284 són un exemple de nombres amics que ja coneixien els grecs.

Els divisors de 220 són 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 i 220. Descartant l'últim número trobem que la suma dels divisors propis de 220 és:

$$1+ 2+ 4+ 5+ 10 + 11+ 20+ 22+ 44+ 55+ 110= \mathbf{284}$$

Els divisors de 284 són: 1, 2, 4, 71, 142 i 284. Descartant l'últim número trobem que la suma dels divisors propis de 284 és:

$$1+ 2+ 4+ 71+ 142= \mathbf{220}$$

Així es demostra que, 220 i 284 són un parell de nombres amics.

Durant molts segles aquest va ser l'únic exemple conegut de nombres amics. Al 1636 Fermat va descobrir una altra parella de nombres amics el 17296 i 18416, anys després René Descartes va trobar un parell de nombres més admirable encara, 9363584 i 9437056.

Cal destacar que aquests grans pensadors es van saltar el parell de nombres amics 1184 i 1210 que va ser descobert a l'any 1798 per un nen italià de 16 anys anomenat Niccolò Paganini.

Fermat va contribuir...

Per trobar parelles de nombres amics va estudiar la ja coneguda regla del filòsof àrab Tabit ibn Qurra a l'any 850, l'enunciat de la qual és:

$P= 3 \times 2^{n-1} -1$	<i>“Per qualsevol número enter n major que 1”</i>
$Q= 3 \times 2^n -1$	
$R= 9 \times 2^{2n-1} -1$	

Després de donar valors a n obtindrem els nombres P , Q i R .

A continuació s'aplica la següent norma sempre que es compleixi la condició de contorn que P , Q i R siguin nombres primers (assenyalats en **verd** al full de càlcul mostrat més endavant):

$$\begin{cases} A = 2^n PQ \\ B = 2^n R \end{cases}$$

Després d'aplicar aquesta norma obtindrem parelles de nombres amics.

Cal dir que no tots els nombres amics s'obtenen amb el procediment de Tabit, però sí són amics tots els nombres que s'obtenen amb aquest procediment.

No cal oblidar el gran L. Euler, ja que ell va treballar tractant d'estudiar fórmules per trobar nombres amics.

- El nombre 2.620 té 11 divisors (si excloem el 2620), els divisors són:

1, 2, 4, 5, 10, 20, 131, 262, 524, 655 i 1.310

La suma d'aquests divisors és igual a **2.924**

- El nombre 2.924 té també 11 divisors (si excloem el 2924), els divisors són:

1, 2, 4, 17, 34, 43, 68, 86, 172, 731 i 1.462

La suma d'aquests divisors és igual a **2.620**

Després efectivament 2.620 i 2.924 són nombres amics.

A més, els **nombres sociables** són una generalització dels nombres amics. Tres o més nombres es diu que són sociables si la suma dels divisors del primer resulta el segon, els del segon, el tercer, i els de l'últim el primer.

Comprovació de la fórmula:

Seguint la fórmula de Tabit amb les condicions requerides pel mateix, obtenim:

$$\begin{array}{|l|} \hline P = 3 \times 2^{n-1} - 1 \\ \hline Q = 3 \times 2^n - 1 \\ \hline R = 9 \times 2^{2n-1} - 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A = 2^n pq \\ B = 2^n r \end{cases}$$

P	Q	R	n	A	B
5	11	71	2	220	284
11	23	287	3	2024	2296
23	47	1151	4	17296	18416
47	95	4607	5	142880	147424
95	191	18431	6	1161280	1179584
191	383	73727	7	9363584	9437056
383	767	294911	8	75202816	75497216
767	1535	1179647	9	602800640	603979264
1535	3071	4718591	10	4,827E+09	4,832E+09
3071	6143	18874367	11	3,864E+10	3,865E+10
6143	12287	75497471	12	3,092E+11	3,092E+11
12287	24575	301989887	13	2,474E+12	2,474E+12
24575	49151	1,208E+09	14	1,979E+13	1,979E+13
49151	98303	4,832E+09	15	1,583E+14	1,583E+14

Nombres primers

Aquesta fórmula genera els parells de nombres amics següents: per $n=2$ obtenim (220, 284), per $n=4$ obtenim (17.296, 18.416) i per $n=7$ obtenim (9.363.584, 9.437.056). Mentre que els parells de nombres amics (1184, 1210) i (6232, 6368) no es poden trobar per la fórmula anterior.

3.3.NOMBRES PERFECTES

Una altra de les aportacions de Fermat a les matemàtiques va ser la contribució als anomenats nombres perfectes.

Els nombres perfectes són aquells tals que la suma dels seus divisors (sense incloure'ls ell mateix) és el propi nombre.

Per exemple, el nombre 6 té de divisors 1, 2, 3 i 6; és per tant un nombre perfecte ja que (sense incloure el mateix nombre 6) $1+2+3=6$.

El següent nombre perfecte és el 28, que té de divisors 1, 2, 4, 7, 14 i 28; és per tant un altre nombre perfecte ja que (sense incloure el mateix nombre 28) $1+2+4+7+14=28$.

A mesura que augmenten el número és més difícil trobar nombres perfectes, així observem que després del 28 els següents nombres perfectes són el 496 i el 8128.

El nombre 496 té de divisors 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248 i 496; és per tant un nombre perfecte ja que (sense incloure el mateix nombre 496) $1+2+4+8+16+31+62+124+248=496$

També, el nombre 8128 té de divisors 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 254, 508, 1016, 2032, 4064 i 8128; és per tant un nombre perfecte ja que (sense incloure el mateix nombre 8128)

$$1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+2032+4064=8128$$

Tots els nombres perfectes són parells i només se'n coneixen uns trenta nombres perfectes. No es coneix l'existència de nombres perfectes senars.

També està demostrat que l'última xifra de qualsevol nombre perfecte parell ha de ser 6 o 8. No obstant això, existeixen alguns resultats parcials: si existeix un nombre perfecte imparell, ha de complir, entre altres les condicions següents:

- Ser major que 10^{300} .
- Tenir almenys 8 factors primers diferents (i com a mínim 11 si no és divisible per 3).
- Un d'aquests factors ha de ser major que 10^7 .
- Dos d'ells han de ser majors que 10.000 i tres han de ser majors que 100.
- Tenir, com a mínim, 75 factors primers (incloent-hi repeticions).

El problema és trobar una regla que permeti trobar nombres perfectes, i que també sigui útil per deduir si un nombre és o no perfecte.

En alguns nombres la suma dels seus divisors és un múltiple del nombre. Aquests números són denominats **perfectes per múltiples**.

Fermat va descobrir el 2º exemple de nombre perfecte per múltiples, el 672.

El problema de trobar aquests números va ser proposat per Mersenne en una carta a Descartes.

Descartes va trobar un altre nombre perfecte, el 1476304896.

Es pot dir que el nombre perfecte és un nombre amic de si mateix.

3.4.NOMBRES DE FERMAT

Anomenats així en honor a Pierre de Fermat, qui fou el primer en estudiar aquest nombres.

Un nombre de Fermat és un nombre natural de la forma:

$$F_n = 2^{2^n} + 1 \text{ on } n \text{ és un nombre natural.}$$

Pierre de Fermat va conjecturar que tots els nombres obtinguts d'aquesta manera eren nombres primers, sempre que n fos un nombre natural.

Però, al 1732 Leonhard Euler va provar que no sempre es complia aquesta conjectura, per $n = 5$ s'obté un nombre compost:

$$F_5 = 2^{32} + 1 = 4.294.967.297 = 641 \times 6.700.417$$

Aquest, el 4.294.967.297 és el nombre més petit que, sent un nombre de Fermat, no és primer.

Tot i això, tots els nombres que tenen la forma dels primers de Fermat, encara que no siguin primers, reben el nom de *nombres de Fermat*.

Els sis primers nombres de Fermat són:

$$F_0 = 2^1 + 1 = 3$$

$$F_1 = 2^2 + 1 = 5$$

$$F_2 = 2^4 + 1 = 17$$

$$F_3 = 2^8 + 1 = 257$$

$$F_4 = 2^{16} + 1 = 65537$$

$$F_5 = 2^{32} + 1 = 4.294.967.297 = 641 \times 6.700.417$$

$$F_6 = 2^{64} + 1 = 18.446.744.073.709.551.617 = 274.177 \times 67.280.421.310.721$$

Com es pot observar, els cinc primers resultats: 3 (per $n=0$), 5 (per $n=1$), 17 (per $n=2$), 257 (per $n=3$) i 65537 (per $n=4$) són nombres primers, però per $n=5$ i $n=6$ s'obté un nombre compost.

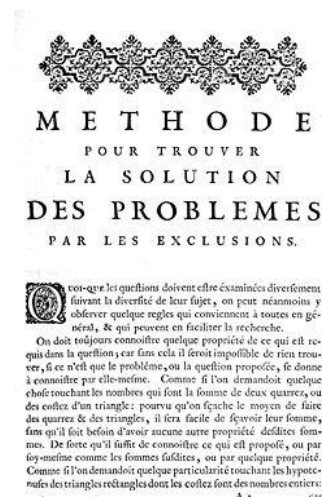
Propietats dels nombres de Fermat

- Un nombre de Fermat és igual al producte de tots els anteriors més 2.
Per exemple: $(F_0 \cdot F_1) + 2 = F_2$, és a dir, $(3 \cdot 5) + 2 = 17$. $F_2=17$.
 $(F_0 \cdot F_1 \cdot F_2) + 2 = F_3$, és a dir, $(3 \cdot 5 \cdot 17) + 2 = 257$. $F_3=257$.
- Carl Friedrich Gauss va demostrar que hi ha una relació entre la construcció de polígons regulars amb regla i compàs, i els nombres de Fermat: un polígon regular de n costats pot ser construït amb regla i compàs si n és, o bé una potència de 2 (2^n), o bé el producte d'una potència de 2 per nombres de Fermat diferents entre si ($2^n \cdot F_n$).
- Tot nombre compost de Fermat es pot descompondre en factors primers de la forma $k \cdot 2^{n+2} + 1$, sent k enter positiu.
- A partir de $n=2$, s'ha comprovat que tots els nombres amb la forma de nombres de Fermat acaben en 7.

3.5. TEOREMA VERS LA SUMA DE DOS QUADRATS PERFECTES

Una de les afirmacions més sorprenents de Fermat és la descomposició dels nombres primers en la suma de dos quadrats perfectes.

En primer lloc, està clar que si un número enter n es divideix entre 4, el residu és 0, 1, 2 ó 3. Ja que, els residus, després de tot, han de ser menors que els divisors.



Els matemàtics afirmen que qualsevol nombre enter pertany a una d'aquestes quatre categories:

- $n = 4k$ (el número és un múltiple exacte de 4)
- $n = 4k + 1$ (el número és una unitat major que un múltiple de 4)
- $n = 4k + 2$ (el número és dos unitats major que un múltiple de 4)

$n = 4k + 3$ (el número és tres unitats major que un múltiple de 4)

Els nombres amb la forma $4k$ i $4k + 2$ són parells, i, per tant, menys en el cas simple de 2, no són primers.

$$n=4k$$

$$n=4k+2$$

$$8 = 4(2), 12 = 4(3) \text{ i } 16 = 4(4).$$

$$10 = 4(2) + 2, 14 = 4(3) + 2 \text{ i } 18 = 4(4) + 2.$$

Si parlem ara dels nombres imparells afirmarem que qualsevol nombre imparell ha de pertànyer a $4k + 1$ o a $4k + 3$.

A la segona i quarta categoria es poden trobar nombres primers:

$$n = 4k + 1$$

$$n = 4k + 3$$

$$5 = 4(1) + 1, 29 = 4(7) + 1 \text{ i } 13 = 4(3) + 1.$$

$$7 = 4(1) + 3, 11 = 4(2) + 3 \text{ i } 43 = 4(10) + 3.$$

Convé recordar que són nombrosos els exemples d'ambdós tipus.

L'any 1640, Fermat va fer la següent observació: "Un número primer, que excedeix en 1, a un múltiple de 4, és solament una vegada la hipotenusa d'un triangle rectangle".

Aquesta era una manera geomètrica d'afirmar que els números primers de la primera categoria (els que tenen la forma $4k + 1$) podien descompondre's en la suma de dos quadrats perfectes i que aquesta descomposició només es podia aconseguir d'una sola manera.

Per altra banda, va observar que els nombres primers de la forma $4k + 3$ no es podien escriure com la suma de dos quadrats perfectes de cap manera. Des d'aquesta perspectiva, les dos categories de números primers imparells apareixen bastant diferents: una d'elles és "la suma de dos quadrats" i l'altra no.

Alguns exemples de la forma $4k + 1$:

- Per al nombre primer $13 = 4(3) + 1$, tenim la descomposició $13 = 4 + 9 = 2^2 + 3^2$.
- Per al nombre primer $37 = 4(9) + 1$, tenim la descomposició $37 = 1 + 36 = 1^2 + 6^2$
- Per al nombre primer $193 = 4(48) + 1$, tenim la descomposició $193 = 49 + 144 = 7^2 + 12^2$.

En contra, els nombres primers dels tipus $4k+3$ no es poden descompondre en la suma de dos quadrats perfectes:

- Per al nombre primer $19 = 4(4) + 3$
- Per al nombre primer $199 = 4(49) + 3$

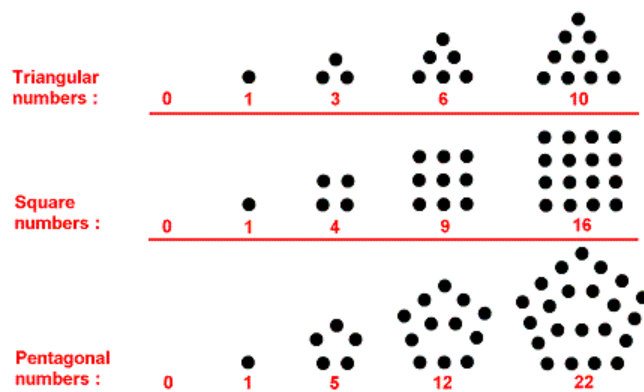
3.6.TEOREMA DEL NOMBRE POLIGONAL DE FERMAT

Per explicar el plantejament d'aquest teorema haurem de veure els nombres triangulars, quadrangulars i pentagonal.

Un **nombre triangular** és el nombre d'elements necessaris per crear un triangle equilàter.

Es poden trobar aplicant la següent fórmula:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$



Un **nombre quadrat** és un nombre que es pot expressar en forma de quadrat.

Es poden trobar aplicant la següent fórmula:

$$S_n = n^2$$

Un **nombre pentagonal** és un nombre figurat que estén el concepte de nombre triangular i quadrat al pentàgon. Es poden trobar aplicant la següent fórmula:

$$P_n = \frac{n(3n - 1)}{2}$$

Ara que ja coneixem una mica més sobre aquests nombres podem analitzar el teorema del nombre poligonal de Fermat.

El teorema del nombre poligonal de Fermat ens diu que cada nombre natural positiu és la suma de 1, 2 o 3 nombres triangulars; 1, 2,3 o 4 nombres quadrangulats o quadrats; 1, 2, 3, 4, o 5 nombres pentagonals i així successivament.

17, per exemple, pot ser escrit de la següent manera:

$$17 = 10 + 6 + 1 \text{ (nombres triangulars)}$$

$$17 = 16 + 1 \text{ (nombres quadrats o quadràtics)}$$

$$17 = 12 + 5 \text{ (nombres pentagonals)}$$

En 1638, Fermat va enunciar que tot enter positiu és la suma d'un màxim de tres nombres triangulars, quatre números quadrats, cinc números pentagonals, poligonals i números. Fermat va afirmar tenir una prova d'aquest resultat, encara que la prova de Fermat mai s'ha trobat.

Alguns exemples:

a) Amb nombres triangulars:

$$100 = 91 + 6 + 3 = T_{13} + T_3 + T_2$$

$$100 = 55 + 45 = T_{10} + T_9$$

Això demostra que algunes vegades un nombre té dos possibilitats, amb 2 o 3 termes.

b) Amb nombres quadrats:

$$50 = 49 + 1 = S_7 + S_1$$

$$50 = 25 + 25 = S_5 + S_5$$

$$50 = 25 + 16 + 9 = S_5 + S_4 + S_3$$

$$50 = 36 + 9 + 4 + 1 = S_6 + S_3 + S_2 + S_1$$

També hi ha expressions amb 2, 3 o 4 termes.

c) Amb nombres pentagonals:

$$2002 = 1001 + 1001 = P_{26} + P_{26}$$

$$2002 = 1520 + 477 + 5 = P_{32} + P_{18} + P_2$$

$$2002 = 1820 + 176 + 5 + 1 = P_{35} + P_{11} + P_2 + P_1$$

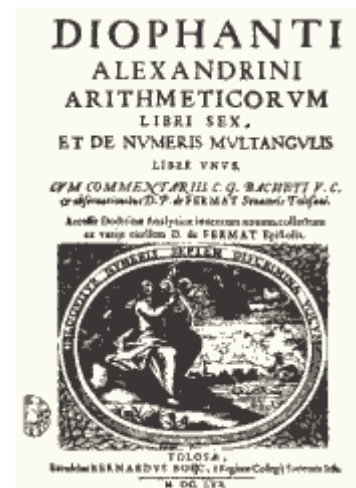
$$2002 = 1717 + 176 + 92 + 12 + 5 = P_{34} + P_{11} + P_8 + P_3 + P_2$$

Com en el cas anterior, s'ha demostrat que un nombre pentagonal es pot expressar com a suma de 2, 3, 4 o 5 termes.

3.7. DARRER TEOREMA DE FERMAT

A l'estudiar l'obra d'*Aritmètica* de Diofanto, molts dels aspectes d'aquesta obra el van fascinar, inclosos els nombres perfectes i amics, les ternes pitagòriques, els nombres primers i la divisibilitat.

Aquesta obra va ser comentada per Fermat amb nombroses notes al marge del mateix exemplar de l'obra de Diofanto que llegia i que després de la seva mort, el seu fill va recopilar i publicar en una edició de l'*Aritmètica*.



Una d'aquestes notes ha arribat a ser un dels famosos enuncisats de tota la història de les Matemàtiques. El cèlebre i darrer teorema de Fermat.

Fermat va deixar moltes proposicions sense demostrar, però mai es va comprovar que Fermat s'equivoqués. Els matemàtics han aconseguit demostrar gairebé totes les proposicions que va deixar sense demostrar. Només quedava pendent el teorema conegut com el *Darrer teorema de Fermat*, que estableix que per a $n > 2$ no és possible la següent afirmació:

$$X^n + Y^n = Z^n$$

L'enunciat d'aquest teorema va quedar anotat en un marge del seu exemplar de l'Aritmètica de Diofant d'Alexandria traduïda al Llatí per Bachet (matemàtic francès) publicat al 1621.



La nota de Fermat va ser descoberta pòstumament pel seu fill Climent Samuel, que al 1670 publicà aquest llibre amb les nombroses notes marginals de Fermat.

Concretament Fermat va escriure al marge de l'edició de L'Aritmètica de Bachet el següent text literal:

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratosquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere: cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

“És impossible que un cub sigui la suma de dos cubs, que una potència quarta sigui la suma de dues potències quarts i, en general, que qualsevol número que sigui una potència superior a dos sigui la suma de dues potències del mateix valor. He descobert una demostració veritablement meravellosa d'aquesta proposició, però aquest marge és massa estret perquè hi càpiga.

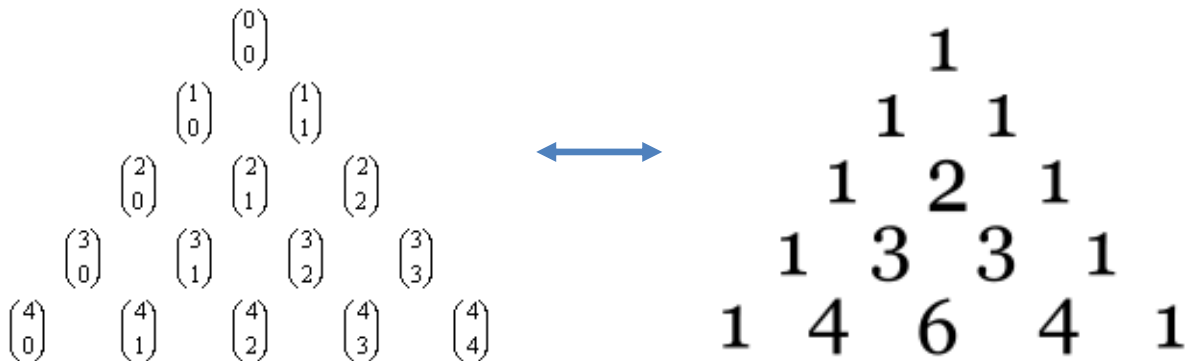
Aquest teorema ha estat de gran influència en el desenvolupament de la teoria dels nombres, ja que al intentar ser demostrat ha contribuït a la solució d'altres problemes irresoluts.

4. PROPOSICIÓ DE DEMOSTRACIÓ DEL DARRER TEOREMA DE FERMAT

*La matemàtica és la ciència de l'ordre i la mesura, de belles cadenes de
raonaments, tots senzills i fàcils.
René Descartes*

Abans de tot, observem com es relacionen els nombres combinatoris i el Triangle de Tartaglia.

Hi ha una relació entre els nombres combinatoris i el triangle de Tartaglia o de Pascal, ja que el resultat dels nombres combinatoris coincideix amb els nombres que formen el triangle. Com es pot observar a continuació:



El nombre de combinacions és igual al quocient entre el nombre de variacions i el nombre de permutacions, com es mostra a continuació:

$$C_m^n = \frac{V_m^n}{P_n} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-m+1)}{n!}$$

Així resulta:

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n-3} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots 6 \cdot 5 \cdot 4}{(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n}{1!} \qquad \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots 5 \cdot 4 \cdot 3}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2!}$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!} \qquad \binom{n}{n-1} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots 4 \cdot 3 \cdot 2}{(n-1)!} = \frac{n}{1!} = n$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \qquad \binom{n}{n} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$\underline{\underline{\text{SUMA} = 2^n}}$$

Els termes del desenvolupament del binomi de Newton són tots del mateix grau (potència n) anant a en disminució des de a^n fins a a^0 , mentre que b va augmentant des de b^0 fins a b^n . Quan el binomi és una diferència de dos nombres, el desenvolupament del binomi té els signes $+$ ó $-$ alternats i la suma dels coeficients positius és igual a la suma dels coeficients negatius, és a dir, la suma de cada grup de coeficients és la meitat de la suma total de coeficients i igual a 2^{n-1} .

Comencem...

Primerament, amb les equacions pitagòriques podem transformar l'equació de Fermat en funció de dos termes a i b . Adaptem les equacions que donen nombres pitagòrics a l'equació que proposa Fermat, aleshores obtenim:

$$\begin{array}{l|l} X = a^2 - b^2 & \text{L'equació de Fermat } X^n + Y^n = Z^n \text{ pren aquesta forma :} \\ Y = 2ab & (a^2 - b^2)^n + (2ab)^n = (a^2 + b^2)^n \\ Z = a^2 + b^2 & \end{array}$$

També pot escriure's així: $Z^n - X^n = Y^n$, és a dir:

$$(a^2 + b^2)^n - (a^2 - b^2)^n = (2ab)^n$$

Així el teorema de Fermat es pot enunciar de la forma següent, a la qual és equivalent:

“No existeix un parell de nombres enters a i b que facin que la diferència entre la potencia n de la seva suma de quadrats i la potencia n de la seva diferencia de quadrats, sigui igual a la potencia n del doble producte dels mateixos, per n enter positiu superior a 2”

A continuació desenvolupem els binomis Z^n i X^n , ens resulta:

$$Z^n = (a^2 + b^2)^n = \binom{n}{0} a^{2n} + \binom{n}{1} a^{2n-2} b^2 + \binom{n}{2} a^{2n-4} b^4 + \dots + \binom{n}{n-2} a^4 b^{2n-4} + \binom{n}{n-1} a^2 b^{2n-2} + \binom{n}{n} b^{2n}$$

$$X^n = (a^2 - b^2)^n = \binom{n}{0} a^{2n} - \binom{n}{1} a^{2n-2} b^2 + \binom{n}{2} a^{2n-4} b^4 - \dots - \binom{n}{n-2} a^4 b^{2n-4} + \binom{n}{n-1} a^2 b^{2n-2} - \binom{n}{n} b^{2n}$$

Els coeficients són els del desenvolupament del binomi de Newton, és a dir, els nombres combinatoris de n elements agafats m a m des de $m=0$ fins a $m=n$.

Fem la resta de les dos expressions que ens han resultat de desenvolupar Z^n i X^n :

$$Z^n - X^n = 2 \left[\binom{n}{1} a^{2n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{2n-6} b^6 + \binom{n}{5} a^{2n-10} b^{10} + \dots + \binom{n}{n-4} a^8 b^{2n-8} + \binom{n}{n-2} a^4 b^{2n-4} + \binom{n}{n} b^{2n} \right]$$

$$Z^n - X^n = 2 \left[\binom{n}{1} a^{2n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{2n-6} b^6 + \binom{n}{5} a^{2n-10} b^{10} + \dots + \binom{n}{n-5} a^{10} b^{2n-10} + \binom{n}{n-3} a^6 b^{2n-6} + \binom{n}{n-1} a^2 b^{2n-2} \right]$$

En aquesta resta s'obtenen dos formes segons si n sigui **senar** o **parell** i donat que el nombre total de termes del binomi de Newton és $n+1$, el nombre de termes de la primera (n **senar**) és $\frac{(n+1)}{2}$ i de la segona (n **parell**), és $\frac{n}{2}$.

A continuació, si desenvolupem Y^n , obtenim:

$$Y^n = (2ab)^n = 2^n a^n b^n = 2b^2 [2^{n-1} a^n b^{n-2}]$$

Establint la igualtat $Z^n - X^n - Y^n = 0$ i extraient factor comú de $2b^2$ obtenim les següents equacions per n **senar** o **parell**.

$$2b^2 \left[\binom{n}{1} a^{2n-2} + \binom{n}{3} a^{2n-6} b^4 + \binom{n}{5} a^{2n-10} b^8 + \dots - 2^{n-1} a^n b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-4} a^8 b^{2n-10} + \binom{n}{n-2} a^4 b^{2n-6} + \binom{n}{n} b^{2n-2} \right] = 0$$

$$2b^2 \left[\binom{n}{1} a^{2n-2} + \binom{n}{3} a^{2n-6} b^4 + \binom{n}{5} a^{2n-10} b^8 + \dots - 2^{n-1} a^n b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-5} a^{10} b^{2n-12} + \binom{n}{n-3} a^6 b^{2n-8} + \binom{n}{n-1} a^2 b^{2n-4} \right] = 0$$

D'aquí obtenim dos resultats de b , com es mostra a continuació:

$$2b^2=0 \quad b=\pm 0$$

Obtenim que $b=0$ dos vegades a causa de l'arrel quadrada.

Després d'obtenir aquest resultat ens falta resoldre la següent equació que ens ha restat d'extreure factor comú:

$$\left[\binom{n}{1} a^{2n-2} + \binom{n}{3} a^{2n-6} b^4 + \binom{n}{5} a^{2n-10} b^8 + \dots - 2^{n-1} a^n b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-4} a^8 b^{2n-10} + \binom{n}{n-2} a^4 b^{2n-6} + \binom{n}{n} b^{2n-2} \right] = 0$$

$$\left[\binom{n}{1} a^{2n-2} + \binom{n}{3} a^{2n-6} b^4 + \binom{n}{5} a^{2n-10} b^8 + \dots - 2^{n-1} a^n b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-5} a^{10} b^{2n-12} + \binom{n}{n-3} a^6 b^{2n-8} + \binom{n}{n-1} a^2 b^{2n-4} \right] = 0$$

La primera equació es la forma que pren per n **senar**.

La segona equació es la forma que pren per n **parell**.

Per obtenir resultats a l'equació que ens resta d'extreure factor comú, ho fem mitjançant la regla de Ruffini. El quocient de la primera divisió és un polinomi de grau inferior en una unitat respecte a a , és a dir, de grau $2n - 3$. Els coeficients d'aquest quocient també sumen zero donada la simetria i formació dels mateixos i per tant s'anul·la per $a = b$ (com es mostra a continuació).

Dividint una altra vegada per $a = b$, el segon quocient és un polinomi de grau inferior en una unitat respecte a a , és a dir, de grau $2n - 4$.

Finalment queda una equació residual de grau $2n-4$ amb els termes tots positius i per tant no hi ha cap valor de a i b que la faci nul·la. Excepte $n=2$ per ser una identitat.

La divisió per la regla de Ruffini és la que es mostra a continuació:

b)	$\binom{n}{1}$ 0 0 0 $\binom{n}{3} b^4 \dots$ $-2^{n-1} b^{n-2} \dots$ $\binom{n}{n-2} b^{2n-6}$ 0 0 0 $\binom{n}{n} b^{2n-2}$
	$\binom{n}{1} b$ $\binom{n}{1} b^2$ $\binom{n}{1} b^3$ $\binom{n}{1} b^4 \dots$ $Mb^{n-2} \dots$ $- \left[1 + \binom{n}{n-2} \right] b^{2n-6}$ $-b^{2n-5}$ $-b^{2n-4}$ $-b^{2n-3}$ $-\binom{n}{n} b^{2n-2}$
	$\binom{n}{1}$ $\binom{n}{1} b$ $\binom{n}{1} b^2$ $\binom{n}{1} b^3$ $\left[\binom{n}{3} + \binom{n}{1} \right] b^4 \dots$ $-Mb^{n-2} \dots$ $-b^{2n-6}$ $-b^{2n-5}$ $-b^{2n-4}$ $-b^{2n-3}$ 0
b)	$\binom{n}{1} b$ $2\binom{n}{1} b^2$ $3\binom{n}{1} b^3$ $4\binom{n}{1} b^4 \dots$ $Pb^{n-2} \dots$ $4b^{2n-6}$ $3b^{2n-5}$ $2b^{2n-4}$ b^{2n-3}
	$\binom{n}{1}$ $2\binom{n}{1} b$ $3\binom{n}{1} b^2$ $4\binom{n}{1} b^3$ $\left[\binom{n}{3} + 5\binom{n}{1} \right] b^4$ $Qb^{n-2} \dots$ $3b^{2n-6}$ $2b^{2n-5}$ b^{2n-4} 0

Com ja hem dit abans, d'aquí confirmem un resultat que és $a=b$. Aquest resultat ens ha sortit dues vegades, ja que hem aplicat la regla de Ruffini dues vegades dividint les dues vegades per b (com ja hem explicat anteriorment).

L'única solució possible als dos casos és b ja que les arrels que busquem han de ser divisors de l'últim terme de cada equació, en el primer cas $\binom{n}{n}b^{2n-2}$ i en el segon cas $-b^{2n-2}$.

En resum, les úniques solucions possibles són $b=0$ (dos vegades) i $a=b$ (dos vegades), que són els factors comuns pels quals hem dividit l'equació primitiva. El valor de $a=0$ que apareix només quan n és parell, cal rebutjar-lo perquè ha de ser $a>0$ i també $a>b$ perquè X sigui positiu.

Per $b = 0$ resulta : $X = a^2$, $Y = 0$, $Z = a^2$

Per $a = b$ resulta : $X = 0$, $Y = 2a^2$, $Z = 2a^2$

Aquests valors tampoc són vàlids perquè no pot haver valors iguals o nuls d'aquestes incògnites, ja que X , Y , Z , han de ser nombres naturals (enters i majors que zero).

En conclusió podem dir que:

“No existeix cap parell de nombres enters a i b no iguals i majors que zero, que satisfacin l'equació $(a^2 + b^2)^n - (a^2 - b^2)^n = (2ab)^n$, per $n > 2$ ”.

I sent: $(a^2 + b^2)^n = Z^n$ $(a^2 - b^2)^n = X^n$ $(2ab)^n = Y^n$

Aquesta equació pren la forma $Z^n - X^n = Y^n$, o el que és igual $X^n + Y^n = Z^n$, que és l'equació de Fermat. El que equival a dir:

“No existeixen tres nombres X , Y , Z enters positius que satisfacin l'equació $X^n + Y^n = Z^n$ per $n > 2$ ”, que és L. Q. Q. D (el que volíem demostrar).

Evidentment, per $n=2$, es compleix aquesta equació $X^2 + Y^2 = Z^2$, que és la de Pitàgores.

Desenvolupant els termes X , Y i Z elevats a $n=2$, obtenim:

$$X^2 = (a^2 - b^2)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$$

$$Y^2 = 4a^2b^2$$

$$Z^2 = (a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$$

Si restem Z^2 i X^2 obtenim:

$$Z^2 - X^2 = 4a^2b^2$$

Com que $Y^2 = 4a^2b^2$, substituint en l'equació $Z^2 - X^2 = Y^2$ queda: $4a^2b^2 = 4a^2b^2$, que és una identitat, la qual es compleix sempre per infinits valors de a i b , que són els que donen els nombres pitagòrics.

Però tornant a la divisió per la Regla de Ruffini, cal preguntar-se per què l'equació de grau $2n - 2$ és divisible per $a=b$ dues vegades. La primera vegada no ofereix cap dubte ja que, segons hem vist abans, la suma dels coeficients numèrics positius procedents del desenvolupament del binomi de Newton (assenyalats en negreta al Triangle de Tartaglia) sumen 2^{n-1} que és la meitat del total, el mateix que el coeficient de l'únic terme negatiu que prové del segon membre, i en fer $a=b$ com tots els termes són del mateix grau l'equació s'anul·la. Això passa en qualsevol de les dues formes, sigui n senar o parell.

El quocient té tots els termes, situats a la dreta del que fins ara era l'únic negatiu, també negatius, ja que aquest els ha canviat el signe en fer la divisió, ja que el seu valor absolut era evidentment més gran que la suma dels situats a la seva esquerra per ser igual a la suma de tots. Aquests termes negatius situats a la dreta van disminuint en valor absolut fins arribar a zero que és la resta de la divisió. El quocient té un terme menys que el dividend i és de grau inferior en una unitat, és a dir de grau $2n - 3$.

Anem a demostrar que la suma de tots els coeficients numèrics d'aquest primer quocient és també igual a zero i per tant és divisible per $a=b$.

Tornem a l'equació de partida de grau $2n - 2$ i fem la divisió per la Regla de Ruffini, terme a terme per separat i amb independència dels altres. D'aquesta manera el coeficient numèric del dividend és únic i com tots els altres són zeros, es repetirà en el quocient tantes vegades com termes tingui darrere seu, que són els que indica l'exponent de a .

Així, el primer terme $\binom{n}{1}a^{2n-2}$ repeteix en el quocient el seu coeficient numèric

$2n - 2$ vegades, resulten la suma de tots ells igual a $\binom{n}{1} \cdot (2n - 2)$.

El segon terme $\binom{n}{3}a^{2n-6}b^4$ repeteix el seu coeficient numèric $2n - 6$ vegades i la

suma de tots ells és igual a $\binom{n}{3} \cdot (2n - 6)$, i així successivament.

El terme negatiu $2^{n-1}a^nb^{n-2}$ repeteix en el quocient el seu coeficient numèric n vegades i per tant la suma de tots és $2^{n-1}n$.

En resum, la suma dels coeficients numèrics del quocient de cada terme individualment és la que s'expressa a continuació:

Per n senar:

$$\binom{n}{1}a^{2n-2} + \binom{n}{3}a^{2n-6}b^4 + \binom{n}{5}a^{2n-10}b^8 + \dots - 2^{n-1}a^nb^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-4}a^8b^{2n-10} + \binom{n}{n-2}a^4b^{2n-6} + \binom{n}{n}b^{2n-2}$$

$$\frac{n}{1!}(2n-2) = \frac{2n}{1!}(n-1)$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(2n-6) = \frac{2n(n-1)(n-2)}{3!}(n-3)$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}(2n-10) = \frac{2n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}(n-5)$$

--

$$-2^{n-1} \cdot n = -2n \cdot 2^{n-2}$$

--

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \times 8 = \frac{2n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \times 4 \quad \text{Recordem que } \binom{n}{n-4} = \binom{n}{4}$$

$$\frac{n(n-1)}{2!} \times 4 = \frac{2n(n-1)}{2!} \times 2 \quad \text{per les condicions } \binom{n}{n-2} = \binom{n}{2}$$

$$\binom{n}{n} \times 0 = 1 \times 0 = 0 \quad \text{de simetria : } \binom{n}{n} = \binom{n}{0}$$

Per n parell:

$$\binom{n}{1} a^{2n-2} + \binom{n}{3} a^{2n-6} b^4 + \binom{n}{5} a^{2n-10} b^8 + \dots - 2^{n-1} a^n b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-5} a^{10} b^{2n-12} + \binom{n}{n-3} a^6 b^{2n-8} + \binom{n}{n-1} a^2 b^{2n-4}$$

Els primers coeficients són iguals als de la n senar i els últims són:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} \times 10 = \frac{2n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} \times 5 \quad \binom{n}{n-5} = \binom{n}{5}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \times 6 = \frac{2n(n-1)(n-2)}{3!} \times 3 \quad \text{Per les condicions } \binom{n}{n-3} = \binom{n}{3}$$

$$\frac{n}{1!} \times 2 = \frac{2n}{1!} \times 1 \quad \text{de simetria : } \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1}$$

Com tots aquests grups de coeficients tenen el factor comú $2n$, en escriure la igualtat, passant el terme negatiu al segon membre, i dividint pel factor comú $2n$, resulta:

Per n senar:

$$\frac{(n-1)}{1!} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{5!} + \dots + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} + \frac{(n-1)}{1!} = 2^{n-2}$$

Per n parell:

$$\frac{(n-1)}{1!} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{5!} + \dots + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4!} + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} + 1 = 2^{n-2}$$

Però aquests coeficients són els nombres combinatoris de $n - 1$ elements, de manera que podem expressar d'aquesta manera:

$$\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{5} + \dots + \binom{n-1}{5} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{1} = 2^{n-2} \quad (\text{Per } n \text{ senar})$$

$$\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{5} + \dots + \binom{n-1}{4} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{0} = 2^{n-2} \quad (\text{Per } n \text{ parell})$$

I com per n senar, $n - 1$ és parell, aquests coeficients són ara els que ocupen el lloc parell de la filera immediata superior i el nombre de termes és $\frac{n-1}{2}$.

Anàlogament, per n parell, $n - 1$ és senar, i aquests coeficients són els que ocupen el lloc parell de la fila superior (en negreta al Triangle de Tartaglia), sent el nombre de termes igual a $\frac{n}{2}$.

Aquests coeficients numèrics són els que ocupen el lloc parell en el desenvolupament del binomi de Newton (en negreta al Triangle de Tartaglia) amb exponent $n - 1$, i la seva suma és la meitat del total com hem vist al principi, és a dir, la meitat de 2^{n-1} , que és 2^{n-2} i igual al coeficient del segon membre.

Queda per tant demostrat que la suma dels coeficients numèrics del primer quocient de la divisió per $a=b$ és igual a zero. Això és:

$$\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{5} + \dots - 2^{n-2} + \dots + \binom{n-1}{5} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{1} = 0 \quad \text{Per } n \text{ senar}$$

$$\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{5} + \dots - 2^{n-2} + \dots + \binom{n-1}{4} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{0} = 0 \quad \text{Per } n \text{ parell}$$

Convé assenyalar que aquests coeficients no són exactament els del quocient que resulta de dividir el polinomi complet per $(a=b)$, sinó que cada un d'ells és la suma dels del quocient de cada terme individualitzat que es repeteixen i que a més estan dividits per $2n$.

Però el que ens importa és que (factors comuns a part) la suma de tots ells és igual a zero, de manera que aquest quocient és zero per a $a=b$ per ser tots del mateix grau (igual a $2n - 3$).

A la divisió del polinomi de grau $2n - 2$ per $(a=b)$ dues vegades que hem exposat en forma general, vèiem que els termes del primer quocient situats a l'esquerra eren tots positius i els situats a la dreta eren tots negatius, i la seva suma total acabem de demostrar que és igual a zero.

En dividir novament aquest quocient per $(a=b)$ tots els termes del segon quocient són positius perquè els coeficients numèrics del costat esquerre que són positius van augmentant el seu valor fins arribar a un màxim i en anar sumant amb els termes negatius del costat dret va disminuint el seu valor fins a zero, com ha de ser, ja que si la divisió ha de ser exacta com hem demostrat, la resta ha de resultar zero.

Aquest segon quocient és de grau $2n - 4$, però no cal oblidar que hem dividit l'equació primitiva de grau $2n$ per $2b^2$ i per $(a=b)^2$.

Després de dividir l'equació per $(a=b)^2$, queda una equació residual que té tots els seus termes positius i que mai es podrà anul·lar per cap valor sencer de a i b .

Aquesta equació final és a la qual s'arriba després de desenvolupar i simplificar l'equació de partida:

$$(a^2 + b^2)^n - (a^2 - b^2)^n - (2ab)^n = 0 \quad \text{o el seu equivalent:} \quad Z^n - X^n - Y^n = 0$$

que és l'equació de Fermat, presentada habitualment : $X^n + Y^n = Z^n$

La clau del problema està en eliminar el terme negatiu $2^{n-1} a^n b^{n-2}$ que és l'únic que fa possible que l'equació s'anul·li.

En conclusió, l'equació residual que ens resulta després d'aplicar la regla de Ruffini ens permet afirmar que no hi ha cap parell de nombres reals a i b que la facin nul·la, és a dir:

"No hi ha cap parell de nombres enters no iguals i diferents de zero que satisfacin l'equació, sent l'exponent n un nombre superior a 2".

Aquest enunciat és equivalent al del Teorema de Fermat que diu:

"No hi ha tres nombres enters diferents de zero X , Y , Z que satisfacin l'equació, sent n un nombre major que 2".

EXAMPLES:

A continuació mostro alguns exemples:

Quan n és senar, l'equació general, una vegada ja hem extret factor comú, és de la forma:

$$\binom{n}{1}a^{2n-2} + \binom{n}{3}a^{2n-6}b^4 + \binom{n}{5}a^{2n-10}b^8 + \dots - 2^{n-1}a^n b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-4}a^8 b^{2n-10} + \binom{n}{n-2}a^4 b^{2n-6} + \binom{n}{n}b^{2n-2} = 0$$

Per $n=3$

$$3a^4 - 4a^3b + b^4 = 0$$

Fent la divisió per la regla de Ruffini obtenim:

	3	$-4b$	0	0	b^4	(grau 4)
B		$3b$	$-b^2$	$-b^3$	$-b^4$	
	3	$-b$	$-b^2$	$-b^3$	0	(grau 3)
B		$3b$	$2b^2$	b^3		
	3	$2b$	b^2	0		(grau 2)

Equació residual: $3a^2 + 2ab + b^2 = 0$

Per $n=5$

$$5a^8 - 16a^5b^3 + 10a^4b^4 + b^8 = 0$$

Fent la divisió per la regla de Ruffini obtenim:

	5	0	0	$-16b^3$	$10b^4$	0	0	0	b^8	(grau 8)
b		$5b$	$5b^2$	$5b^3$	$-11b^4$	$-b^5$	$-b^6$	$-b^7$	$-b^8$	
	5	$5b$	$5b^2$	$-11b^3$	$-b^4$	$-b^5$	$-b^6$	$-b^7$	0	(grau 7)
b		$5b$	$10b^2$	$15b^3$	$4b^4$	$3b^5$	$2b^6$	b^7		
	5	$10b$	$15b^2$	$4b^3$	$3b^4$	$2b^5$	b^6	0		(grau 6)

Equació residual: $5a^6 + 10a^5b + 15a^4b^2 + 4a^3b^3 + 3a^2b^4 + 2ab^5 + b^6 = 0$

Quan n és parell, l'equació general, una vegada ja hem extret factor comú, és de la forma:

$$\binom{n}{1}a^{2n-2} + \binom{n}{3}a^{2n-6}b^4 + \binom{n}{5}a^{2n-10}b^8 + \dots - 2^{n-1}a^nb^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-5}a^{10}b^{2n-12} + \binom{n}{n-3}a^6b^{2n-8} + \binom{n}{n-1}a^2b^{2n-4} = 0$$

Per $n=4$

$$4a^6 - 8a^4b^2 + 4a^2b^4 = 0$$

I extraient factor comú de $4a^2$:

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = 0$$

Fent la divisió per la regla de Ruffini obtenim:

	1	0	$-2b^2$	0	b^4	(grau 4)
B		b	b^2	$-b^3$	$-b^4$	
B	1	b	$-b^2$	$-b^3$	0	(grau 3)
		b	$2b^2$	b^3		
	1	$2b$	b^2	0		(grau 2)

Equació residual: $a^2 + 2ab + b^2 = 0$

Per $n=6$

$$6a^{10} + 20a^6b^4 - 32a^6b^4 + 6a^2b^8 = 0$$

$$6a^{10} - 12a^6b^4 + 6a^2b^8 = 0$$

I extraient factor comú de $6a^2$:

$$a^8 - 2a^4b^4 + b^8 = 0$$

Fent la divisió per la regla de Ruffini obtenim:

	1	0	0	0	$-2b^4$	0	0	0	b^8	(grau 8)
b		b	b^2	b^3	b^4	$-b^5$	$-b^6$	$-b^7$	$-b^8$	
b	1	b	b^2	b^3	$-b^4$	$-b^5$	$-b^6$	$-b^7$	0	(grau 7)
		b	$2b^2$	$3b^3$	$4b^4$	$3b^5$	$2b^6$	b^7		
	1	$2b$	$3b^2$	$4b^3$	$3b^4$	$2b^5$	b^6	0		(grau 6)

Equació residual : $a^6 + 2a^5b + 3a^4b^2 + 4a^3b^3 + 3a^2b^4 + 2ab^5 + b^6 = 0$



5.RECONEIXEMENTS I ANÈCDOTES

El que sabem és una gota d'aigua, el que ignorem és l'oceà.

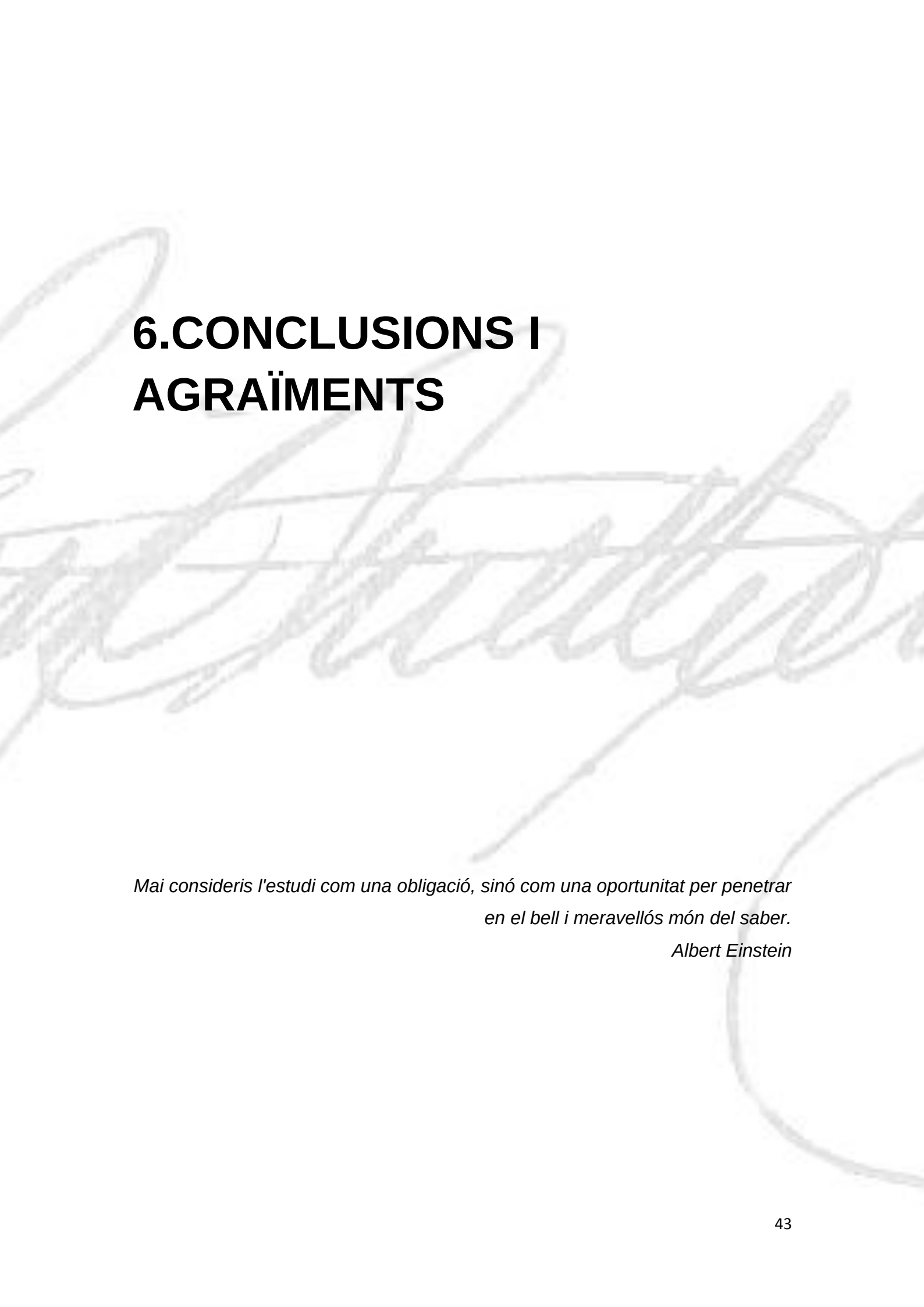
Isaac Newton



- ϕ Existeix un premi matemàtic anomenat Fermat creat al 1989. Es concedeix un cop cada dos anys a Tolosa per l'Institut de Matemàtiques. L'import del Premi Fermat es va fixar en 20.000 euros per a la desena edició a l'any 2007.
El Premi Fermat d'investigació matemàtica premia treballs de recerca en àmbits en els quals les contribucions de Pierre de Fermat han estat decisives.
- ϕ Google el 17 d'agost del 2011 va homenatjar a Pierre de Fermat amb motiu del 410 aniversari del seu naixement.
- ϕ La mansió del segle XV on va néixer Pierre de Fermat és a l'actualitat un museu i alberga l'Oficina de turisme de Tolosa.
- ϕ L'escola més antiga i prestigiosa de Tolosa es diu *Lycée Pierre de Fermat* en el seu honor, i en ella es donen classes d'enginyeria i comerç. Està considerada entre les deu millors de França per els seus excel·lents resultats en el Batxillerat i l'accés a grans escoles.
- ϕ Fermat és un dels pocs matemàtics que compten amb un asteroide amb el seu nom, el nombre de l'asteroide és 12.007. Curiosament aquest nombre és un nombre primer.
- ϕ També s'ha anomenat un cràter lunar de 39 km de diàmetre amb el nom de Pierre de Fermat.
- ϕ Fermat va arribar a ser membre de l'elit social, la qual li va autoritzar a incorporar la partícula "*de*" (Pierre *de* Fermat) com a part del seu nom.
- ϕ Tolosa és la ciutat de Fermat. Allà té dedicat a la seva persona: un carrer, un institut i un monument. Aquest monument es troba a la sala dels il·lustres al Capitoli de Tolosa És una obra esculpida en marbre de l'escultor Théophile Barrau i que porta per títol *Homenatge a Fermat* (Homenatge a Fermat).

A la inscripció es llegeix: "Fermat inventor del càlcul diferencial".

- φ Pierre de Fermat està considerat el fundador de la moderna teoria dels nombres, branca de les matemàtiques que estudia una propietat dels nombres. Fermat no era un matemàtic professional, sinó un jurista. La seva participació a les matemàtiques la va extreure del seu temps lliure i la va realitzar casi per complet a través de cartes amb altres estudiosos i matemàtics. Fermat acostumava a treballar en soledat.
- φ Fermat durant uns anys va mantenir correspondència amb altres matemàtics per a desenvolupar encara més el seu coneixement sobre les matemàtiques, ja que comparava i explicava les conclusions que ell havia deduït o teoremes que havia estudiat. També mantenia alguna enemistat notòria amb alguns matemàtics, com Descartes.
- φ Fermat i Mersenne considerats bons amics mantenien una correspondència fluida vers les matemàtiques. En una d'aquelles cartes Mersenne li va preguntar a Fermat si el nombre 100895598169 era primer o no. Anys després, Fermat el va sorprendre responent a la seva pregunta concretant que aquell nombre era el producte de 112303 i 898433 i que tots dos eren nombres primers. Avui dia no se sap com ho va poder fer.
- φ Com a reconeixement a Pierre de Fermat l'enunciat del seu últim teorema i la seva fotografia, han estat imatge de segells.
- φ Cinc anys abans de morir, es va anunciar erròniament la seva mort a causa d'una epidèmia de pesta.
- φ S'ha rodat una pel·lícula espanyola al 2007 amb el títol *L'habitació de Fermat*. Tracta d'una història d'intriga en la qual quatre matemàtics de renom són citats sota els pseudònims de grans matemàtics històrics a una reunió en la qual se'ls proposarà una enginyosa prova de la seva intel·ligència.



6.CONCLUSIONS I AGRAÏMENTS

*Mai consideris l'estudi com una obligació, sinó com una oportunitat per penetrar
en el bell i meravellós món del saber.*

Albert Einstein

L'època a què fa referència aquest treball, primera meitat del segle XVII té molts punts de contacte amb l'actual. Acabava llavors el Renaixement, com acaba avui l'Edat Moderna. En els dies que va viure Fermat, protagonista d'aquest assaig, com en els dies que vivim avui, s'enfonsava ràpidament un estat d'elements i no s'havia fonamentat encara un de nou.

Com avui, el món estava incòmode.

L'ànsia de saber i la gana de curiositat que va caracteritzar el Renaixement, es va perllongar fins al segle XVII, segle dels grans matemàtics, de la qual la primera meitat il·lustren especialment els noms de Fermat i de Descartes.

Fermat ha passat a la història com “ el Príncep dels amateurs”, encara que és cert que les matemàtiques per a Fermat van ser solament una afició.

Com hem vist, contribucions seves en les matemàtiques es poden trobar en diversos camps com l'Estadística i l'Anàlisi, però va ser la Teoria de Nombres la branca que més el va captivar.

Pel que fa al tema personal aquest treball m'ha suposat, com ja havia previst, adquirir nous coneixements i nocions, especialment en la proposició de la demostració de l'últim Teorema de Fermat, com per exemple el desenvolupament del Binomi de Newton.

Per poder plasmar tot això en paper he hagut d'aprendre aplicacions del tractament de text i full de càlcul que no coneixia o la transcripció d'algunes fórmules tant extenses com les del Teorema de Fermat, que no han estat fàcils.

La conclusió d'aquest treball em reafirma en que la decisió d'escollir Pierre de Fermat en lloc del nombre auri (que era l'altra opció que contemplava com a objecte del meu treball de recerca) ha estat encertada.

He de reconèixer que després de l'elecció del tema i l'objectiu del treball, hi va haver un moment en que la dificultat que suposava tota la voràgine matemàtica que se'm presentava, em va fer sentir que potser superaria les meves forces, però la confiança i l'ajuda que m'ha prestat en tot moment en Sebastià Sastriques, tutor del treball, m'ha encoratjat a seguir treballant.

En definitiva, em sento satisfeta pel treball realitzat, l'esforç ha valgut la pena; crec que finalment he assolit els objectius que m'havia proposat des d'un principi.

És difícil expressar en poques paraules els sentiments i les experiències recollides durant aquest temps. Al redactar aquestes línies tinc la sensació que acaba una important etapa de la meva vida i que en comença una de nova i ben diferent.

Per acabar, m'agradaria donar les gràcies a diverses persones que han estat amb mi en els moments difícils durant la realització d'aquest treball.

Primer, als meus pares per estar allà en tots els moments en els que els he necessitat.

Al meu avi, per tots els coneixements que m'ha cedit.

I per acabar, al meu tutor, Sebastià Sastriques, que amb una miqueta d'humor, m'ha ensenyat a seguir i a continuar amb el treball.

Gràcies per tot.

7.BIBLIOGRAFIA

*Si la vida fos una equació matemàtica ens faltarien lletres a l'abecedari per
a representar les incògnites.*

Georges-Louis Leclerc

7.1.LLIBRES CONSULTATS:

-IAN STEWART, *Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años.*, traducción de Javier García Sanz. Barcelona 2008; Ed. Crítica, S.L. ISBN:978-84-8432-369-3

-JOSEP M. GUITERAS, ÀNGELA JANÉ, JORDI BESORA, *Matemàtiques Batxillerat 2*. Aravaca (Madrid) 2009; Ed. Mc Graw Hill. ISBN: 978-84-481-7025-7

- JOSEP M. GUITERAS, ÀNGELA JANÉ, JORDI BESORA, *Matemàtiques Batxillerat 1*. Aravaca (Madrid) 2008; Ed. Mc Graw Hill. ISBN: 978-84-481-67774-5

- JUAN ARGÜELLES RODRÍGUEZ, *Historia de la matemàtica*. Madrid 1989; Ed. Akal, S.A. ISBN: 84-7600-446-X

- LAMBERTO GARCÍA DEL CID, *La sonrisa de pitágoras*. Barcelona, septiembre de 2006; Ed. Random House Mondadori, S.A. ISBN: 978-84-8306-675-1

-TONY CRILLY, *50 Cosas que hay que saber sobre las matemáticas*. Barcelona junio de 2009; Ed. Ariel, S.A. ISBN: 978-84-344-8813-7

- WILLIAM DUNHAM, *El universo de las matemáticas*, traducción de Jacobo Cárdenas. Madrid 2006; Ed. Pirámide (grupo anaya, S.A.). ISBN: 84- 368-2020-7

JOAN MERCADÉ, SALVADOR SERRA, MOTSERRAT ARMENGOL, *Física Batxillerat 2*. Aravaca (Madrid) 2009; Ed. Mc Graw Hill. ISBN: 978-84-481-7002-8

7.2.PÀGINES WEB CONSULTADES

FERMAT:

<http://www.ugr.es/~eaznar/fermat.htm>

17 maig 2012

<http://centros5.pntic.mec.es/ies.salvador.dali1/primeroa/fermat/ultimo.htm>

19 maig 2012

ESPIRAL DE FERMAT

<http://www.divulgamat2.ehu.es>

20 agost 2012

<http://www.ecured.cu>

22 agost 2012

NOMBRES AMICS

<http://www.divulgamat2.ehu.es>

20 agost 2012

<http://www.xtec.cat/~rcapsada/matgrega/nombresperfectesiamics.htm>

20 agost 2012

NOMBRES PERFECTES

<http://www.xtec.cat/~rcapsada/matgrega/nombresperfectesiamics.htm>

30 agost 2012

<http://ampliaciomaticas2esogarbi.blogspot.com.es/2010/02/nombres-perfectes-i-nombres-amics.html>

30 agost 2012

NOMBRES DE FERMAT

<http://fermat.e-dico.fr/>

12 setembre 2012

TEOREMA DEL NOMBRE POLIGONAL DE FERMAT

<http://www.divulgamat2.ehu.es>

10 setembre 2012

ANDREW WILES

http://www.ecured.cu/index.php/Andrew_Wiles

15 setembre 2012

ANÈCDOTES:

<http://www.lv7.com.ar/2011081753511/secciones/tecnologia/las-10-curiosidades-sobre-pierre-de-fermat.htm>

15 setembre 2012

NOMBRES PITAGÒRICS:

<http://www.librosmaravillosos.com>

15 agost 2012

<http://www.gaussianos.com>

20 agost 201